08-B5

高级搜索树

B-树：插入

说再见，在这梦幻国度，最后的一瞥

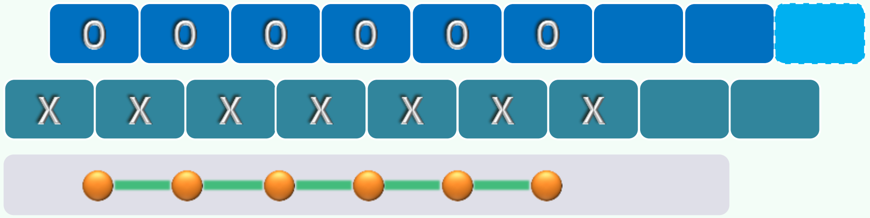
清醒让我，分裂再分裂

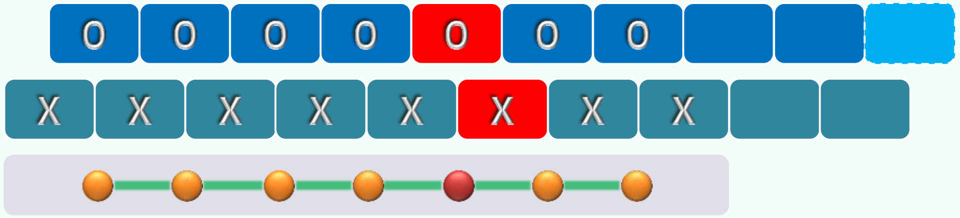
邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

算法

```
template <typename T> bool BTree<T>::insert( const T & e ) {
   BTNodePosi<T> v = search( e );
   if ( v ) return false; //确认e不存在
   Rank r = _hot->key.search( e ); //在节点_hot中确定插入位置
   _hot->key.insert( r+1, e ); //将新关键码插至对应的位置
   _hot->child.insert( r+2, NULL ); _size++; //创建一个空子树指针
   solveOverflow( _hot ); //若上溢，则分裂
   return true; //插入成功
}
```





分裂

❖ 设上溢节点中的关键码依次为：

$$\{\ k_0,\ k_1,\ \ldots,\ k_{m-1}\ \}$$

❖ 取中位数 $s = \lfloor m/2 \rfloor$，以关键码 k_s 为界划分为

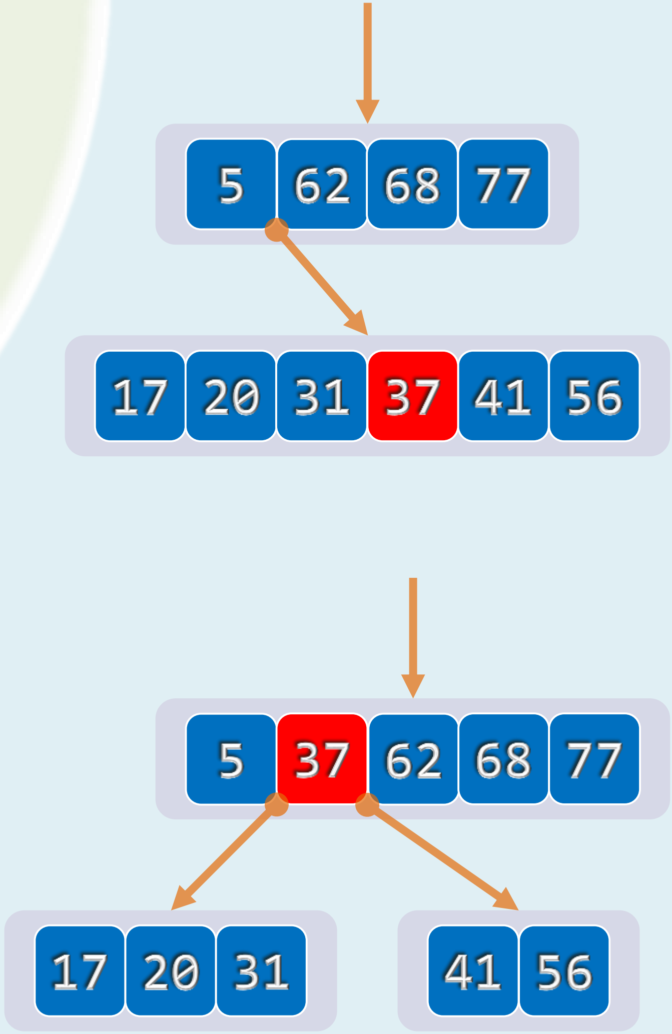
$$\{\ k_0,\ \ldots,\ k_{s-1}\ \} \quad \{\ k_s\ \} \quad \{\ k_{s+1},\ \ldots,\ k_{m-1}\ \}$$

❖ 关键码 k_s 上升一层，并分裂（split）

以所得的两个节点作为左、右孩子

❖ 不难验证，如此分裂后

左、右孩子所含**关键码数目**，依然符合m阶B-树的条件



再分裂

❖ 若上溢节点的父亲**本已饱和**，则在接纳被提升的关键码之后，也将上溢

此时，大可套用前法，继续分裂

❖ 上溢可能持续发生，并逐层**向上传播**

纵然最坏情况，亦不过到根 //若果真抵达树根...

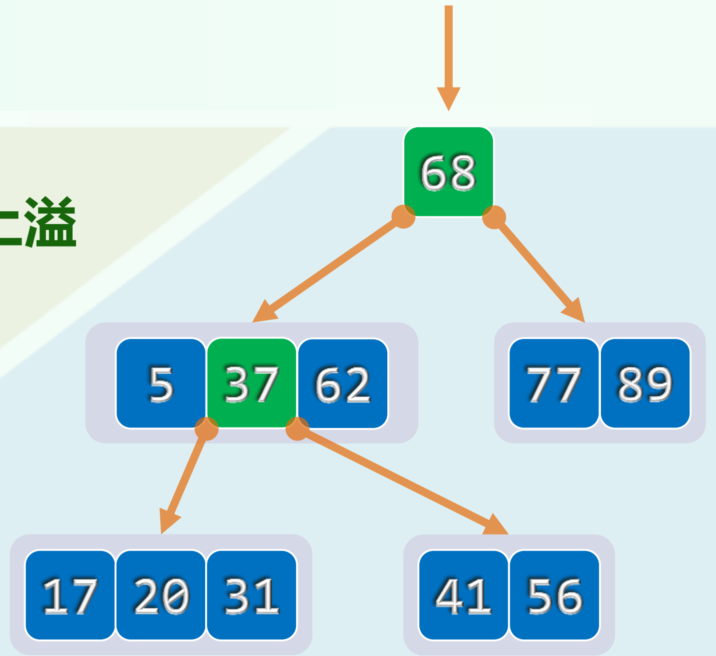
❖ 可令被提升的关键码自成节点，作为新的树根

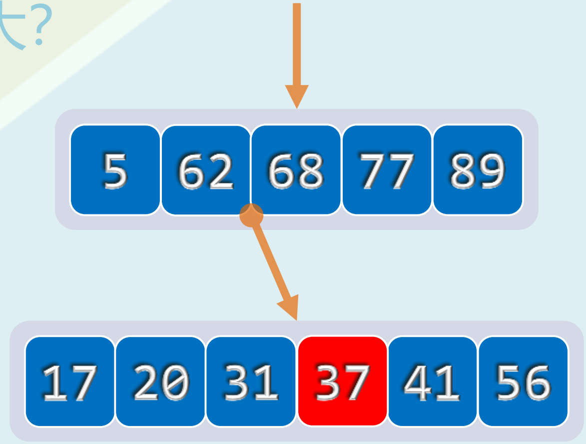
这是B-树增高的**唯一**可能 //概率多大？

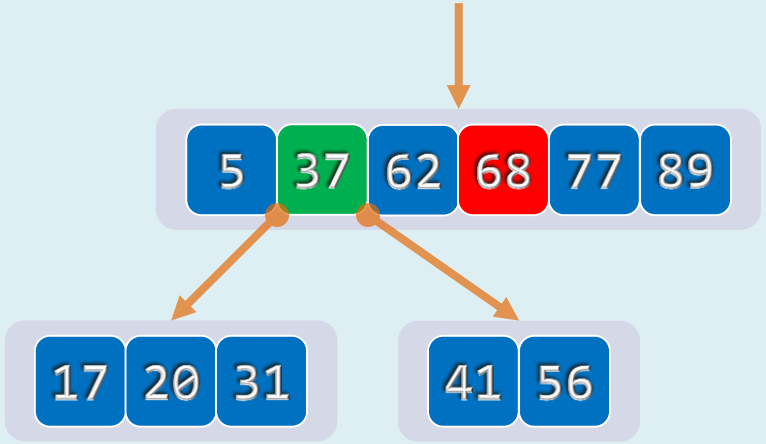
❖ 注意：新生的树根仅有**两个**分支

❖ 总体执行时间正比于

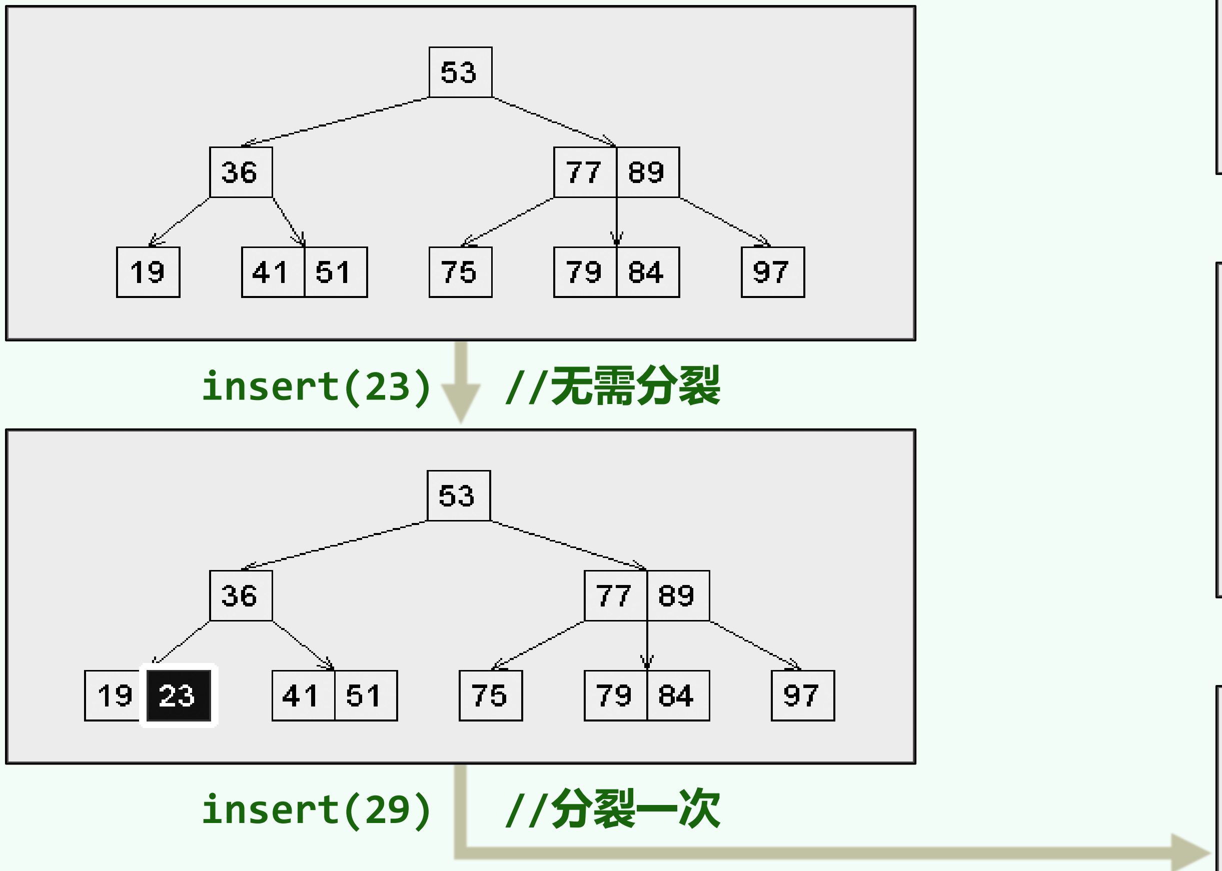
分裂次数，$\mathcal{O}(h)$

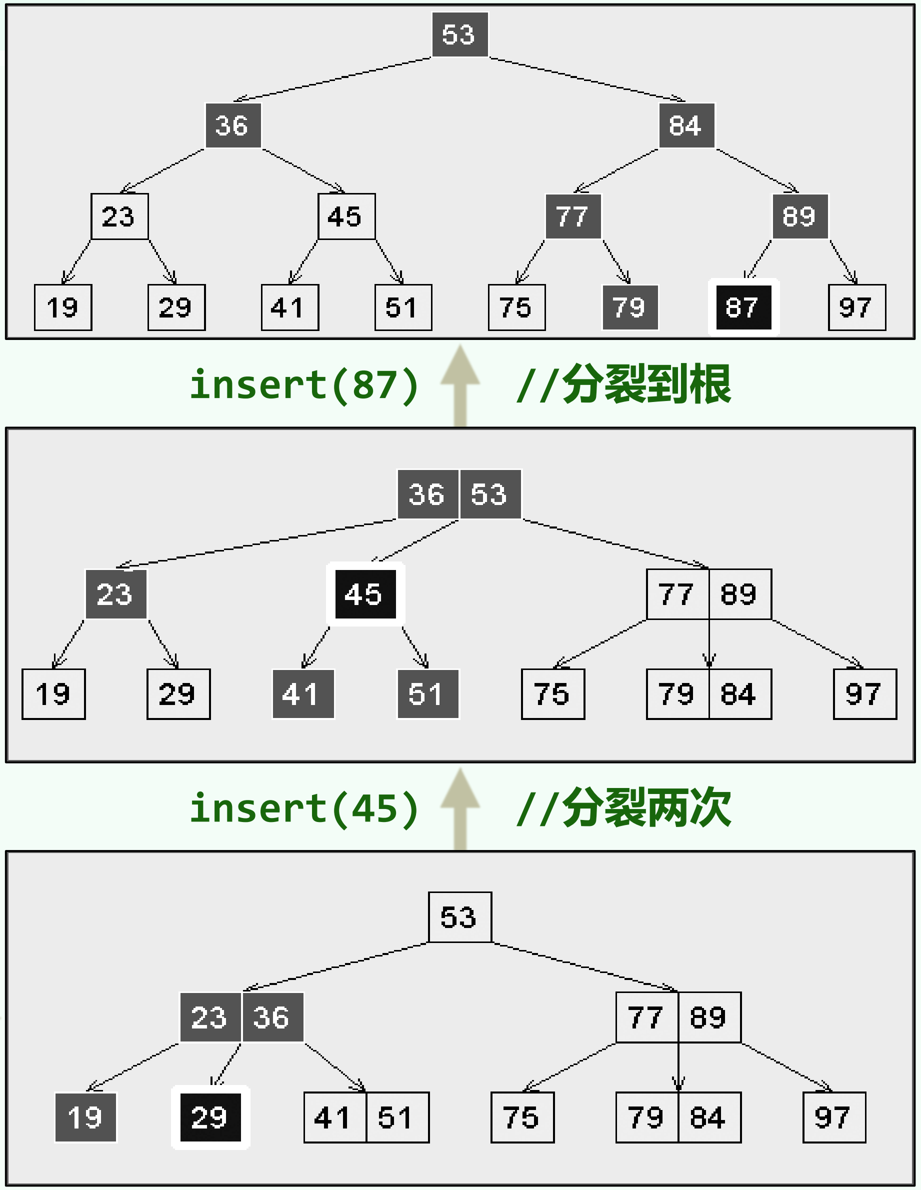






实例：(2,3)-树

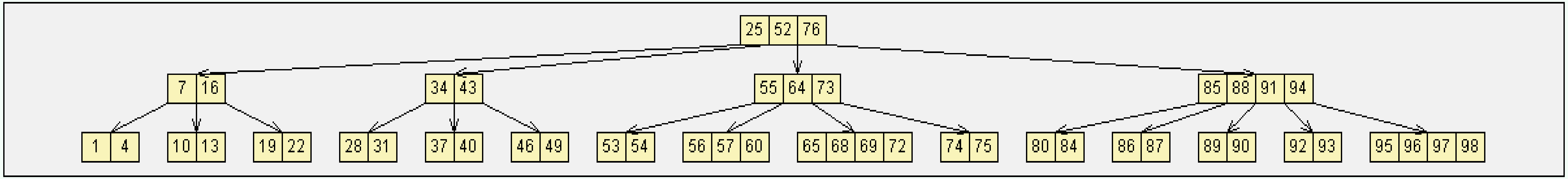




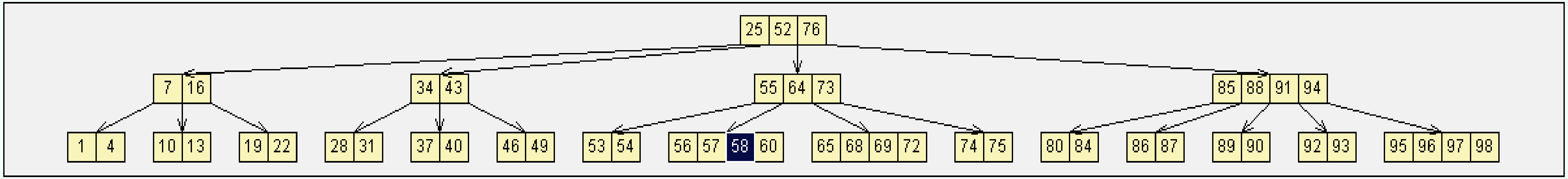
❖ 53 97 36 89 41 75 19 84 77 79 51

实例：(3,5)-树

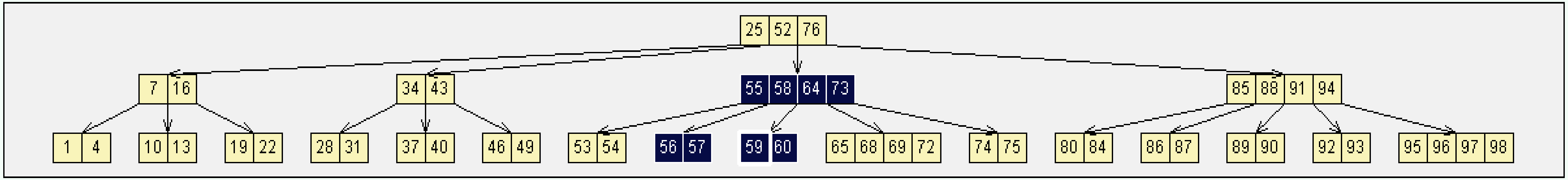
1 4 7 10 13 16 19 22 25 28 31 34 37 40 43 46 49 52 56 60 64 68 72 76 80 84 53 54 55 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 73 74 75 57 65 69



insert(58)　　//无需分裂

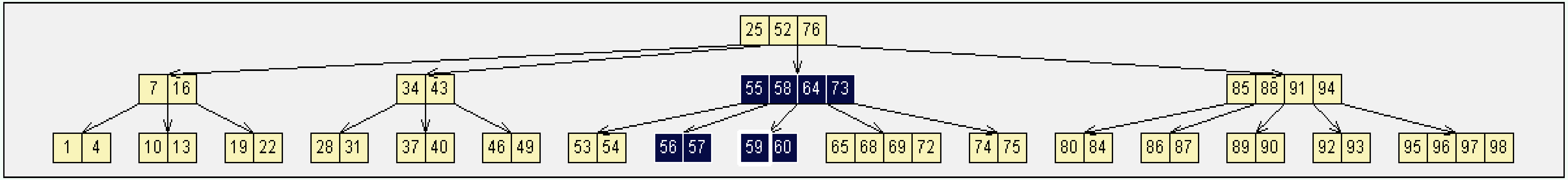


insert(59)　　//分裂 1 次

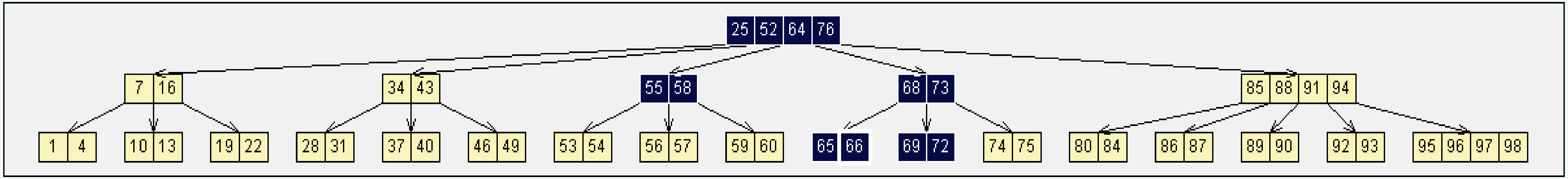


实例：(3,5)-树

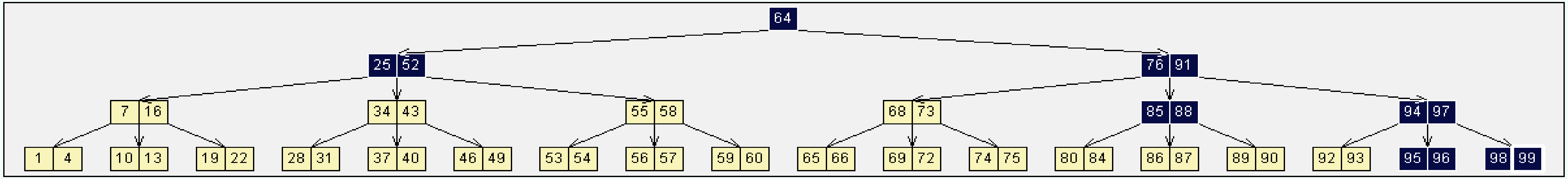
insert(59) //分裂 1 次



insert(66) //分裂 2 次



insert(99) //分裂到根



上溢修复（1/2）

```
template <typename T> void BTree<T>::solveOverflow( BTNodePosi<T> v ) {
   while ( _m <= v->key.size() ) { //除非当前节点不再上溢
      Rank s = _m / 2; //轴点（此时_m = key.size() = child.size() - 1)
      BTNodePosi<T> u = new BTNode<T>(); //注意：新节点已有一个空孩子
      for ( Rank j = 0; j < _m - s - 1; j++ ) { //分裂出右侧节点u（效率低可改进）
         u->child.insert( j, v->child.remove( s + 1 ) ); //v右侧_m-s-1个孩子
         u->key.insert( j, v->key.remove( s + 1 ) ); //v右侧_m-s-1个关键码
      }
      u->child[ _m - s - 1 ] = v->child.remove( s + 1 ); //移动v最靠右的孩子
      /* ... TBC ... */
```

上溢修复（2/2）

```
      if ( u->child[ 0 ] ) //若u的孩子们非空，则统一令其以u为父节点
         for ( Rank j = 0; j < _m - s; j++ ) u->child[ j ]->parent = u;
      BTNodePosi<T> p = v->parent; //v当前的父节点p
      if ( ! p ) //若p为空，则创建之（全树长高一层，新根节点恰好两度）
         { _root = p = new BTNode<T>(); p->child[0] = v; v->parent = p; }
      Rank r = 1 + p->key.search( v->key[0] ); //p中指向u的指针的秩
      p->key.insert( r, v->key.remove( s ) ); //轴点关键码上升
      p->child.insert( r + 1, u );  u->parent = p; //新节点u与父节点p互联
      v = p; //上升一层，如有必要则继续分裂——至多O(logn)层
   } //while
} //solveOverflow
```