

Содержание

1	Две частицы в поле Гаука	2
2	Нормальные координаты. Классический случай	2
3	Нормальные координаты. Квантовый случай	3
4	Сферические координаты	3
5	Волновые функции в p и x представлениях	4
6	Оператор импульса в x представлении	5
7	Оператор координаты в p представлении	5
8	Определение и некоторые свойства функций Эйри	5
9	Решение линейных уравнений	6
10	Решение линейных уравнений в случае дискретного спектра	7
11	Частица в однородном силовом поле	7
12	Гауссовский волновой пакет в однородном поле	8
13	Частица в однородном поле над непроницаемым барьером	9
14	Оператор импульса в сферических координатах и коммутационные соотношения	10
15	Гипергеометрическая функция	11
16	Частица в скалярном поле Юкавы	11
17	Решение линейных уравнений второго порядка при известном частном решении	11
18	Расширение изначально однородно заряженного шара	12
19	Влияние гравитации поля на заряженный шар	14
20	Метод характеристик для уравнений Максвелла	14
21	Движение заряженной частицы в скрещенных полях	15
22	Движение частицы в материальной среде в нерелятивистском случае	16
23	Волновые уравнения	17
23.1	Однородное одномерное волновое уравнение в неограниченной среде с заданными начальными условиями	17
23.2	Метод преобразования Фурье для неоднородного одномерного волнового уравнения в бесконечной среде с нулевыми начальными условиями	18
23.3	Примеры	19
23.4	Вариационный принцип	23
24	Колебания с произвольной возбуждающей силой	23
25	Странные вещи	24
25.1	Тождество для $d \dots a$	24
25.2	Ещё одно странное тождество	24
25.3	Функция отличная от нуля в одной единственной точке	24
25.4	Функция для вычисления площади пересечения треугольника с полуплоскостью	25
26	Весёлые интегралы	26
27	Весёлые интегралы в комплексной плоскости	26
28	Весёлые диффуры	27

1 Две частицы в поле Гука

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\kappa(x_1 - x_2)^2}{2} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Введём координаты:

$$\begin{aligned}\eta &= x_1 - x_2 \\ \xi &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \\ x_1 &= \xi + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \eta \\ x_2 &= \xi - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \eta \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2} &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \\ \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} &= \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{2}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{m_1}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \\ \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} &= \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{2}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \\ \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}\end{aligned}$$

Вводим

$$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \kappa = M\omega^2$$

Отсюда следует:

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_n(p_\xi) e^{\frac{i}{\hbar} \left(\frac{p_\xi^2}{2(m_1+m_2)} t - p_\xi \xi \right)} dp_\xi \cdot H_n \left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}} \eta \right) \exp \left(-\frac{M\omega \eta^2}{2\hbar} \right) e^{i\omega(n+\frac{1}{2})t}$$

2 Нормальные координаты. Классический случай

Гамильтониан:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i'^2}{2m_i} + \sum_{i,j} \frac{A'_{ij} q'_i q'_j}{2}$$

Вводим новые обозначения:

$$\begin{aligned}q_i &= \sqrt{m_i} q'_i \\ A_{ij} &= \frac{A'_{ij}}{\sqrt{m_i m_j}} \\ p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{p'_i}{\sqrt{m_i}}\end{aligned}$$

Гамильтониан в новых координатах:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i,j} \frac{A_{ij} q_i q_j}{2}$$

Уравнения движения (всегда можно выбрать A_{ij} так, что $A_{ij} = A_{ji}$):

$$\dot{p}_k = - \sum_{i,j} \frac{A_{ij} \delta_{ik} q_j + A_{ij} q_i \delta_{jk}}{2} = - \sum_i A_{ki} q_i$$

$$\dot{q}_k = p_k$$

Подставляем второе в первое и получаем:

$$\ddot{q}_k = - \sum_i A_{ki} q_i$$

Приводим систему к нормальным координатам. Для этого находим собственные числа $-\omega_n^2$ и матрицу собственных векторов $C(c_{in})$, матрицы $-A$:

$$\begin{aligned} (-\omega^2 \delta_{ij} + A_{ij}) &= 0 \\ \sum_i A_{ki} c_{in} &= \omega_n^2 c_{kn} \end{aligned}$$

Матрица собственных векторов в силу симметричности A , можно выбрать такую, что она будет ортогональна:

$$\begin{aligned} C^{-1} &= C^T \\ \sum_i c_{ik} c_{in} &= \sum_i c_{ki} c_{ni} = \delta_{kn} \end{aligned}$$

Вводим новые переменные:

$$\begin{aligned} P_i &= p_i \\ Q_i &= \sum_j c_{ij} q_j \end{aligned}$$

Получаем для гамильтониана:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^N \frac{P_i^2}{2} + \sum_{k,n} \sum_{i,j} \frac{1}{2} c_{ik} A_{ij} c_{jn} Q_k Q_n = \sum_{i=1}^N \frac{P_i^2}{2} + \sum_{k,n} \frac{1}{2} \omega_n^2 \delta_{nk} Q_k Q_n \\ H &= \sum_{i=1}^N \frac{P_i^2}{2} + \frac{\omega_i^2 Q_i^2}{2} \end{aligned}$$

3 Нормальные координаты. Квантовый случай

В квантовом случае импульс в декартовых координатах:

$$\hat{p}'_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q'_i}$$

При первом преобразовании координат, как легко видеть:

$$\hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i}$$

Поэтому гамильтониан:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_i -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{\omega_i^2 Q_i^2}{2} = \sum_i -\frac{\hbar^2}{2} \sum_n \frac{\partial Q_n}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial Q_n} \sum_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial Q_k} + \frac{\omega_i^2 Q_i^2}{2} = \\ &= \sum_i -\frac{\hbar^2}{2} \sum_n c_{ni} \frac{\partial}{\partial Q_n} \sum_k c_{ki} \frac{\partial}{\partial Q_k} + \frac{\omega_i^2 Q_i^2}{2} = \sum_{k,n} -\frac{\hbar^2}{2} \sum_i c_{ni} c_{ki} \frac{\partial^2}{\partial Q_n \partial Q_k} + \sum_i \frac{\omega_i^2 Q_i^2}{2} = \\ &= \sum_i -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial Q_i^2} + \frac{\omega_i^2 Q_i^2}{2} \end{aligned}$$

4 Сферические координаты

Связь декартовых (x, y, z) и сферических координат (r, θ, α) даётся выражениями:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \alpha \\ y &= r \sin \theta \sin \alpha \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

Орты сферической системы координат найдём из соотношений:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| \mathbf{e}_r &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \alpha \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| \mathbf{e}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \alpha \mathbf{e}_x + r \cos \theta \sin \alpha \mathbf{e}_y - r \sin \theta \mathbf{e}_z \\ \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right| \mathbf{e}_\alpha &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = -r \sin \theta \sin \alpha \mathbf{e}_x + r \sin \theta \cos \alpha \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

Коэффициенты Ламе:

$$\begin{aligned} H_r &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = 1 \\ H_\theta &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = r \\ H_\alpha &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right| = r \sin \theta \end{aligned}$$

Орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \alpha \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \alpha \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \alpha \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\alpha &= -\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

Орты декартовой системы, выраженные через орты сферической системы:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \sin \theta \cos \alpha \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \alpha \mathbf{e}_\theta - \sin \alpha \mathbf{e}_\alpha \\ \mathbf{e}_y &= \sin \theta \sin \alpha \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \alpha \mathbf{e}_\theta + \cos \alpha \mathbf{e}_\alpha \\ \mathbf{e}_z &= \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

Немного о производных от ортов (для вывода нужно помнить, что орты декартовой системы образуют базис, не зависящий от его положения, в то время как орты сферической системы образуют базис, который меняется от точки к точке):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} &= \mathbf{e}_\theta & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\mathbf{e}_r & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \alpha} &= \sin \theta \mathbf{e}_\alpha & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \alpha} &= \cos \theta \mathbf{e}_\alpha & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \alpha} &= -\sin \theta \mathbf{e}_r - \cos \theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

5 Волновые функции в p и x представлениях

Для описания квантовых процессов вводят волновые функции, которые являются суперпозициями волн д'Бройля. Для одной частицы:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= A \int C(\mathbf{p}, t) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \right) d^3 p \\ C(\mathbf{p}, t) &= B \int \psi(\mathbf{r}, t) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \right) d^3 r \end{aligned}$$

$\psi(\mathbf{r}, t)$ – волновая функция в x представлении. $C(\mathbf{p}, t)$ – волновая функция в p представлении. A и B – действительные числа, которые можно найти из условия нормировки. Нормировка:

$$\begin{aligned} \int \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) d^3 r &= \int C^*(\mathbf{p}, t) C(\mathbf{p}, t) d^3 p = 1 \\ A^2 \iint C^*(\mathbf{p}', t) C(\mathbf{p}, t) \exp \left(\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r} \right) d^3 p d^3 p' d^3 r &= \\ = A^2 \int C^*(\mathbf{p}', t) C(\mathbf{p}, t) (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) d^3 p d^3 p' &= \\ = A^2 (2\pi\hbar)^3 \int C^*(\mathbf{p}, t) C(\mathbf{p}, t) d^3 p &= A^2 (2\pi\hbar)^3 = 1 \\ B^2 \iint \psi^*(\mathbf{r}', t) \psi(\mathbf{r}, t) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \right) d^3 p d^3 r d^3 r' &= \\ = B^2 (2\pi\hbar)^3 \iint \psi^*(\mathbf{r}', t) \psi(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d^3 r d^3 r' &= B^2 (2\pi\hbar)^3 \iint \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) d^3 r = \\ &= B^2 (2\pi\hbar)^3 = 1 \\ A &= B = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \end{aligned}$$

Обратимость непосредственно следует из обратимости преобразования Фурье.

6 Оператор импульса в x представлении

Оператор импульса в p представлении, просто вектор \mathbf{p} . По определению оператор импульса $\hat{\mathbf{p}}$ в x представлении:

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \int \psi^*(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{p}} \psi(\mathbf{r}, t) d^3 r$$

Средний импульс:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p} \rangle &= \int C^*(\mathbf{p}, t) \mathbf{p} C(\mathbf{p}, t) d^3 p = \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiint \mathbf{p} \psi^*(\mathbf{r}', t) \psi(\mathbf{r}, t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})\right) d^3 r' d^3 r d^3 p = \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iint \psi^*(\mathbf{r}', t) \psi(\mathbf{r}, t) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})\right) d^3 p d^3 r' d^3 r = \\ &= \iint \psi^*(\mathbf{r}', t) \psi(\mathbf{r}, t) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d^3 r' d^3 r = \\ &= [\text{интегрируем по частям и учитываем, что } \psi = 0 \text{ на } \infty] = \\ &= -\frac{\hbar}{i} \iint \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \psi^*(\mathbf{r}', t) \psi(\mathbf{r}, t) d^3 r' d^3 r = \\ &= -\frac{\hbar}{i} \int \psi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi^*(\mathbf{r}, t) d^3 r = \\ &= [\text{ещё одно интегрирование по частям}] = \\ &= \frac{\hbar}{i} \int \psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}, t) d^3 r \\ \hat{\mathbf{p}} &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$

7 Оператор координаты в p представлении

Оператор координаты в x представлении \mathbf{r} . В p представлении по определению:

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \int C^*(\mathbf{p}, t) \hat{\mathbf{r}} C(\mathbf{p}, t) d^3 p$$

Итак:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} \rangle &= \int \psi^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \psi(\mathbf{r}, t) d^3 r = \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiint C^*(\mathbf{p}', t) C(\mathbf{p}, t) \mathbf{r} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}\right) d^3 r d^3 p d^3 p' = \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iint C^*(\mathbf{p}', t) C(\mathbf{p}, t) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{r}\right) d^3 r d^3 p d^3 p' = \\ &= \frac{\hbar}{i} \iint C^*(\mathbf{p}', t) C(\mathbf{p}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') d^3 p d^3 p' = \\ &= [\text{интегрируем по частям и учитываем, что } C = 0 \text{ на } \infty] = \\ &= -\frac{\hbar}{i} \iint C^*(\mathbf{p}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} C(\mathbf{p}, t) d^3 p \end{aligned}$$

В результате:

$$\hat{\mathbf{r}} = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} = i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}$$

Уравнение Шрёдингера сохраняет свою форму:

$$\sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} C + \hat{U} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, i\hbar \frac{\partial}{\partial p_N} \right) C = i\hbar \frac{\partial C}{\partial t}$$

8 Определение и некоторые свойства функций Эйри

Функциями Эйри называют:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt$$

$$\text{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{1}{3}t^3 - xt} + \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) \right] dt$$

Асимптотика (можно найти, проинтегрировав методом перевала в комплексной плоскости):

$$\begin{aligned}\text{Ai}(x) &\underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \\ \text{Bi}(x) &\underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \\ \text{Ai}(x) &\underset{x \rightarrow -\infty}{\approx} \frac{1}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ \text{Bi}(x) &\underset{x \rightarrow -\infty}{\approx} \frac{1}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Интеграл (легко находится с использованием дельта функции)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}(x) dx = 1$$

Функции Эйри удовлетворяют уравнению Эйри:

$$u'' - xu = 0$$

Рассмотрим интеграл:

$$\begin{aligned}\int_a^{\infty} \text{Ai}'(x) \text{Ai}''(x) dx &= \int_a^{\infty} x \text{Ai}'(x) \text{Ai}(x) dx \\ \Rightarrow \frac{[\text{Ai}'(x)]^2}{2} \Big|_a^{\infty} &= x \frac{[\text{Ai}(x)]^2}{2} \Big|_a^{\infty} - \int_a^{\infty} \frac{[\text{Ai}(x)]^2}{2} dx\end{aligned}$$

Откуда следует весьма важный интеграл:

$$\int_a^{\infty} [\text{Ai}(x)]^2 dx = [\text{Ai}'(a)]^2 - a [\text{Ai}(a)]^2$$

9 Решение линейных уравнений

Поставим следующую задачу:

$$\begin{aligned}L[y] &= \frac{\partial y}{\partial t} \\ y(x, t) \Big|_{t=0} &= y(x, 0)\end{aligned}$$

L – произвольный линейный оператор. Пусть собственные значения $Y(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению:

$$L[Y] = \lambda Y$$

и если спектр λ сплошной, существует функция $Y^{-1}(x, \lambda')$, такая что:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y^{-1}(x, \lambda') Y(x, \lambda) dx = \delta(\lambda - \lambda')$$

Будем искать y в виде:

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{\lambda t} Y(x, \lambda) d\lambda$$

Простой подстановкой можно проверить, что это выражение в самом деле является решением уравнения. $A(\lambda)$ определим из начальных условий:

$$y(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) Y(x, \lambda) d\lambda$$

$$A(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x, 0) Y^{-1}(x, \lambda) dx$$

Подставляем в решение и получаем:

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x', 0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} Y^{-1}(x', \lambda) Y(x, \lambda) d\lambda dx'$$

10 Решение линейных уравнений в случае дискретного спектра

В случае дискретного спектра у нас есть система функций:

$$Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x), \dots$$

и соответствующая ей последовательность чисел:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots$$

Если удалось построить дополнительную систему функций

$$Y_1^{-1}(x), Y_2^{-1}(x), \dots, Y_n^{-1}(x), \dots$$

такую что

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y_k^{-1}(x) Y_n(x) dx = \delta_{kn}$$

То решение уравнения можно найти в виде:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k t} Y_k(x)$$

$$A_k = \int_{-\infty}^{\infty} Y_k^{-1}(x) y(x, 0) dx$$

Получаем окончательно решение:

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x', 0) \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} Y_k^{-1}(x') Y_k(x) dx'$$

11 Частица в однородном силовом поле

Пусть сила, действующая на частицу, равна F по модулю и направлена вдоль оси z в обратном направлении. Гамильтониан в классическом случае:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_z^2}{2m} + F\hat{z}$$

Уравнение Шрёдингера:

$$\frac{p_z^2}{2m} C(p_z, t) + i\hbar F \frac{\partial C(p_z, t)}{\partial p_z} = i\hbar \frac{\partial C(p_z, t)}{\partial t}$$

Вместо λ будет выступать $-iE/\hbar$. Для Y получаем уравнение

$$\frac{p_z^2}{2m} Y + i\hbar F \frac{\partial Y}{\partial p_z} = EY$$

Будем искать Y в форме $\exp f(p_z)$:

$$i\hbar F \frac{\partial f(p_z)}{\partial p_z} = E - \frac{p_z^2}{2m}$$

$$f(p_z) = -i \frac{E}{\hbar F} p_z + i \frac{1}{6m\hbar F} p_z^3 + const$$

Константа уйдёт в нормировочный множитель.

$$Y(p_z, E) = A \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{E}{F} p_z - \frac{1}{6mF} p_z^3 \right) \right)$$

$$Y^{-1}(p_z, E) = B \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left(\frac{E}{F} p_z - \frac{1}{6mF} p_z^3 \right) \right)$$

$$AB \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{ip_z}{\hbar F} (E' - E) \right) dp_z = 2\pi AB \hbar F \delta(E' - E) = \delta(E' - E)$$

Откуда можно в качестве A и B можно взять константы:

$$A = B = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar F}}$$

$$\begin{aligned} C(p_z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} C(p_z, 0) \int_{-\infty}^{\infty} AB \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \left(E \left(\frac{p_z - p'_z}{F} + t \right) - \frac{1}{6mF} (p_z^3 - p'^3_z) \right) \right) dE dp'_z = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C(p'_z, 0) \delta(p_z - p'_z + Ft) \exp \left(\frac{i}{6m\hbar F} (p_z^3 - p'^3_z) \right) dp'_z = \\ &= C(p_z + Ft, 0) \exp \left(\frac{i(-3p_z^2 Ft - 3p_z F^2 t^2 - F^3 t^3)}{6m\hbar F} \right) = \\ &= C(p_z + Ft, 0) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{p_z^2}{2m} t + \frac{p_z F t^2}{2m} + \frac{F^2 t^3}{6m} \right) \right) \end{aligned}$$

Чтобы получить дискретный спектр нужно ввести дополнительные условия. Чаще всего таким условием выступает поверхность, за пределы которой частица не может попасть. В качестве такой поверхности может выступать поверхность Земли для поля тяжести, обкладка конденсатора.

12 Гауссовский волновой пакет в однородном поле

Пусть

$$\begin{aligned} \psi(z, 0) &= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{(z - z_0)^2}{4\sigma^2} \right) \\ C(p_z, 0) &= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{(z - z_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{i}{\hbar} p_z z \right) dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} p_z z_0 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{(z - z_0)^2}{4\sigma^2} - \frac{i}{\hbar} p_z (z - z_0) \right) dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} p_z z_0 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{(z - z_0)^2}{4\sigma^2} - 2\frac{i}{\hbar} \sigma p_z \frac{(z - z_0)}{2\sigma} \right) dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} p_z z_0 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\left(\frac{(z - z_0)}{2\sigma} + \frac{i}{\hbar} \sigma p_z \right)^2 - \frac{\sigma^2 p_z^2}{\hbar^2} \right) dz = \\ &= \frac{2\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} p_z z_0 - \frac{\sigma^2 p_z^2}{\hbar^2} \right) = \\ &= \sqrt[4]{\frac{2\sigma^2}{\pi\hbar^2}} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} p_z z_0 - \frac{\sigma^2 p_z^2}{\hbar^2} \right) \\ \langle z \rangle &= \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi\hbar^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(z_0 - \frac{2i\hbar\sigma^2}{\hbar^2} (p_z + Ft) + \frac{p_z}{m} t + \frac{Ft^2}{2m} \right) \exp \left(-\frac{2\sigma^2(p_z + Ft)^2}{\hbar^2} \right) dp_z = \\ &= \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi\hbar^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(z_0 - \frac{2i\hbar\sigma^2}{\hbar^2} (p_z + Ft) + \frac{p_z}{m} t + \frac{Ft^2}{2m} \right) \exp \left(-\frac{2\sigma^2(p_z + Ft)^2}{\hbar^2} \right) dp_z = \\ &= z_0 - \frac{Ft^2}{2m} \end{aligned}$$

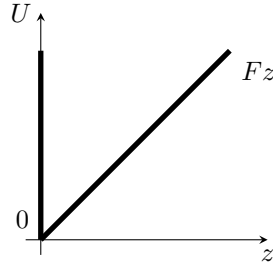
$$\begin{aligned}
\langle z^2 \rangle &= \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi\hbar^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(z_0 - \frac{Ft^2}{2m} + \left(\frac{t}{m} - 2\frac{i\sigma^2}{\hbar} \right) (p_z + Ft) \right)^2 \exp \left(-\frac{2\sigma^2(p_z + Ft)^2}{\hbar^2} \right) dp_z + \\
&\quad + \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi\hbar^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\sigma^2 + \frac{i\hbar}{m}t \right) \exp \left(-\frac{2\sigma^2(p_z + Ft)^2}{\hbar^2} \right) dp_z = \\
&= \left(z_0 - \frac{Ft^2}{2m} \right)^2 + \left(\frac{t}{m} - 2\frac{i\sigma^2}{\hbar} \right)^2 \frac{\hbar^2}{4\sigma^2} + \left(2\sigma^2 + \frac{i\hbar}{m}t \right) = \\
&= \left(z_0 - \frac{Ft^2}{2m} \right)^2 + \frac{t^2\hbar^2}{4m^2\sigma^2} + \sigma^2
\end{aligned}$$

Дисперсия:

$$\langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2 = \frac{t^2\hbar^2}{4m^2\sigma^2} + \sigma^2$$

13 Частица в однородном поле над непроницаемым барьером

Рассмотрим частицу в треугольной потенциальной яме:



В этом случае спектр дискретный. Нам необходимо от импульсной формы перейти к координатной. В этом случае получится обычное стационарное уравнение Шрёдингера с решением:

$$\begin{aligned}
\psi(z, E) &= \int_{-\infty}^{\infty} A \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{E - Fz}{F} p_z - \frac{1}{6mF} p_z^3 \right) \right) dp_z = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A \cos \left(-\frac{E - Fz}{F\hbar} p_z + \frac{1}{2mF\hbar} \frac{p_z^3}{3} \right) dp_z = \\
&= A(2mF\hbar)^{1/3} \text{Ai} \left((2mF\hbar)^{1/3} \frac{Fz - E}{F\hbar} \right)
\end{aligned}$$

Зная корни функции Эйри x_1, x_2, \dots , легко найти спектр:

$$E_k = -(2m)^{-1/3} \hbar^{2/3} F^{2/3} x_k$$

А воспользовавшись интегралом:

$$\int_{x_k}^{\infty} \text{Ai}^2(x) dx = [\text{Ai}'(x_k)]^2,$$

нормировочную константу:

$$A = \hbar^{-2/3} (2mF)^{-1/6} |\text{Ai}'(x_k)|^{-1}$$

Окончательно волновые функции:

$$\psi_k(z) = \frac{(2mF)^{1/6}}{\hbar^{1/3} |\text{Ai}'(x_k)|} \text{Ai} \left((2mF\hbar)^{1/3} \frac{z}{\hbar} + x_k \right)$$

Для электронов:

$$E_k \approx -1,14 \times 10^6 F^{2/3} x_k \text{ эВ}$$

Найдём количество значений x_k приходящийся в интервал $(k_b T, k_b(T + \Delta T))$ при $\Delta T = 10\text{К}$ и $T = 300\text{К}$ (обозначим эту величину N) для поля силы тяжести, что соответствует частице над поверхностью Земли. Для этого воспользуемся приближённым выражением:

$$\begin{aligned}
\text{Ai}(x) &\underset{x \rightarrow -\infty}{\approx} \frac{1}{\sqrt{\pi} x^{1/4}} \sin \left(\frac{2}{3} |x|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \\
|x_k|^{3/2} &\approx \frac{3}{2} \pi k - \frac{3\pi}{8}
\end{aligned}$$

$$N \approx \frac{2^{3/2}}{3\pi g \hbar m^{1/2}} k_b^{3/2} T^{3/2} ((1 + \Delta T/T)^{3/2} - 1) \approx \frac{2^{1/2}}{\pi g \hbar m^{1/2}} k_b^{3/2} T^{1/2} \Delta T$$

Для электронов:

$$N \approx 4,07 \times 10^{15}$$

Далее можно приближённо вычислить среднюю температуру таких частиц и так далее.

14 Оператор импульса в сферических координатах и коммутационные соотношения

Нам известно, что оператор импульса это градиент с коэффициентом. Градиент в сферических координатах:

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\}$$

Оператор Лапласа, который фигурирует в уравнении Шрёдингера:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$$

Но умные люди давно подсчитали, что:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$$

и результаты, вообще говоря, не совпадают. Где мы ошиблись? Ответ на этот вопрос чрезвычайно прост: мы не должны были забывать об ортах. Запишем градиент иначе:

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\alpha \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

И воспользуемся формулами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} &= \mathbf{e}_\theta & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\mathbf{e}_r & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \alpha} &= \sin \theta \mathbf{e}_\alpha & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \alpha} &= \cos \theta \mathbf{e}_\alpha & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \alpha} &= -\sin \theta \mathbf{e}_r - \cos \theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta &= \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\alpha \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \\ &+ \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\alpha \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \mathbf{e}_\alpha \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\alpha \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \end{aligned}$$

Итак, оператор импульса в сферических координатах:

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\alpha \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)$$

Соотношения коммутации в случае декартовых координат:

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = \hat{p}_i \hat{p}_j - \hat{p}_j \hat{p}_i = 0$$

С точки зрения векторов это означает, что в терминах полного произведения векторов матрица $\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}$ симметрична.

$$\begin{aligned} \nabla \nabla &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\alpha \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \\ &+ \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\alpha \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \mathbf{e}_\alpha \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\alpha \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) = \\ &= \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\alpha \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \\ &+ \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\theta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \end{aligned}$$

Выпишем матрицу $\nabla\nabla$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial r^2} & \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \end{pmatrix}$$

Она симметрична. Интересно, что данный результат нельзя получить, если рассматривать покомпонентные коммутационные соотношения.

15 Гипергеометрическая функция

Сумма бесконечной геометрической прогрессии:

$$S = b_0(1 + x + x^2 + \dots)$$

Её обобщением является следующая трёхпараметрическая функция:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Некоторые очевидные соотношения:

$$F'(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\partial F(\alpha, \beta; \gamma; x)}{\partial x} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; x)$$

16 Частица в скалярном поле Юкавы

Скалярное поле Юкавы:

$$U = U_0 \frac{e^{-\gamma r}}{r}$$

Стационарное уравнение Шрёдингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\hat{L}^2 \psi}{2Mr^2} + U_0 \frac{e^{-\gamma r}}{r} \psi = E \psi$$

Представляем ψ в виде:

$$\psi = R(r) Y_{lm}(\theta, \alpha)$$

Получаем:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2} R + U_0 \frac{e^{-\gamma r}}{r} R = ER$$

17 Решение линейных уравнений второго порядка при известном частном решении

Пусть дано уравнение:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

и $\varphi(x)$ – его частное решение. Будем искать его второе решение в виде: $\psi\varphi$. При этом начальные условия перейдут в

$$y(x_0) = \psi(x_0)\varphi(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = \psi'(x_0)\varphi(x_0) + \psi(x_0)\varphi'(x_0) = y'_0$$

$$\psi(x_0) = \frac{y_0}{\varphi(x_0)}$$

$$\psi'(x_0)\varphi^2(x_0) = \varphi(x_0)y'_0 - y_0\varphi'(x_0)$$

Тогда

$$\psi''\varphi + 2\psi'\varphi' + f\psi'\varphi = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\psi''}{\psi'} &= -2\frac{\varphi'}{\varphi} - f \\ \psi' &= \psi'(x_0) \frac{\varphi^2(x_0)}{\varphi^2(x)} \exp\left(-\int_{x_0}^x f dx\right) \\ \psi &= \psi'(x_0) \varphi^2(x_0) \int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi^2(x)} \exp\left(-\int_{x_0}^x f dx\right) dx + \psi(x_0) \\ y &= \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \left[\varphi(x_0)(\varphi(x_0)y'_0 - y_0\varphi'(x_0)) \int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi^2(x)} \exp\left(-\int_{x_0}^x f dx\right) dx + y_0 \right]\end{aligned}$$

Определитель Вронского:

$$\begin{vmatrix} \varphi & \varphi\psi \\ \varphi' & \varphi'\psi + \psi'\varphi \end{vmatrix} = \psi'\varphi^2 = \psi'(x_0)\varphi^2(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^x f dx\right) \neq 0, \text{ если } \psi'(x_0)\varphi^2(x_0) \neq 0$$

То есть решения, полученные таким методом, линейно независимы, если $\psi'(x_0) \neq 0$ и $\varphi(x_0) \neq 0$

18 Расширение изначально однородно заряженного шара

Первый метод.

Рассмотрим эту задачу с точки зрения симметрии. Во-первых, понятно, что в системе отсутствует магнитное поле. Во-вторых, плотность заряда ρ и поле скоростей \mathbf{v} зависят только от расстояния до центра шара. Также скорость имеет только одну компоненту v_r , также как и электрическое поле E_r .

Выберем внутри шара радиуса R заряд которой равен Q сферу радиуса r_0 . Такая сфера ограничивает заряд:

$$q = \frac{r_0^3}{R^3} Q$$

Найдём как движется точка на поверхности такой сферы. Уравнение движения:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 r}{dt^2} &= AE_r = Ak \frac{q}{r^2} \\ \frac{v_r^2}{2} - \frac{v_{0r}^2}{2} &= Akq \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right) \\ v_r &= \sqrt{v_{0r}^2 + \frac{2Akq}{r_0} - \frac{2Akq}{r}} = \sqrt{a - \frac{b}{r}} \\ \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{r} dr}{\sqrt{ar - b}} &= t - t_0 \\ \frac{b}{a^{3/2}} \left(\sqrt{\frac{ar}{b}} \sqrt{\frac{ar}{b} - 1} + \ln \left| \sqrt{\frac{ar}{b} - 1} + \sqrt{\frac{ar}{b}} \right| \right) \Big|_{r_0}^r &= t - t_0\end{aligned}$$

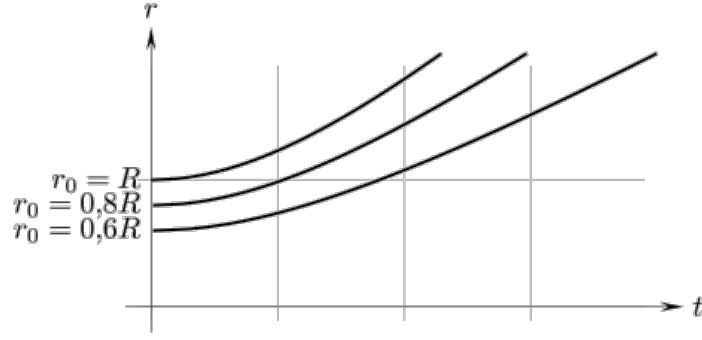
В случае если $v_r(0) = 0$, получаем:

$$\begin{aligned}b &= 2Akq \\ a &= \frac{2Akq}{r_0} \\ \frac{r_0^{3/2}}{(2Akq)^{1/2}} \left(\sqrt{\frac{r}{r_0}} \sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} + \ln \left| \sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} + \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right| \right) &= t \\ \left(\sqrt{\frac{r}{r_0}} \sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} + \ln \left| \sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} + \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right| \right) &= \sqrt{\frac{2AkQ}{R^3}} t = f \left(\frac{r}{r_0} \right)\end{aligned}$$

На рисунке приведена зависимость $r(t)$, для различных значений r_0 .

Плотность зарядов можно найти, определяя для каждого из слоёв, между которыми находится заряд dq , толщина между слоями dr_0 , в момент времени t соответствующее расстояние между слоями: dr :

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dq}{dr},$$



где dr определяется dr_0 , а $dt = 0$. В результате:

$$f' \left(\frac{r}{r_0} \right) \frac{dr}{r_0} = f' \left(\frac{r}{r_0} \right) \frac{r dr_0}{r_0^2}$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{dr_0}{r_0}$$

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 = \rho_0 \left(f^{-1} \left(\sqrt{\frac{2\alpha k Q}{R^3}} t \right) \right)^{-3}$$

То есть ρ зависит только от времени и не зависит от расстояния, что означает, что шар всегда однороден.

Второй метод.

С точки зрения уравнений Максвелла в сферически-симметричном случае:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \mathbf{e}_r & \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\theta & \frac{1}{r} \mathbf{e}_\alpha \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ E_r & r E_\theta & r \sin \theta E_\alpha \end{vmatrix} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \mathbf{e}_r & \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\theta & \frac{1}{r} \mathbf{e}_\alpha \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ B_r & r B_\theta & r \sin \theta B_\alpha \end{vmatrix} = \mu_0 \rho \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial B_\theta}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\alpha) \\ \frac{\partial B_\alpha}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) \\ \frac{\partial E_r}{\partial t} &= -\frac{\rho v_r}{\varepsilon_0} \\ \frac{\partial E_\theta}{\partial t} &= -c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\alpha) - \frac{\rho v_\theta}{\varepsilon_0} \\ \frac{\partial E_\alpha}{\partial t} &= c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) - \frac{\rho v_\alpha}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) &= 0 \\ \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) &= A \left(\mathbf{E} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\alpha \\ v_r & v_\theta & v_\alpha \\ B_r & B_\theta & B_\alpha \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) &= 0 \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + A (E_r + v_\theta B_\alpha - v_\alpha B_\theta) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= -v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + A (E_\theta + v_\alpha B_r - v_r B_\alpha) \\ \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} &= -v_r \frac{\partial v_\alpha}{\partial r} + A (E_\alpha + v_r B_\theta - v_\theta B_r) \end{aligned}$$

Если в начальный момент времени:

$$E_\alpha, E_\theta, B_r, B_\alpha, B_\theta, v_\theta, v_\alpha, v_r = 0,$$

то как следует из системы уравнений первого порядка по времени, во все следующие моменты времени:

$$E_\alpha, E_\theta, B_r, B_\alpha, B_\theta, v_\theta, v_\alpha = 0,$$

Остаётся система из трёх уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_r}{\partial t} &= -\frac{\rho v_r}{\varepsilon_0} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + A E_r \end{aligned}$$

Отсюда легко получить систему:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r^2 E_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) &= 0 \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} &= A E_r\end{aligned}$$

Как её решать? Методом характеристик. Все уравнения имеют один и тот же вид и представляют собой уравнения переноса. Скорость переноса v_r . Система в методе характеристик:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= v_r \\ \frac{d(r^2 E_r)}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_r}{dt} &= A E_r\end{aligned}$$

Из второго уравнения следует, что:

$$E_r = \frac{E_r(0)r_0^2}{r^2} = k \frac{r_0^3}{R^3 r^2} Q = k \frac{q}{r^2}$$

И система сводится к системе из предыдущего метода.

19 Влияние гравитации поля на заряженный шар

Поле имеет энергию и следовательно массу. Резонно предположить, что эта масса должна участвовать в гравитационных взаимодействиях и гравитация поля должна влиять на движение заряженной среды. Попробуем это учесть.

В сферически симметричном случае массу поля, ограниченная сферой радиуса $r(r_0, t)$, можно найти из выражения:

$$m = \frac{\varepsilon_0}{2c^2} \int_0^{r(r_0, t)} E_r^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi k^2 \varepsilon_0 Q^2}{2c^2 R^6} \int_0^{r_0} \frac{r_0^6}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r_0} dr_0 = \frac{kQ^2}{2c^2 R^6} \int_0^{r_0} \frac{r_0^6}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r_0} dr_0$$

20 Метод характеристик для уравнений Максвелла

Метод характеристик удобно применять для среды, описываемой уравнениями гидродинамики. Система уравнений Максвелла и второй закон Ньютона для заряженной жидкости с отношением заряда к массе для частицы среды A :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \frac{d\mathbf{E}}{dt} &= c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{E} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \frac{d\mathbf{B}}{dt} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \Rightarrow & \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \rho \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{a}(A(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})) \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \mathbf{a}(A(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})) & \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{E}}{dt} &= c^2 \nabla_B \times \mathbf{B} - \mathbf{v}(\nabla_E \cdot \mathbf{E}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla_E) \mathbf{E} = c^2 \nabla_B \times \mathbf{B} - \nabla_E \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) = c^2 \nabla_{E,B} \times \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} \right) \\ \frac{d\mathbf{B}}{dt} &= -\nabla_E \times \mathbf{E} - \mathbf{v}(\nabla_B \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla_B) \mathbf{B} = -\nabla_E \times \mathbf{E} - \nabla_B \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\nabla_{E,B} \times (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{a}(A(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})) \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v}\end{aligned}$$

Последняя система интересна тем, что вскрывает некоторые внутренние связи, но предыдущая система лучше поддаётся анализу. Итак,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{E}}{dt} &= c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{E} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E} \\ \frac{d\mathbf{B}}{dt} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{a}(A(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})) \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v}\end{aligned}$$

Начальные условия:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t_0), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}_0, t_0), \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t_0), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$$

Решением системы будут выражения:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}_0, t), \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t), \quad \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$$

Здесь \mathbf{r}_0 аналог постоянной интегрирования. Первые три выражения показывают как меняется электромагнитные поля и поле скоростей в различные моменты времени вдоль характеристики. Выбирая в качестве \mathbf{r}_0 все точки пространства, можно получить поле во всём пространстве в различные моменты времени.

21 Движение заряженной частицы в скрещенных полях

Рассмотрим движение частицы массой m , зарядом q в скрещенном поле $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$. Уравнения движения:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \times \mathbf{B}$$

Вводим собственное время τ :

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{mc^2}{W}$$

Тогда:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{q}{m}(\mathbf{p} - \mathbf{u}W/c^2) \times \mathbf{B}$$

Вводим циклотронную частоту:

$$\omega_0 = \frac{q}{m}\mathbf{B}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\omega_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{u}W/c^2)$$

Рассмотрим также энергию:

$$W = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{c^2}{W}\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{p} \cdot (\omega_0 \times \mathbf{u})$$

Заметим теперь, что:

$$\omega_0 \cdot \mathbf{p} = \omega_0 \cdot \mathbf{p}_0$$

$$\frac{d\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}}{d\tau} = -\mathbf{u} \cdot (\omega_0 \times \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot (\omega_0 \times \mathbf{u}) = \frac{dW}{d\tau}$$

В результате:

$$W - \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = \text{const} = W_0 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_0 = W'_0$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\omega_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})/c^2 - \mathbf{u}W'_0/c^2)$$

Введём правую тройку ортов:

$$\mathbf{e}_\omega = \frac{\omega_0}{\omega_0} \quad \mathbf{e}_t = \frac{\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{u}}{|\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{u}|} = \frac{\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{u}}{u \sin \theta} \quad \mathbf{e}_s = \mathbf{e}_\omega \times \mathbf{e}_t = \frac{\mathbf{e}_\omega u \cos \theta - \mathbf{u}}{u \sin \theta} = \frac{\mathbf{e}_\omega \cos \theta - \mathbf{u}/u}{\sin \theta}$$

$$\mathbf{u} = u \cos \theta \mathbf{e}_\omega - u \sin \theta \mathbf{e}_s$$

$$\frac{dp_s}{d\tau} \mathbf{e}_s + \frac{dp_t}{d\tau} \mathbf{e}_t = \omega_0 p_s \mathbf{e}_t - \omega_0 p_t \mathbf{e}_s - \omega_0 u^2 \sin^2 \theta p_s / c^2 \mathbf{e}_t + \omega_0 u^2 \cos \theta \sin \theta p_\omega / c^2 \mathbf{e}_t + \omega_0 u \sin \theta W'_0 / c^2 \mathbf{e}_t$$

$$p_\omega = p_{0\omega}$$

$$\frac{dp_s}{d\tau} = -\omega_0 p_t$$

$$\frac{dp_t}{d\tau} = \omega_0(1 - u^2 \sin^2 \theta / c^2) p_s + \omega_0 u \sin \theta W'_0 / c^2 + \omega_0 u^2 \cos \theta \sin \theta p_{0\omega} / c^2 = \omega_0(1 - u^2 \sin^2 \theta / c^2) p_s + \omega_0 u \sin \theta (W_0 + u \sin \theta p_{0s}) / c^2$$

$$\frac{d^2 p_t}{d\tau^2} = \omega_0^2 (u^2 \sin^2 \theta / c^2 - 1) p_\tau$$

Введём обозначения:

$$k = \omega_0 \sqrt{u^2 \sin^2 \theta / c^2 - 1}$$

$$\begin{aligned}
m \frac{dx_t}{d\tau} &= p_t = A \operatorname{sh}(k\tau) + p_{0t} \operatorname{ch}(k\tau) \\
m \frac{dx_s}{d\tau} &= p_s = -\frac{\omega_0}{k} (A \operatorname{ch}(k\tau) + p_{0t} \operatorname{sh}(k\tau)) + \frac{\omega_0^2 u \sin \theta (W_0 + u \sin \theta p_{0s})}{k^2 c^2} \\
&\Rightarrow A = \frac{\omega_0 u \sin \theta (W_0 + u \sin \theta p_{0s})}{k c^2} - \frac{k}{\omega_0} p_{0s} = \frac{\omega_0 (u \sin \theta W_0 / c^2 + p_{0s})}{k} \\
&\Rightarrow p_s = -\frac{\omega_0}{k} (A (\operatorname{ch}(k\tau) - 1) + p_{0t} \operatorname{sh}(k\tau)) + p_{0s} \\
m \frac{dx_\omega}{d\tau} &= p_\omega = p_{0\omega} \\
m c^2 \frac{dt}{d\tau} &= W = W_0 - u \sin \theta (p_s - p_{0s}) \\
x_t &= \frac{1}{m k} (A (\operatorname{ch}(k\tau) - 1) + p_{0t} \operatorname{sh}(k\tau)) + x_{0t} \\
x_s &= -\frac{\omega_0}{k^2 m} (A (\operatorname{sh}(k\tau) - k\tau) + p_{0t} (\operatorname{ch}(k\tau) - 1)) + \frac{p_{0s} \tau}{m} + x_{0s} \\
x_\omega &= \frac{p_{0\omega} \tau}{m} + x_{0\omega} \\
t &= \frac{1}{m c^2} (W_0 \tau - u \sin \theta (m(x_s - x_{0s}) - p_{0s} \tau))
\end{aligned}$$

Если $u \sin \theta = c$:

$$\begin{aligned}
A &= A' / k = \frac{\omega_0 (W_0 / c + p_{0s})}{k} \\
x_t &= \frac{1}{m} (A' \frac{\tau^2}{2} + p_{0t} \tau) + x_{0t} \\
x_s &= -\frac{\omega_0}{m} \left(A' \frac{\tau^3}{6} + p_{0t} \frac{\tau^2}{2} \right) + \frac{p_{0s} \tau}{m} + x_{0s} \\
x_\omega &= \frac{p_{0\omega} \tau}{m} + x_{0\omega} \\
t &= \frac{1}{m c^2} (W_0 \tau - u \sin \theta (m(x_s - x_{0s}) - p_{0s} \tau))
\end{aligned}$$

Если $u \sin \theta < c$:

$$\begin{aligned}
k &= i\omega \quad A = -iA' \\
x_t &= \frac{1}{m\omega} (-A' (\cos(\omega\tau) - 1) + p_{0t} \sin(\omega\tau)) + x_{0t} \\
x_s &= \frac{\omega_0}{\omega^2 m} (A' (\sin(\omega\tau) - \omega\tau) + p_{0t} (\cos(\omega\tau) - 1)) + \frac{p_{0s} \tau}{m} + x_{0s} \\
x_\omega &= \frac{p_{0\omega} \tau}{m} + x_{0\omega} \\
t &= \frac{1}{m c^2} (W_0 \tau - u \sin \theta (m(x_s - x_{0s}) - p_{0s} \tau))
\end{aligned}$$

22 Движение частицы в материальной среде в нерелятивистском случае

Рассмотрим материальную среду, частицы которой не взаимодействуют между собой. Уравнения движения для такой среды будут иметь вид уравнений Эйлера с нулевой правой частью:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = 0 \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0
\end{aligned}$$

То, что в среде находится частица учтём с помощью выражения:

$$\rho = \rho_f + m \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}(t))$$

Из уравнения непрерывности следует:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{v}) - m \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}(t)) + m \mathbf{v} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}(t)) + m \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}(t)) \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

Можно предположить (к сожалению мне это казалось абсолютно точным, но вдруг я где-то ошибся), что отсюда следует:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{v}) = 0$$

$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ но только в точке с частицей

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} \text{ но только в точке с частицей}$$

Разделяем выражения и интегрируем по \mathbf{r} , учитывая, что на $\mathbf{r} = \boldsymbol{\xi}(t)$ $\mathbf{v} = d\boldsymbol{\xi}/dt$:

$$m \frac{d^2 \boldsymbol{\xi}}{dt^2} = - \int \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) dV$$

На деле как легко видеть скорости частиц не меняются при движении, если поле скоростей непрерывно. Интерес представляет один единственный случай, когда поле скоростей терпит разрыв. В этом случае частица догоняет и сталкивается с частицами среды и, как следствие, движется уже ускоренно. Здесь есть несколько важных и нетривиальных моментов. Очень хочется, чтобы разрыв был в одной единственной точке – в точке с частицей. Но если разрыв конечен, то для частицы как материальной точки производные от скорости обратятся в нуль и ничего не будет наблюдаться. Если предположить, что в среде существует фронт или линия на которой поле скоростей терпит разрыв, то расположение этой линии или фронта может быть вообще говоря произвольным. Это путает все карты. Как облечь всё изложенное выше в математическую форму я пока не знаю. По этой причине на задачу пришлось забыть.

23 Волновые уравнения

23.1 Однородное одномерное волновое уравнение в неограниченной среде с заданными начальными условиями

Как оно выглядит? Да, вот так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

В обычном случае $v = \text{const}$. Начальные условия:

$$\begin{aligned} u(0, x) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(0, x)} &= g(x) \end{aligned}$$

Его очень легко решить, если воспользоваться заменой координат:

$$\begin{aligned} \eta &= x + vt \\ \xi &= x - vt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = v \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= v \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + v \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = U_1(\eta)$$

$$u = U(\eta) + V(\xi)$$

$$u(0, x) = U(x) + V(x) = f(x) \quad U(x) + V(x) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(0, x)} = v(U'(x) - V'(x)) = g(x) \Rightarrow U(x) - V(x) = \frac{1}{v} \int g(x) dx = \frac{G(x)}{v}$$

$$u = \frac{f(x+vt) + f(x-vt)}{2} + \frac{G(x+vt) - G(x-vt)}{2v} = \frac{f(x+vt) + f(x-vt)}{2} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(x) dx$$

23.2 Метод преобразования Фурье для неоднородного одномерного волнового уравнения в бесконечной среде с нулевыми начальными условиями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = s(x, t)$$

$v = \text{const.}$ Начальные условия:

$$\begin{aligned} u(0, x) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(0, x)} &= 0 \end{aligned}$$

Только координата x меняется от $-\infty$ до ∞ , поэтому преобразование Фурье будет иметь вид:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(k, t) e^{-ikx} dk & \Leftrightarrow & \quad U(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{ikx} dx \\ s(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(k, t) e^{-ikx} dk & \Leftrightarrow & \quad S(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, t) e^{ikx} dx \end{aligned}$$

Выполняем преобразование Фурье исходного уравнения:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x} e^{ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{ik}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - ik u \right) e^{ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - k^2 U$$

При условии, что:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - ik u \right) = 0$$

получаем преобразованное уравнение:

$$-k^2 U - \frac{1}{v^2} \frac{d^2 U}{dt^2} = S(k, t)$$

И начальные условия:

$$\begin{aligned} U(k, 0) &= 0 \\ \frac{dU}{dt} \Big|_{(k, 0)} &= 0 \end{aligned}$$

Решение этого уравнения:

$$U(k, t) = -\frac{v}{k} \int_0^t \sin(vk(t-t')) S(k, t') dt'$$

$$u(x, t) = -\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{k} \sin(vk(t-t')) S(k, t') e^{-ikx} dk dt' = -\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{2k\pi} \sin(vk(t-t')) s(x', t') e^{-ik(x-x')} dk dt' dx' =$$

$$= -\frac{v}{4} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{sgn}(x-x' + v(t-t')) - \operatorname{sgn}(x-x' - v(t-t'))] s(x', t') dt' dx' =$$

$$= -\frac{v}{4} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{sgn}(\xi + v\tau) - \operatorname{sgn}(\xi - v\tau)] s(x - \xi, t - \tau) d\tau d\xi$$

$$\operatorname{sgn}(x+a) - \operatorname{sgn}(x-a) = \begin{cases} \begin{cases} 0, & x > a, \\ 1, & x = a, \\ 2, & -a < x < a, \\ 1, & x = -a, \\ 0, & x < -a. \end{cases}, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ \begin{cases} 0, & x > -a, \\ -1, & x = -a, \\ -2, & a < x < -a, \\ -1, & x = a, \\ 0, & x < a. \end{cases}, & a < 0. \end{cases} = \begin{cases} 0, & |x| > |a|, \\ \operatorname{sgn}(a), & |x| = |a|, \\ 2\operatorname{sgn}(a), & |x| < |a|. \end{cases} = 2\eta(|a| - |x|) \operatorname{sgn}(a)$$

$$\operatorname{sgn}(\xi + v\tau) - \operatorname{sgn}(\xi - v\tau) = 2\eta(v|\tau| - |\xi|) \operatorname{sgn}(v\tau)$$

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= -\frac{v}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \eta(v|\tau| - |\xi|) \operatorname{sgn}(v\tau) s(x - \xi, t - \tau) d\tau d\xi = \\
&= [\text{если, } s(x - \xi, t - \tau) \text{ не имеет } \delta\text{-образных разрывов}] = \\
&= -\frac{v}{2} \int_0^t \int_{-v\tau}^{v\tau} s(x - \xi, t - \tau) d\tau d\xi
\end{aligned}$$

23.3 Примеры

1. Пусть:

$$s(x, t) = \delta(x - x_0) \delta(t - t_0)$$

что соответствует импульсу, мгновенно переданному отдельной точке струны.

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= -\frac{v}{4} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{sgn}(\xi + v\tau) - \operatorname{sgn}(\xi - v\tau)] s(x - \xi, t - \tau) d\tau d\xi = \\
&= -\frac{v}{4} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{sgn}(\xi + v\tau) - \operatorname{sgn}(\xi - v\tau)] \delta(x - x_0 - \xi) \delta(t - t_0 - \tau) d\tau d\xi = \\
&= -\frac{v}{4} \int_0^t [\operatorname{sgn}(x - x_0 + v\tau) - \operatorname{sgn}(x - x_0 - v\tau)] \delta(t - t_0 - \tau) d\tau = \\
&= -\frac{v}{4} [\operatorname{sgn}(x - x_0 + v(t - t_0)) - \operatorname{sgn}(x - x_0 - v(t - t_0))] \eta(t - t_0)
\end{aligned}$$

Проверяем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{v}{2} [\delta'(x - x_0 + v(t - t_0)) - \delta'(x - x_0 - v(t - t_0))] \eta(t - t_0) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{v}{4} \{ 2v^2 [\delta'(x - x_0 + v(t - t_0)) - \delta'(x - x_0 - v(t - t_0))] \eta(t - t_0) + \\
&\quad + 4v [\delta(x - x_0 + v(t - t_0)) + \delta(x - x_0 - v(t - t_0))] \delta(t - t_0) + \\
&\quad + [\operatorname{sgn}(x - x_0 + v(t - t_0)) - \operatorname{sgn}(x - x_0 - v(t - t_0))] \delta'(t - t_0) \}
\end{aligned}$$

Воспользуемся тождествами:

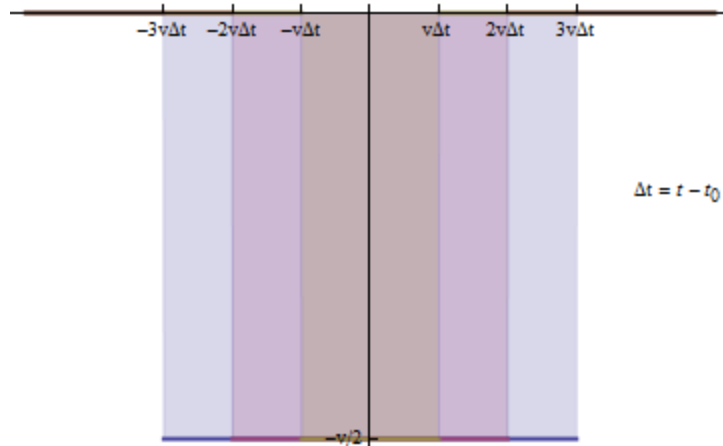
$$f(x) \delta(x - x_0) + [F(x) - F(x_0)] \delta'(x - x_0) = 0, \quad F(x) = \int f(x) dx$$

$$f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \delta(x - x_0)$$

Кое-что подсократилось:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{v}{4} \{ 2v^2 [\delta'(x - x_0 + v(t - t_0)) - \delta'(x - x_0 - v(t - t_0))] \eta(t - t_0) + \\
&\quad + 4v \delta(x - x_0) \delta(t - t_0) \} \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \delta(x - x_0) \delta(t - t_0)
\end{aligned}$$

На рисунке показан профиль струны в различные моменты времени:



Одно тождество

Рассмотрим функцию вида:

$$u(x, t) = \eta(t - t_0)\eta(\xi)f(\xi) = g(\xi, t)f(\xi), \text{ если } \xi = |t - t_0| - |x - x_0|/v$$

$$\begin{aligned} u''_{tt} &= \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} f + 2 \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + g \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \\ u''_{xx} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} f + 2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + g \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ u''_{xx} - \frac{1}{v^2} u''_{tt} &= f \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right) + 2 \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial \xi} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \right] - \frac{2}{v^2} \delta(t - t_0) \eta(\xi) \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \\ &\quad + g \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \right] = \\ &= f \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right) + 2 \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial \xi} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \right] - \frac{2}{v^2} \delta(t - t_0) \eta(\xi) \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \\ &\quad + g \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \right] + g \frac{\partial f}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} &= -\frac{2}{v} \delta(t - t_0) \delta(x - x_0) \quad (\text{см. пред. пример}) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \text{sgn}(t - t_0) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\text{sgn}(x - x_0) \frac{1}{v} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= 2\delta(t - t_0) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -2\delta(x - x_0) \frac{1}{v} \\ \frac{\partial g}{\partial \xi} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \right] &= \eta(t - t_0) \delta(\xi) \frac{1 - 2\eta(-|x - x_0|) - 1 + 2\eta(-|t - t_0|)}{v^2} = \\ &= \frac{2\eta(t - t_0)}{v^2} (\delta(-|x - x_0|/v) \eta(-|t - t_0|) - \delta(\xi) \eta(-v|t - t_0|)) = 0 \\ \delta(t - t_0) \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \delta(t - t_0) \text{sgn}(t - t_0) = 0 \\ g \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \right] &= \frac{2\eta(t - t_0)}{v^2} (\eta(-|x - x_0|/v) \eta(-|t - t_0|) - \eta(|t - t_0|) \eta(-|x - x_0|)) = \\ &= -\frac{2\eta(t - t_0)}{v^2} \eta(-|x - x_0|/v) \text{sgn}^2(t - t_0) \\ g \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right) &= -\eta(t - t_0) \eta(\xi) \frac{2}{v^2} (\delta((x - x_0)/v) + \delta(t - t_0)) = \\ &= -\frac{2}{v^2} \left(\eta^2(t - t_0) \delta((x - x_0)/v) + \frac{1}{2} \eta(-|x - x_0|/v) \delta(t - t_0) \right) = \\ &= -\frac{2}{v^2} \left(\eta(t - t_0) \delta((x - x_0)/v) - \frac{1}{2} \eta(-|t - t_0|) \delta((x - x_0)/v) + \frac{1}{2} \eta(-|x - x_0|/v) \delta(t - t_0) \right) = \\ &= [\text{чуть выше такое уже встречалось}] = -\frac{2}{v} \eta(t - t_0) \delta(x - x_0) \end{aligned}$$

В результате:

$$u''_{xx} - \frac{1}{v^2} u''_{tt} = -\frac{2}{v} f(0) \delta(t - t_0) \delta(x - x_0) - f''(|t - t_0|) \frac{\eta(t - t_0)}{v^2} \text{sgn}^2(t - t_0) \eta(-|x - x_0|) - \frac{2}{v} f'(|t - t_0|) \eta(t - t_0) \delta(x - x_0)$$

Здесь следует отметить одну деталь: результат имеет вид:

$$A\delta(x) + B\eta(-|x|)$$

Из интегрального определения δ -функции:

$$A\delta(x) + B\eta(-|x|) = A\delta(x)$$

И

$$u''_{xx} - \frac{1}{v^2} u''_{tt} = -\frac{2}{v} f(0) \delta(t - t_0) \delta(x - x_0) - \frac{2}{v} f'(|t - t_0|) \eta(t - t_0) \delta(x - x_0)$$

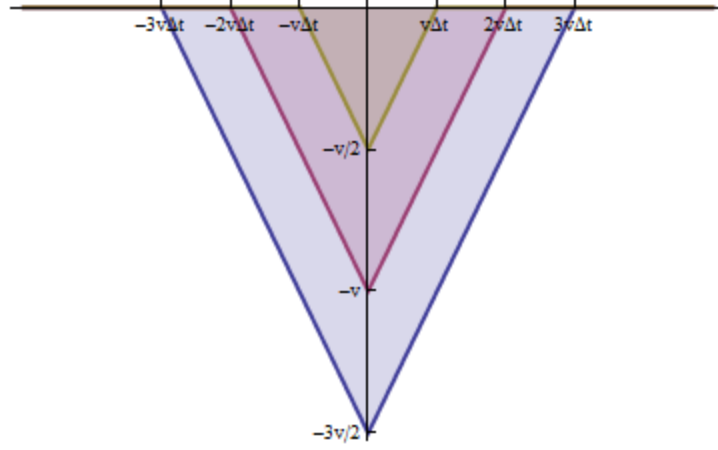
2. Пусть:

$$s(x, t) = \delta(x - x_0)\eta(t - t_0)$$

что соответствует постоянной во времени силе, действующей в фиксированной точке струны, начиная с некоторого момента.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{v}{4} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{sgn}(\xi + v\tau) - \operatorname{sgn}(\xi - v\tau)] \delta(x - x_0 - \xi) \eta(t - t_0 - \tau) d\tau d\xi = \\ &= -\frac{v}{4} \int_0^t [\operatorname{sgn}(x - x_0 + v\tau) - \operatorname{sgn}(x - x_0 - v\tau)] \eta(t - t_0 - \tau) d\tau = \\ &= -\frac{v}{4} \eta(t - t_0) \int_0^{t-t_0} [\operatorname{sgn}(x - x_0 + v\tau) - \operatorname{sgn}(x - x_0 - v\tau)] d\tau = -\frac{v}{4} \eta(t - t_0) \int_0^{t-t_0} 2\eta(v|\tau| - |x - x_0|) d\tau = \\ &= -\frac{v}{4} \eta(t - t_0) \eta(t - t_0 - |x - x_0|/v) \int_{|x-x_0|/v}^{t-t_0} 2\eta(v\tau - |x - x_0|) d\tau = -\frac{v}{2} \eta(t - t_0) \eta(t - t_0 - |x - x_0|/v) \int_{|x-x_0|/v}^{t-t_0} d\tau = \\ &= -\frac{v}{2} \eta(t - t_0) \eta(t - t_0 - |x - x_0|/v) (t - t_0 - |x - x_0|/v) \end{aligned}$$

Проверка по формуле выше показывает, что это правильный ответ. Форма струны в различные моменты времени показана на рисунке:



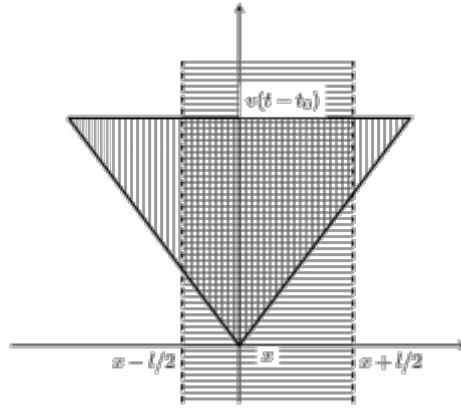
3. Пусть:

$$s(x, t) = \begin{cases} 0, & x \notin [-l/2, l/2] \\ S_0 \eta(t - t_0)/l, & x \in [-l/2, l/2] \end{cases} = \frac{S_0}{l} [\eta(x + l/2) - \eta(x - l/2)] \eta(t - t_0)$$

что соответствует постоянной силе, действующей на участок струны.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{v}{2} \int_0^t \int_{-v\tau}^{v\tau} s(x - \xi, t - \tau) d\tau d\xi = \\ &= -\frac{v}{2} \int_0^t \int_{-v\tau}^{v\tau} \frac{S_0}{l} [\eta(x + l/2 - \xi) - \eta(x - l/2 - \xi)] \eta(t - t_0 - \tau) d\tau d\xi = \\ &= -\frac{v}{2} \int_0^{t-t_0} \int_{-v\tau}^{v\tau} \frac{S_0}{l} [\eta(x + l/2 - \xi) - \eta(x - l/2 - \xi)] d\tau d\xi = -\frac{v S_0}{2 l} \int_S d\tau d\xi \end{aligned}$$

Область интегрирования S приведена на рисунке, и представляет собой пересечение полосы шириной l и треугольника, ограниченного кривыми $y = v(t - t_0)$, $y = x$, $y = -x$.

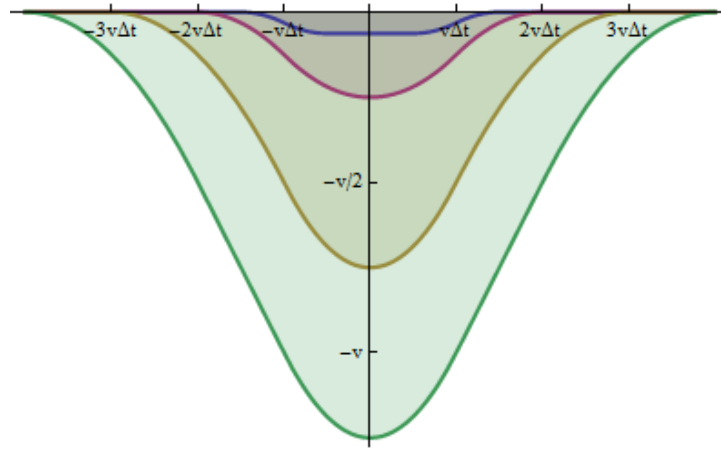


Решение можно представить с помощью функций, определяющих площадь пересечения треугольника с левой полуплоскостью, заданной прямой параллельной оси ординат:

$$S_+(x, x_A, x_B, x_C, y_B) = \frac{1}{2} y_B \frac{(x - x_A)^2}{x_B - x_A} \eta(x - x_A) \eta(x_B - x) + \\ + \frac{1}{2} y_B \left[(x_B - x_A) + \frac{2x_C - x - x_B}{x_C - x_B} (x - x_B) \right] \eta(x - x_B) \eta(x_C - x) + \frac{1}{2} y_B (x_C - x_A) \eta(x - x_C)$$

$$u(x, t) = -\frac{v}{2} \frac{S_0}{l} [S_+(x + l/2, -v(t - t_0), 0, v(t - t_0), v(t - t_0)) - S_+(x - l/2, -v(t - t_0), 0, v(t - t_0), v(t - t_0))]$$

К сожалению, выражение слишком громоздко, и его трудно проверить. На рисунке приведена форма струны в различные моменты времени:



Примечательно, что сначала график пологий, но со временем приобретает более параболическую форму.

4. Пусть:

$$s(x, t) = \delta(x - x_0) e^{i\omega t} \eta(t - t_0)$$

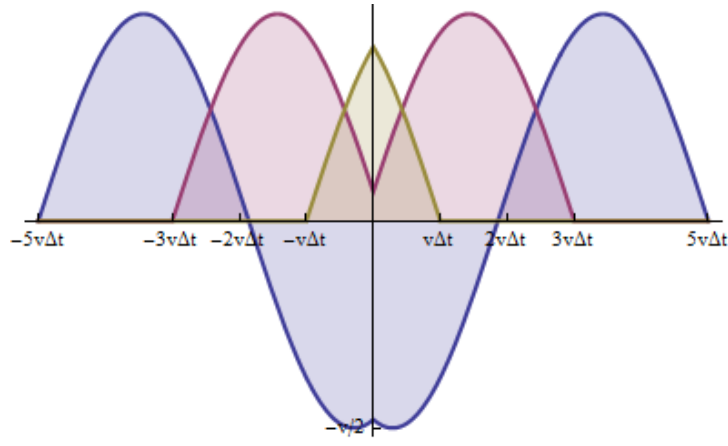
что соответствует силе действующей в точке по синусоидальному закону.

$$u(x, t) = -\frac{v}{4} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{sgn}(\xi + v\tau) - \operatorname{sgn}(\xi - v\tau)] s(x - \xi, t - \tau) d\tau d\xi = \\ = -\frac{v}{4} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{sgn}(\xi + v\tau) - \operatorname{sgn}(\xi - v\tau)] \delta(x - x_0 - \xi) e^{i\omega(t-\tau)} \eta(t - t_0 - \tau) d\tau d\xi = \\ = -\frac{v}{2} \eta(t - t_0) \int_0^{t-t_0} \eta(v\tau - |x - x_0|) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau = -\frac{v}{2} \eta(t - t_0) \eta(t - t_0 - |x - x_0|/v) e^{i\omega t} \int_{|x-x_0|/v}^{t-t_0} e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ = \frac{v}{2i\omega} \eta(t - t_0) \eta(t - t_0 - |x - x_0|/v) e^{i\omega t} e^{-i\omega(t-t_0-|x-x_0|/v)} = \frac{v}{2i\omega} \eta(t - t_0) \eta(t - t_0 - |x - x_0|/v) (e^{i\omega t_0} - e^{i\omega(t-|x-x_0|/v)})$$

Как легко видеть, ответ правильный. Действительная часть:

$$u(x, t) = \frac{v}{2\omega} \eta(t - t_0) \eta(t - t_0 - |x - x_0|/v) (\sin(\omega t_0) - \sin(\omega(t - |x - x_0|/v)))$$

Форма в различные моменты времени представлена на рисунке:



23.4 Вариационный принцип

Рассмотрим функционал:

$$J(u) = \int_{R^2} \left[\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt$$

$$\begin{aligned} \delta \left[\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] &= 2 \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right] = 2 \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \delta u \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right) \right] - 2 \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \delta u \\ &\Rightarrow \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{aligned}$$

Для функционала:

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_{R^2} \left[\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2s(x, t)u \right] dx dt \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= s(x, t) \end{aligned}$$

Выполним преобразование Фурье:

$$u = u^* = \int_{R^2} U(k, \omega) e^{i(\omega t - kx)} dk d\omega \quad s = s^* = \int_{R^2} S(k, \omega) e^{i(\omega t - kx)} dk d\omega$$

$$\begin{aligned} J(U) &= \\ &= \int_{R^2} \int_{R^2} \int_{R^2} \left[\frac{1}{v^2} \omega \omega' U^*(k, \omega) U(k', \omega') - k k' U^*(k, \omega) U(k', \omega') - 2S^*(k, \omega) U(k', \omega') \right] e^{i((\omega' - \omega)t - (k' - k)x)} dk d\omega dk' d\omega' dx dt = \\ &= 2\pi \int_{R^2} \int_{R^2} \left[\frac{1}{v^2} \omega \omega' U^*(k, \omega) U(k', \omega') - k k' U^*(k, \omega) U(k', \omega') - 2S^*(k, \omega) U(k', \omega') \right] \delta(\omega' - \omega) \delta(k' - k) dk d\omega dk' d\omega' = \\ &= 2\pi \int_{R^2} \left[\frac{1}{v^2} \omega^2 U^*(k, \omega) U(k, \omega) - k^2 U^*(k, \omega) U(k, \omega) - 2S^*(k, \omega) U(k, \omega) \right] dk d\omega \end{aligned}$$

24 Колебания с произвольной возбуждающей силой

Уравнение колебаний:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= f(t) \\ x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{aligned}$$

Решение будем искать в классе непрерывных функций. Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \omega_0^2 y &= \eta(t - t') \\ y(0) &= 0, \quad \dot{y}(0) = 0 \quad t' > 0 \end{aligned}$$

Её решение с непрерывной первой производной, как легко убедиться простой подстановкой:

$$y = \begin{cases} 0 & t < t' \\ \frac{1 - \cos(\omega_0(t - t'))}{\omega_0^2} & t \geq t' \end{cases}$$

Тогда решением задачи:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \delta(t - t') \\ z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0 \quad t' > 0$$

будет

$$z(t, t') = \begin{cases} 0 & t < t' \\ \frac{\sin(\omega_0(t-t'))}{\omega_0} & t \geq t' \end{cases}$$

А решение исходной задачи:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \int_0^\infty z(t, t') f(t') dt' = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0(t-t')) f(t') dt'$$

Есть одно замечание. Можно показать, что в случае задачи относительно y \dot{y} будет непрерывно, если непрерывно само решение? а \dot{y} ограничено сверху на любом конечном промежутке (достаточно домножить на \dot{y} и проинтегрировать в произвольном диапазоне), а для задачи относительно z , если решение непрерывно, то первая производная терпит разрыв. В то же время без этих требований построить решения затруднительно, особенно y .

25 Странные вещи

25.1 Тождество для д...а

$$f(x)\delta(x-x_0) + [F(x) - F(x_0)]\delta'(x-x_0) = 0, \quad F(x) = \int f(x)dx$$

Док-во:

Продифференцируем тождество:

$$F(x)\delta(x-x_0) = F(x_0)\delta(x-x_0)$$

Просто, не правда ли? В чём подвох? При представлении δ -функции в форме гауссовского предела доказательство упирается в весьма необычные трудности. В частности требуется доказать следующее равенство:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \left(1 - 2 \frac{(x-x_0)^2}{a^2} \right) e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}$$

И вот вопрос: как это сделать строго? Казалось бы, что сложного, рассмотрим два случая $x = x_0$ и $x \neq x_0$, равенство выполняется? - Да! Но мне это доказательство не даёт покоя. Кажется, что я что-то упускаю. Тем более, что из тождества следует:

$$\delta'(x-x_0) = \frac{1}{x_0-x} \delta(x-x_0)$$

25.2 Ещё одно странное тождество

$$(f(x)\eta(x-a))''_{xx} = f''(x)\eta(x-a) + f'(a)\delta(x-a) + f(a)\delta'(x-a)$$

Док-во:

Снова всё тривиально:

$$(f(x)\eta(x-a))''_{xx} = (f'(x)\eta(x-a) + f'(x)\delta(x-a))'_x = (f'(x)\eta(x-a) + f'(a)\delta(x-a))'_x = f''(x)\eta(x-a) + f'(a)\delta(x-a) + f(a)\delta'(x-a)$$

25.3 Функция отличная от нуля в одной единственной точке

$$f(x) = 2A\eta(-|x-a|) = \begin{cases} A, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$$

Наибольший интерес представляет её производная:

$$f'(x) = -2A\delta(-|x-a|) \operatorname{sgn}(x-a) = 0$$

Не правда ли замечательно! Теперь решение уравнения:

$$y' = 0, \quad y(0) = y_0$$

будет выглядеть так:

$$y = y_0 + \sum_{i, a_i \neq 0} 2C_i \eta(-|x-a_i|)$$

То есть в классе функций с разрывами решений бесконечно много!

Как мне подсказал Antony я вообще говоря не прав, так как здесь имеет место неопределённость вида $\infty \times 0$. Представление в форме предела последовательности для δ -функции, приводит тем не менее к результатам изложенным выше, но при одном дополнительном условии, что пределы можно менять местами, что скорее всего также неправильно. Ещё один способ мог бы быть связан с представлением решения в форме предела:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \eta(x - a - b) - \eta(x - a)$$

Но как следует из определения η -функции это тождественно 0. И вопрос о правильности полученных результатов остаётся открытым. Вдогонку к данной проблеме можно рассмотреть следующее интересное тождество:

$$\operatorname{sgn}^2(x) = |\operatorname{sgn}(x)|$$

Продифференцируем его:

$$4 \operatorname{sgn}(x) \delta(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(x)) 2 \delta(x) = 2 \operatorname{sgn}(x) \delta(x)$$

Если бы можно было сократить всё лишнее было бы:

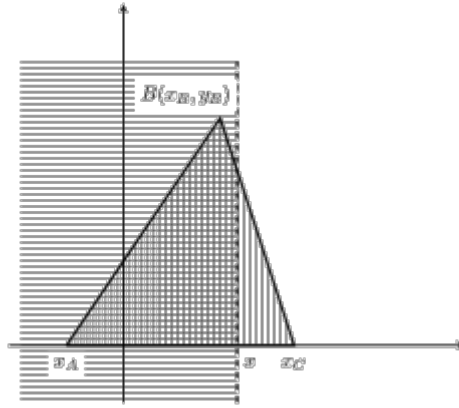
$$4 = 2$$

Но к счастью сократить ничего нельзя. Однако, отсюда следует:

$$2 \operatorname{sgn}(x) \delta(x) = 0$$

25.4 Функция для вычисления площади пересечения треугольника с полуплоскостью

Рассмотрим треугольник, один из катетов, которого лежит на оси абсцисс, другой параллелен оси ординат и прямую, параллельную оси ординат, делящую плоскость на две полуплоскости, как показано на рисунке:



Площадь области с двойной штриховкой:

$$S_+(x, x_A, x_B, x_C, y_B) = \begin{cases} 0, & x < x_A; \\ \frac{1}{2} y_B \frac{(x - x_A)^2}{x_B - x_A}, & x_A < x < x_B; \\ \frac{1}{2} y_B \left[(x_B - x_A) + \frac{2x_C - x - x_B}{x_C - x_B} (x - x_B) \right], & x_B < x < x_C; \\ \frac{1}{2} y_B (x_C - x_A), & x_C < x. \end{cases}$$

Другая полуплоскость, даёт область с одинарной штриховкой:

$$S_-(x, x_A, x_B, x_C, y_B) = \begin{cases} \frac{1}{2} y_B (x_C - x_A), & x < x_A; \\ \frac{1}{2} y_B \left[(x_C - x_B) + \frac{x_B + x - 2x_A}{x_B - x_A} (x_B - x) \right], & x_A < x < x_B; \\ \frac{1}{2} y_B \frac{(x_C - x)^2}{x_C - x_B}, & x_B < x < x_C; \\ 0, & x_C < x. \end{cases}$$

Первую из этих функций можно представить в виде:

$$S_+(x, x_A, x_B, x_C, y_B) = \frac{1}{2} y_B \frac{(x - x_A)^2}{x_B - x_A} \eta(x - x_A) \eta(x_B - x) + \\ + \frac{1}{2} y_B \left[(x_B - x_A) + \frac{2x_C - x - x_B}{x_C - x_B} (x - x_B) \right] \eta(x - x_B) \eta(x_C - x) + \frac{1}{2} y_B (x_C - x_A) \eta(x - x_C)$$

Здесь следует отметить, что представление возможно только если $x_A < x_B < x_C$. Именно для этого случая записаны все выражения выше.

26 Весёлые интегралы

Произвольные постоянные в неопределённых интегралах далее опущены.

1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsh} x = \ln |x + \sqrt{x^2+1}|$$

2.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+1} dx &= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \\ \Rightarrow \int \sqrt{x^2+1} dx &= \frac{x\sqrt{x^2+1} + \ln |x + \sqrt{x^2+1}|}{2} \end{aligned}$$

3.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx = \int 2\sqrt{x}d\sqrt{x-1} = [\sqrt{x-1} = p] = 2 \int \sqrt{p^2+1} dp = \sqrt{x}\sqrt{x-1} + \ln |\sqrt{x-1} + \sqrt{x}|$$

4.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{px^2 - ax - b}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \int \frac{\left(x - \frac{a}{2p} + \frac{a}{2p}\right) dx}{\sqrt{\left(x - \frac{a}{2p}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4p^2} + \frac{b}{p}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \sqrt{\left(x - \frac{a}{2p}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4p^2} + \frac{b}{p}\right)} + \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{a}{2p} \operatorname{arch} \frac{x - \frac{a}{2p}}{\sqrt{\frac{a^2}{4p^2} + \frac{b}{p}}}$$

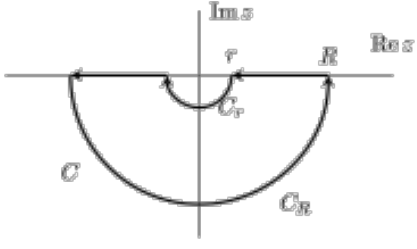
5.

$$\int_a^b |x| dx = \begin{cases} \frac{b^2 - a^2}{2}, & 0 < a < b \\ \frac{a^2 + b^2}{2}, & a < 0 < b \\ \frac{a^2 - b^2}{2}, & a < b < 0 \end{cases} = \frac{\operatorname{sgn}(b)b^2 - \operatorname{sgn}(a)a^2}{2}$$

$$\int |x| dx = \int x \operatorname{sgn}(x) dx = \operatorname{sgn}(x) \frac{x^2}{2}$$

$$\int x^n \operatorname{sgn}(x) dx = \operatorname{sgn}(x) \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

27 Весёлые интегралы в комплексной плоскости

1	<p>$f(z)$ – аналитическая функция без особых точек и ограничена по модулю:</p> $ f(z) < M$ 	$\oint_C \frac{e^{-iaz}}{z} f(z) dz = \int_{C_R} + \int_R + \int_{C_r} + \int_{-R}^{-r}$ $\left \int_{C_R} \frac{e^{-iaz}}{z} f(z) dz \right = \left \int_{\pi}^{2\pi} i e^{-ia R e^{i\varphi}} f(R e^{i\varphi}) d\varphi \right \leq \int_{\pi}^{2\pi} e^{a R \sin \varphi} M d\varphi =$ $= M e^{a R \sin \varphi^*} \pi \Big _{\varphi^* \in (\pi, 2\pi)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{e^{-iaz}}{z} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{2\pi}^{\pi} i e^{-ia r e^{i\varphi}} f(r e^{i\varphi}) d\varphi = -i f(0) \pi$ $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x} f(x) dx = -i f(0) \pi$ <p>Можно показать, что при изменении знака a изменится контур (будет вверх), направление обхода и как следствие знак результата.</p> $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x} f(x) dx = i f(0) \pi \operatorname{sgn} a$ <p>Отсюда можно получить более общее выражение:</p> $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x - x_0} f(x) dx = i e^{iax_0} f(x_0) \pi \operatorname{sgn} a$ <p>Внимание! Следует всегда помнить об ограничении на функцию $f(x)$ на всей комплексной плоскости. Вот хороший пример:</p> $f(x) = e^{ikx}$ <p>Функция неограниченна, формула даёт ответ:</p> $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x} e^{ikx} dx = i \pi \operatorname{sgn} a$ <p>Однако с другой стороны (и это правильный ответ):</p> $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x} e^{ikx} dx = i \pi \operatorname{sgn} (a + k)$
---	--	--

28 Весёлые диффуры

1.

$$g'' = \frac{a}{2g^2} + \frac{b}{g^3}$$

$$\Rightarrow g'^2 = g_0'^2 + \frac{a}{g_0} + \frac{b}{g_0^2} - \frac{a}{g} - \frac{b}{g^2} = p - \frac{a}{g} - \frac{b}{g^2}$$

$$\int_{g_0}^g \frac{g dg}{\sqrt{pg^2 - ag - b}} = t - t_0$$