专业导论课程

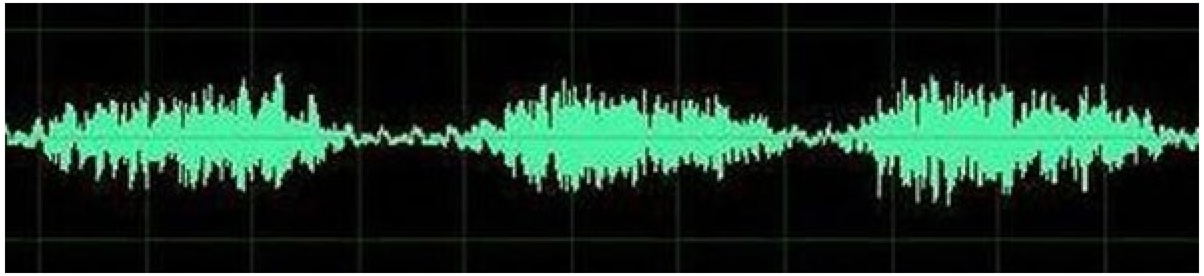
信号与系统简介(2) – 信号的频域

什么是频域？

- 从我们出生，我们看到的世界都以时间贯穿，股票的走势、人的身高、汽车的轨迹都会随着时间发生改变。这种以时间作为参照来观察动态世界的方法我们称其为时域分析。而我们也想当然的认为，世间万物都在随着时间不停的改变，并且永远不会静止下来。
- 但如果我告诉你，用除了时间之外的另一种观点来观察世界的话，很多问题会变得更简单、更本质。
- 频域就是这样一种新的观察方式，它和我们通常以时间为基点的观察方式，是相互对立和相互补充的关系。（时域 – 频域的对应关系）

什么是频域？

- 例子：一段音乐的时域和频域

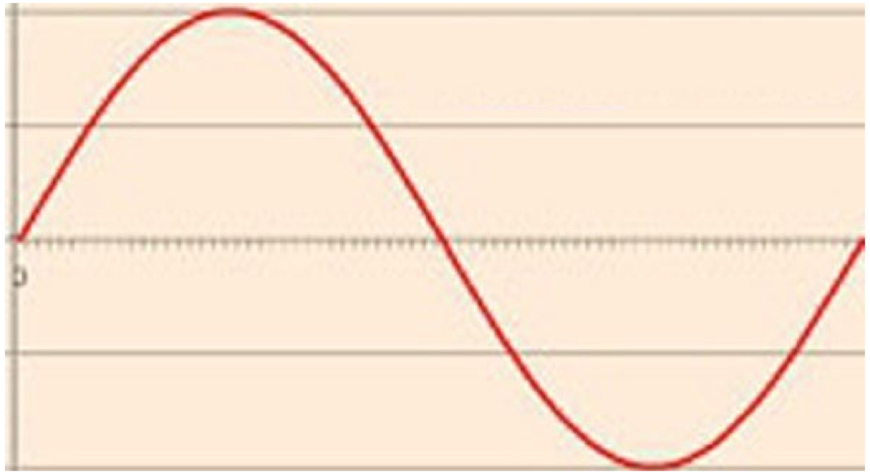


音乐的时域

音乐的频域

什么是频域？

- 例子：时域与频域的最简单对应关系



时域-频域转换
（傅里叶变换）

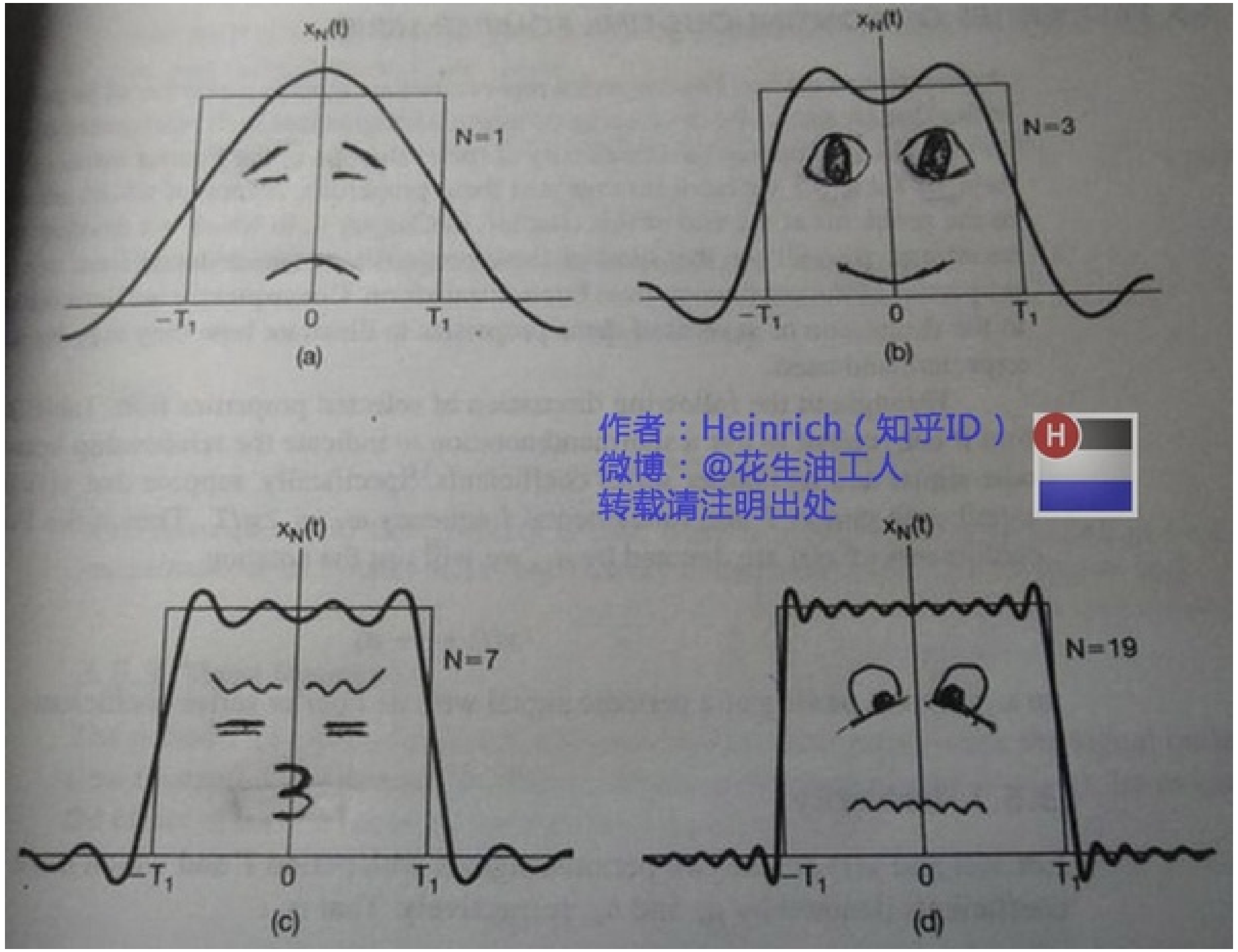
时域：一个正弦波

频域：一个固定频率的音符

时域-频域转换的基本思想：将现实世界的时域信号，分解为一系列正弦波和余弦波的**线性叠加**，这些正弦波和余弦波的**频率**构成的集合，叫做**频域**。

什么是频域？

- 例子：方波的频域表示



1. 第一幅图是一个正弦波 cos（x）

2. 第二幅图是 2 个正弦波的叠加 cos (x) +a.cos (3x)

3. 第三幅图是 4 的正弦波的叠加

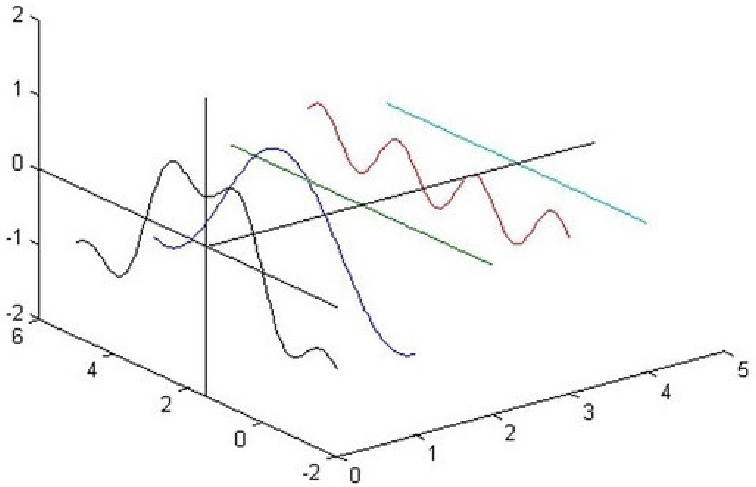
4. 第四幅图是 10 个正弦波的叠加

随着正弦波数量逐渐的增长，他们最终会叠加成一个矩形。

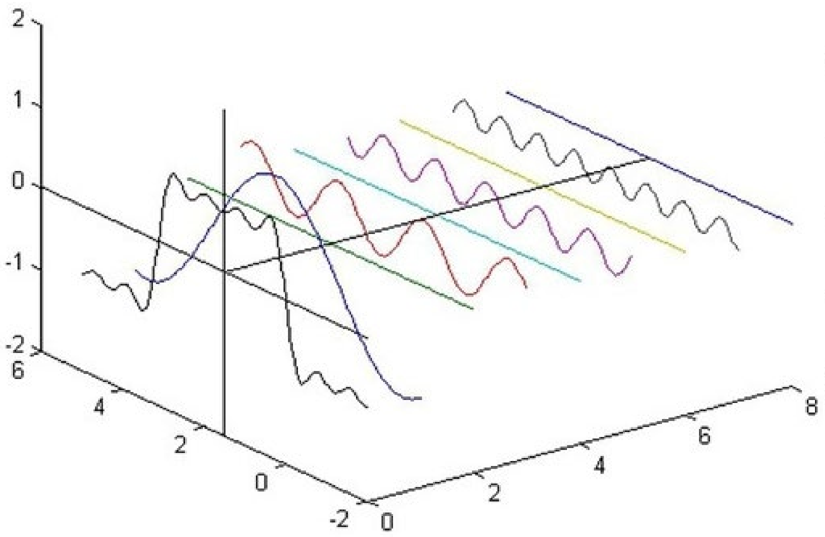
（只要努力，弯的也可以掰成直的）

什么是频域？

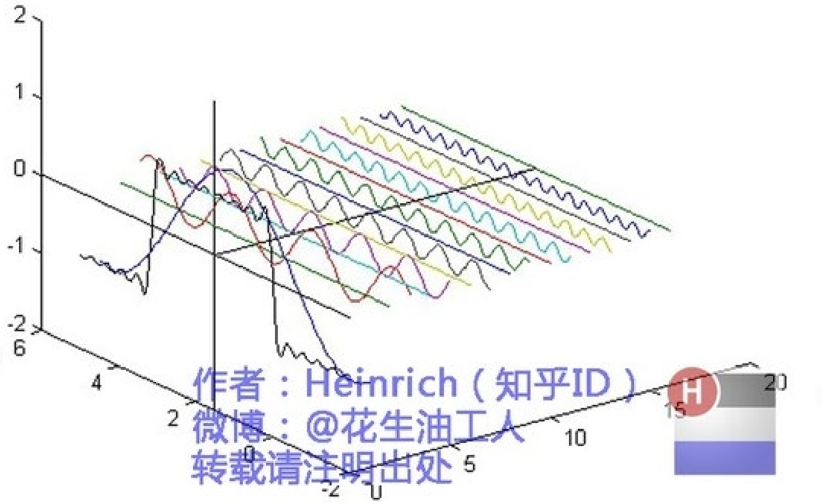
- 例子：方波的频域表示



正弦波数量= 2



正弦波数量= 4



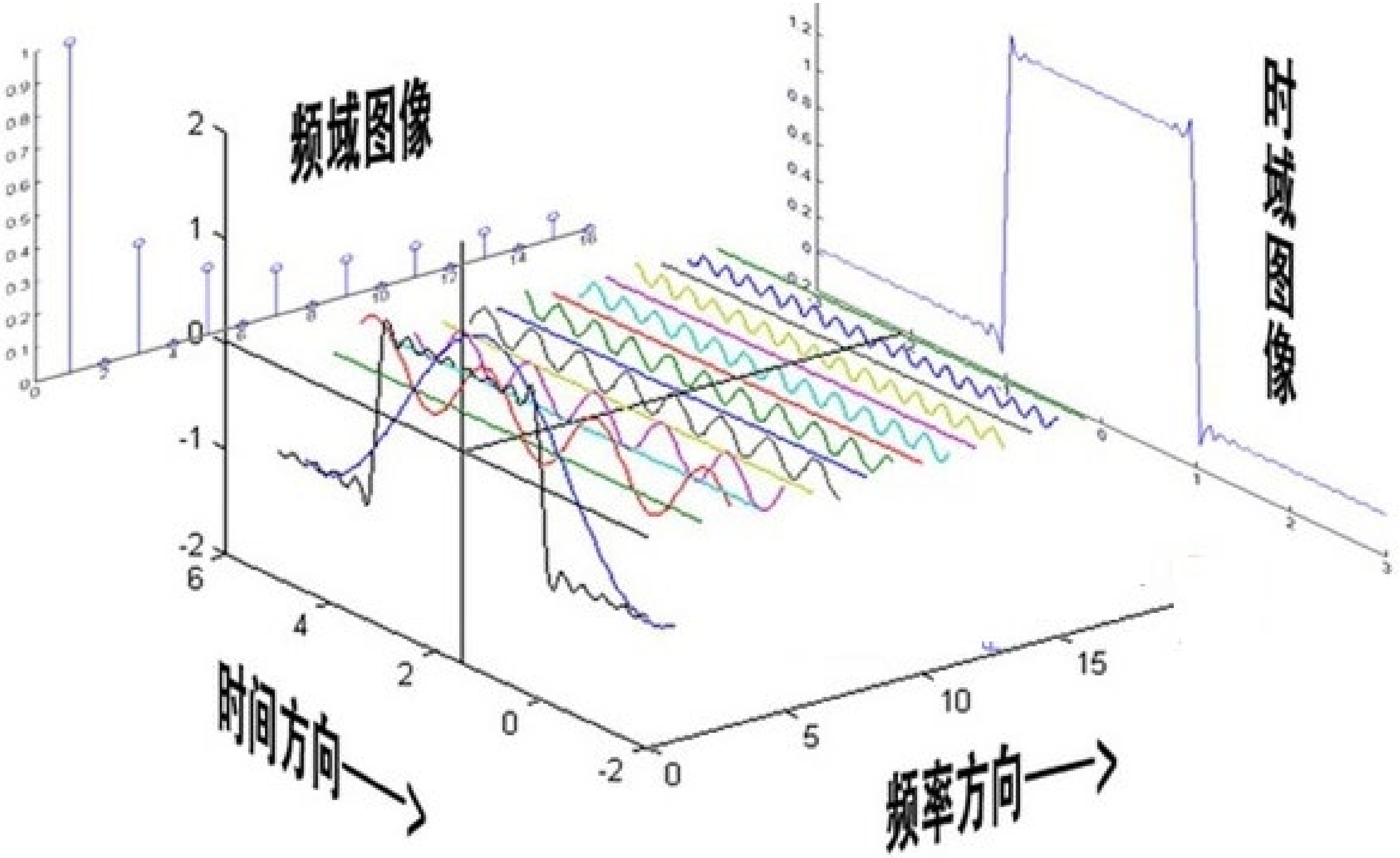
正弦波数量= 10

最前面黑色的线就是所有正弦波叠加而成的总和，也就是越来越接近矩形波的那个图形。而后面依不同颜色排列而成的正弦波就是组合为矩形波的各个分量。这些正弦波按照频率从低到高从前向后排列开来，而每一个波的振幅都是不同的。

不同频率的正弦波我们成为频率分量。

什么是频域？

- 例子：方波的频域表示



频域计算的方法－傅里叶级数

英国科学期刊《物理世界》曾让科学家们投票评选了“最伟大的公式”，最终榜上有名的十个公式既有无人不知的1+1=2，又有著名的$E = mc^2$；既有简单的圆周公式，又有复杂的欧拉公式。

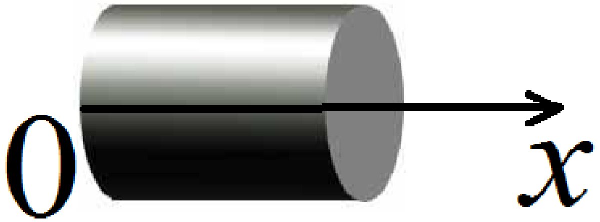
这个地球上有多少伟大的智慧曾耗尽一生，才最终写下一个等号。

- 排名第九的公式

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad \text{(P95 3-44)}$$

频域计算的方法－傅里叶级数

- 问题的缘起：求解热传导方程



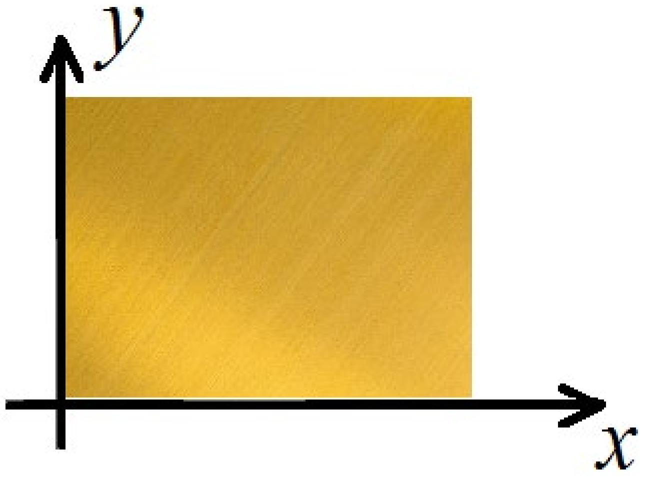
一个条形均匀介质物体，假设物体上温度分布为 $f(x,t)$，设 $f(x)=f(x,0)$ 为 $t=0$ 时刻的温度分布，求 $f(x,t)$（当 $t>0$时）。

答案即为热传导公式，$f(x,t)$满足以下偏微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}=K\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & (1) \\ f(x,0)=f(x) & (2) \end{cases}$$

其中 K 为导热系数，与介质有关。

频域计算的方法 – 傅里叶级数



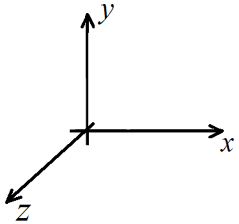
$f(x,y,0) = f(x,y) \qquad f(x,y,t) \qquad t > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = K\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) & (1) \\ f(x,y,0) = f(x,y) & (2) \end{cases}$$

其中 K 为导热系数，与介质有关。

频域计算的方法 – 傅里叶级数

- 三维情况下的热传导方程



空气

$$f(x,y,z,0)=f(x,y,z) \qquad f(x,y,z,t) \qquad t>0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}=K\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) & (1) \\ f(x,y,z,0)=f(x,y,z) & (2) \end{cases}$$

其中 K 为导热系数，与介质有关。

频域计算的方法 – 傅里叶级数

- 解热传导方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & (1) \\ f(x,0) = f(x) & (2) \end{cases}$$

对于一般的 $f(x)$，上述方程没有解析解，但是，如果 $f(x)$是某些特殊的函数，方程存在解析解。

- 情况一：如果 $f(x) = B_0$，那么 $f(x,t) = B_0$

验证：将 $f(x,t) = B_0$ 代入（1），则左边=右边=0；同时又有

$$f(x) = f(x,0) = B_0$$

满足(2)。

频域计算的方法 – 傅里叶级数

- 解热传导方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & (1) \\ f(x,0) = f(x) & (2) \end{cases}$$

- 情况二：如果

$$f(x) = B\cos(\omega x)$$

则有：

$$f(x,t) = B\cos(\omega x)e^{-K\omega^2 t}$$

频域计算的方法 – 傅里叶级数

- 解热传导方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & (1) \\ f(x,0) = f(x) & (2) \end{cases}$$

- 情况三：如果

$$f(x) = C\sin(\omega x)$$

- 则有：

$$f(x,t) = C\sin(\omega x)e^{-K\omega^2 t}$$

频域计算的方法 – 傅里叶级数

- 解热传导方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & (1) \\ f(x,0) = f(x) & (2) \end{cases}$$

- 情况四：如果 $f(x)$ 是常数、正弦和余弦函数的线性组合，例如：

$$f(x) = B_0 + B\cos(\omega_1 x) + C\sin(\omega_2 x)$$

则有：

$$f(x,t) = B_0 + B\cos(\omega_1 x)e^{-K\omega_1^2 t} + C\sin(\omega_2 x)e^{-K\omega_2^2 t}$$

频域计算的方法 – 傅里叶级数

- 傅里叶的生平和主要贡献

傅里叶：1768年3月21日生于欧塞尔，1830年5月16日卒于巴黎。9岁父母双亡， 被当地教堂收养。12岁由一主教送入地方军事学校读书。17岁（1785）回乡教数学，1794到巴 黎，成为高等师范学校的首批学员， 次年到巴黎综合工科学校执教。1798年随拿破仑远征埃及时任军中文书和埃及研究院秘书，1801年回国后任伊泽尔 省地方长官。1817年当选为科学院院 士，1822年任该院终身秘书，后又任法兰西学院终身秘书和理工科大学校务委员会主席。

主要贡献：1807年向巴黎科学院呈交《热的传播》论文，推导出著名的热传导方程 ，并在求解该方程时发现解函数可以由三角函数构成的级数形式表示，从而提出任一函 数都可以展成三角函数的无穷级数。傅里叶级数、傅里叶分析等理论均由此创始。

频域计算的方法 – 傅里叶级数

- 解热传导方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & (1) \\ f(x,0) = f(x) & (2) \end{cases}$$

傅里叶认为，如果 $f(x)$可以写成如下形式:

$$f(x) = B_0 + (B_1\cos(\omega_0 x) + B_2\cos(2\omega_0 x) + \ldots) + (C_1\sin(\omega_0 x) + C_2\sin(2\omega_0 x) + \ldots)$$

或

$$f(x) = B_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k\cos(k\omega_0 x) + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k\sin(k\omega_0 x) \quad (k\text{是自然数})$$

那么热传导方程的解为:

$$f(x,t) = B_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k\cos(k\omega_0 x)e^{-Kk^2\omega_0^2 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k\sin(k\omega_0 x)\,e^{-Kk^2\omega_0^2 t}$$

频域计算的方法 – 傅里叶级数

$$f(x) = B_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \cos(k\omega_0 x) + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \sin(k\omega_0 x) \quad (k\text{是自然数})$$

- 傅里叶的基本假设：$f(x)$可以表示为 一族基函数

$$1, \cos(\omega_0 x), \cos(2\omega_0 x), \cos(3\omega_0 x)..., \sin(\omega_0 x), \sin(2\omega_0 x), \sin(3\omega_0 x)...$$

的线性组合。

- 概念定义 （P84）

1. $B_0 : f(x)$的直流分量。
2. $\omega_0 : f(x)$的基波频率。
3. $B_k, C_k : f(x)$的k次谐波的频谱分量。

频域计算的方法 – 傅里叶级数

$$f(x)=B_0+\sum_{k=1}^{+\infty}B_k\cos k\omega_0 x+\sum_{k=1}^{+\infty}C_k\sin k\omega_0 x \quad (k\text{是自然数})$$

- 问题转化为：给定一个 $f(x)$，对于任意的 $k\in N$，如何求上式中的 B_0,B_k,C_k？
- 傅里叶解法如下：

  比如，我们要求 B_0，将等式（1）两边从0到 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 积分：

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(x)dx=\underbrace{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} B_0dx}_{=\frac{2\pi B_0}{\omega_0}}+\sum_{k=1}^{+\infty}B_k\underbrace{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}\cos(k\omega_0x)dx}_{=0}+\sum_{k=1}^{+\infty}C_k\underbrace{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}\sin(k\omega_0x)dx}_{=0}$$

因此有：

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(x)dx=\frac{2\pi B_0}{\omega_0} \quad\Longrightarrow\quad B_0=\frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(x)dx$$

频域计算的方法 – 傅里叶级数

同理可以得出：

$$\begin{cases} B_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(x)dx \\ B_k = \dfrac{\omega_0}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(x)\cos(k\omega_0 x)dx \\ C_k = \dfrac{\omega_0}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(x)\sin(k\omega_0 x)dx \end{cases}$$

（P86 公式3-19）

频谱分量 B_0，B_k，C_k之所以能有如此简单的表达式，是因为基函数族

$1, \cos(\omega_0 x), \cos(2\omega_0 x), \cos(3\omega_0 x)\ldots, \sin(\omega_0 x), \sin(2\omega_0 x), \sin(3\omega_0 x)\ldots$

任意取两个相乘，在区间 $\left[0, \dfrac{2\pi}{\omega_0}\right)$ 上积分的结果都为0。

■ 概念定义

正交性：基函数族任意两个函数的内积都为0的性质。

频域计算的方法－傅里叶级数

- 对傅里叶这套方法的不同意见

（1）收敛性问题

$$f(x)=B_0+\sum_{k=1}^{+\infty}B_k\cos k\omega_0x+\sum_{k=1}^{+\infty}C_k\sin k\omega_0x$$

等号只是假设

狄里赫利关于傅里叶级数收敛的三条件 （P92）

（1） 在一个周期内，$f(x)$必须绝对可积。

（2） 在一个周期内，$f(x)$的最大值和最小值数目必须有限。

（3） 在一个周期内，$f(x)$只有有限个不连续点，而且在这些不连续点上，$f(x)$的值是有限的。

频域计算的方法 – 傅里叶级数

- 对傅里叶这套方法的不同意见

（2）计算量的问题

$$f(x) = B_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \cos k\omega_0 x + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \sin k\omega_0 x$$

$$B_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(x)dx$$

$$B_k = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(x)\cos(k\omega_0 x)dx$$

$$C_k = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(x)\sin(k\omega_0 x)dx$$

计算数值积分在当年是困难问题，但由于大规模计算机的普及，已经是一个解决的问题。

频域计算的方法 – 傅里叶级数

（2）计算量的问题

天气预报

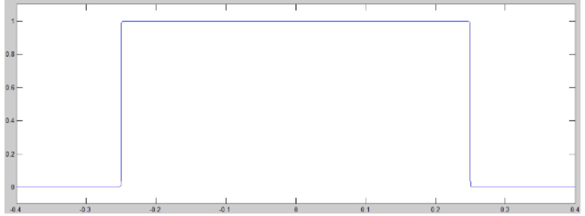
频域计算的方法 – 傅里叶级数

- 对傅里叶这套方法的不同意见

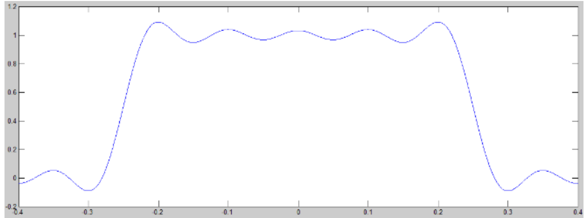
（3）由自然界产生的函数真的是由sin和cos叠加到一起的吗?

$$f(x) = B_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \cos k\omega_0 x + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \sin k\omega_0 x$$

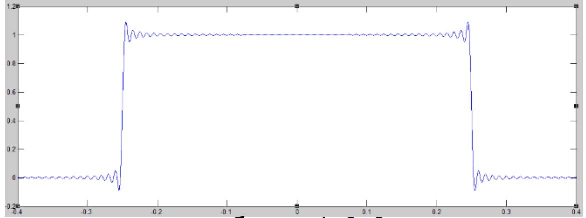
- 吉布斯现象



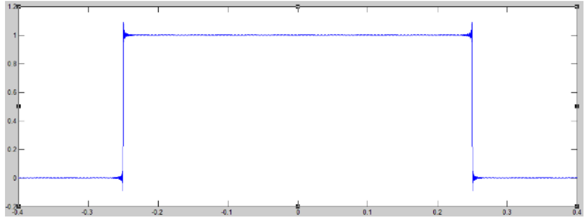
$f(x)$



$k=10$



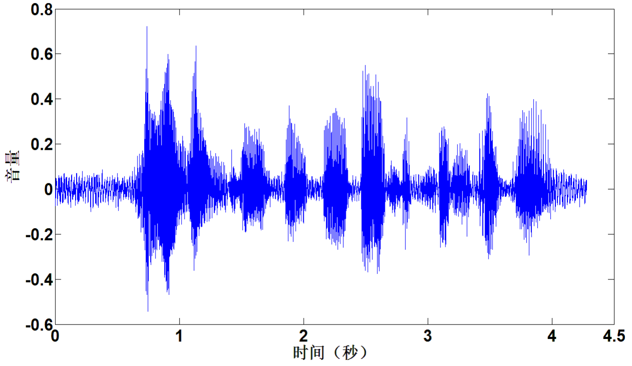
$k=100$



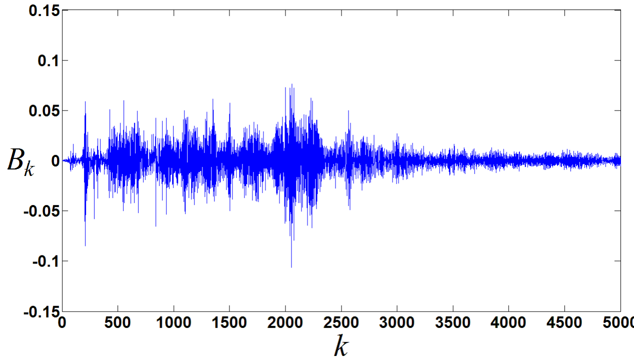
$k=1000$

频域计算的方法 – 傅里叶级数

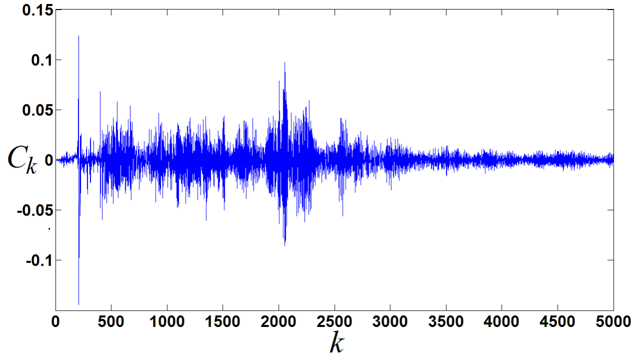
- 举例：声音信号频谱 （声音1低频分量多，声音2高频分量多，请看它们的傅里叶级数的分布获得感性认识）



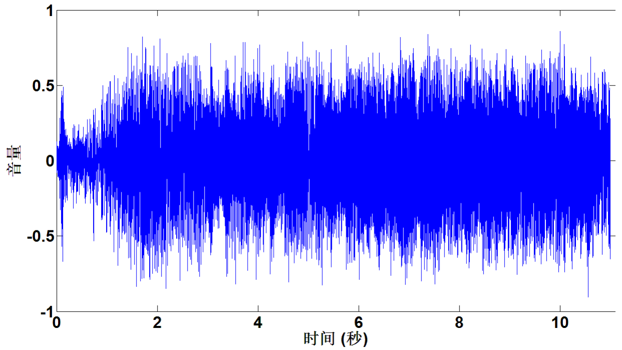
声音1



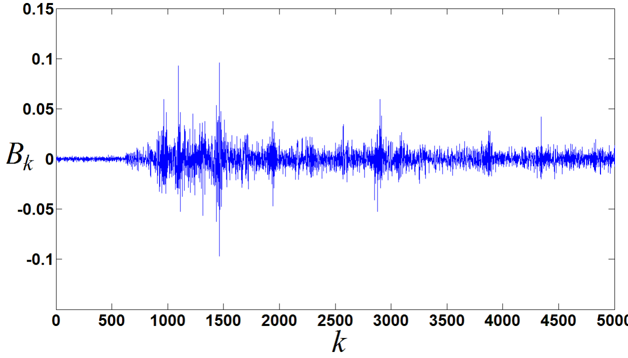
B_k



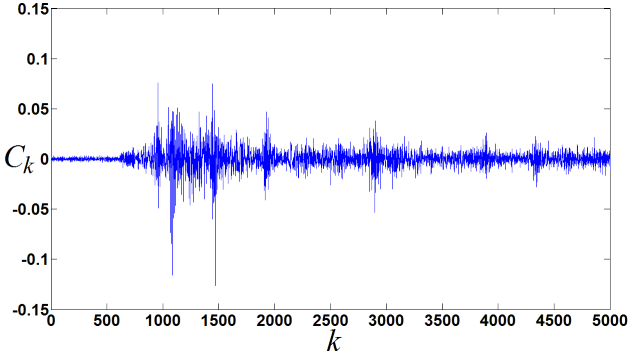
C_k



声音2



B_k



C_k

频域计算的方法 – 傅里叶级数

- 举例：正交分解和频域观点在图像处理中的应用

$$f(x) = B_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \cos k\omega_0 x + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \sin k\omega_0 x$$

以图像压缩和识别为例：

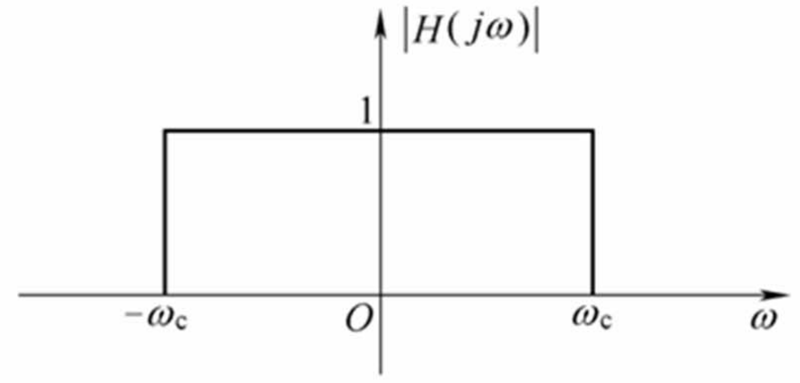
运用傅里叶发明的正交基函数的分解方法，得到一组数：

$$(3559, 351, -256, \ldots)$$

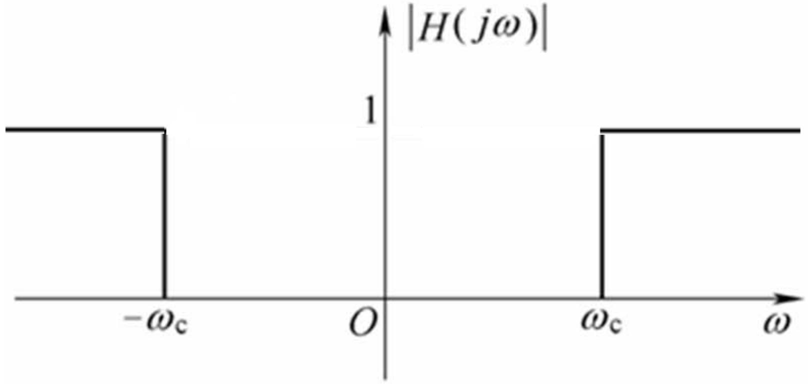
用这组数来表达图像的本质特征，并用于对图像的进一步处理。

频域的应用 – 滤波器

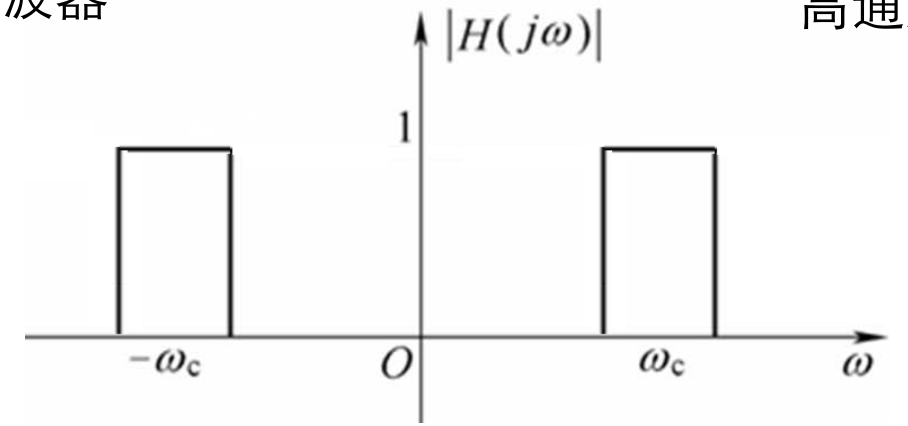
- 滤波器概念：滤波（Wave filtering）是将信号中特定的频率分量滤除的操作，是抑制和防止干扰的一项重要措施。



低通滤波器



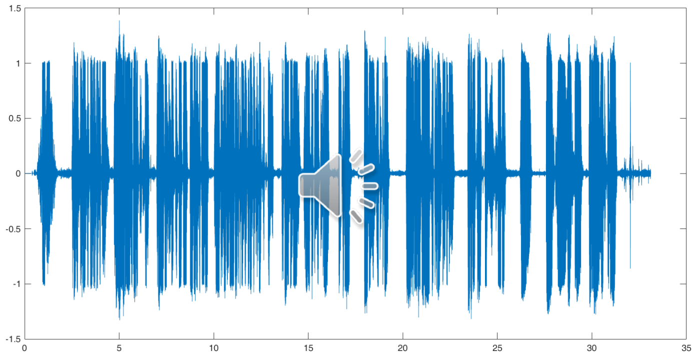
高通滤波器



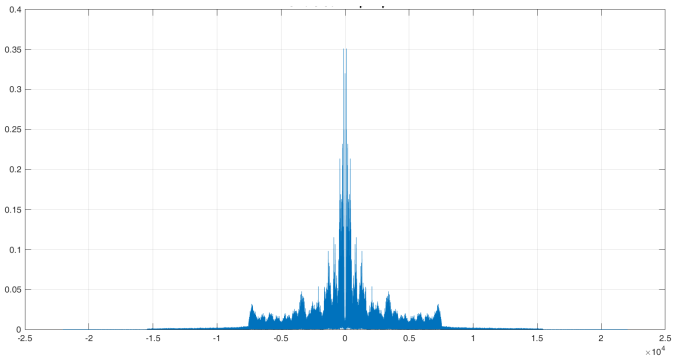
带通滤波器

频域的应用 – 滤波器

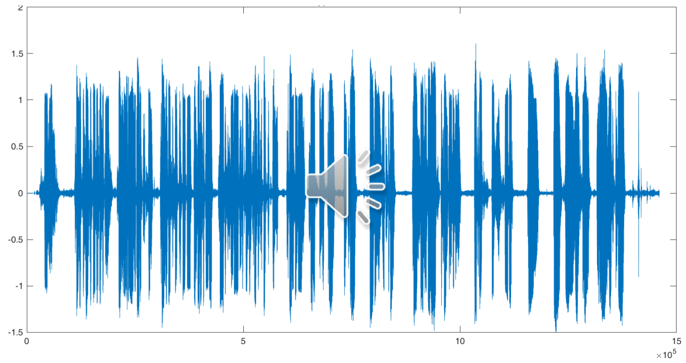
- 滤波器概念：滤波（Wave filtering）是将信号中特定的频率分量滤除的操作，是抑制和防止干扰的一项重要措施。



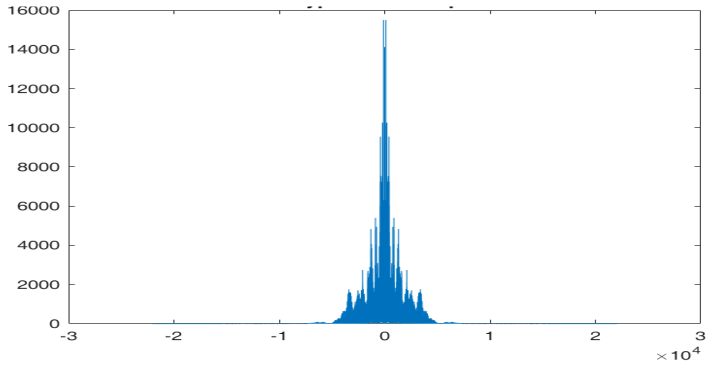
原声音信号的时域波形



原声音信号的频域波形



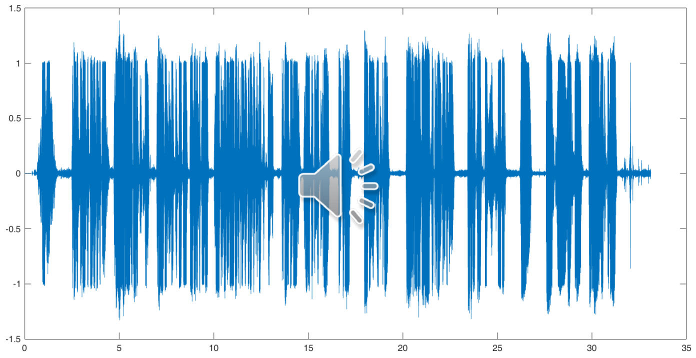
低通滤波后声音信号的时域波形



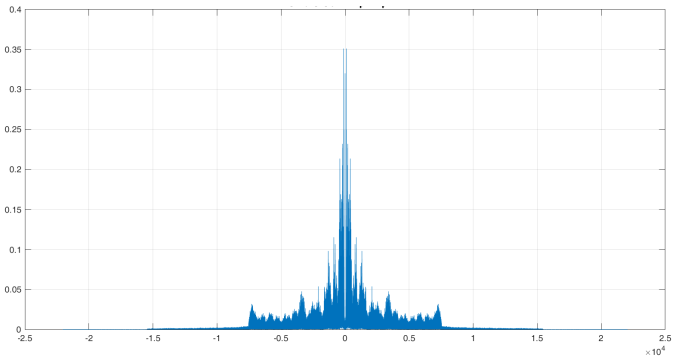
低通滤波后声音信号的频域波形

频域的应用 – 滤波器

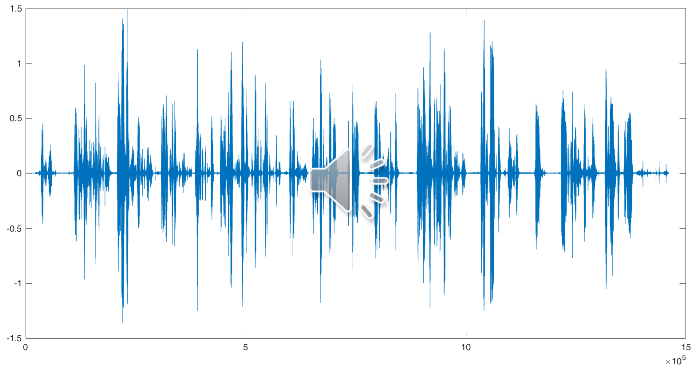
- 滤波器概念：滤波（Wave filtering）是将信号中特定的频率分量滤除的操作，是抑制和防止干扰的一项重要措施。



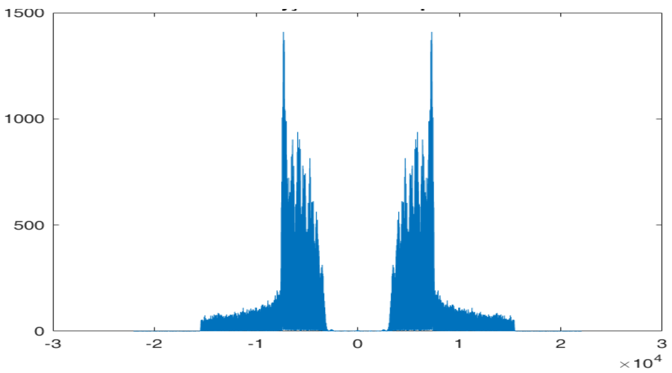
原声音信号的时域波形



原声音信号的频域波形

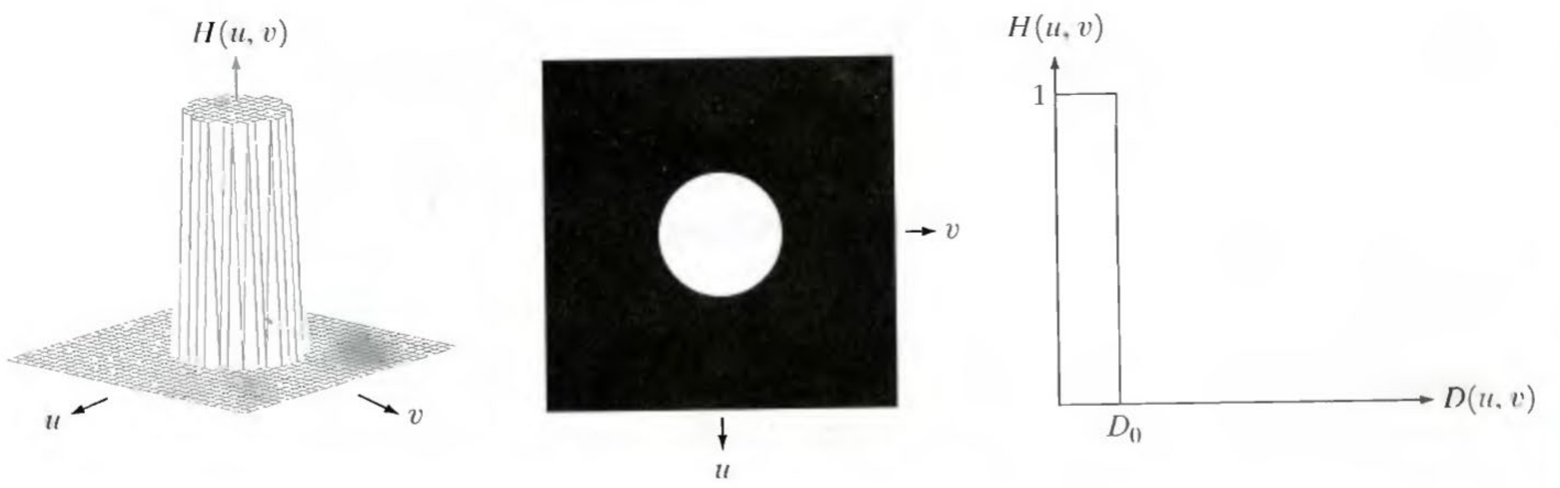


高通滤波后声音信号的时域波形



高通滤波后声音信号的频域波形

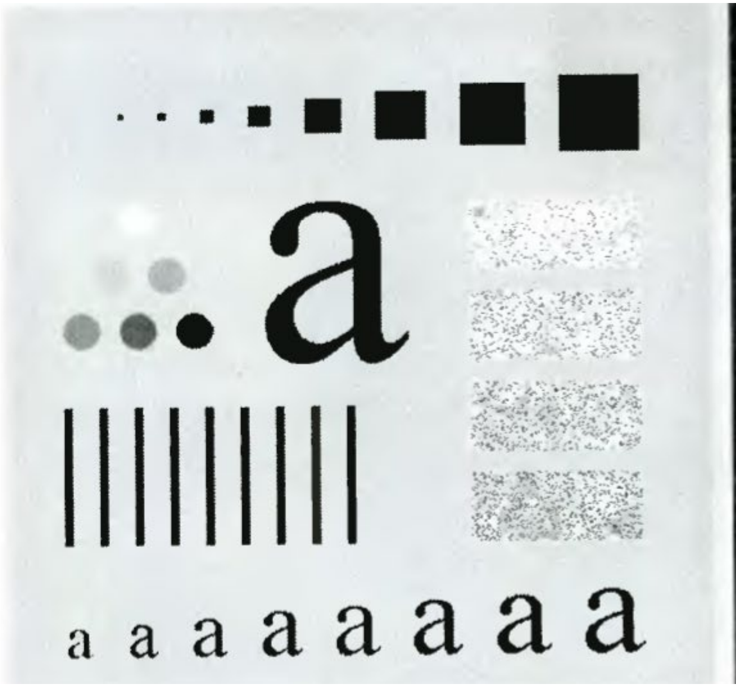
频域的应用 – 图像的低通滤波



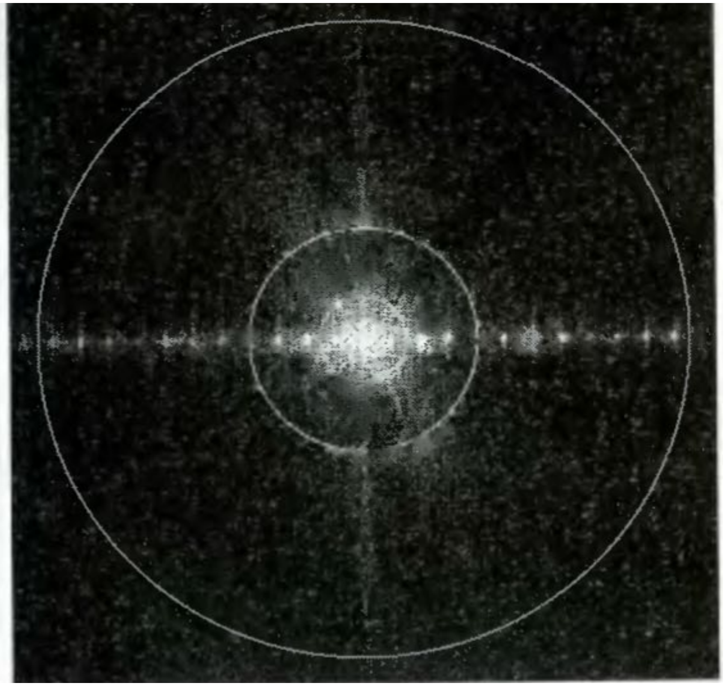
（1）　　　　（2）　　　　（3）

图像的理想低通滤波器 （1）理想滤波器的传递函数；（2）传递函数的图像表示；（3）传递函数的截面图。

频域的应用 – 图像的低通滤波



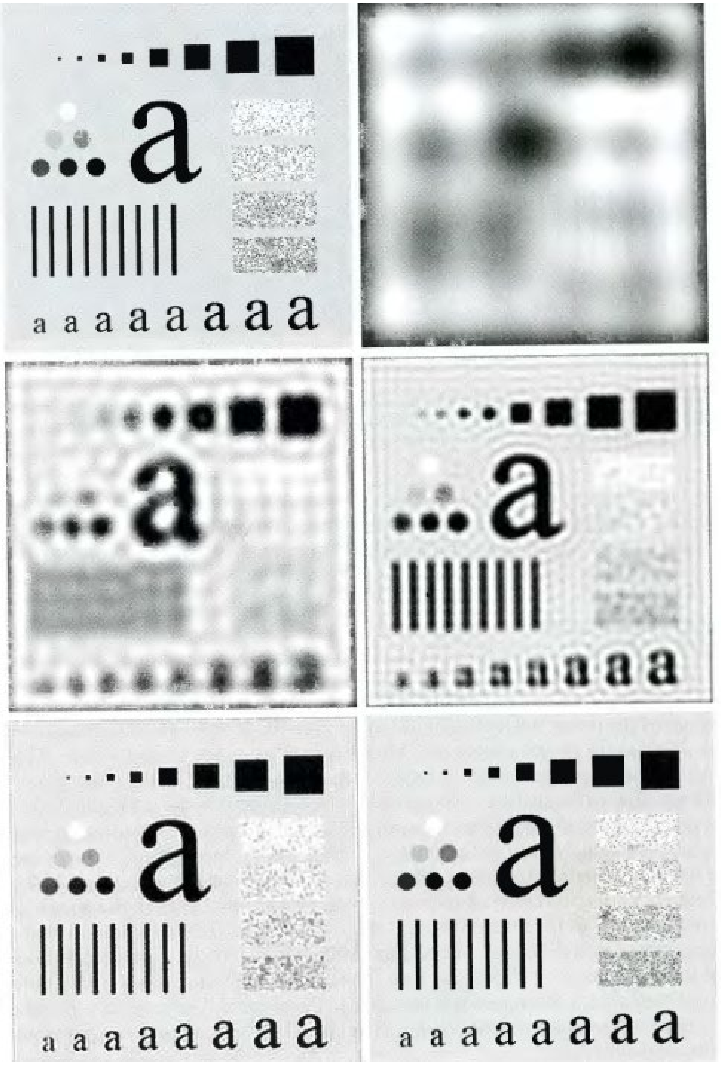
（1）



（2）

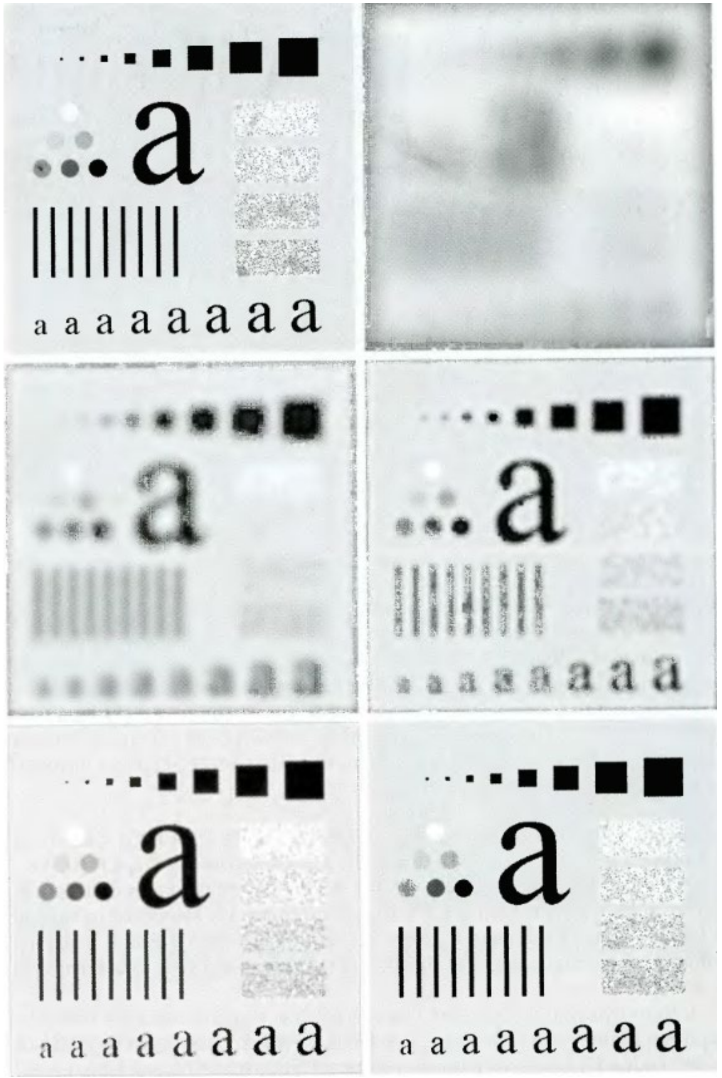
图像的频谱：（1）原图（500*500像素）；（2）频谱图

频域的应用 – 图像的低通滤波



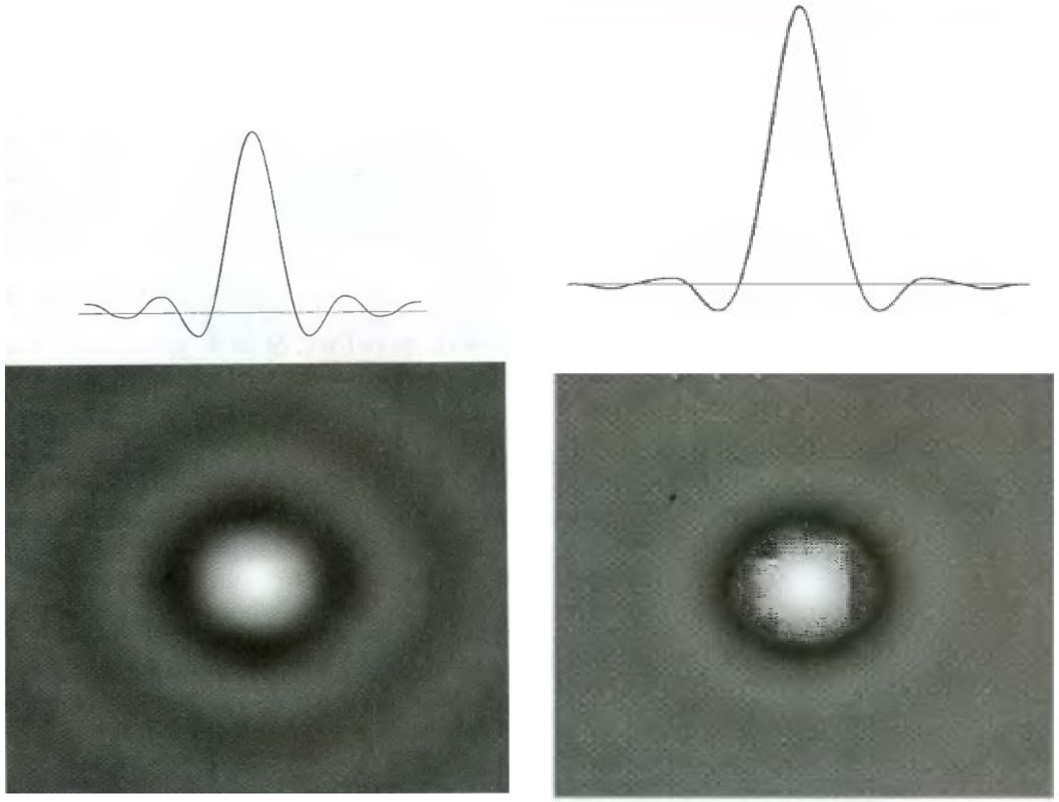
原图及经过理想低通滤波器后的图像。理想低通滤波器的半径分别为5,15,30,80,230个像素。对应着保留的能量为92%, 94.6%, 96.4%,98%, 99.5%

频域的应用 – 图像的低通滤波



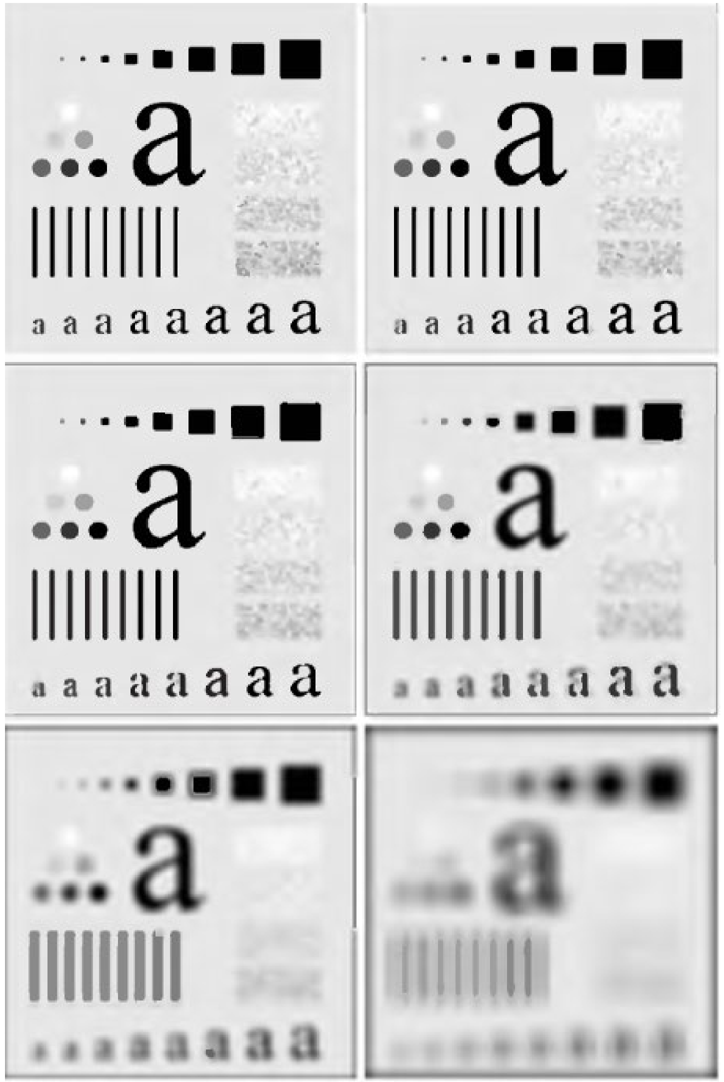
原图及经过巴特沃斯低通滤波器后的图像。巴特沃斯低通滤波器的半径分别为 5,15,30,80,230个像素。

频域的应用 – 图像的低通滤波



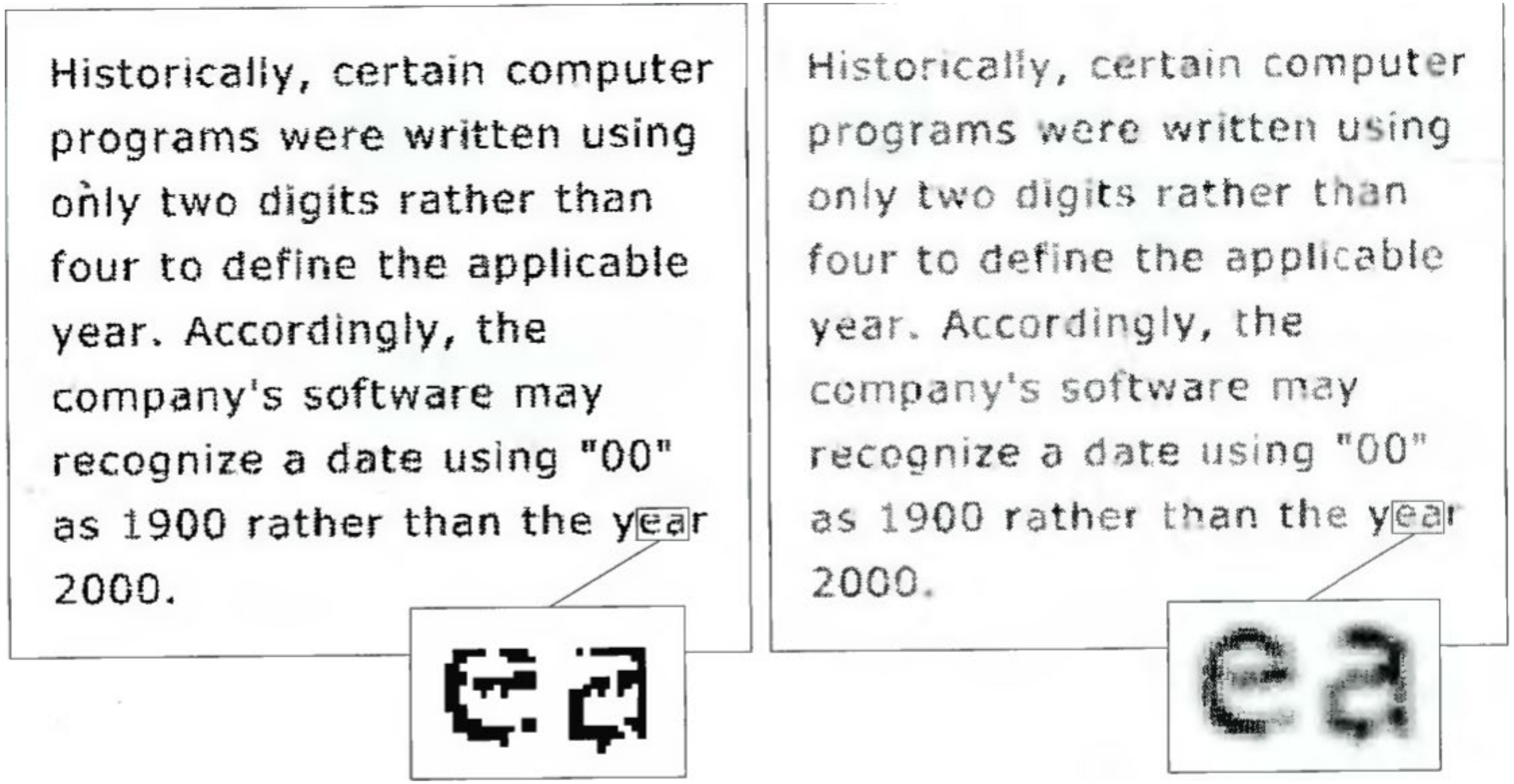
理想低通滤波器与5阶巴特沃斯滤波器的频率响应比较。

频域的应用 – 图像的低通滤波



图像均值滤波，均值窗分别为3,5,9,15,35。

频域的应用 – 图像的低通滤波

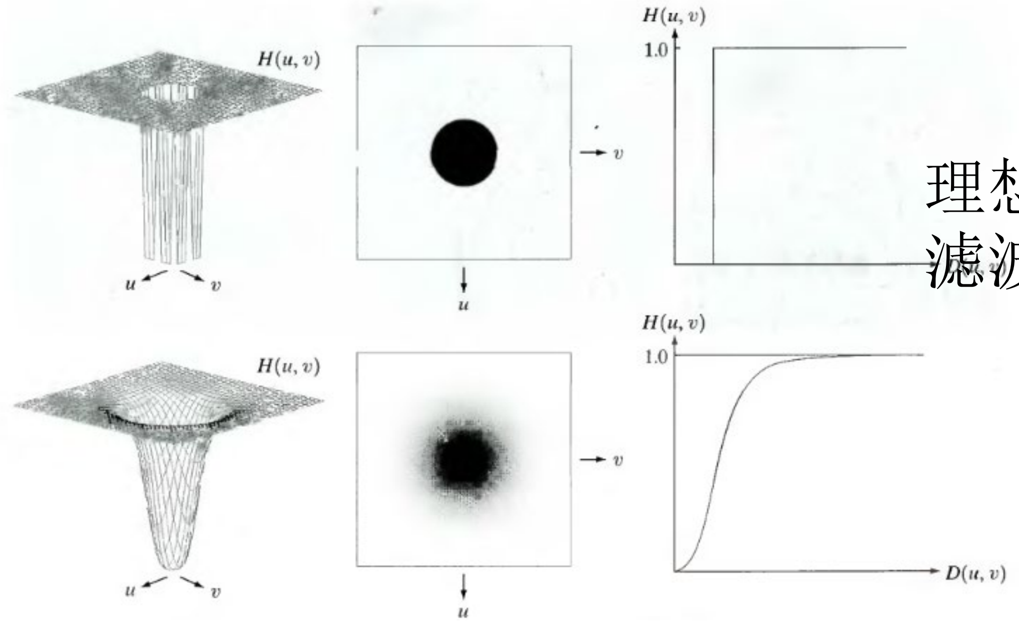


原图及通过巴特沃斯低通滤波器后的图像

频域的应用－图像的高通滤波

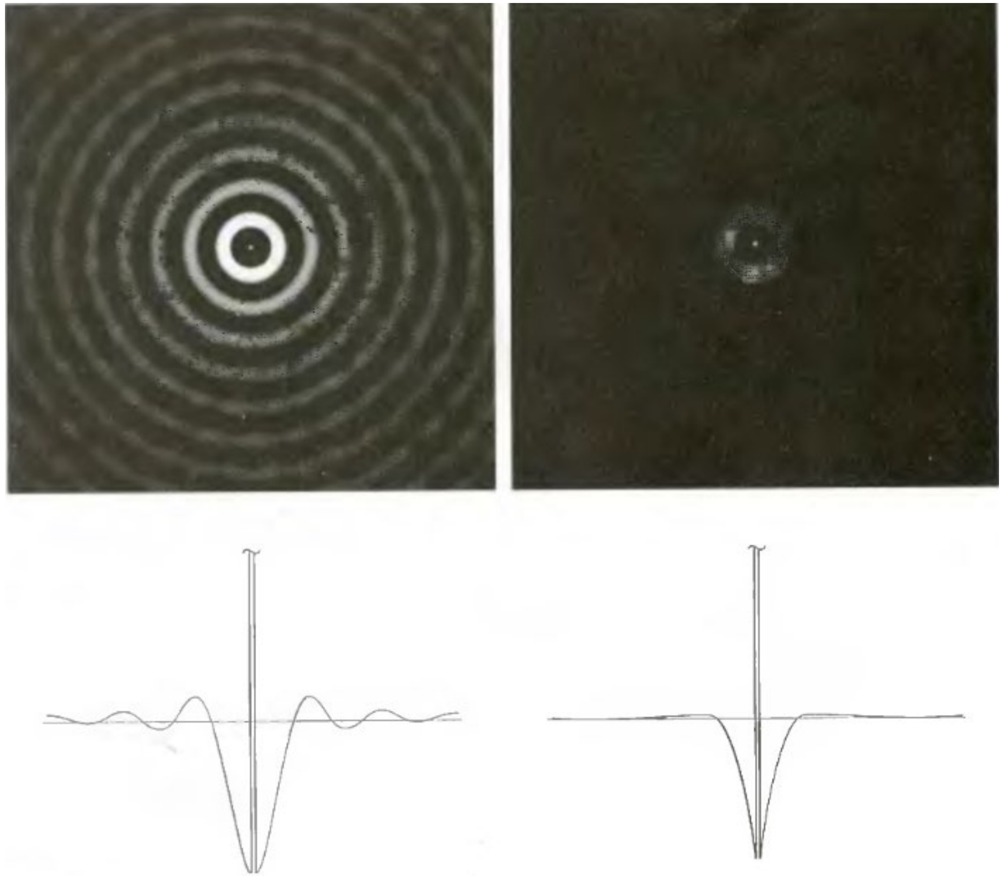
高通滤波器的传递函数

$$H_{hp}(u,v)=1-H_{lp}(u,v)$$



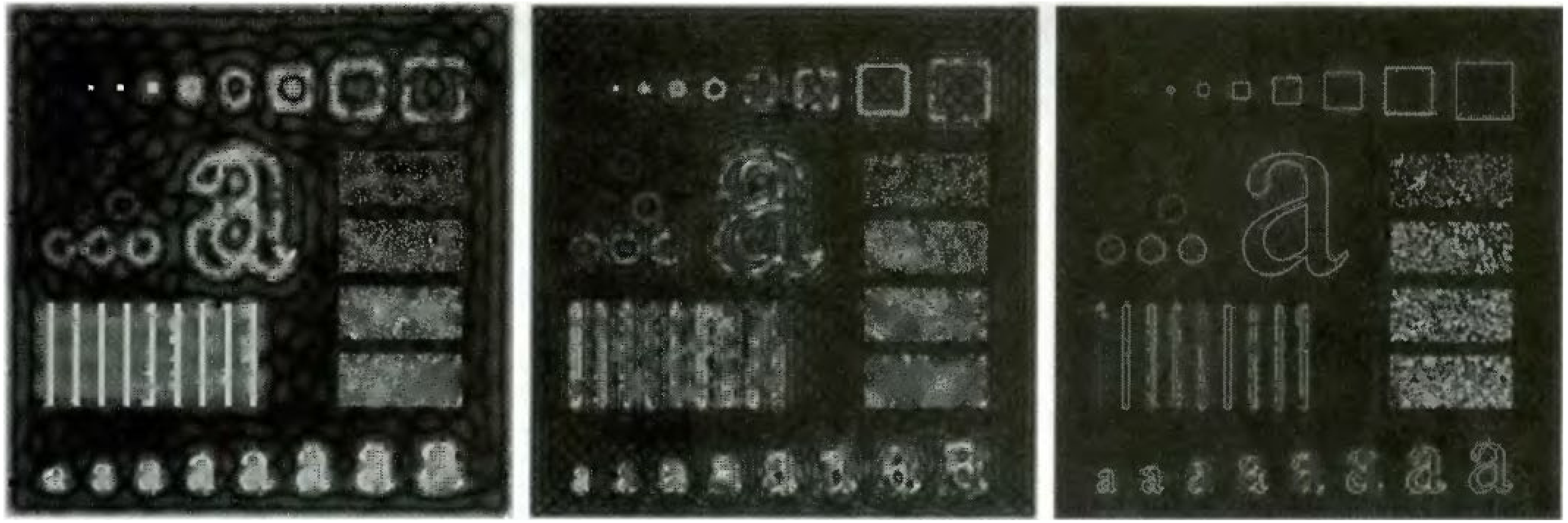
理想高通与巴特沃斯高通滤波器的频率响应。

频域的应用 – 图像的高通滤波



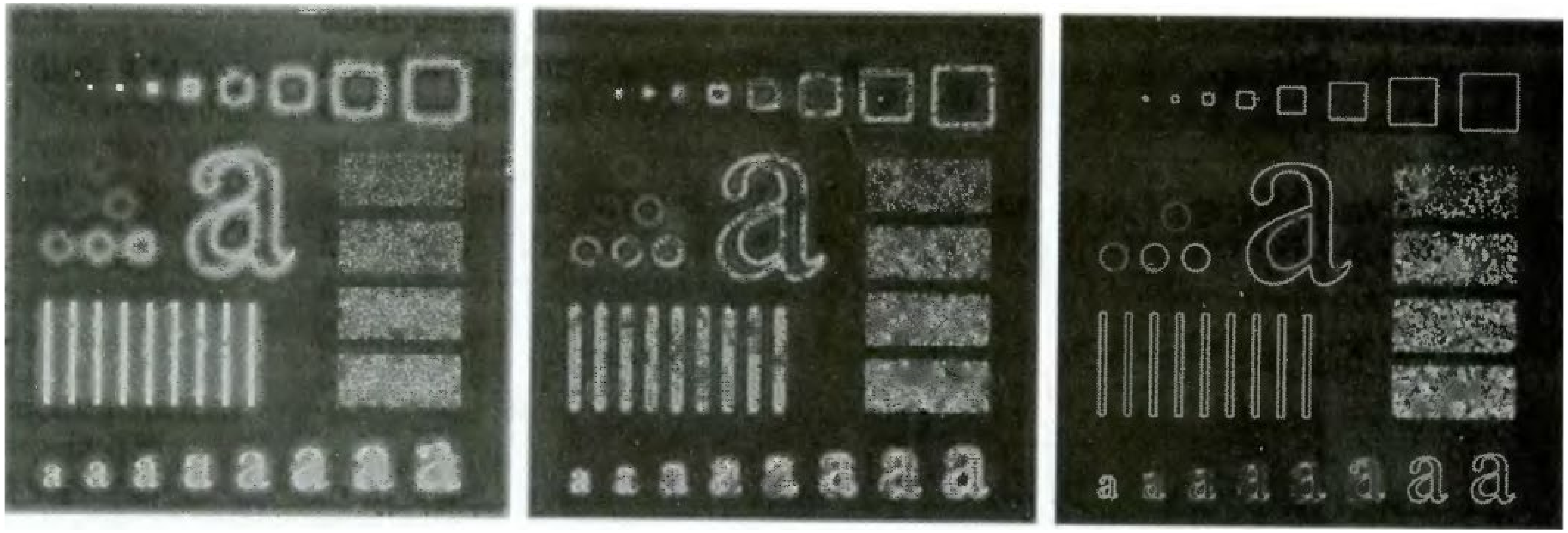
理想高通与巴特沃斯高通滤波器的频率响应。

频域的应用 – 图像的高通滤波



理想高通滤波器，截止频率分别为15,30,80像素。

频域的应用 – 图像的高通滤波



二阶巴特沃斯高通滤波器，截止频率分别为15,30,80像素。

频域的应用 – 调制与解调

一、信号的调制 （发送端）

原信号： $x(t)$

载波信号： $\cos(\omega_c t)$, 其中 ω_c 叫做载波频率，收音机或电视机的每一个频道，都有一个对应的载波频率。

传输信号： $y(t)=x(t)\cos(\omega_c t)$

二、信号的解调 （接收端）

在接收端，首先获得 $y(t)=x(t)\cos(\omega_c t)$， 然后我们将 $y(t)$ 乘以载波 , 获得 $z(t)$.

$$z(t)=y(t)\cos(\omega_c t)=x(t)\cos^2(\omega_c t)=\frac{1}{2}x(t)-\frac{1}{2}\cos(2\omega_c t)$$

频域的应用 – 调制与解调

一、信号的调制 （发送端）

原信号： $x(t)$

载波信号： $\cos(\omega_c t)$, 其中 ω_c 叫做载波频率，收音机或电视机的每一个频道，都有一个对应的载波频率。

传输信号： $y(t) = x(t)\cos(\omega_c t)$

这是高频分量，经过低通滤波器后被滤掉

二、信号的解调 （接收端）

在接收端，首先获得 $y(t) = x(t)\cos(\omega_c t)$， 然后我们将 $y(t)$ 乘以载波 , 获得 $z(t)$.

$$z(t) = y(t)\cos(\omega_c t) = x(t)\cos^2(\omega_c t) = \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}\cos(2\omega_c t)$$

最后，将 $z(t)$ 送入低通滤波器，得到输出为 $\frac{1}{2}x(t)$, 再线性扩大两倍，获得原来信号。

频域的应用 – 调制与解调

请思考：为什么不直接传输 $x(t)$ ？

频域的应用 – 调制与解调

请思考：为什么不直接传输 $x(t)$ ？

答案：因为我们希望 **频分复用**。

假设我们要**同时传输**两个信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，我们如何做呢？

频域的应用 – 调制与解调

一、信号的调制 （发送端）

原信号： $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$

载波信号：$\cos(\omega_{c1}t)$ 和 $\cos(\omega_{c2}t)$ 。（我们经常听到收音机中说，调频多少兆赫，说的就是不同的 ω_c ）

传输信号： $y(t) = x_1(t)\cos(\omega_{c1}t) + x_2(t)\cos(\omega_{c2}t)$

二、信号的解调 （接收端）

在接收端，如果你想接收 $x_1(t)$，你需要把收音机的载波频率调到 ω_{c1}，即将 $y(t)$ 乘以 $\cos(\omega_{c1}t)$，获得 $z(t)$ 。

$$z(t) = y(t)\cos(\omega_{c1}t) = x_1(t)\cos^2(\omega_{c1}t) + x_2(t)\cos(\omega_{c1}t)\cos(\omega_{c2}t)$$
$$= \frac{1}{2}x_1(t) - \frac{1}{2}\cos(2\omega_{c1}t) + \frac{1}{2}[\cos(\omega_{c1} + \omega_{c2})t + \cos(\omega_{c1} - \omega_{c2})t]$$

频域的应用 – 调制与解调

高频分量被低通滤波器滤掉

高频分量被低通滤波器滤掉

(接上页)

$$z(t) = y(t)\cos(\omega_{c1}t) = x_1(t)\cos^2(\omega_{c1}t) + x_2(t)\cos(\omega_{c1}t)\cos(\omega_{c2}t)$$
$$= \frac{1}{2}x_1(t) - \frac{1}{2}\cos(2\omega_{c1}t) + \frac{1}{2}[\cos(\omega_{c1}+\omega_{c2})t + \cos(\omega_{c1}-\omega_{c2})t]$$

如果 $|\omega_{c1} - \omega_{c2}|$ 足够大，那么上式中的后面几项都是高频分量，经过低通滤波器后，它们都会被滤掉，最后只剩下 $\frac{1}{2}x_1(t)$。最后我们将信号线性扩大2倍，得到 $x_2(t)$ 。

频域的应用 – 调制与解调

思考题：

（1）请写出解调端接收 $x_2(t)$ 的详细步骤。

（2）为什么我们听到收音机中说到“调频91.8兆赫”、“调频94兆赫”，而没有听说过“调频91.8兆赫”、“调频91.9兆赫”？两个载波的差距最小应该有多大？

■ 参考读物

(1) Transnational College of Lex (2012). Who is Fourier? A mathematical adventure.

(2) R. N. Bracewell (2000). The Fourier transform and its applications. McGraw-Hill Higher Education.

(3) M. A. Pinsky (2003). Introduction to Fourier analysis and wavelets. 机械工业出版社

■ 上机作业

运用给出的MATLAB程序，打印出自己声音的频谱。