

Содержание

1	Расширение изначально однородно заряженного шара	2
2	Весёлые интегралы	3

1 Расширение изначально однородно заряженного шара

Первый метод.

Рассмотрим эту задачу с точки зрения симметрии. Во-первых, понятно, что в системе отсутствует магнитное поле. Во-вторых, плотность заряда ρ и поле скоростей \vec{v} зависят только от расстояния до центра шара. Также скорость имеет только одну компоненту v_r , также как и электрическое поле E_r .

Выберем внутри шара радиуса R заряд которой равен Q сферу радиуса r_0 . Такая сфера ограничивает заряд:

$$q = \frac{r_0^3}{R^3} Q$$

Найдём как движется точка на поверхности такой сферы. Уравнение движения:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \alpha E_r = \alpha k \frac{q}{r^2}$$

$$\frac{v_r^2}{2} - \frac{v_{0r}^2}{2} = \alpha k q \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right)$$

$$v_r = \sqrt{v_{0r}^2 + \frac{2\alpha k q}{r_0} - \frac{2\alpha k q}{r}} = \sqrt{a - \frac{b}{r}}$$

$$\int_{r_0}^r \frac{\sqrt{r} dr}{\sqrt{ar - b}} = t - t_0$$

$$\frac{b}{a^{3/2}} \left(\sqrt{\frac{ar}{b}} \sqrt{\frac{ar}{b} - 1} + \ln \left| \sqrt{\frac{ar}{b} - 1} + \sqrt{\frac{ar}{b}} \right| \right) \Big|_{r_0}^r = t - t_0$$

Плотность зарядов можно найти, определяя для каждого слоёв, между которыми находится заряд dq толщина между слоями dr_0 в момент времени t соответствующее расстояние между слоями: dr :

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dr_0}{dr} \frac{dq}{dr_0}$$

В случае если $v_r(0) = 0$, получаем:

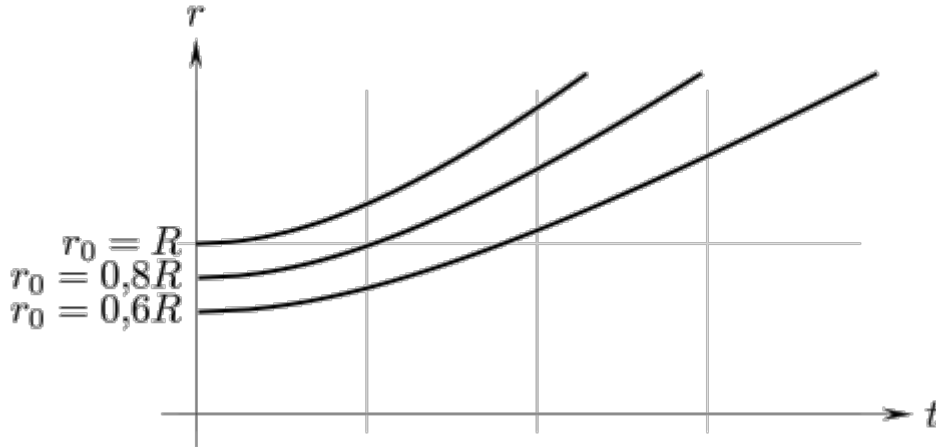
$$b = 2\alpha k q$$

$$a = \frac{2\alpha k q}{r_0}$$

$$\frac{r_0^{3/2}}{(2\alpha k q)^{1/2}} \left(\sqrt{\frac{r}{r_0}} \sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} + \ln \left| \sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} + \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right| \right) = t$$

$$\left(\sqrt{\frac{r}{r_0}} \sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} + \ln \left| \sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} + \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right| \right) = \sqrt{\frac{2\alpha k Q}{R^3}} t$$

На рисунке приведена зависимость $r(t)$, для различных значений r_0 .



2 Весёлые интегралы

1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsh} x = \ln |x + \sqrt{x^2+1}|$$

2.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+1} dx &= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \\ \Rightarrow \int \sqrt{x^2+1} dx &= \frac{x\sqrt{x^2+1} + \ln |x + \sqrt{x^2+1}|}{2} \end{aligned}$$

3.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx = \int 2\sqrt{x}d\sqrt{x-1} = [\sqrt{x-1} = p] = 2 \int \sqrt{p^2+1} dp = \sqrt{x}\sqrt{x-1} + \ln |\sqrt{x-1} + \sqrt{x}|$$