1 Поля гребенчатой замедляющей структуры

Рассмотрим структуру представленную на рисунке 1.

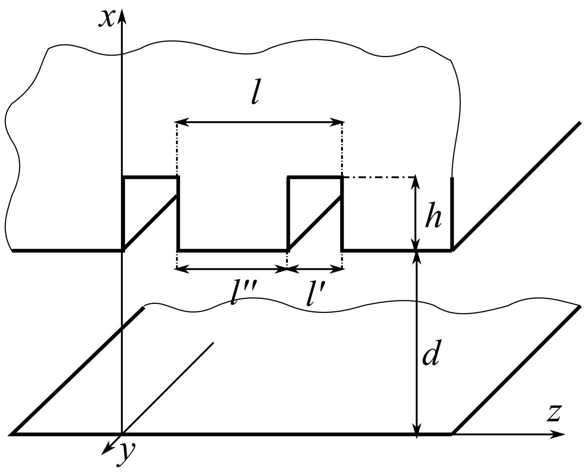

Рис. 1: Гребенчатая замедляющая структура

Уравнения Максвелла в отсутствии зарядов внутри системы:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0,\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0,\\
&\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},\\
&\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Граничные условия для системы имеют вид:

$$E_{\text{кас}}\Big|_{\text{на поверхности структуры}} = 0.$$

Разбиваем систему на две области. Первая область – пространство взаимодействия $0 < z < d$ (далее e), вторая область – область резонаторов $d < z < d+h$ (далее r). Ищем только поля, меняющиеся по гармоническому закону:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^{(r)} &= \boldsymbol{E}^{(r)}(x,z)e^{i\omega t}\\
\boldsymbol{B}^{(r)} &= \boldsymbol{B}^{(r)}(x,z)e^{i\omega t}\\
\boldsymbol{E}^{(e)} &= \boldsymbol{E}^{(e)}(x,z)e^{i\omega t}\\
\boldsymbol{B}^{(e)} &= \boldsymbol{B}^{(e)}(x,z)e^{i\omega t}
\end{aligned}$$

Так как система однородна в направлении оси y, зависимости от y нет. Решение на первом периоде системы:

$$\boldsymbol{E}^{(e)}(x,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}_n^{(e)}(x) e^{2\pi nzi/l}$$

$$\boldsymbol{B}^{(e)}(x,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{B}_n^{(e)}(x) e^{2\pi nzi/l}$$

Далее $\beta_n = 2\pi n/l$. Подставляем решения в таком виде в уравнения Максвелла и интегрируем от 0 до l по z. Получаем:

$$\frac{dE_{nx}^{(e)}}{dx} + i\beta_n E_{nz}^{(e)} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{dB_{nx}^{(e)}}{dx} + i\beta_n B_{nz}^{(e)} = 0 \tag{2}$$

$$-i\beta_n E_{ny}^{(e)} = -i\omega B_{nx}^{(e)} \tag{3}$$

$$i\beta_n E_{nx}^{(e)} - \frac{dE_{nz}^{(e)}}{dx} = -i\omega B_{ny}^{(e)} \tag{4}$$

$$\frac{dE_{ny}^{(e)}}{dx} = -i\omega B_{nz}^{(e)} \tag{5}$$

$$-i\beta_n B_{ny}^{(e)} = i\frac{1}{c^2}\omega E_{nx}^{(e)} \tag{6}$$

$$i\beta_n B_{nx}^{(e)} - \frac{dB_{nz}^{(e)}}{dx} = i\frac{1}{c^2}\omega E_{ny}^{(e)} \tag{7}$$

$$\frac{dB_{ny}^{(e)}}{dx} = i\frac{1}{c^2}\omega E_{nz}^{(e)} \tag{8}$$

(5) и (8) вместе с (3) и (6) эквивалентны (1) и (2). Остальные уравнения приводят к системе:

$$\frac{d^2 B_{nx}^{(e)}}{dx^2} - \left(\beta_n^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) B_{nx}^{(e)} = 0$$

$$\frac{d^2 E_{nx}^{(e)}}{dx^2} - \left(\beta_n^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_{nx}^{(e)} = 0$$

Отсюда следует, если ввести обозначение $\gamma_n^2 = \beta_n^2 - \omega^2/c^2$:

$$B_{nx}^{(e)} = a_{11}^{(e)} \operatorname{sh} \gamma_n x + a_{12}^{(e)} \operatorname{ch} \gamma_n x$$

$$E_{nx}^{(e)} = a_{21}^{(e)} \operatorname{sh} \gamma_n x + a_{22}^{(e)} \operatorname{ch} \gamma_n x$$

Учёт граничных условий:

$$E_{ny}\Big|_{x=0} = 0$$

$$E_{nz}\Big|_{x=0} = 0$$

Они сводятся к условиям:

$$B_{nx}\Big|_{x=0} = 0$$

$$\frac{dE_{nx}}{dx}\Big|_{x=0} = 0$$

Откуда:

$$B_{nx}^{(e)} = a_{11}^{(e)}\mathrm{sh}\,\gamma_n x = C_n \mathrm{sh}\,\gamma_n x$$

$$E_{nx}^{(e)} = a_{22}^{(e)}\mathrm{ch}\,\gamma_n x = D_n \mathrm{ch}\,\gamma_n x$$

Выпишем полностью поля:

$$E_x^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \mathrm{ch}\,(\gamma_n x) e^{i\beta_n z}$$

$$E_y^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\beta_n} C_n \mathrm{sh}\,(\gamma_n x) e^{i\beta_n z}$$

$$E_z^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\frac{\gamma_n}{\beta_n} D_n \mathrm{sh}\,(\gamma_n x) e^{i\beta_n z}$$

$$B_x^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathrm{sh}\,(\gamma_n x) e^{i\beta_n z}$$

$$B_y^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\frac{\omega}{c^2\beta_n} D_n \mathrm{ch}\,(\gamma_n x) e^{i\beta_n z}$$

$$B_z^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\frac{\gamma_n}{\beta_n} C_n \mathrm{ch}\,(\gamma_n x) e^{i\beta_n z}$$

Поле внутри паза определяется уравнениями такого же вида, но значения продольного волнового числа $\beta'_n = 2\pi n/l'$. Оно может быть двух типов. В первом случае $\gamma_n'^2 = \beta_n'^2 - \omega^2/c^2 > 0$. Граничные условия:

$$E_x^{(r)}\Big|_{z=0} = 0 \quad E_y^{(r)}\Big|_{z=0} = 0 \quad E_y^{(r)}\Big|_{x=d+h} = 0 \quad E_z^{(r)}\Big|_{x=d+h} = 0$$

Они приводят к тому, что поля имеют вид

$$E_x^{(r)} = \sum_{n=1}^{\infty} D'_n \mathrm{ch}\,(\gamma'_n(x-d-h)) \sin(\beta'_n z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2i} D'_n \mathrm{ch}\,(\gamma'_n(x-d-h)) e^{i\beta'_n z}$$

$$\Rightarrow D'_n = -D'_{-n}$$

$$E_y^{(r)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega}{\beta'_n} C'_n \mathrm{sh}\,(\gamma'_n(x-d-h)) \sin(\beta'_n z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2i} C'_n \frac{\omega}{\beta'_n} \mathrm{sh}\,(\gamma'_n(x-d-h)) e^{i\beta'_n z}$$

$$\Rightarrow C'_n = -C'_{-n}$$

$$E_z^{(r)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\frac{\gamma'_n}{\beta'_n}\frac{1}{2i}D'_n\mathrm{sh}\,(\gamma'_n(x-d-h))e^{i\beta'_n z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma'_n}{\beta'_n}D'_n\mathrm{sh}\,(\gamma'_n(x-d-h))\cos(\beta'_n z)$$

$$B_x^{(r)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2i}C'_n\mathrm{sh}\,(\gamma'_n(x-d-h))e^{i\beta'_n z} = \sum_{n=1}^{\infty} -iC'_n\mathrm{sh}\,(\gamma'_n(x-d-h))\cos(\beta'_n z)$$

$$B_y^{(r)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\frac{\omega}{c^2\beta'_n}\frac{1}{2i}D'_n\mathrm{ch}\,(\gamma'_n(x-d-h))e^{i\beta'_n z} = \sum_{n=1}^{\infty} i\frac{\omega}{c^2\beta'_n}D'_n\mathrm{ch}\,(\gamma'_n(x-d-h))\cos(\beta'_n z)$$

$$B_z^{(r)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\frac{\gamma'_n}{\beta'_n}\frac{1}{2i}C'_n\mathrm{ch}\,(\gamma'_n(x-d-h))e^{i\beta'_n z} = \sum_{n=1}^{\infty} i\frac{\gamma'_n}{\beta'_n}C'_n\mathrm{ch}\,(\gamma'_n(x-d-h))\sin(\beta'_n z)$$

При $x = d$ поля непрерывны. Чтобы найти коэффициенты проинтегрируем правую и левую часть по периоду l:

$$\int_0^l \boldsymbol{E}^e e^{-i\beta_k z}dz\bigg|_{x=d} = \int_0^l \boldsymbol{E}^r e^{-i\beta_k z}dz\bigg|_{x=d} = \int_0^{l'} \boldsymbol{E}^r e^{-i\beta_k z}dz\bigg|_{x=d}$$

$$\int_0^l \boldsymbol{B}^e e^{-i\beta_k z}dz\bigg|_{x=d} = \int_0^l \boldsymbol{B}^r e^{-i\beta_k z}dz\bigg|_{x=d} = \int_0^{l'} \boldsymbol{B}^r e^{-i\beta_k z}dz\bigg|_{x=d}$$

Найдём интегралы

$$\int_0^l e^{i(\beta_n-\beta_k)z}dz = l\delta_{nk}$$

$$\int_0^{l'} \cos(\beta'_n z)e^{-i\beta_k z}dz = \frac{e^{i(\beta'_n-\beta_k)z}}{2i(\beta'_n-\beta_k)} - \frac{e^{-i(\beta'_n+\beta_k)z}}{2i(\beta'_n+\beta_k)}\bigg|_0^{l'} =$$

$$= \frac{e^{-i\beta_k z}}{(\beta'^2_n-\beta_k^2)i}\left(\beta'_n i\sin(\beta'_n z) + \beta_k\cos(\beta'_n z)\right)\bigg|_0^{l'} = -\frac{i\beta_k}{\beta'^2_n-\beta_k^2}\left(e^{i(\beta'_n-\beta_k)l'}-1\right) = -i\eta_{nk}$$

$$\int_0^{l'} \sin(\beta'_n z)e^{-i\beta_k z}dz = -\frac{e^{i(\beta'_n-\beta_k)z}}{2(\beta'_n-\beta_k)} - \frac{e^{-i(\beta'_n+\beta_k)z}}{2(\beta'_n+\beta_k)}\bigg|_0^{l'} =$$

$$= -\frac{e^{-i\beta_k z}}{\beta'^2_n-\beta_k^2}\left(\beta'_n\cos(\beta'_n z) + \beta_k i\sin(\beta'_n z)\right)\bigg|_0^{l'} = -\frac{\beta'_n}{\beta'^2_n-\beta_k^2}\left(e^{i(\beta'_n-\beta_k)l'}-1\right) = -\frac{\beta'_n}{\beta_k}\eta_{nk}$$

Тогда получаем две системы. Первая система относительно C_n, C'_n:

$$\frac{\omega}{\beta_k}C_k\mathrm{sh}\,(\gamma_k d)l = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\omega}{\beta_k}C'_n\mathrm{sh}\,(\gamma'_n h)\eta_{nk}$$

$$C_k\mathrm{sh}\,(\gamma_k d)l = \sum_{n=1}^{\infty} -C'_n\mathrm{sh}\,(\gamma'_n h)\eta_{nk}$$

$$i\frac{\gamma_k}{\beta_k}C_k\mathrm{ch}\,(\gamma_k d)l = \sum_{n=1}^{\infty} -i\frac{\gamma'_n}{\beta_k}C'_n\mathrm{ch}\,(\gamma'_n h)\eta_{nk}$$

Первое и второе уравнение этой системы совпадают, поэтому она преобразуется к виду:

$$C_k \mathrm{sh}\,(\gamma_k d) l = \sum_{n=1}^{\infty} -C'_n \mathrm{sh}\,(\gamma'_n h) \eta_{nk}$$

$$\gamma_k C_k \mathrm{ch}\,(\gamma_k d) l = \sum_{n=1}^{\infty} -\gamma'_n C'_n \mathrm{ch}\,(\gamma'_n h) \eta_{nk}$$

Аналогичную систему получим для D'_n, D_n:

$$-\frac{\omega}{c^2 \beta_k} D_k \mathrm{ch}\,(\gamma_k d) l = \sum_{n=1}^{\infty} i \frac{\omega}{c^2 \beta'_n} D'_n \mathrm{ch}\,(\gamma'_n h) \eta_{nk}$$

$$D_k \mathrm{ch}\,(\gamma_k d) l = \sum_{n=1}^{\infty} -i \frac{\beta'_n}{\beta_k} D'_n \mathrm{ch}\,(\gamma'_n h) \eta_{nk}$$

$$i \frac{\gamma_k}{\beta_k} D_k \mathrm{sh}\,(\gamma_k d) l = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\gamma'_n}{\beta'_n} D'_n \mathrm{sh}\,(\gamma'_n h) \eta_{nk}$$

Рассматривая конечное число элементов разложения, приходим к выводу, что система разрешима.