求证：范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & V_0 & V_0^2 & \cdots & V_0^{N-1} \\ 1 & V_1 & V_1^2 & \cdots & V_1^{N-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & V_{N-1} & V_{N-1}^2 & \cdots & V_{N-1}^{N-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i=0\sim N-1 \\ j=0\sim N-1 \\ i<j}} (V_j - V_i)$$

证明：事实一：若 $V_i = V_j\ (i \neq j)$，则范德蒙行列式等于0。这是因为此时第i行 $[1, V_i\ V_i^2 \cdots V_i^{N-1}]$ 与第j行 $[1, V_j, V_j^2 \cdots V_j^{N-1}]$ 完全一样，所以两行相同的行列式值为0。

事实二：对每一个 $V_i\ (i=0,1,\cdots N-1)$，其行列式展开后 V_i 的最高幂次为 N-1 次。以 V_0 为例，按第一行展开，

$$范德蒙行列式 = \begin{vmatrix} V_1 & V_1^2 & \cdots & V_1^{N-1} \\ V_2 & V_2^2 & \cdots & V_2^{N-1} \\ \vdots & & & \\ V_{N-1} & V_{N-1}^2 & \cdots & V_{N-1}^{N-1} \end{vmatrix} - V_0 \begin{vmatrix} 1 & V_1^2 & V_1^3 & \cdots & V_1^{N-1} \\ 1 & V_2^2 & V_2^3 & \cdots & V_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & V_{N-1}^2 & V_{N-1}^3 & \cdots & V_{N-1}^{N-1} \end{vmatrix} +$$

$$V_0^2 \begin{vmatrix} 1 & V_1 & V_1^3 & \cdots & V_1^{N-1} \\ 1 & V_2 & V_2^3 & \cdots & V_2^{N-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & V_{N-1} & V_{N-1}^3 & \cdots & V_{N-1}^{N-1} \end{vmatrix} \cdots\cdots (-1)^{N-1} V_0^{N-1} \begin{vmatrix} 1 & V_1 & V_1^2 & \cdots & V_1^{N-2} \\ 1 & V_2 & V_2^2 & \cdots & V_2^{N-2} \\ \vdots & & & & \\ 1 & V_{N-1} & V_{N-1}^2 & \cdots & V_{N-1}^{N-2} \end{vmatrix}$$

这些余子式都不含 V_0，因此 V_0 的最高幂次为 N-1 次。

根据事实一与事实二，可以得出范德蒙行列式值为：

$$\begin{vmatrix} 1 & V_0 & V_0^2 & \cdots & V_0^{N-1} \\ 1 & V_1 & V_1^2 & \cdots & V_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & V_{N-1} & V_{N-1}^2 & \cdots & V_{N-1}^{N-1} \end{vmatrix} = C \prod_{\substack{i=0\sim N-1 \\ j=0\sim N-1 \\ i<j}} (V_j - V_i)$$ （其中 C 为常数）

这是因为，只有这种形式能满足以上两个事实。即存在相等的 V 则行列式为 0，且每个 V 最高幂次为 $N-1$。

下面任务就是确定常数 C。由于

$$\begin{vmatrix} 1 & V_0 \\ 1 & V_1 \end{vmatrix} = V_1 - V_0$$，因此 $C=1$，命题得证。