Содержание

1 Расширение изначально однородно заряженного шара

Первый метод.
Рассмотрим эту задачу с точки зрения симметрии. Во-первых, понятно, что в системе отсутствует магнитное поле. Во-вторых, плотность заряда ρ и поле скоростей $\boldsymbol{v}$ зависят только от расстояния до центра шара. Также скорость имеет только одну компоненту v_r, также как и электрическое поле E_r.
Выберем внутри шара радиуса R заряд которой равен Q сферу радиуса r_0. Такая сфера ограничивает заряд:

$$q = \frac{r_0^3}{R^3} Q$$

Найдём как движется точка на поверхности такой сферы. Уравнение движения:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = AE_r = Ak\frac{q}{r^2}$$

$$\frac{v_r^2}{2} - \frac{v_{0r}^2}{2} = Akq\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0}\right)$$

$$v_r = \sqrt{v_{0r}^2 + \frac{2Akq}{r_0} - \frac{2Akq}{r}} = \sqrt{a - \frac{b}{r}}$$

$$\int\limits_{r_0}^{r} \frac{\sqrt{r}dr}{\sqrt{ar-b}} = t - t_0$$

$$\frac{b}{a^{3/2}}\left(\sqrt{\frac{ar}{b}}\sqrt{\frac{ar}{b}-1} + \ln\left|\sqrt{\frac{ar}{b}-1} + \sqrt{\frac{ar}{b}}\right|\right)\Bigg|_{r_0}^{r} = t - t_0$$

В случае если $v_r(0) = 0$, получаем:

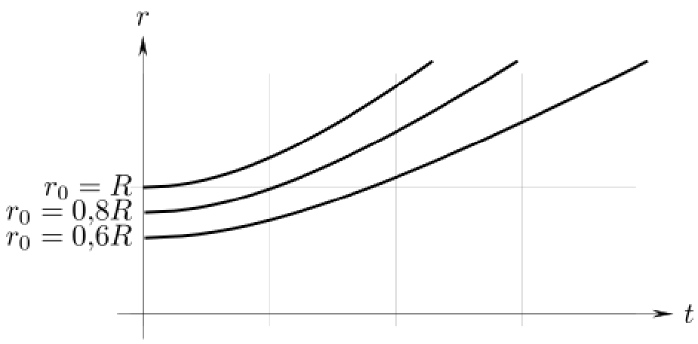
$$b = 2Akq$$

$$a = \frac{2Akq}{r_0}$$

$$\frac{r_0^{3/2}}{(2Akq)^{1/2}}\left(\sqrt{\frac{r}{r_0}}\sqrt{\frac{r}{r_0}-1} + \ln\left|\sqrt{\frac{r}{r_0}-1} + \sqrt{\frac{r}{r_0}}\right|\right) = t$$

$$\left(\sqrt{\frac{r}{r_0}}\sqrt{\frac{r}{r_0}-1} + \ln\left|\sqrt{\frac{r}{r_0}-1} + \sqrt{\frac{r}{r_0}}\right|\right) = \sqrt{\frac{2AkQ}{R^3}}t = f\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

На рисунке приведена зависимость $r(t)$, для различных значений r_0.



Плотность зарядов можно найти, определяя для каждого из слоёв, между которыми находится заряд dq, толщина между слоями dr_0, в момент времени t соответствующее расстояние между слоями: dr:

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dq}{dr},$$

где dr определяется dr_0, а $dt = 0$. В результате:

$$f'\left(\frac{r}{r_0}\right)\frac{dr}{r_0} = f'\left(\frac{r}{r_0}\right)\frac{r dr_0}{r_0^2}$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{dr_0}{r_0}$$

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 = \rho_0\left(f^{-1}\left(\sqrt{\frac{2\alpha k Q}{R^3}}t\right)\right)^{-3}$$

То есть ρ зависит только от времени и не зависит от расстояния, что означает, что шар всегда однороден.
Второй метод.
С точки зрения уравнений Максвелла в сферически-симметричном случае:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{r^2\sin\theta}\boldsymbol{e}_r & \frac{1}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\theta & \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\alpha \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ E_r & rE_\theta & r\sin\theta E_\alpha \end{vmatrix} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{r^2\sin\theta}\boldsymbol{e}_r & \frac{1}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\theta & \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\alpha \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ B_r & rB_\theta & r\sin\theta B_\alpha \end{vmatrix} = \mu_0\rho\boldsymbol{v} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 B_r\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right) = A\left(\boldsymbol{E} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_\alpha \\ v_r & v_\theta & v_\alpha \\ B_r & B_\theta & B_\alpha \end{vmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned}
&\frac{\partial B_r}{\partial t} = 0 \\
&\frac{\partial B_\theta}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\alpha) \\
&\frac{\partial B_\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) \\
&\frac{\partial E_r}{\partial t} = -\frac{\rho v_r}{\varepsilon_0} \\
&\frac{\partial E_\theta}{\partial t} = -c^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\alpha) - \frac{\rho v_\theta}{\varepsilon_0} \\
&\frac{\partial E_\alpha}{\partial t} = c^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) - \frac{\rho v_\alpha}{\varepsilon_0} \\
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 B_r\right) = 0 \\
&\frac{\partial v_r}{\partial t} = -v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + A\left(E_r + v_\theta B_\alpha - v_\alpha B_\theta\right) \\
&\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = -v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + A\left(E_\theta + v_\alpha B_r - v_r B_\alpha\right) \\
&\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = -v_r\frac{\partial v_\alpha}{\partial r} + A\left(E_\alpha + v_r B_\theta - v_\theta B_r\right)
\end{aligned}$$

Если в начальный момент времени:

$$E_\alpha, E_\theta, B_r, B_\alpha, B_\theta, v_\theta, v_\alpha, v_r = 0,$$

то как следует из системы уравнений первого порядка по времени, во все следующие моменты времени:

$$E_\alpha, E_\theta, B_r, B_\alpha, B_\theta, v_\theta, v_\alpha = 0,$$

Остаётся система из трёх уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E_r}{\partial t} = -\frac{\rho v_r}{\varepsilon_0} \\
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
&\frac{\partial v_r}{\partial t} = -v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + AE_r
\end{aligned}$$

Отсюда легко получить систему:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial r^2 E_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) = 0 \\
&\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} = AE_r
\end{aligned}$$

Как её решать? Методом характеристик. Все уравнения имеют один и тот же вид и представляют собой уравнения переноса. Скорость переноса v_r. Система в методе характеристик:

$$\begin{aligned}
&\frac{dr}{dt} = v_r \\
&\frac{d(r^2 E_r)}{dt} = 0 \\
&\frac{dv_r}{dt} = AE_r
\end{aligned}$$

Из второго уравнения следует, что:

$$E_r = \frac{E_r(0)r_0^2}{r^2} = k\frac{r_0^3}{R^3 r^2}Q = k\frac{q}{r^2}$$

И система сводится к системе из предыдущего метода.

2 Влияние гравитации поля на заряженный шар

Поле имеет энергию и следовательно массу. Резонно предположить, что эта масса должна участвовать в гравитационных взаимодействиях и гравитация поля должна влиять на движение заряженной среды. Попробуем это учесть. В сферически симметричном случае массу поля, ограниченная сферой радиуса $r(r_0, t)$, можно найти из выражения:

$$m = \frac{\varepsilon_0}{2c^2}\int\limits_0^{r(r_0,t)} E_r^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi k^2\varepsilon_0 Q^2}{2c^2R^6}\int\limits_0^{r_0}\frac{r_0^6}{r^2}\frac{\partial r}{\partial r_0}dr_0 = \frac{kQ^2}{2c^2R^6}\int\limits_0^{r_0}\frac{r_0^6}{r^2}\frac{\partial r}{\partial r_0}dr_0$$

3 Метод характеристик для уравнений Максвелла

Метод характеристик удобно применять для среды, описываемой уравнениями гидродинамики. Система уравнений Максвелла и второй закон Ньютона для заряженной жидкости с отношением заряда к массе для частицы среды A:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\\
&\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0\\
&\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0\rho\boldsymbol{v} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}\\
&\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}(A(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}))
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
&\frac{d\boldsymbol{E}}{dt} = c^2\operatorname{rot}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}\\
&\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\\
&\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{a}(A(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}))\\
&\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\boldsymbol{E}}{dt} = c^2\nabla_B\times\boldsymbol{B} - \boldsymbol{v}(\nabla_E\cdot\boldsymbol{E}) + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla_E)\boldsymbol{E} = c^2\nabla_B\times\boldsymbol{B} - \nabla_E\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}) = c^2\nabla_{E,B}\times\left(\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}\right)\\
&\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} = -\nabla_E\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{v}(\nabla_B\cdot\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla_B)\boldsymbol{B} = -\nabla_E\times\boldsymbol{E} - \nabla_B\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) = -\nabla_{E,B}\times(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\\
&\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{a}(A(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}))\\
&\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

Последняя система интересна тем, что вскрывает некоторые внутренние связи, но предыдущая система лучше поддаётся анализу. Итак,

$$\begin{aligned}
&\frac{d\boldsymbol{E}}{dt} = c^2\operatorname{rot}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}\\
&\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\\
&\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{a}(A(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}))\\
&\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

Начальные условия:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0,t_0),\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_0,t_0),\quad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0,t_0),\quad \boldsymbol{r}(t_0)=\boldsymbol{r}_0$$

Решением системы будут выражения:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0,t),\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_0,t),\quad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0,t),\quad \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0,t)$$

Здесь $\boldsymbol{r}_0$ аналог постоянной интегрирования. Первые три выражения показывают как меняется электромагнитные поля и поле скоростей в различные моменты времени вдоль характеристики. Выбирая в качестве $\boldsymbol{r}_0$ все точки пространства, можно получить поле во всём пространстве в различные моменты времени.

4 Движение заряженной частицы в скрещенных полях

Рассмотрим движение частицы массой m, зарядом q в скрещенном поле $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$. Уравнения движения:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) = q(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{B}$$

Вводим собственное время τ:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{mc^2}{W}$$

Тогда:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = \frac{q}{m}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{u}W/c^2) \times \boldsymbol{B}$$

Вводим циклотронную частоту:

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{q}{m}\boldsymbol{B}$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = -\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{u}W/c^2)$$

Рассмотрим также энергию:

$$W = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{c^2}{W}\boldsymbol{p} \cdot \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{u})$$

Заметим теперь, что:

$$\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{p}_0$$

$$\frac{d\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p}}{d\tau} = -\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{u}) = \frac{dW}{d\tau}$$

В результате:

$$W - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p} = const = W_0 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p}_0 = W_0'$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = -\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p})/c^2 - W_0'/c^2)$$

Введём правую тройку ортов:

$$\boldsymbol{e}_\omega = \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{\omega_0} \quad \boldsymbol{e}_t = \frac{\boldsymbol{e}_\omega \times \boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{e}_\omega \times \boldsymbol{u}|} = \frac{\boldsymbol{e}_\omega \times \boldsymbol{u}}{u \sin\theta} \quad \boldsymbol{e}_s = \boldsymbol{e}_\omega \times \boldsymbol{e}_t = \frac{\boldsymbol{e}_\omega u \cos\theta - \boldsymbol{u}}{u \sin\theta} = \frac{\boldsymbol{e}_\omega \cos\theta - \boldsymbol{u}/u}{\sin\theta}$$

$$\boldsymbol{u} = u\cos\theta \boldsymbol{e}_\omega - u\sin\theta \boldsymbol{e}_s$$

$$\frac{dp_s}{d\tau}\boldsymbol{e}_s + \frac{dp_t}{d\tau}\boldsymbol{e}_t = \omega_0 p_s \boldsymbol{e}_t - \omega_0 p_t \boldsymbol{e}_s - \omega_0 u^2 \sin^2\theta p_s/c^2 \boldsymbol{e}_t + \omega_0 u^2 \cos\theta \sin\theta p_\omega/c^2 \boldsymbol{e}_t + \omega_0 u \sin\theta W_0'/c^2 \boldsymbol{e}_t$$

$p_\omega = p_{0\omega}$

$\dfrac{dp_s}{d\tau} = -\omega_0 p_t$

$\dfrac{dp_t}{d\tau} = \omega_0(1 - u^2\sin^2\theta/c^2)p_s + \omega_0 u \sin\theta W_0'/c^2 + \omega_0 u^2 \cos\theta \sin\theta p_{0\omega}/c^2 = \omega_0(1 - u^2\sin^2\theta/c^2)p_s + \omega_0 u \sin\theta(W_0 + u\sin\theta p_{0s})/c^2$

$$\frac{d^2p_t}{d\tau^2} = \omega_0^2(u^2\sin^2\theta/c^2 - 1)p_\tau$$

Введём обозначения:

$$k = \omega_0\sqrt{u^2\sin^2\theta/c^2 - 1}$$

$$\begin{aligned}
&m\frac{dx_t}{d\tau} = p_t = A\,\mathrm{sh}\,(k\tau) + p_{0t}\,\mathrm{ch}\,(k\tau)\\
&m\frac{dx_s}{d\tau} = p_s = -\frac{\omega_0}{k}(A\,\mathrm{ch}\,(k\tau) + p_{0t}\,\mathrm{sh}\,(k\tau)) + \frac{\omega_0^2 u\sin\theta(W_0 + u\sin\theta p_{0s})}{k^2c^2}\\
&\Rightarrow A = \frac{\omega_0 u\sin\theta(W_0 + u\sin\theta p_{0s})}{kc^2} - \frac{k}{\omega_0}p_{0s} = \frac{\omega_0(u\sin\theta W_0/c^2 + p_{0s})}{k}\\
&\Rightarrow p_s = -\frac{\omega_0}{k}(A(\,\mathrm{ch}\,(k\tau) - 1) + p_{0t}\,\mathrm{sh}\,(k\tau)) + p_{0s}\\
&m\frac{dx_\omega}{d\tau} = p_\omega = p_{0\omega}\\
&mc^2\frac{dt}{d\tau} = W = W_0 + u\sin\theta(p_s - p_{0s})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_t = \frac{1}{mk}(A(\,\mathrm{ch}\,(k\tau) - 1) + p_{0t}\,\mathrm{sh}\,(k\tau)) + x_{0t}\\
&x_s = -\frac{\omega_0}{k^2m}(A(\,\mathrm{sh}\,(k\tau) - k\tau) + p_{0t}(\,\mathrm{ch}\,(k\tau) - 1)) + \frac{p_{0s}\tau}{m} + x_{0s}\\
&x_\omega = \frac{p_{0\omega}\tau}{m} + x_{0\omega}\\
&t = \frac{1}{mc^2}(W_0\tau + u\sin\theta(m(x_s - x_{0s}) - p_{0s}\tau))
\end{aligned}$$

Если $u \sin\theta = c$:

$$A = A'/k = \frac{\omega_0(W_0/c + p_{0s})}{k}$$

$$x_t = \frac{1}{m}(A'\frac{\tau^2}{2} + p_{0t}\tau) + x_{0t}$$

$$x_s = -\frac{\omega_0}{m}(A'\frac{\tau^3}{6} + p_{0t}\frac{\tau^2}{2} + \frac{p_{0s}\tau}{m} + x_{0s}$$

$$x_\omega = \frac{p_{0\omega}\tau}{m} + x_{0\omega}$$

$$t = \frac{1}{mc^2}(W_0\tau + u\sin\theta(m(x_s - x_{0s}) - p_{0s}\tau))$$

Если $u \sin\theta < c$:

$$k = i\omega \qquad A = -iA'$$

$$x_t = \frac{1}{m\omega}(-A'(\cos(\omega\tau) - 1) + p_{0t}\sin(\omega\tau)) + x_{0t}$$

$$x_s = \frac{\omega_0}{\omega^2 m}(A(\sin(\omega\tau) - \omega\tau) + p_{0t}(\cos(\omega\tau) - 1)) + \frac{p_{0s}\tau}{m} + x_{0s}$$

$$x_\omega = \frac{p_{0\omega}\tau}{m} + x_{0\omega}$$

$$t = \frac{1}{mc^2}(W_0\tau + u\sin\theta(m(x_s - x_{0s}) - p_{0s}\tau))$$

5 Весёлые интегралы

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsh} x = \ln|x + \sqrt{x^2+1}|$$

2. $$\int \sqrt{x^2+1}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{x\sqrt{x^2+1} + \ln|x + \sqrt{x^2+1}|}{2}$$

3. $$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}dx = \int 2\sqrt{x}d\sqrt{x-1} = [\sqrt{x-1} = p] = 2\int \sqrt{p^2+1}dp = \sqrt{x}\sqrt{x-1} + \ln|\sqrt{x-1} + \sqrt{x}|$$

4. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{px^2 - ax - b}} = \frac{1}{\sqrt{p}}\int \frac{\left(x - \frac{a}{2p} + \frac{a}{2p}\right)dx}{\sqrt{\left(x - \frac{a}{2p}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4p^2} + \frac{b}{p}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{p}}\sqrt{\left(x - \frac{a}{2p}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4p^2} + \frac{b}{p}\right)} + \frac{1}{\sqrt{p}}\frac{a}{2p}\operatorname{arch}\frac{x - \frac{a}{2p}}{\sqrt{\frac{a^2}{4p^2} + \frac{b}{p}}}$$

6 Весёлые диффуры

1. $$g'' = \frac{a}{2g^2} + \frac{b}{g^3}$$

$$\Rightarrow g'^2 = g_0'^2 + \frac{a}{g_0} + \frac{b}{g_0^2} - \frac{a}{g} - \frac{b}{g^2} = p - \frac{a}{g} - \frac{b}{g^2}$$

$$\int\limits_{g_0}^{g} \frac{g\,dg}{\sqrt{pg^2 - ag - b}} = t - t_0$$