绪论

迭代与递归：减而治之

01-E1

让最后一个数结束这些争吵......

否则我就利用你留给我的权限

像一根一根扯马尾鬃一般

——删去个位数直至啥也看不见

您也会被我的推理逗着玩

虽我之死，有子存焉；子又生孙，孙又生子；子又有子，子又有孙；子子孙孙无穷匮也，而山不加增，何苦而不平？

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

Sum：计算任意n个整数之和

❖ 思路：逐一取出每个元素，累加之

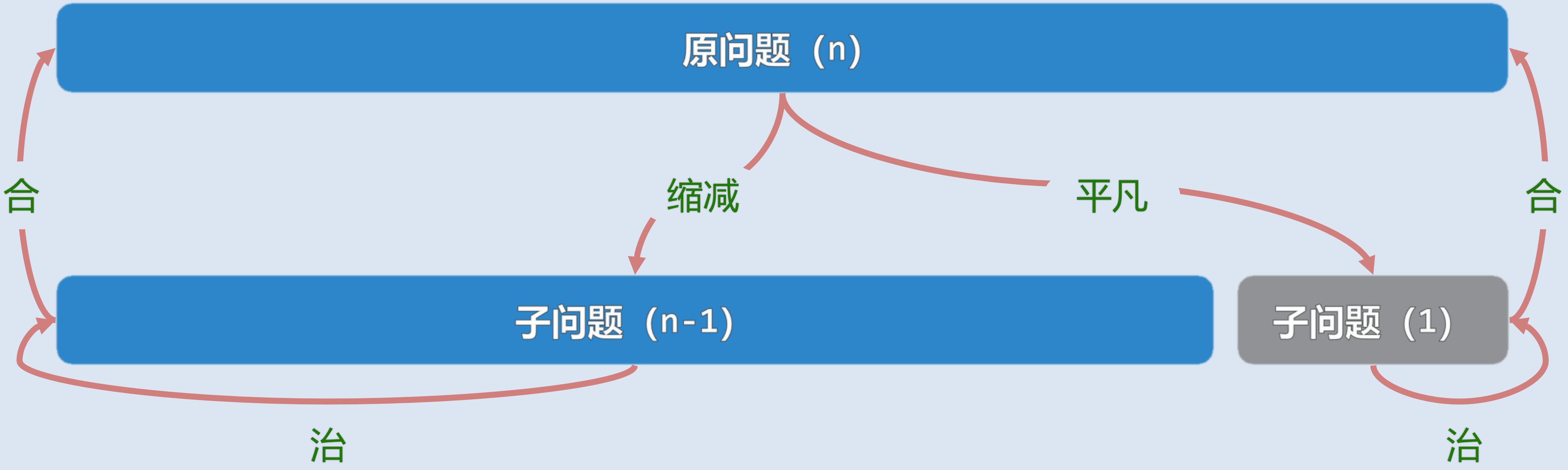
```
int SumI( int A[], int n ) {
   int sum = 0; //O(1)
   for ( int i = 0; i < n; i++ ) //O(n)
      sum += A[i]; //O(1)
   return sum; //O(1)
}
```

❖ 无论A[ ]内容如何，都有：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T(n)} &= 1 + \mathrm{n} \cdot 1 + 1 \\
&= n + 2 \\
&= \mathcal{O}(n) \\
&= \Omega(n) \\
&= \Theta(n)
\end{aligned}
$$

❖ 空间呢？

Decrease-and-conquer



❖ **为求解一个大规模的问题，可以**

- **将其划分为两个子问题：其一平凡，另一规模缩减** //单调性

- **分别求解子问题；再由子问题的解，得到原问题的解**

Linear Recursion: Trace

```
sum( int A[], int n )

{  return  n < 1  ?  0 : sum(A, n - 1) + A[n - 1];  }
```

❖ 递归跟踪：绘出计算过程中出现过的所有递归实例（及其调用关系）

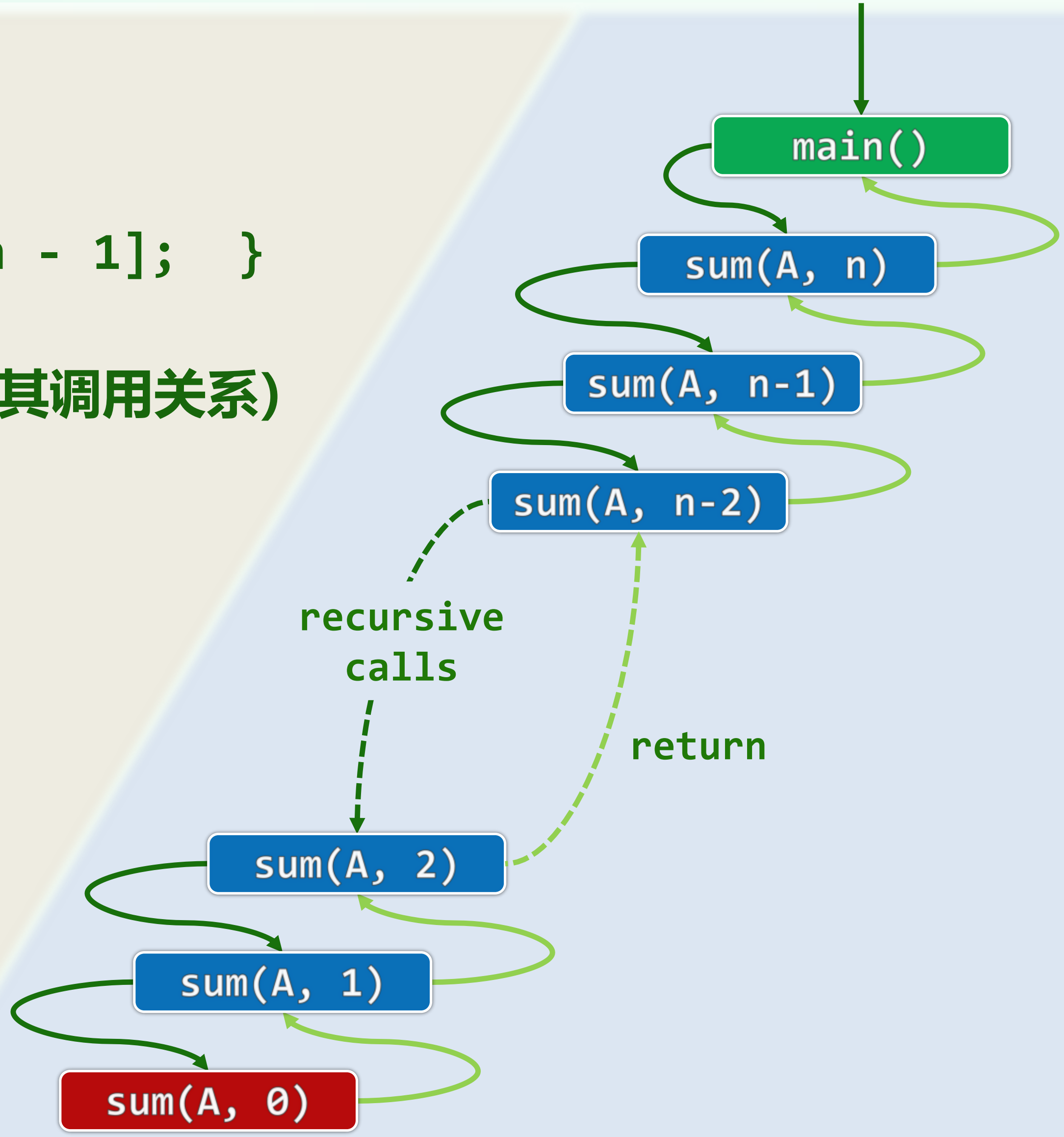
- 它们各自所需时间之总和，即为整体运行时间

- （调用操作本身的成本，如何处理？）

❖ 本例中，共计n+1个递归实例，各自只需$\mathcal{O}(1)$时间

故总体运行时间为：$T(n) = \mathcal{O}(1) \times (n+1) = \mathcal{O}(n)$

❖ 空间复杂度呢？



Linear Recursion: Recurrence

❖ 对于大规模的问题、复杂的递归算法，递归跟踪不再适用

此时可采用另一抽象的方法...

❖ 从递推的角度看，为求解规模为n的问题sum(A, n)，需 //T(n)

- 递归求解规模为n-1的问题sum(A, n - 1)，再 //T(n-1)

- 累加上A[n - 1] //$\mathcal{O}(1)$

❖ 递推方程： $T(n) = T(n-1) + \mathcal{O}(1)$ //recurrence

$T(0) = \mathcal{O}(1)$ //base: sum(A, 0)

❖ 求解： $T(n) = T(n-2) + \mathcal{O}(2) = T(n-3) + \mathcal{O}(3) = \ldots = T(0) + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n)$

Reverse

❖ `void reverse( int * A, int lo, int hi );`

`//将数组中的区间A[lo,hi]前后颠倒`

❖ **减治：** $Rev(lo, hi) = [hi] + Rev(lo + 1, hi - 1) + [lo]$

❖ if (lo < hi) { //<u>递归版</u>

```
    swap( A[lo], A[hi] );
    reverse( A, lo + 1, hi - 1 );
} //线性递归（尾递归），O(n)
```

❖ while (lo < hi) //<u>迭代版</u>

```
    swap( A[lo++], A[hi--] ); //亦是O(n)
```