

Содержание

1	Расширение изначально однородно заряженного шара	2
2	Влияние гравитации поля на заряженный шар	4
3	Метод характеристик для уравнений Максвелла	4
4	Весёлые интегралы	4
5	Весёлые диффуры	5

1 Расширение изначально однородно заряженного шара

Первый метод.

Рассмотрим эту задачу с точки зрения симметрии. Во-первых, понятно, что в системе отсутствует магнитное поле. Во-вторых, плотность заряда ρ и поле скоростей \mathbf{v} зависят только от расстояния до центра шара. Также скорость имеет только одну компоненту v_r , также как и электрическое поле E_r .

Выберем внутри шара радиуса R заряд которой равен Q сферу радиуса r_0 . Такая сфера ограничивает заряд:

$$q = \frac{r_0^3}{R^3} Q$$

Найдём как движется точка на поверхности такой сферы. Уравнение движения:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = A E_r = A k \frac{q}{r^2}$$

$$\frac{v_r^2}{2} - \frac{v_{0r}^2}{2} = A k q \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right)$$

$$v_r = \sqrt{v_{0r}^2 + \frac{2 A k q}{r_0} - \frac{2 A k q}{r}} = \sqrt{a - \frac{b}{r}}$$

$$\int_{r_0}^r \frac{\sqrt{r} dr}{\sqrt{a r - b}} = t - t_0$$

$$\frac{b}{a^{3/2}} \left(\sqrt{\frac{a r}{b}} \sqrt{\frac{a r}{b} - 1} + \ln \left| \sqrt{\frac{a r}{b} - 1} + \sqrt{\frac{a r}{b}} \right| \right) \Big|_{r_0}^r = t - t_0$$

В случае если $v_r(0) = 0$, получаем:

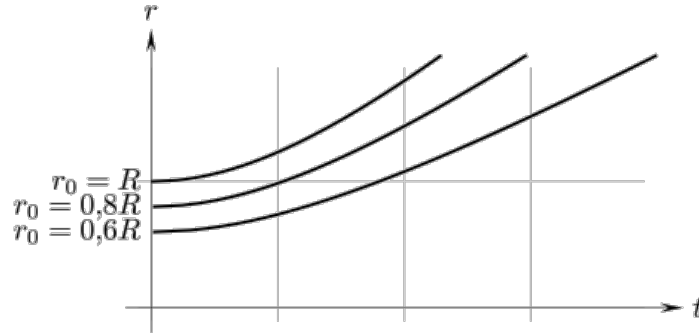
$$b = 2 A k q$$

$$a = \frac{2 A k q}{r_0}$$

$$\frac{r_0^{3/2}}{(2 A k q)^{1/2}} \left(\sqrt{\frac{r}{r_0}} \sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} + \ln \left| \sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} + \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right| \right) = t$$

$$\left(\sqrt{\frac{r}{r_0}} \sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} + \ln \left| \sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} + \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right| \right) = \sqrt{\frac{2 A k Q}{R^3}} t = f \left(\frac{r}{r_0} \right)$$

На рисунке приведена зависимость $r(t)$, для различных значений r_0 .



Плотность зарядов можно найти, определяя для каждого из слоёв, между которыми находится заряд dq , толщина между слоями dr_0 , в момент времени t соответствующее расстояние между слоями: dr :

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dq}{dr},$$

где dr определяется dr_0 , а $dt = 0$. В результате:

$$f' \left(\frac{r}{r_0} \right) \frac{dr}{r_0} = f' \left(\frac{r}{r_0} \right) \frac{r dr_0}{r_0^2}$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{dr_0}{r_0}$$

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3} \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 = \rho_0 \left(f^{-1} \left(\sqrt{\frac{2\alpha k Q}{R^3}} t\right)\right)^{-3}$$

То есть ρ зависит только от времени и не зависит от расстояния, что означает, что шар всегда однороден.

Второй метод.

С точки зрения уравнений Максвелла в сферически-симметричном случае:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \mathbf{e}_r & \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\theta & \frac{1}{r} \mathbf{e}_\alpha \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ E_r & r E_\theta & r \sin \theta E_\alpha \end{array} \right| &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \mathbf{e}_r & \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\theta & \frac{1}{r} \mathbf{e}_\alpha \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ B_r & r B_\theta & r \sin \theta B_\alpha \end{array} \right| &= \mu_0 \rho \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) &= 0 \\ \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) &= A \left(\mathbf{E} + \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\alpha \\ v_r & v_\theta & v_\alpha \\ B_r & B_\theta & B_\alpha \end{array} \right| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial B_\theta}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\alpha) \\ \frac{\partial B_\alpha}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) \\ \frac{\partial E_r}{\partial t} &= -\frac{\rho v_r}{\varepsilon_0} \\ \frac{\partial E_\theta}{\partial t} &= -c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\alpha) - \frac{\rho v_\theta}{\varepsilon_0} \\ \frac{\partial E_\alpha}{\partial t} &= c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) - \frac{\rho v_\alpha}{\varepsilon_0} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) &= 0 \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + A (E_r + v_\theta B_\alpha - v_\alpha B_\theta) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= -v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + A (E_\theta + v_\alpha B_r - v_r B_\alpha) \\ \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} &= -v_r \frac{\partial v_\alpha}{\partial r} + A (E_\alpha + v_r B_\theta - v_\theta B_r) \end{aligned}$$

Если в начальный момент времени:

$$E_\alpha, E_\theta, B_r, B_\alpha, B_\theta, v_\theta, v_\alpha, v_r = 0,$$

то как следует из системы уравнений первого порядка по времени, во все следующие моменты времени:

$$E_\alpha, E_\theta, B_r, B_\alpha, B_\theta, v_\theta, v_\alpha = 0,$$

Остаётся система из трёх уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_r}{\partial t} &= -\frac{\rho v_r}{\varepsilon_0} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + A E_r \end{aligned}$$

Отсюда легко получить систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^2 E_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) &= 0 \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} &= A E_r \end{aligned}$$

Как её решать? Методом характеристик. Все уравнения имеют один и тот же вид и представляют собой уравнения переноса. Скорость переноса v_r . Система в методе характеристик:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v_r \\ \frac{d(r^2 E_r)}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_r}{dt} &= A E_r \end{aligned}$$

Из второго уравнения следует, что:

$$E_r = \frac{E_r(0) r_0^2}{r^2} = k \frac{r_0^3}{R^3 r^2} Q = k \frac{q}{r^2}$$

И система сводится к системе из предыдущего метода.

2 Влияние гравитации поля на заряженный шар

Поле имеет энергию и следовательно массу. Резонно предположить, что эта масса должна участвовать в гравитационных взаимодействиях и гравитация поля должна влиять на движение заряженной среды. Попробуем это учесть. В сферически симметричном случае массу поля, ограниченная сферой радиуса $r(r_0, t)$, можно найти из выражения:

$$m = \frac{\varepsilon_0}{2c^2} \int_0^{r(r_0, t)} E_r^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi k^2 \varepsilon_0 Q^2}{2c^2 R^6} \int_0^{r_0} \frac{r_0^6}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r_0} dr_0 = \frac{kQ^2}{2c^2 R^6} \int_0^{r_0} \frac{r_0^6}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r_0} dr_0$$

3 Метод характеристик для уравнений Максвелла

Метод характеристик удобно применять для среды, описываемой уравнениями гидродинамики. Система уравнений Максвелла и второй закон Ньютона для заряженной жидкости с отношением заряда к массе для частицы среды A :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \frac{d\mathbf{E}}{dt} &= c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{E} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \frac{d\mathbf{B}}{dt} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{a}(A(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})) \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \rho \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \mathbf{a}(A(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{E}}{dt} &= c^2 \nabla_B \times \mathbf{B} - \mathbf{v}(\nabla_E \cdot \mathbf{E}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla_E) \mathbf{E} = c^2 \nabla_B \times \mathbf{B} - \nabla_E \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) = c^2 \nabla_{E,B} \times \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} \right) \\ \frac{d\mathbf{B}}{dt} &= -\nabla_E \times \mathbf{E} - \mathbf{v}(\nabla_B \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla_B) \mathbf{B} = -\nabla_E \times \mathbf{E} - \nabla_B \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\nabla_{E,B} \times (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{a}(A(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})) \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} \end{aligned}$$

Последняя система интересна тем, что вскрывает некоторые внутренние связи, но предыдущая система лучше поддаётся анализу. Итак,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{E}}{dt} &= c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{E} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E} \\ \frac{d\mathbf{B}}{dt} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{a}(A(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})) \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} \end{aligned}$$

Начальные условия:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t_0), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}_0, t_0), \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t_0), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$$

Решением системы будут выражения:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}_0, t), \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t), \quad \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$$

Здесь \mathbf{r}_0 аналог постоянной интегрирования. Первые три выражения показывают как меняется электромагнитные поля и поле скоростей в различные моменты времени вдоль характеристики. Выбирая в качестве \mathbf{r}_0 все точки пространства, можно получить поле во всём пространстве в различные моменты времени.

4 Весёлые интегралы

1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{arsh} x = \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}|$$

2.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 1} dx &= x\sqrt{x^2 + 1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = x\sqrt{x^2 + 1} - \int \sqrt{x^2 + 1} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ \Rightarrow \int \sqrt{x^2 + 1} dx &= \frac{x\sqrt{x^2 + 1} + \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}|}{2} \end{aligned}$$

3.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx = \int 2\sqrt{x} d\sqrt{x-1} = [\sqrt{x-1} = p] = 2 \int \sqrt{p^2+1} dp = \sqrt{x}\sqrt{x-1} + \ln |\sqrt{x-1} + \sqrt{x}|$$

4.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{px^2 - ax - b}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \int \frac{\left(x - \frac{a}{2p} + \frac{a}{2p}\right) dx}{\sqrt{\left(x - \frac{a}{2p}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4p^2} + \frac{b}{p}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \sqrt{\left(x - \frac{a}{2p}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4p^2} + \frac{b}{p}\right)} + \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{a}{2p} \operatorname{arch} \frac{x - \frac{a}{2p}}{\sqrt{\frac{a^2}{4p^2} + \frac{b}{p}}}$$

5 Весёлые диффуры

1.

$$\begin{aligned} g'' &= \frac{a}{2g^2} + \frac{b}{g^3} \\ \Rightarrow g'^2 &= g_0'^2 + \frac{a}{g_0} + \frac{b}{g_0^2} - \frac{a}{g} - \frac{b}{g^2} = p - \frac{a}{g} - \frac{b}{g^2} \\ \int_{g_0}^g \frac{g dg}{\sqrt{pg^2 - ag - b}} &= t - t_0 \end{aligned}$$