

06-D1

二叉搜索树

AVL树：渐近平衡

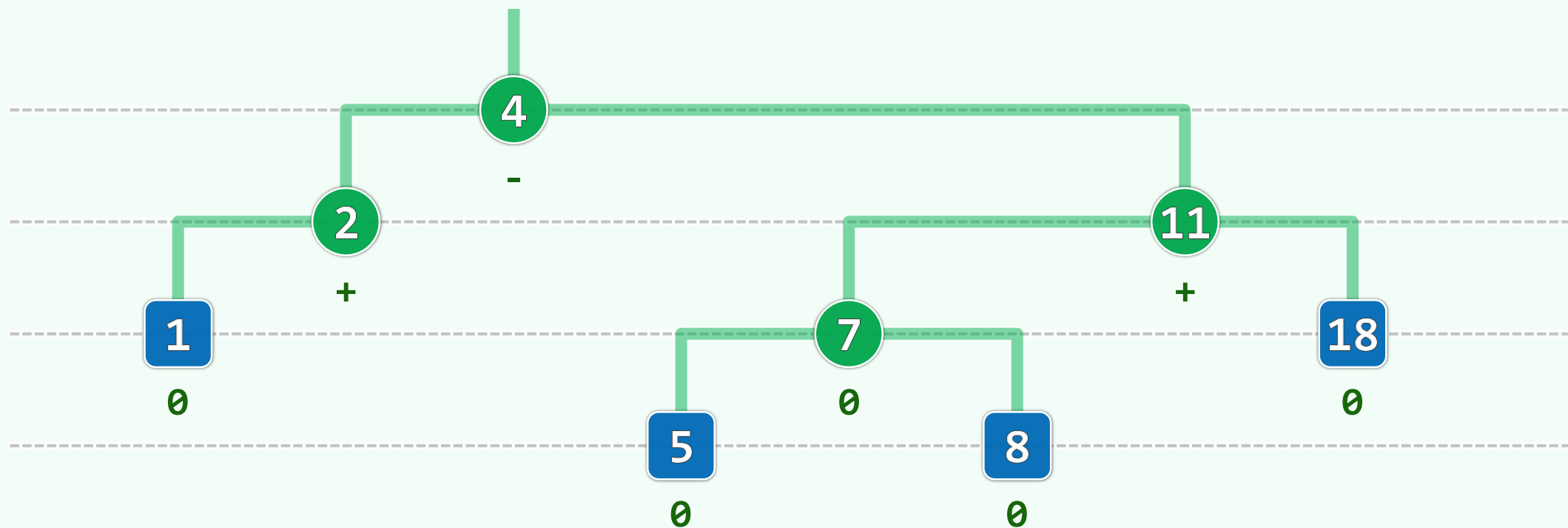
邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

# 平衡因子

❖ **Balance Factor:**  $balFac(v) = height(lc(v)) - height(rc(v))$

❖ **G. Adelson-Velsky & E. Landis (1962):**  $\forall v \in AVL, |balFac(v)| \leq 1$



❖ **AVL树未必理想平衡，但必然渐近平衡...**

# AVL = 渐近平衡

❖ 高度为 $h$ 的AVL树，至少包含  $S(h) = fib(h + 3) - 1$  个节点

为什么？

❖ 固定高度 $h$ ，考查节点最少的AVL树...

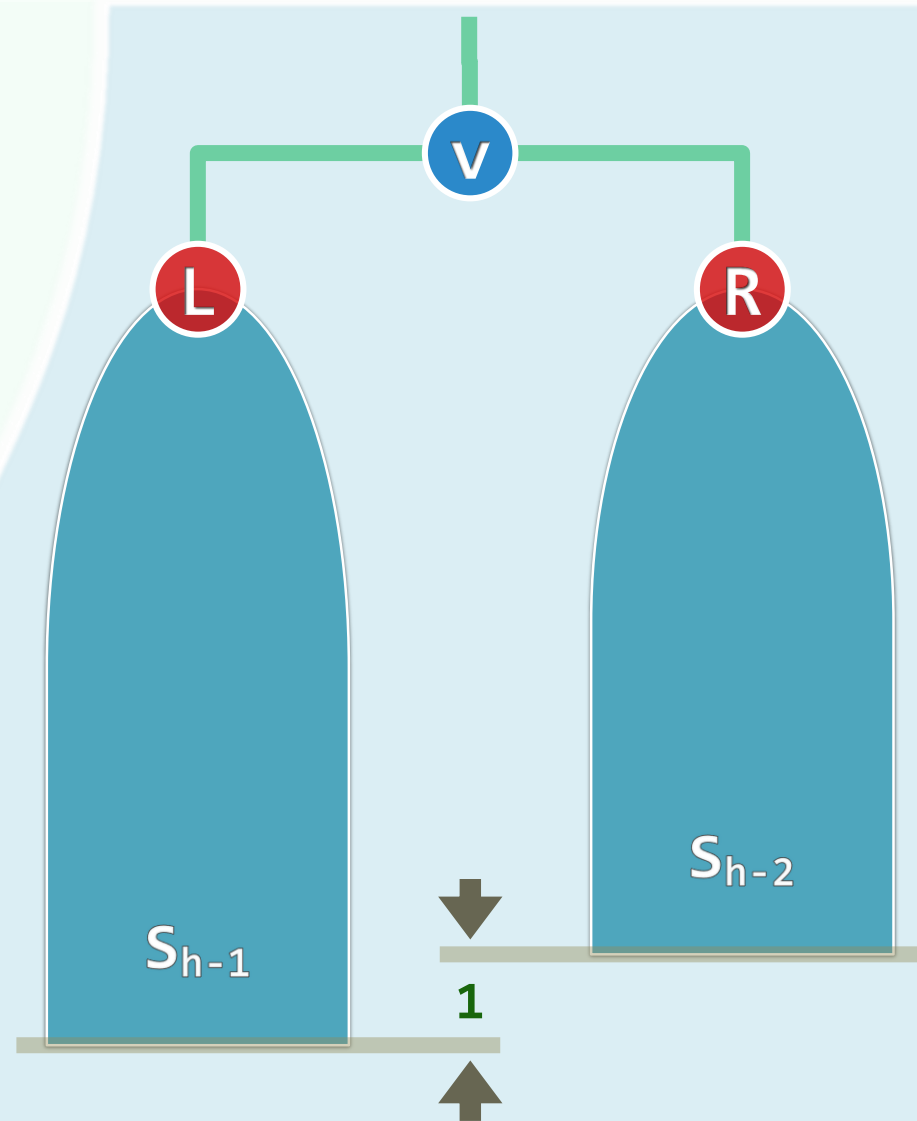
❖ 将其规模记作  $S(h)$

$$S(h) = 1 + S(h - 1) + S(h - 2)$$

$$S(h) + 1 = [S(h - 1) + 1] + [S(h - 2) + 1]$$

$$fib(h + 3) = fib(h + 2) + fib(h + 1)$$

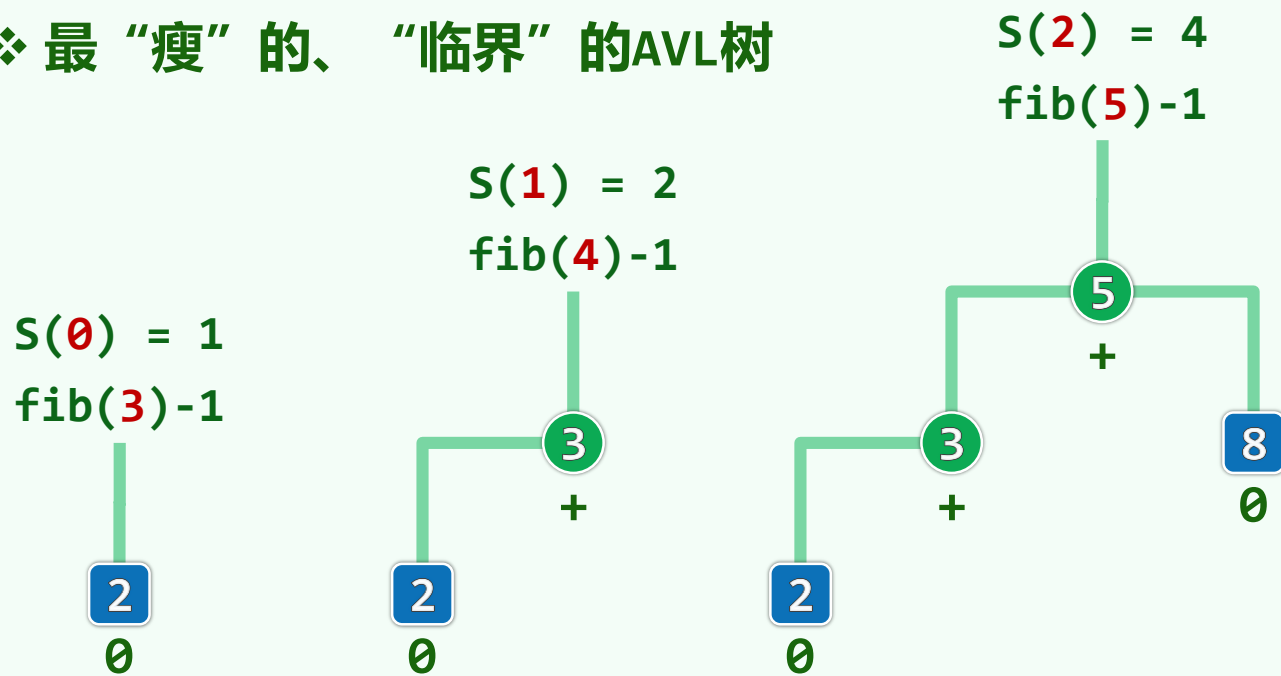
❖ 反过来，由 $n$ 个节点构成的AVL树，高度不超过  $\mathcal{O}(\log n)$



# Fibonacci Tree

❖ 高度为 $h$ ，规模恰为  $S(h) = \text{fib}(h + 3) - 1$  的AVL树

❖ 最“瘦”的、“临界”的AVL树



1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, 54, 88, 143, ...

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

