05-J1

二叉树

Huffman编码树：算法

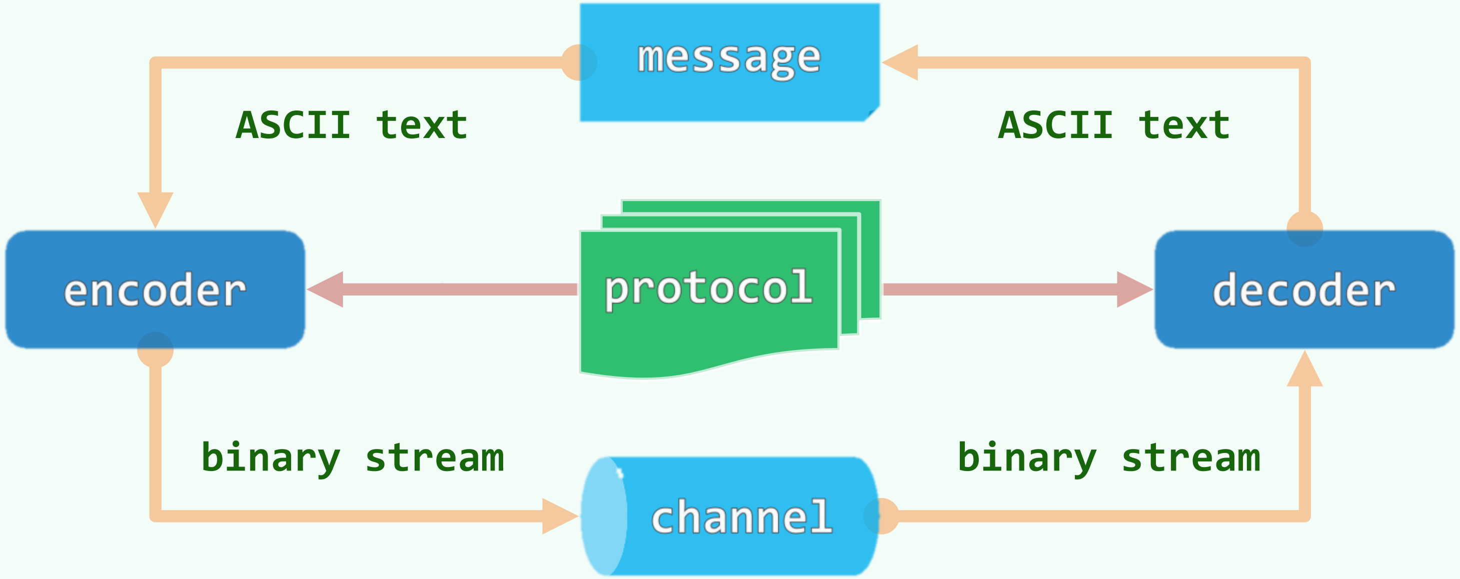
句读之不知，惑之不解，或师焉，或不焉，小学而大遗，吾未见其明也

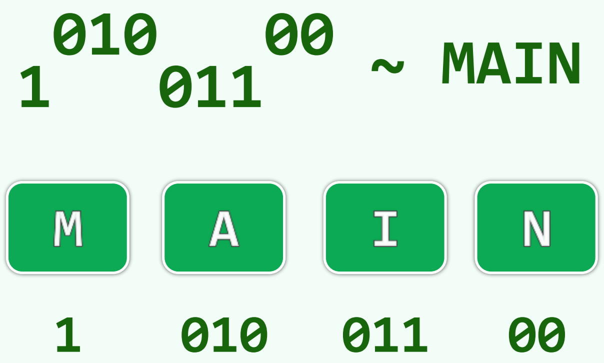
两年的时间，在你看来，也许就是一眨眼的功夫，对不对？可对我来说，
它实在长得没边。我用不着为两年后的事情操心。

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

编码

- ❖ 通讯 / 编码 / 译码
- ❖ 二进制编码
  - 组成数据文件的字符来自字符集Σ
  - 字符被赋予互异的二进制串
- ❖ 文件的大小取决于
  - 字符的数量 × 各字符编码的长短
- ❖ 通讯带宽有限时
  - 如何对各字符编码，使文件最小？





PFC编码

❖ 将Σ中的字符组织成一棵二叉树，以0/1表示左/右孩子

各字符x分别存放于对应的叶子v(x)中

❖ 字符x的编码串 $rps(v(x)) = rps(x)$

由根到v(x)的通路（root path）确定

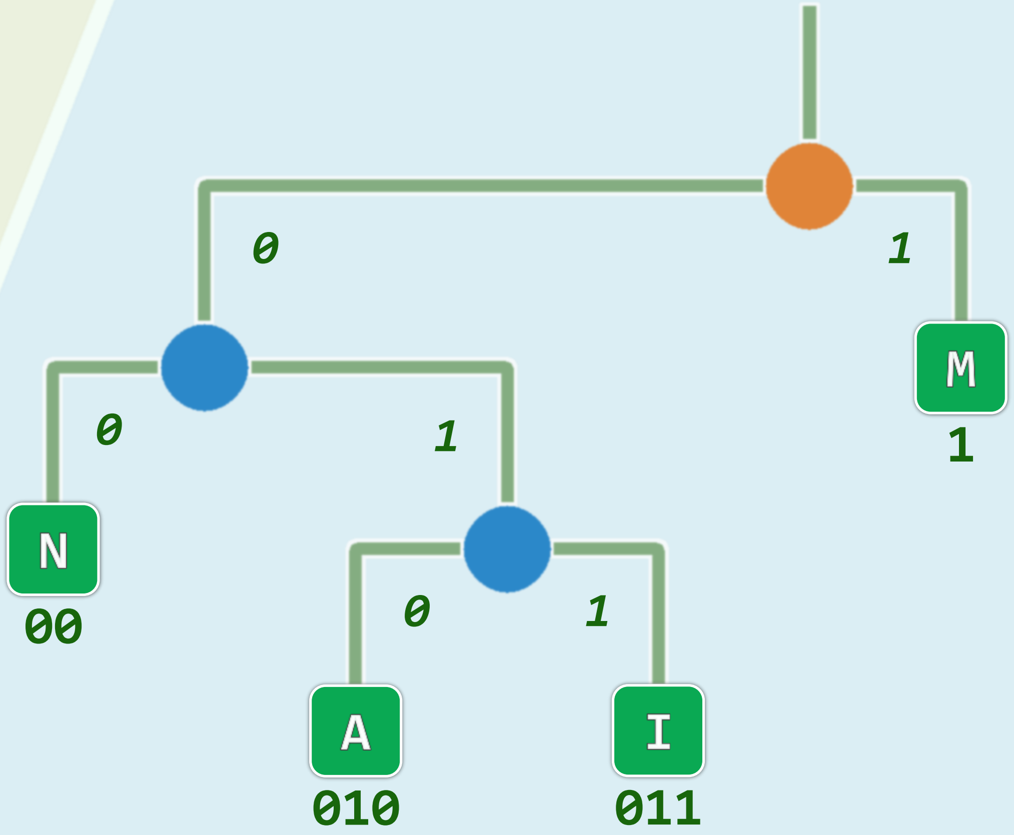
❖ 字符编码**不必**等长，而且...

❖ 不同字符的编码**互不为前缀**，故不致歧义

(Prefix-Free Code)

❖ 缺点：你能发现吗？

$1^{010}011^{00}$ ~ MAIN



编码长度 vs. 叶节点平均深度

❖ 平均编码长度

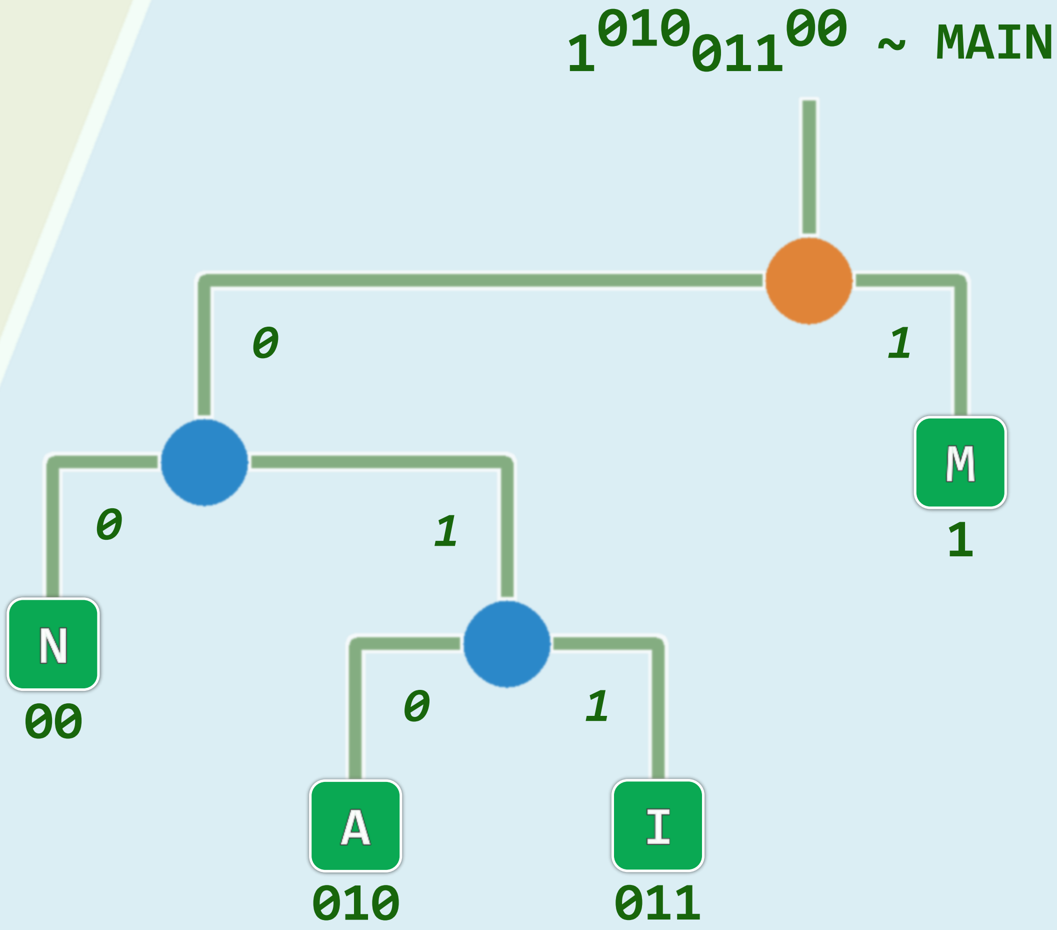
$$\text{ald}(T) \;=\; \sum_{x\in\Sigma} \text{depth}(v(x)) \;/\; |\Sigma|$$

❖ 对于特定的字符集Σ

ald()最小者即为最优编码树T_{opt}

❖ 最优编码树必然**存在**，但不见得**唯一**

它们具有哪些特征？



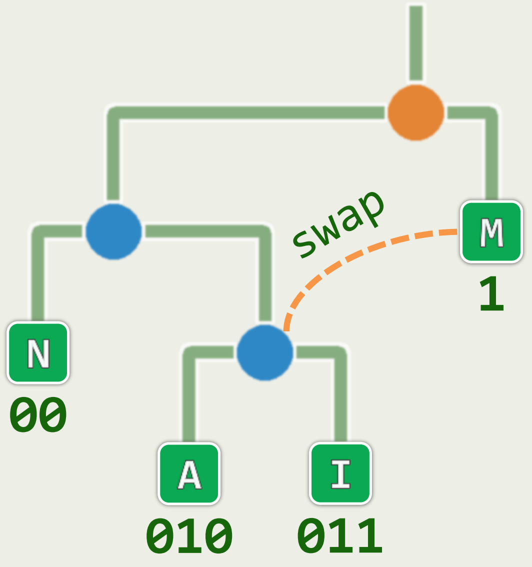
最优编码树

$\forall\ v \in T_{opt},\ deg(v) = 0$ **only if** $depth(v) \geq depth(T_{opt})-1$

亦即，叶子只能出现在倒数两层以内——否则，通过节点交换即可...

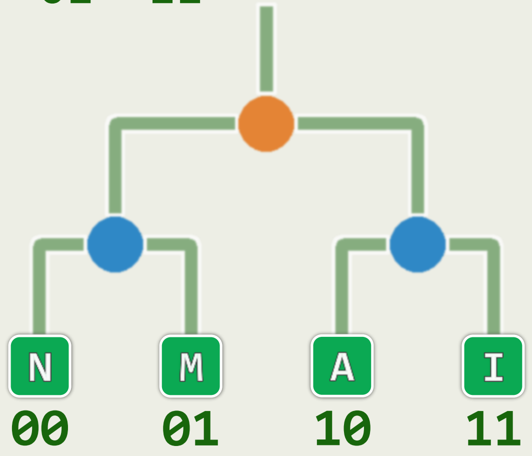
ald(T)*4 = 2+3+3+1 = 9

"$1^{010}011^{00}$" = "MAIN"



ald(T)*4 = 2+2+2+2 = 8

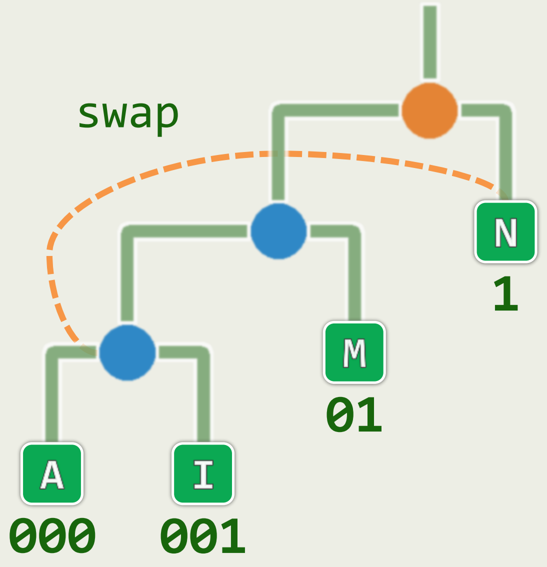
"$01^{10}11^{00}$" = "MAIN"



特别地，真完全树即是最优编码树

ald(T)*4 = 2+3+3+1 = 9

"$01^{000}001^{1}$" = "MAIN"



字符频率：不 ~ 埠

❖ 实际上，字符的出现**概率**或**频度**不尽相同

甚至，往往相差极大...

❖ 已知各字符的**期望频率**，如何构造最优编码树？

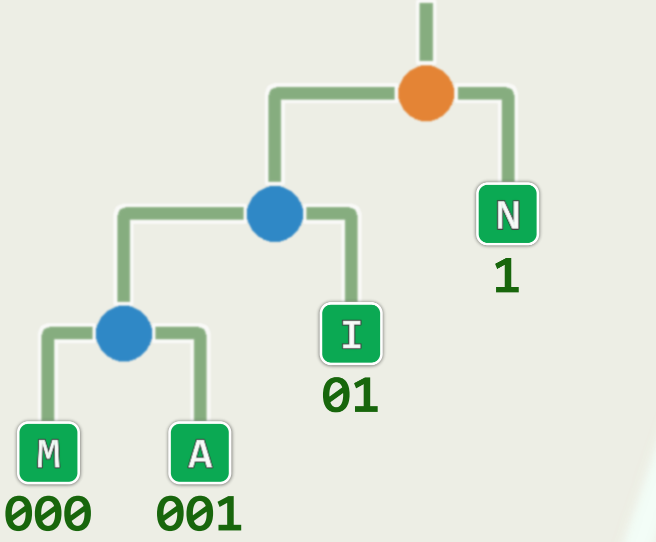
带权编码长度 vs. 叶节点平均带权深度

❖ 文件长度 $\propto$ 平均带权深度 $wald(T) = \sum_x rps(x) \times w(x)$

❖ 此时，完全树**未必**就是最优编码树——比如，考查"mamani"和"mammamia"...

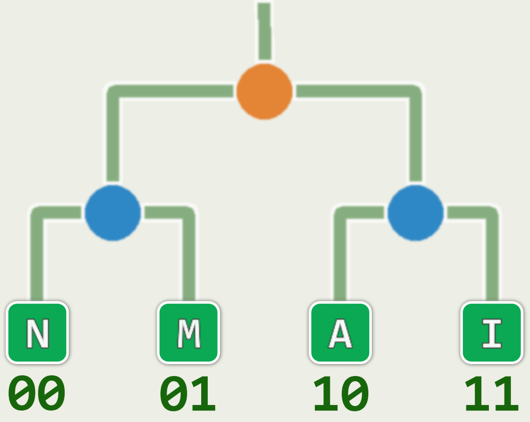
|"000001000001101"| = 15

|"00000100000000100001001"| = 23



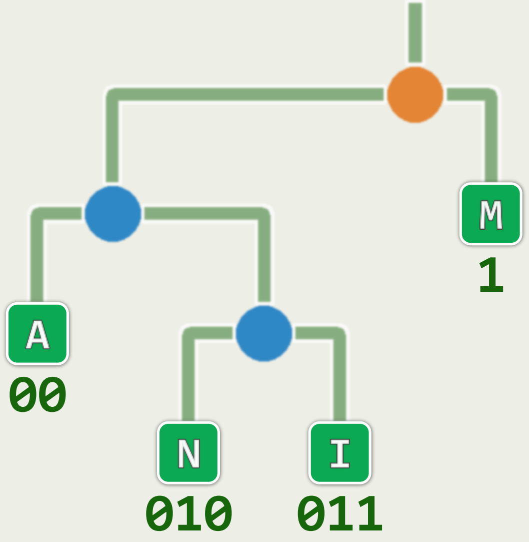
|"011001100011"| = 12

|"0110010110011110"| = 16



|"100100010011"| = 12

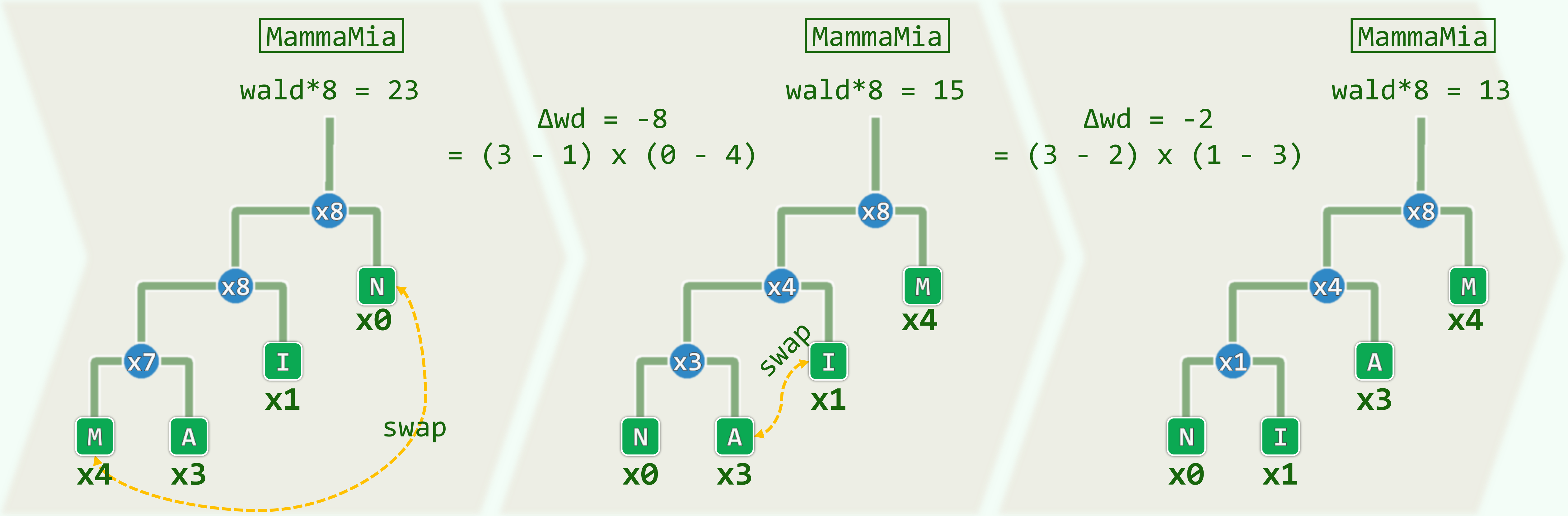
|"1001100101100"| = 13



最优带权编码树

❖ 同样，频率高/低的（超）字符，应尽可能放在高/低处

❖ 故此，通过适当交换，同样可以缩短wald(T)



Huffman的贪心策略：频率低的字符优先引入，其位置亦更低

为每个**字符**创建一棵单节点的**树**，组成**森林**F

按照出现频率，对所有树**排序**

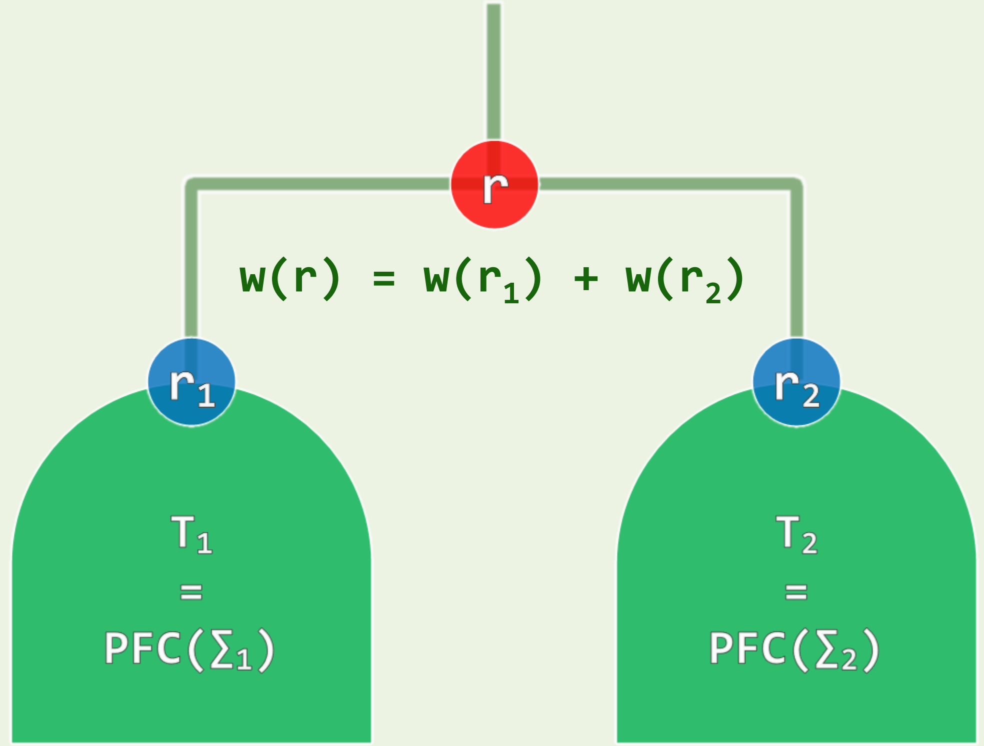
while (F中的树不止一棵)

取出频率**最小**的两棵树：T_1和T_2

将它们**合并**成一棵新树T，并令：

lc(T) = T_1 且 rc(T) = T_2

w(root(T)) = w(root(T_1)) + w(root(T_2))



//尽管贪心策略未必总能得到最优解，但非常幸运，如上算法的确能够得到最优编码树之一