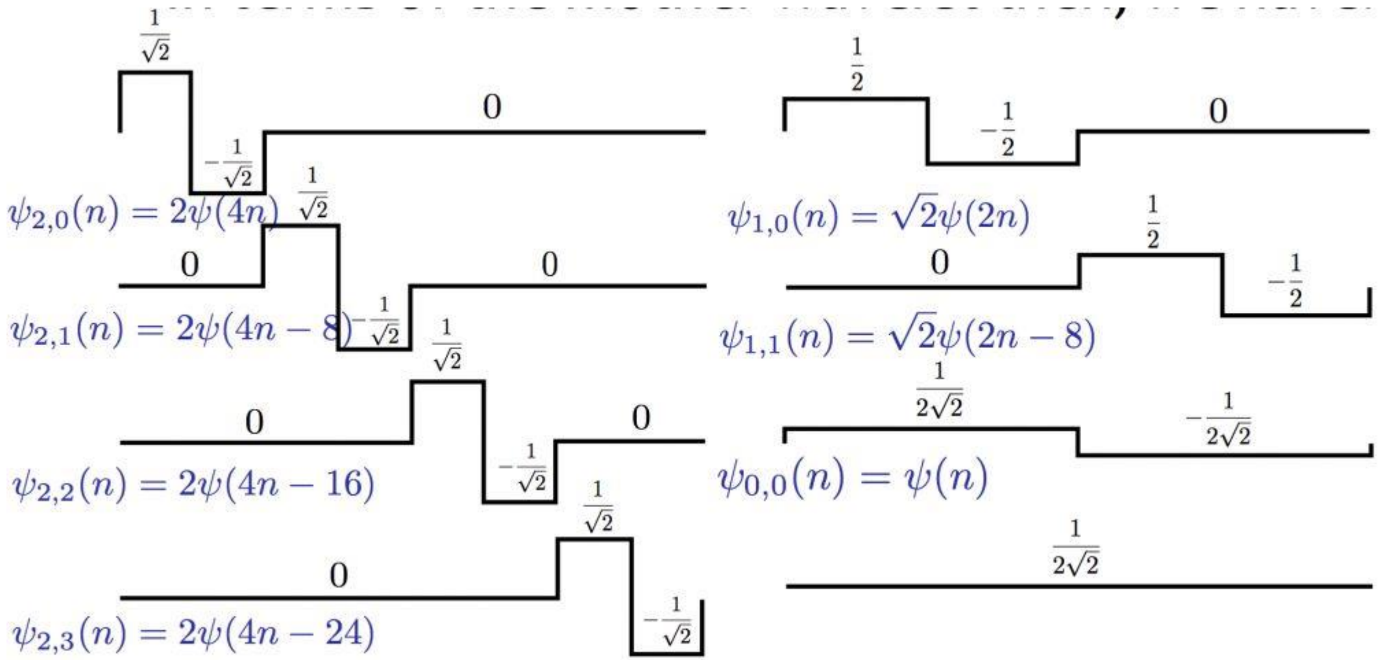
§ 信号的小波分解

§ 勒让德多项式

§ 主成分分析

信号的小波分解

- 哈尔小波



信号的小波分解

- 哈尔小波

$$H=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&-1&-1\\1&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{8}}&\frac{1}{\sqrt{8}}&\frac{1}{\sqrt{8}}&\frac{1}{\sqrt{8}}&\frac{1}{\sqrt{8}}&\frac{1}{\sqrt{8}}&\frac{1}{\sqrt{8}}&\frac{1}{\sqrt{8}}\\\frac{1}{\sqrt{8}}&\frac{1}{\sqrt{8}}&\frac{1}{\sqrt{8}}&\frac{1}{\sqrt{8}}&\frac{-1}{\sqrt{8}}&\frac{-1}{\sqrt{8}}&\frac{-1}{\sqrt{8}}&\frac{-1}{\sqrt{8}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}&\frac{-1}{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}&\frac{-1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&0&0&0&0&0&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&0&0&0&0\\0&0&0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&0&0\\0&0&0&0&0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

勒让德多项式

正交性：在区间[-1,1) 上具有正交性。

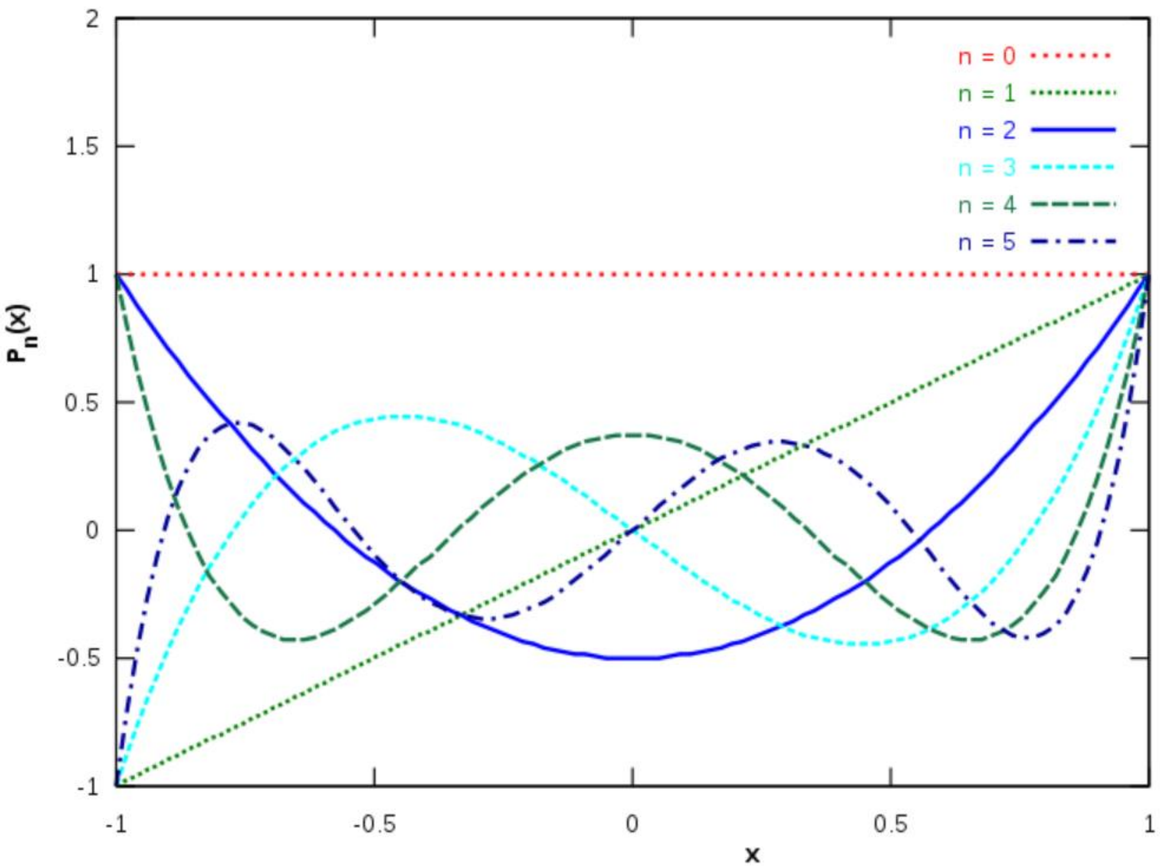
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right].$$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$
6	$\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$
7	$\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x)$
8	$\frac{1}{128}(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35)$
9	$\frac{1}{128}(12155x^9-25740x^7+18018x^5-4620x^3+315x)$
10	$\frac{1}{256}(46189x^{10}-109395x^8+90090x^6-30030x^4+3465x^2-63)$

勒让德多项式

头六个勒让德多项式在区间[-1,1) 的图像



K-L变换

- 离散K-L变换：对向量x用确定的完备正交归一向量系u_j展开

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \mathbf{u}_j$$

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$$

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} \qquad\qquad y_j = \mathbf{u}_j^T \mathbf{x}$$

离散K-L变换的均方误差

- 用有限项估计X： $\hat{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{d} y_j \mathbf{u}_j \quad y_j = \mathbf{u}_j^T \mathbf{x}$

- 该估计的均方误差： $\varepsilon = E\left[(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}})^T(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}})\right]$

$$\varepsilon = E\left[\sum_{j=d+1}^{\infty} y_j^2\right] = E\left[\sum_{j=d+1}^{\infty} \mathbf{u}_j^T \mathbf{x}\mathbf{x}^T \mathbf{u}_j\right]$$

$$\mathbf{R} = \left[r_{ij} = \mathrm{E}(x_i x_j)\right] = E\left[\mathbf{x}\mathbf{x}^T\right]$$

$$\varepsilon = \sum_{j=d+1}^{\infty} \mathbf{u}_j^T E\left[\mathbf{x}\mathbf{x}^T\right]\mathbf{u}_j = \sum_{j=d+1}^{\infty} \mathbf{u}_j^T \mathbf{R} \mathbf{u}_j$$

求解最小均方误差正交基

- 用Lagrange乘子法：

$$\text{if } \mathbf{R}\mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_j \text{ then } \varepsilon = \sum_{j=d+1}^{\infty} \mathbf{u}_j^T \mathbf{R}\mathbf{u}_j \text{取得极值}$$

- 结论：以相关矩阵R的d个本征向量为基向量来展开x时，其均方误差为：

$$\varepsilon = \sum_{j=d+1}^{\infty} \lambda_j$$

- K-L变换：当取矩阵R的***d***个最大本征值对应的本征向量来展开x时，其截断均方误差最小。这***d***个本征向量组成的正交坐标系称作x所在的***D***维空间的***d***维K-L变换坐标系， x在K-L坐标系上的展开系数向量y称作x的K-L变换

K-L变换的表示

- K-L变换的向量展开表示：

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{d} y_j \mathbf{u}_j \qquad y_j = \mathbf{u}_j^T \mathbf{x}$$

- **K-L变换的矩阵表示：**

$$\mathbf{x} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_d]\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}^T \mathbf{x}$$

K-L变换的性质

- y的相关矩阵是对角矩阵：

$$E\left[y_i y_j\right] = E\left[\mathbf{u}_i^T \mathbf{x}\mathbf{x}^T \mathbf{u}_j\right] = \mathbf{u}_i^T E\left[\mathbf{x}\mathbf{x}^T\right]\mathbf{u}_j$$

$$= \mathbf{u}_i^T R\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i^T \lambda_j \mathbf{u}_j = \lambda_i \delta_{ij}$$

$$E\left[\mathbf{y}\mathbf{y}^T\right] = E\left[U^T \mathbf{x}\mathbf{x}^T U\right]$$

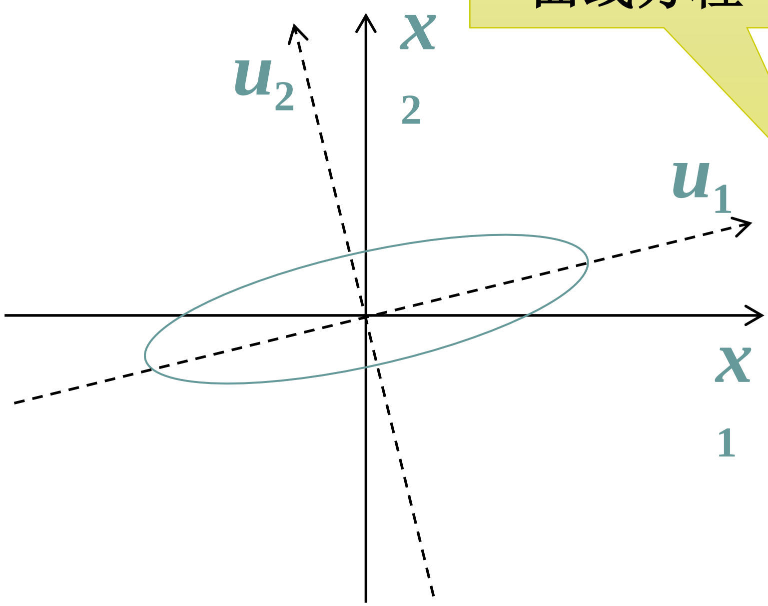
$$= U^T \mathbf{R} U = \mathbf{\Lambda}$$

K-L变换的性质

- K-L坐标系把矩阵R对角化，即通过K-L变换消除原有向量x的各分量间的相关性，从而有可能去掉那些带有较少信息的分量以达到降低特征维数的目的

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_d \end{bmatrix}$$

K-L变换图解



二次
曲线方程

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij} x_i x_j$$

$$= \mathbf{x}'\mathbf{R}\mathbf{x} \overset{\mathbf{x}=U\,\mathbf{y}}{=} \mathbf{y}'(\mathbf{U}'\mathbf{R}\mathbf{U})\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}$$

$$= \lambda_1 y_1^{\,2} + \lambda_2 y_2^{\,2} + \cdots \lambda_n y_n^{\,2}$$

标准二次
曲线方程

K-L变换的数据压缩图解

- 取2x1变换矩阵U=[u_1]，则x的K-L变换y为：

  $y = U^T x = u_1^T x = y_1$

- 变换的能量损失为

$$\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \frac{1}{4^2 + 1^2} = 5.9\%$$

K-L变换的产生矩阵

- 数据集$K_N=\{x_i\}$的K-L变换的产生矩阵由数据的二阶统计量决定，即K-L坐标系的基向量为某种基于数据x的二阶统计量的产生矩阵的本征向量
- K-L变换的产生矩阵可以有多种选择：
  - x的相关函数矩阵$R=E[xx^T]$
  - x的协方差矩阵$C=E[(x-\mu)(x-\mu)^T]$
  - 样本总类内离散度矩阵：

$$S_w=\sum_{i=1}^{c}P_i\Sigma_i,\quad \Sigma_i=\mathrm{E}\left[(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_i)(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_i)^T\right],\ \mathbf{x}\in\omega_i$$

未知类别样本的K-L变换

- 用总体样本的协方差矩阵$C=E[(x-\mu)(x-\mu)^T]$进行K-L变换，K-L坐标系$U=[u_1,u_2,\ldots,u_d]$按照C的本征值的下降次序选择
- 例：设一样本集的协方差矩阵是：$C=\begin{bmatrix}19.5 & 9.5\\ 9.5 & 7.5\end{bmatrix}$
  求最优2x1特征提取器U
  解答：计算特征值及特征向量[V, D]=eig(C);
  特征值$D=[24.736, 2.263]^T$,特征向量: $V=\begin{bmatrix}0.875 & -0.482\\ 0.482 & 0.875\end{bmatrix}$
  由于$\lambda_1>\lambda_2$，故最优2x1特征提取器 $U=[\mathbf{u}_1]=\begin{bmatrix}0.875\\ 0.482\end{bmatrix}$
  此时的K-L变换式为：

$$\mathbf{y}=U^T\mathbf{x}=\mathbf{u}^T\mathbf{x}=\begin{bmatrix}0.875 & 0.482\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

PCA 在人脸识别中的应用

以图像压缩和识别为例：

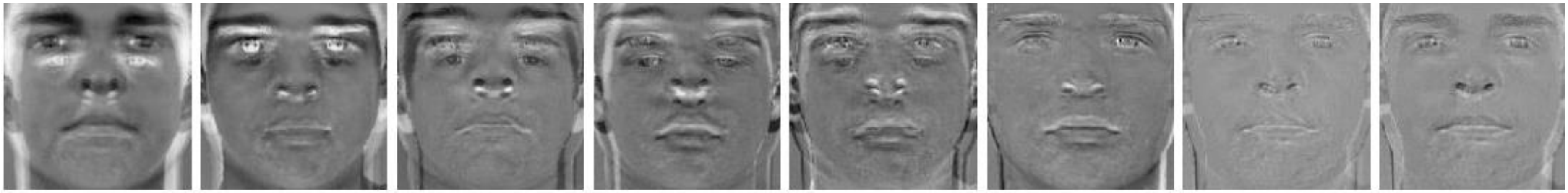
运用傅里叶发明的正交基函数的分解方法，得到一组数：

(3559,351,-256,…)

用这组数来表达图像的本质特征，并用于对图像的进一步处理。

PCA 在人脸识别中的应用

（a）



（b）

（a）8张人脸图像；（b）对应的8个特征向量，按照特征值由大到小排列，特征向量又叫特征脸 (Eigenfaces)

PCA 在人脸识别中的应用

识别结果：

数据库： **XM2VTS,** 由**295**人构成，每人**8**张照片，分四次拍摄，每次两张，每次间隔时间一个月。

用前两次拍摄的**4**张照片训练，用后两次拍摄的**4**张照片测试。

取前**100**维**PCA**进行识别

	最近邻法	SVM
识别率	**76.02%**	**80.25%**