Содержание

1 Расширение изначально однородно заряженного шара

Первый метод.

Рассмотрим эту задачу с точки зрения симметрии. Во-первых, понятно, что в системе отсутствует магнитное поле. Во-вторых, плотность заряда ρ и поле скоростей $\vec{v}$ зависят только от расстояния до центра шара. Также скорость имеет только одну компоненту v_r, также как и электрическое поле E_r.

Выберем внутри шара радиуса R заряд которой равен Q сферу радиуса r_0. Такая сфера ограничивает заряд:

$$q = \frac{r_0^3}{R^3}Q$$

Найдём как движется точка на поверхности такой сферы. Уравнение движения:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \alpha E_r = \alpha k \frac{q}{r^2}$$

$$\frac{v_r^2}{2} - \frac{v_{0r}^2}{2} = \alpha k q \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0}\right)$$

$$v_r = \sqrt{v_{0r}^2 + \frac{2\alpha k q}{r_0} - \frac{2\alpha k q}{r}} = \sqrt{a - \frac{b}{r}}$$

$$\int\limits_{r_0}^{r} \frac{\sqrt{r}dr}{\sqrt{ar - b}} = t - t_0$$

$$\frac{b}{a^{3/2}} \left(\sqrt{\frac{ar}{b}}\sqrt{\frac{ar}{b} - 1} + \ln\left|\sqrt{\frac{ar}{b} - 1} + \sqrt{\frac{ar}{b}}\right| \right)\Bigg|_{r_0}^{r} = t - t_0$$

В случае если $v_r(0) = 0$, получаем:

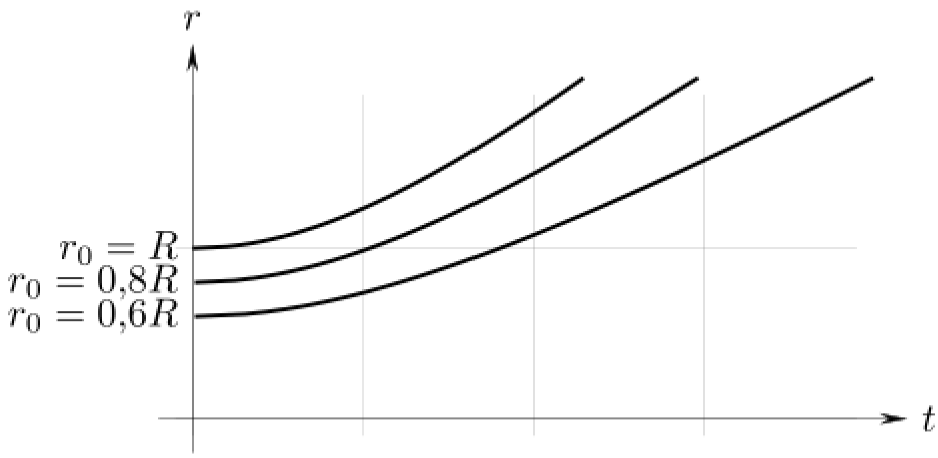
$$b = 2\alpha k q$$

$$a = \frac{2\alpha k q}{r_0}$$

$$\frac{r_0^{3/2}}{(2\alpha k q)^{1/2}} \left(\sqrt{\frac{r}{r_0}}\sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} + \ln\left|\sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} + \sqrt{\frac{r}{r_0}}\right| \right) = t$$

$$\left(\sqrt{\frac{r}{r_0}}\sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} + \ln\left|\sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} + \sqrt{\frac{r}{r_0}}\right| \right) = \sqrt{\frac{2\alpha k Q}{R^3}} t = f\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

На рисунке приведена зависимость $r(t)$, для различных значений r_0.



Плотность зарядов можно найти, определяя для каждого из слоёв, между которыми находится заряд dq, толщина между слоями dr_0, в момент времени t соответствующее расстояние между слоями: dr:

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dq}{dr},$$

где dr определяется dr_0, а $dt = 0$. В результате:

$$f'\left(\frac{r}{r_0}\right)\frac{dr}{r_0} = f'\left(\frac{r}{r_0}\right)\frac{r dr_0}{r_0^2}$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{dr_0}{r_0}$$

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 = \rho_0\left(f^{-1}\left(\sqrt{\frac{2\alpha kQ}{R^3}}t\right)\right)^{-3}$$

То есть ρ зависит только от времени и не зависит от расстояния, что означает, что шар всегда однороден.

2 Весёлые интегралы

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsh} x = \ln|x+\sqrt{x^2+1}|$$

2. $$\int \sqrt{x^2+1}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{x\sqrt{x^2+1} + \ln|x+\sqrt{x^2+1}|}{2}$$

3. $$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}dx = \int 2\sqrt{x}d\sqrt{x-1} = [\sqrt{x-1} = p] = 2\int \sqrt{p^2+1}dp = \sqrt{x}\sqrt{x-1} + \ln|\sqrt{x-1}+\sqrt{x}|$$