# ОТО

## Векторы

Существуют такие объекты как векторы. Векторы представляют собой элементы линейных векторных пространств и обладают следующими свойствами:

1. Коммутативность относительно сложения:



1. Ассоциативность относительно сложения:



1. Нулевой элемент:



1. Противоположный элемент:



1. Ассоциативность умножения вектора на скаляр:



1. Умножение на единицу:



1. Дистрибутивность относительно сложения скаляров:



1. Дистрибутивность относительно сложения векторов:



Любым двум векторам можно сопоставить скаляр  обладающий свойствами:

1. , равенство при этом возможно только при .
2. .
3. .

Основной особенностью векторных пространств является существование  различных линейно независимых векторов , называемых ковариантным базисом:



Компоненты вектора  носят название контрвариантных. Для любого данного ковариантного базиса можно построить контрвариантный базис  такой, что:



Соответствующие компоненты вектора  называются ковариантными:



## Пространство и векторы

Определением пространства и его свойствами я как не владел, так и не владею. Не знаю даже, есть ли вообще адекватные подходы к этому понятию. По этой причине мы будем понимать под пространством множество, каждый элемент которого представляет собой  действительных чисел . Каждый элемент множества носит название точки. Подмножество множества, представленное  функциями , носит название линии. Лучше всё задавать в неявном виде. Тогда можно построить над любым пространством подмножества-поверхности любого порядка.

Над этим множеством для каждых двух элементов будет задано соотношение, называемое расстоянием. Обычно расстояние удовлетворяет следующим двум свойствам:

1. 
2. 

Отсюда можно получить ещё два свойства:

1. 
2. 

Такой подход безусловно хорош, но как быть с криволинейными пространствами? Начнём с малого.

## Простая поверхность как искривлённое пространство

### Прямые на поверхности

Представим себе простую поверхность . Выберем две точки на данной поверхности и посмотрим, какая кривая соответствует в этом случае прямой, то есть обладает наименьшей длиной. Задача становится вариационной:





Это обычная задача с лагранжианом:



Уравнения прямой:



Перед нами уравнения второго порядка с граничными условиями. Граничных условий 4, что достаточно для полного решения.