

词典

排解冲突：双向平方试探

09-C6

绕树三匝，何枝可依

伺候父亲躺下，我正准备离去，父亲拉住了我的手，轻轻地问我，丫儿，你知道什么是无枝可栖吗？

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

策略：交替地沿两个方向试探，均按平方确定距离

$$[ \text{hash}(\text{key}) + 1^2 ] \% M$$

$$[ \text{hash}(\text{key}) - 1^2 ] \% M$$

$$[ \text{hash}(\text{key}) + 2^2 ] \% M$$

$$[ \text{hash}(\text{key}) - 2^2 ] \% M$$

$$[ \text{hash}(\text{key}) + 3^2 ] \% M$$

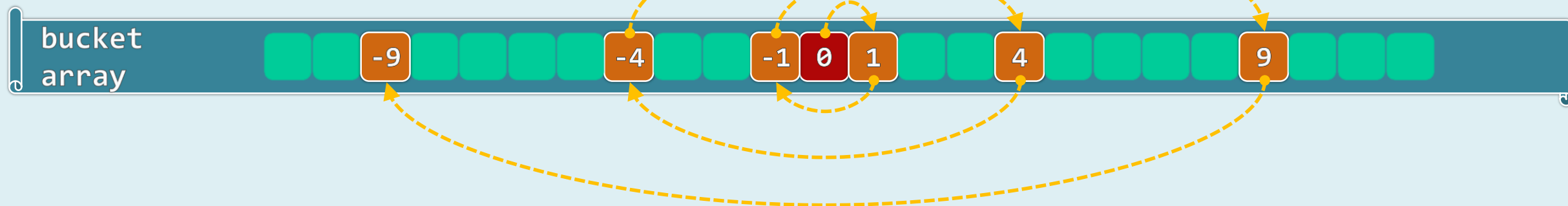
$$[ \text{hash}(\text{key}) - 3^2 ] \% M$$

$$[ \text{hash}(\text{key}) + 4^2 ] \% M$$

$$[ \text{hash}(\text{key}) - 4^2 ] \% M$$

...

...



# 子试探链，彼此独立？

❖ **正向和反向**的子试探链，各自包含 $\lceil \mathcal{M}/2 \rceil$ 个**互异**的桶

$$\underbrace{-\lfloor \mathcal{M}/2 \rfloor, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \lfloor \mathcal{M}/2 \rfloor}$$

$\pm i^2$		-36	-25	-16	-9	-4	-1	0	1	4	9	16	25	36
M	5					1	4	0	1	4				
	7				5	3	6	0	1	4	2			
	11		8	6	2	7	10	0	1	4	9	5	3	
	13	3	1	10	4	9	12	0	1	4	9	3	12	10

❖ 除了起点**0**，这两个序列是否还有...其它**公共**的桶？

$$4k + 3$$

❖ 两类素数:  $3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad 23 \quad 29 \quad 31$

❖ 诀窍: 表长取作素数  $M = 4 \cdot k + 3$ , 即**必然可以保证试探链的前  $M$  项均互异**

$\pm i^2$		-36	-25	-16	-9	-4	-1	0	1	4	9	16	25	36
M	5					1	4	0	1	4				
	7				5	3	6	0	1	4	2			
	11		8	6	2	7	10	0	1	4	9	5	3	
	13	3	1	10	4	9	12	0	1	4	9	3	12	10

❖ 反之,  $M = 4 \cdot k + 1$  就...**必然不能使用?**

# Two-Square Theorem of Fermat

❖ 素数  $p$  不能表示为一对整数的平方和，当且仅当

$$p \equiv 3 \pmod{4}$$

❖ 只要注意到：

$$\begin{aligned}(u^2 + v^2) \cdot (s^2 + t^2) &= (us + vt)^2 + (ut - vs)^2 \\ &= (us - vt)^2 + (ut + vs)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2^2 + 3^2) \cdot (5^2 + 8^2) &= (10 + 24)^2 + (16 - 15)^2 \\ &= (10 - 24)^2 + (16 + 15)^2\end{aligned}$$

❖ 就可以推知：

- 自然数  $n$  可表示为一对整数的平方和，当（且仅当）
- 它的每一  $M = 4 \cdot k + 3$  类的素因子均为偶数次方

$$\begin{aligned}1 &= 1^2 + 0^2 \\ 2 &= 1^2 + 1^2 \\ 3 &= \\ 4 &= 2^2 + 0^2 \\ 5 &= 2^2 + 1^2 \\ 6 &= \\ 7 &= \\ 8 &= 2^2 + 2^2 \\ 9 &= 3^2 + \\ 10 &= 3^2 + \\ 11 &= \\ &\vdots\end{aligned}$$

