

§ 应用1. **PCA** 在人脸识别和手型合成中的应用

§ 应用2. 巴特沃斯滤波器

§ 应用3. 图像的滤波

§ 应用4. 调制与解调



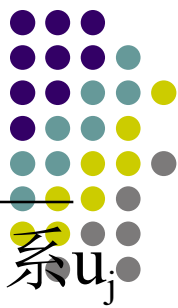
应用一. PCA 用于人脸识别和手型合成



- **特征提取**：用映射（或变换）的方法把原始特征变换为较少的新特征
$$J(\mathbf{x}^*) = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmax}} J(\mathbf{x})$$
- PCA (Principle Component Analysis)方法：
进行特征降维变换，不能完全地表示原有的对象，能量总会有损失。希望找到一种能量最为集中的的变换方法使损失最小。
- K-L (Karhunen-Loeve)变换：最优正交线性变换，相应的特征提取方法被称为PCA方法



K-L变换



- 离散K-L变换：对向量 \mathbf{x} 用确定的完备正交归一向量系 \mathbf{u}_j 展开

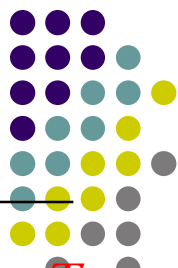
$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \mathbf{u}_j$$

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$$

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{y} \qquad y_j = \mathbf{u}_j^T \mathbf{x}$$



离散K-L变换的均方误差



- 用有限项估计 \mathbf{x} : $\hat{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^d y_j \mathbf{u}_j \quad y_j = \mathbf{u}_j^T \mathbf{x}$
- ◆ 该估计的均方误差: $\varepsilon = E \left[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \right]$

$$\varepsilon = E \left[\sum_{j=d+1}^{\infty} y_j^2 \right] = E \left[\sum_{j=d+1}^{\infty} \mathbf{u}_j^T \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{u}_j \right]$$

$$\mathbf{R} = \left[r_{ij} = E(x_i x_j) \right] = E \left[\mathbf{x} \mathbf{x}^T \right]$$

$$\varepsilon = \sum_{j=d+1}^{\infty} \mathbf{u}_j^T E \left[\mathbf{x} \mathbf{x}^T \right] \mathbf{u}_j = \sum_{j=d+1}^{\infty} \mathbf{u}_j^T \mathbf{R} \mathbf{u}_j$$



求解最小均方误差正交基



- 用Lagrange乘子法：

if $\mathbf{R}\mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_j$ then $\varepsilon = \sum_{j=d+1}^{\infty} \mathbf{u}_j^T \mathbf{R} \mathbf{u}_j$ 取得极值

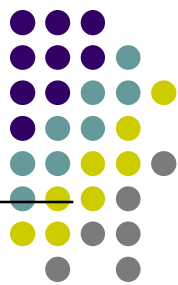
- ◆ 结论：以相关矩阵R的d个本征向量为基向量来展开x时，其均方误差为：

$$\varepsilon = \sum_{j=d+1}^{\infty} \lambda_j$$

- ◆ **K-L变换**：当取矩阵R的d个最大本征值对应的本征向量来展开x时，其截断均方误差最小。这d个本征向量组成的正交坐标系称作x所在的D维空间的d维**K-L变换坐标系**，x在**K-L坐标系**上的展开系数向量y称作x的**K-L变换**



K-L变换的表示



- K-L变换的向量展开表示:

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^d y_j \mathbf{u}_j \quad y_j = \mathbf{u}_j^T \mathbf{x}$$

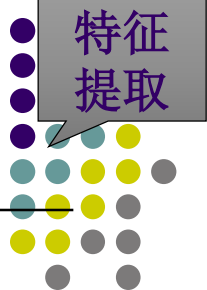
- ◆ K-L变换的矩阵表示:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_d] \mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}^T \mathbf{x}$$



K-L变换的性质



- \mathbf{y} 的相关矩阵是对角矩阵:

$$\begin{aligned} E[y_i y_j] &= E[\mathbf{u}_i^T \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{u}_j] = \mathbf{u}_i^T E[\mathbf{x} \mathbf{x}^T] \mathbf{u}_j \\ &= \mathbf{u}_i^T \mathbf{R} \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i^T \lambda_j \mathbf{u}_j = \lambda_i \delta_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\mathbf{y} \mathbf{y}^T] &= E[U^T \mathbf{x} \mathbf{x}^T U] \\ &= U^T \mathbf{R} U = \Lambda \end{aligned}$$



K-L变换的性质

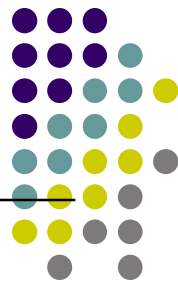
特征
提取

- K-L坐标系把矩阵R对角化，即通过K-L变换消除原有向量x的各分量间的相关性，从而有可能去掉那些带有较少信息的分量以达到降低特征维数的目的

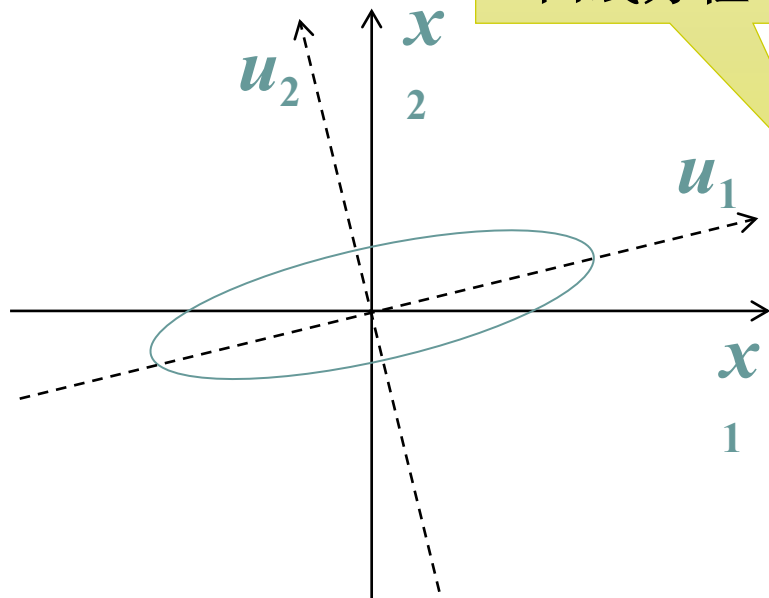
$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_d \end{bmatrix}$$



K-L变换图解



二次
曲线方程



$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n r_{ij} x_i x_j$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{U} \mathbf{y}$$

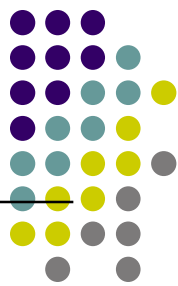
$$= \mathbf{x}' \mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{y}' (\mathbf{U}' \mathbf{R} \mathbf{U}) \mathbf{y} = \mathbf{y}' \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{y}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

标准二次
曲线方程



K-L变换的数据压缩图解



- 取 2×1 变换矩阵 $U=[u_1]$ ，则 x 的K-L变换 y 为：

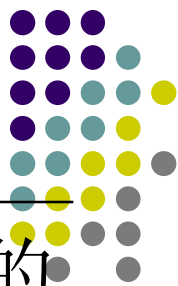
$$y = U^T x = u_1^T x = y_1$$

- 变换的能量损失为

$$\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \frac{1}{4^2 + 1^2} = 5.9\%$$



K-L变换的产生矩阵

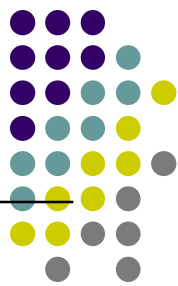


- 数据集 $K_N=\{\mathbf{x}_i\}$ 的K-L变换的产生矩阵由数据的二阶统计量决定，即K-L坐标系的基向量为某种基于数据 \mathbf{x} 的二阶统计量的产生矩阵的本征向量
- K-L变换的产生矩阵可以有多种选择：
 - \mathbf{x} 的相关函数矩阵 $\mathbf{R}=\mathbf{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]$
 - \mathbf{x} 的协方差矩阵 $\mathbf{C}=\mathbf{E}[(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T]$
 - 样本总类内离散度矩阵：

$$\mathbf{S}_w = \sum_{i=1}^c P_i \boldsymbol{\Sigma}_i, \quad \boldsymbol{\Sigma}_i = \mathbf{E}[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i)^T], \quad \mathbf{x} \in \omega_i$$



未知类别样本的K-L变换



- 用总体样本的协方差矩阵 $\mathbf{C} = E[(\mathbf{x} - \mu)(\mathbf{x} - \mu)^T]$ 进行K-L变换，K-L坐标系 $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_d]$ 按照 \mathbf{C} 的本征值的下降次序选择

- 例：设一样本集的协方差矩阵是：
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 19.5 & 9.5 \\ 9.5 & 7.5 \end{bmatrix}$$
求最优2x1特征提取器 \mathbf{U}

解答：计算特征值及特征向量 $[\mathbf{V}, \mathbf{D}] = \text{eig}(\mathbf{C})$;

特征值 $\mathbf{D} = [24.736, 2.263]^T$, 特征向量:

由于 $\lambda_1 > \lambda_2$ ，故最优2x1特征提取器

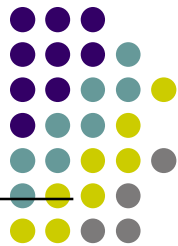
此时的K-L变换式为:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.875 & -0.482 \\ 0.482 & 0.875 \end{bmatrix}$$

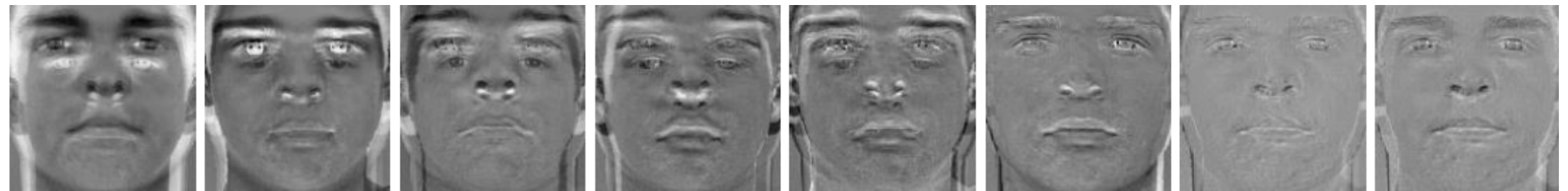
$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1] = \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.482 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}^T \mathbf{x} = \mathbf{u}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.875 & 0.482 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

PCA 在人脸识别中的应用



(a)



(b)

(a) 8张人脸图像；(b) 对应的8个特征向量，按照特征值由大到小排列，特征向量又叫特征脸 (**Eigenfaces**)



PCA 在人脸识别中的应用



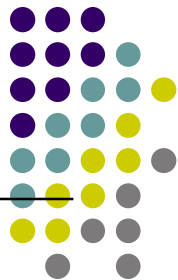
识别结果:

数据库: **XM2VTS**, 由**295**人构成, 每人**8**张照片, 分四次拍摄, 每次两张, 每次间隔时间一个月。

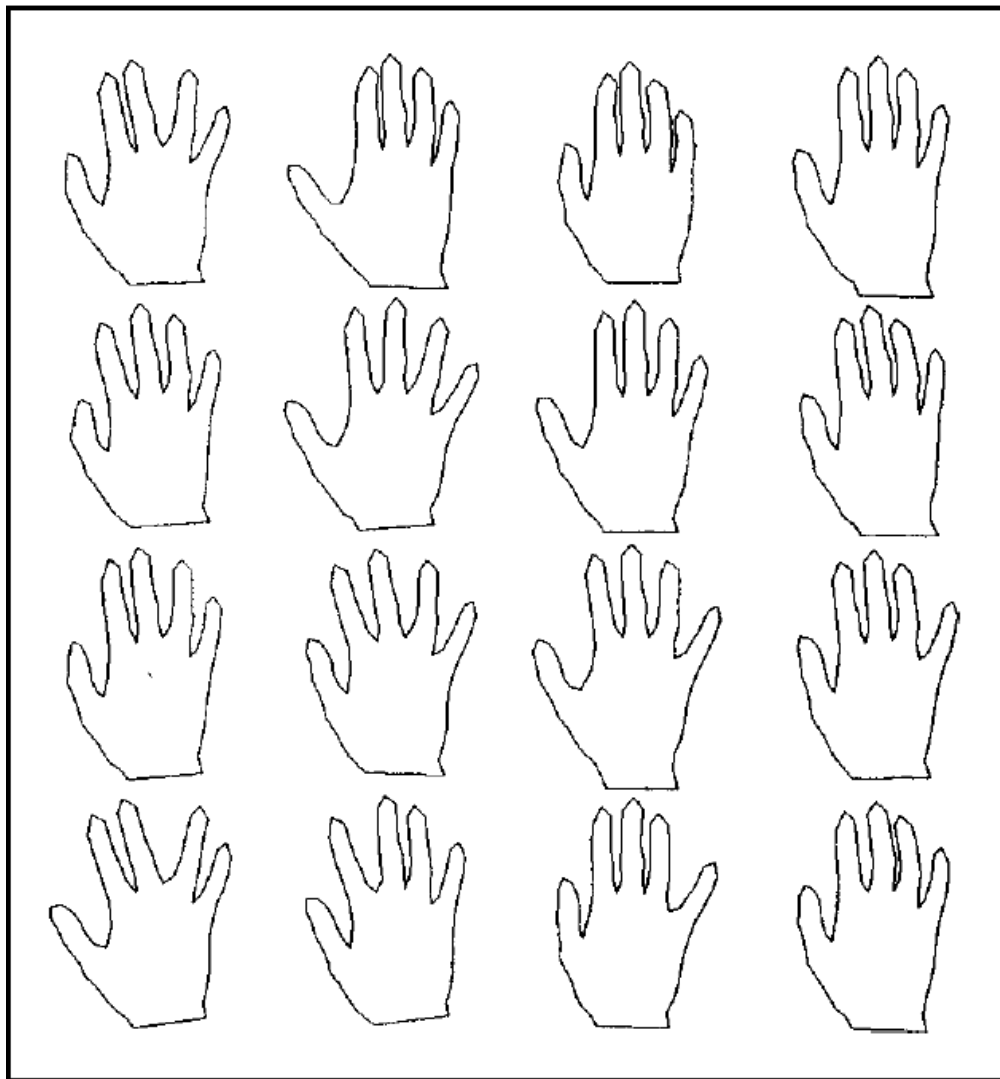
用前两次拍摄的**4**张照片训练, 用后两次拍摄的**4**张照片测试。

取前**100**维**PCA**进行识别

| | 最近邻法 | SVM |
|-----|---------------|---------------|
| 识别率 | 76.02% | 80.25% |



PCA 的在手型识别中的应用

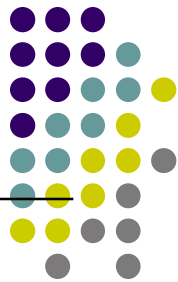


每个手型由**72**个点构成，形成**144**维向量。

T. F. Cootes et al, Active shape models, their training and application



应用二. 巴特沃斯低通滤波器



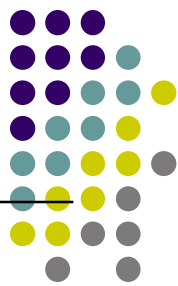
巴特沃斯低通滤波器的传递函数：

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

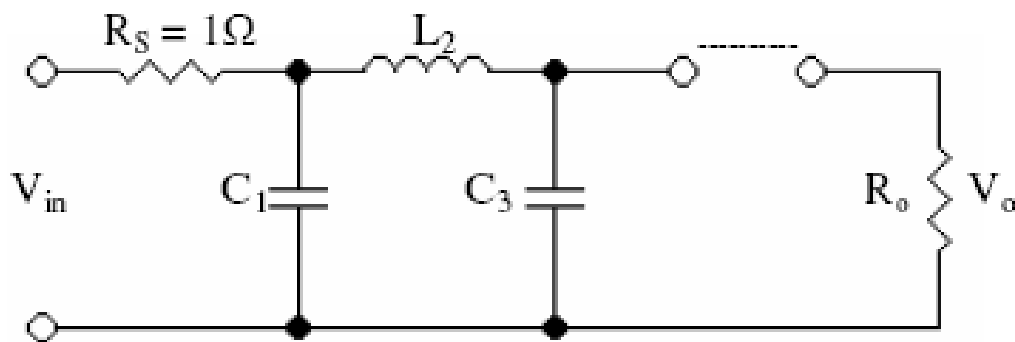
其中n 叫做阶数， ω_c 叫做截止频率。



应用二. 巴特沃斯低通滤波器



巴特沃斯低通滤波器的电路图：

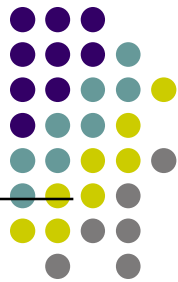


k 阶巴特沃斯滤波器的考尔第一型电子线路图如下：其中：

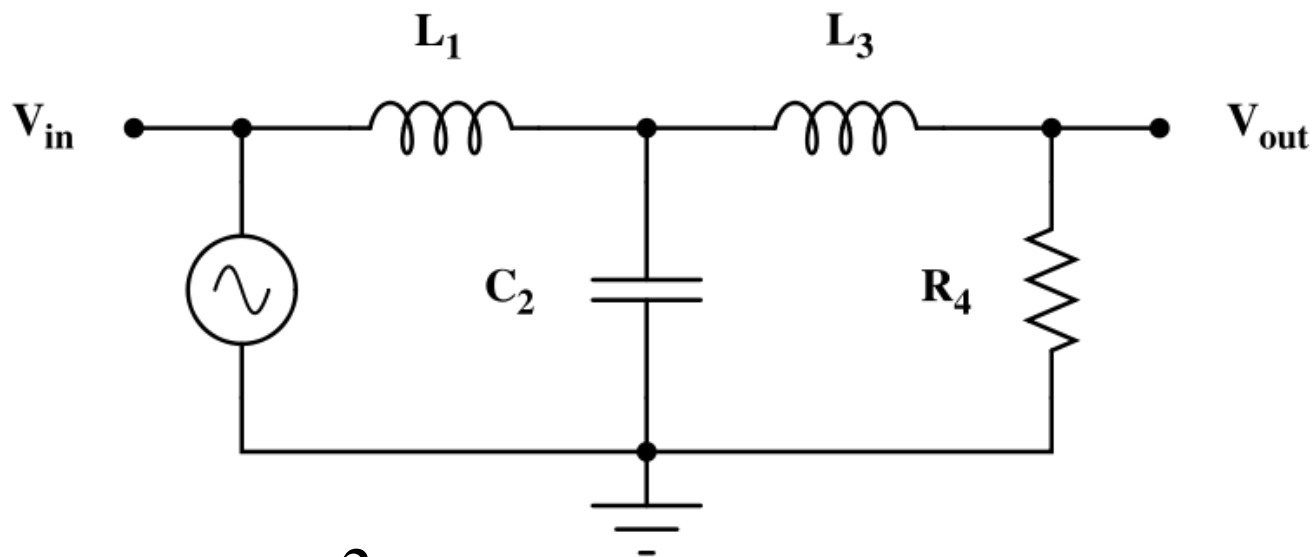
- 电容 $C_k = 2 \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right]$; $k = \text{奇数}$
- 电感 $L_k = 2 \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right]$; $k = \text{偶数}$



应用二. 巴特沃斯低通滤波器



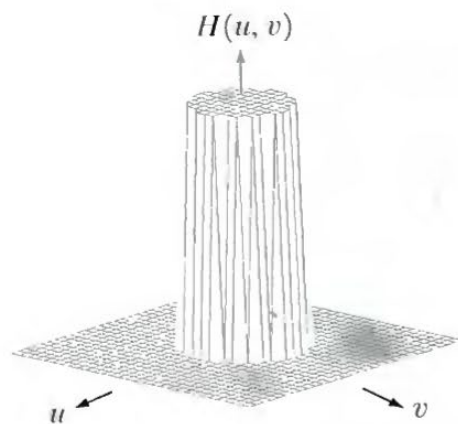
举例： 3阶巴特沃斯滤波器电路图



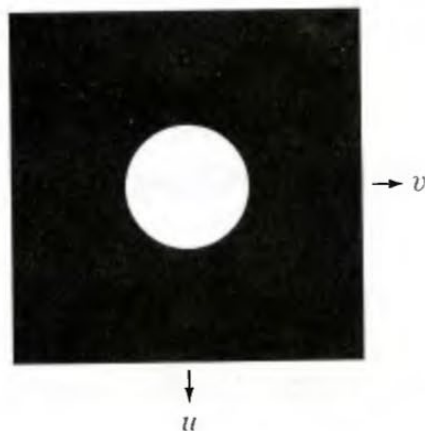
$$L_1 = \frac{3}{2} \quad L_3 = \frac{1}{2} \quad C_2 = \frac{4}{3} \quad R_4 = 1$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1}$$

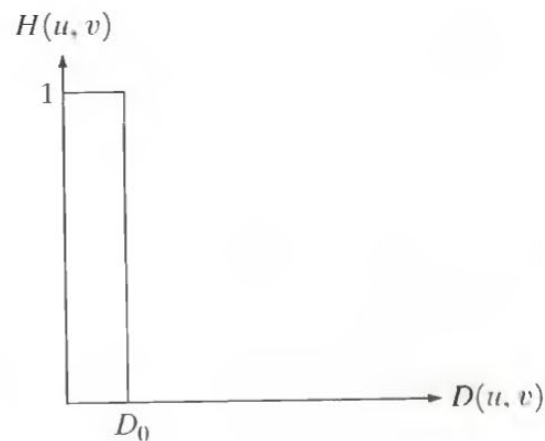
应用三. 图像的低通滤波



(1)



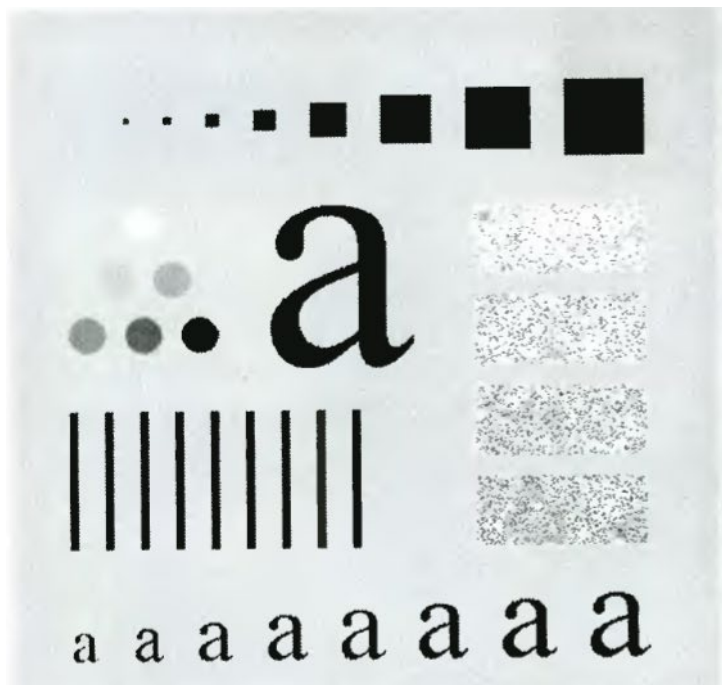
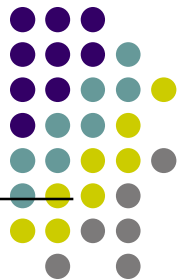
(2)



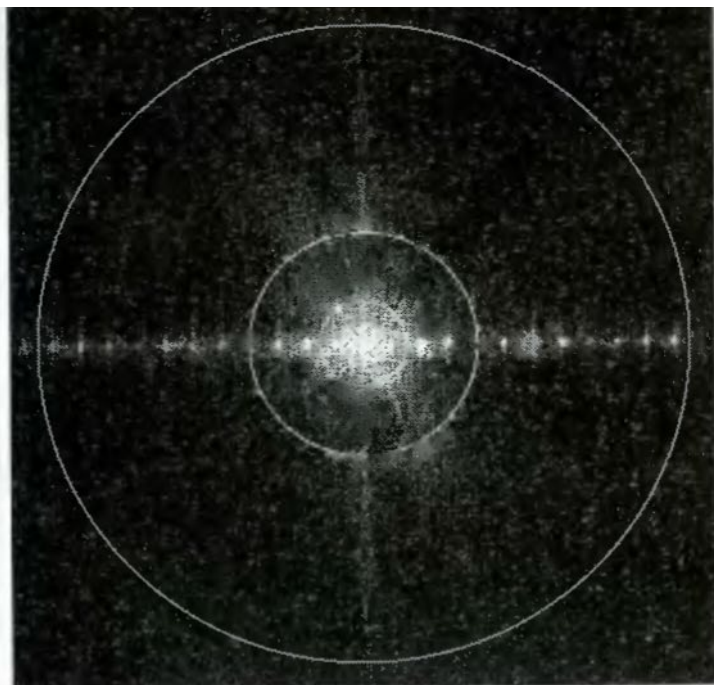
(3)

图像的理想低通滤波器 (1) 理想滤波器的传递函数; (2) 传递函数的图像表示; (3) 传递函数的截面图。

应用三.图像的低通滤波



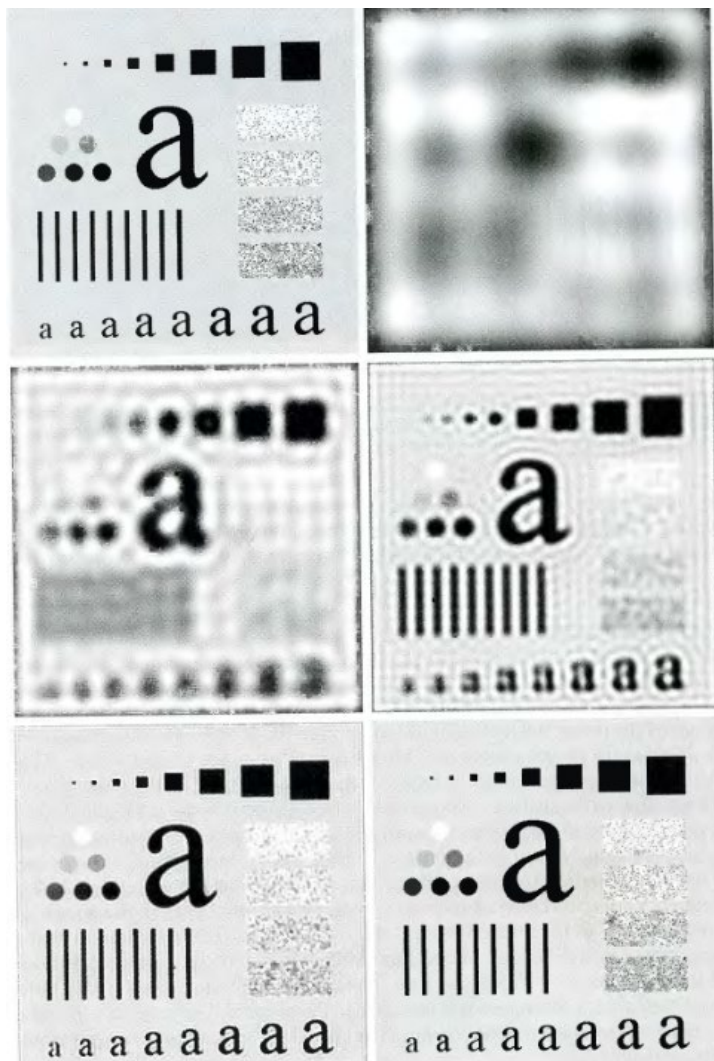
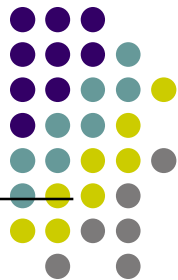
(1)



(2)

图像的频谱： (1) 原图 (500*500像素)； (2) 频谱图

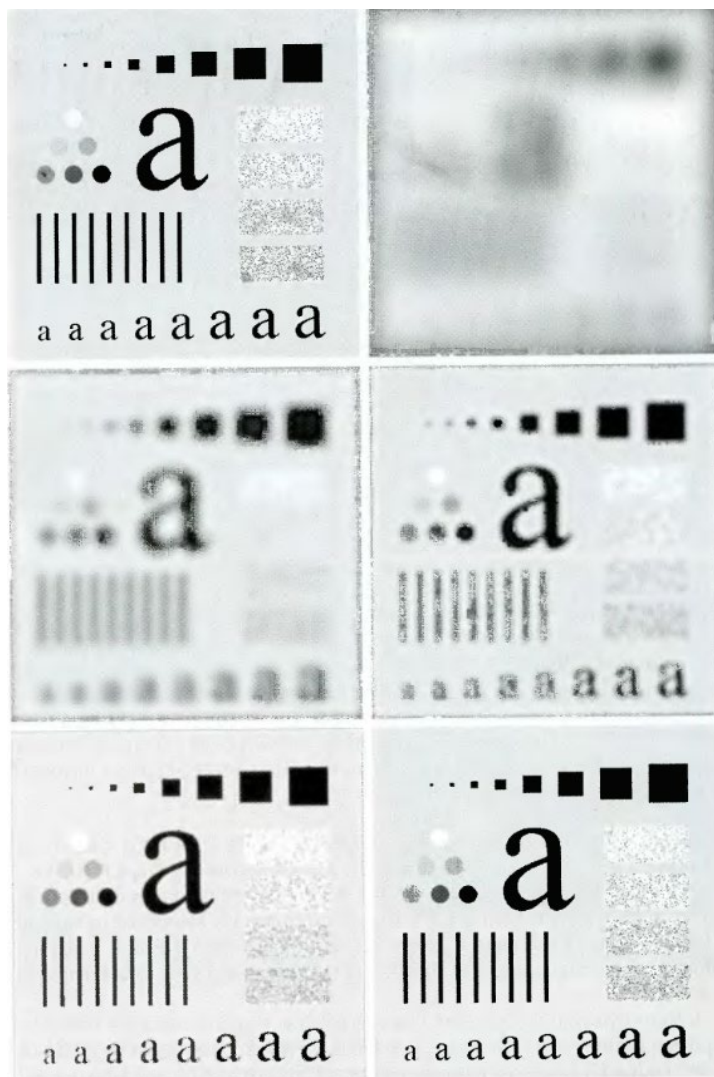
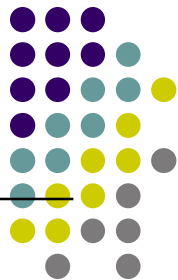
应用三. 图像的低通滤波



原图及经过理想低通滤波器后的图像。理想低通滤波器的半径分别为5,15,30,80,230个像素。对应着保留的能量为92%, 94.6%, 96.4%,98%, 99.5%

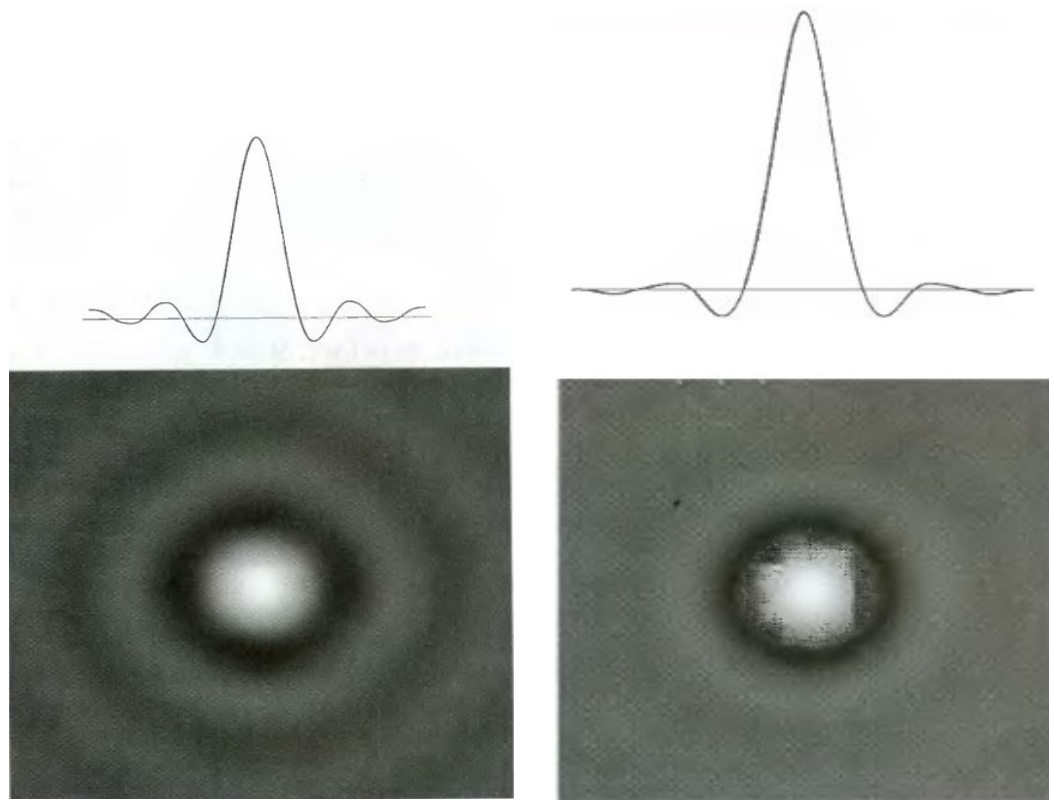
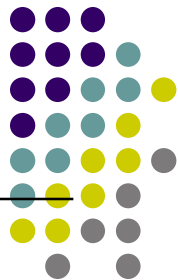


应用三. 图像的低通滤波



原图及经过巴特沃斯低通滤波器后的图像。巴特沃斯低通滤波器的半径分别为 5,15,30,80,230 个像素。

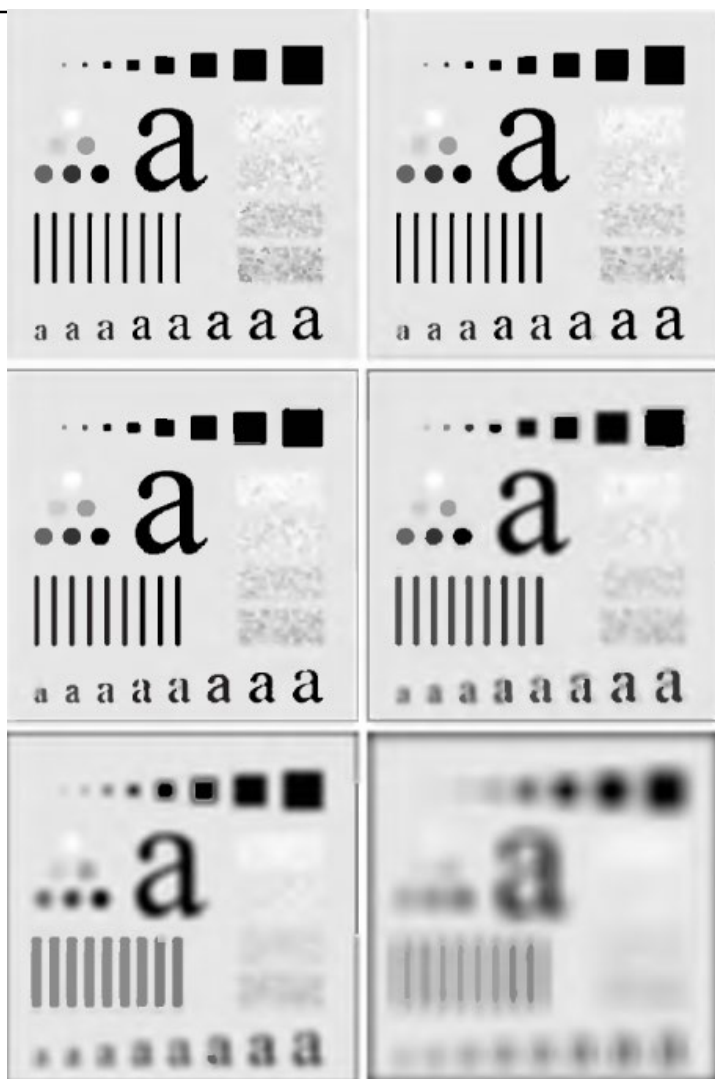
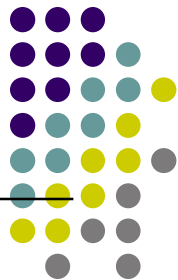
应用三. 图像的低通滤波



理想低通滤波器与5阶巴特沃斯滤波器的频率响应比较。

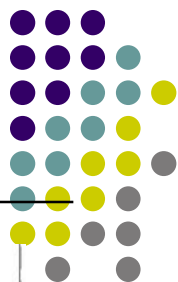


应用三. 图像的低通滤波 – 均值滤波

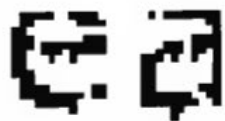


图像均值滤波，均值窗
分别为3,5,9,15,35。

应用三. 图像的低通滤波



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



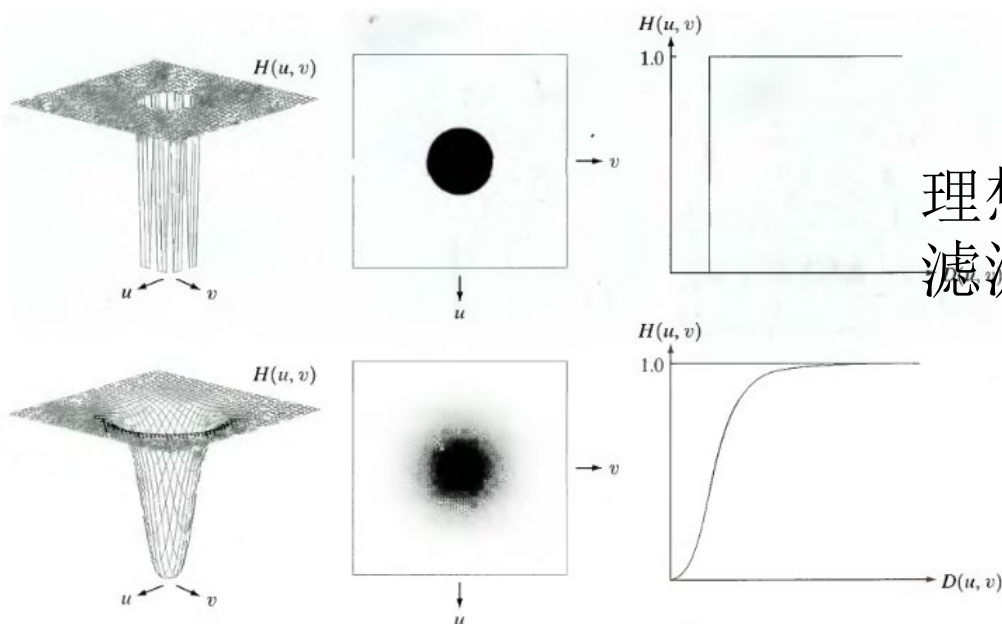
原图及通过巴特沃斯低通滤波器后的图像

应用三. 图像的高通滤波



高通滤波器的传递函数

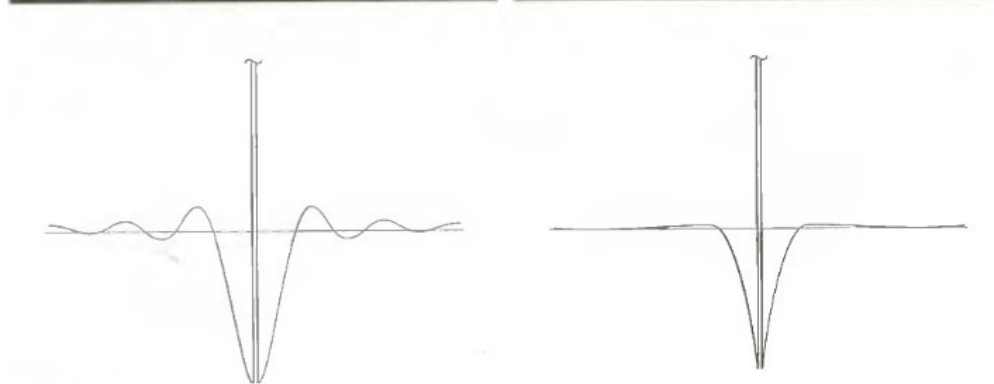
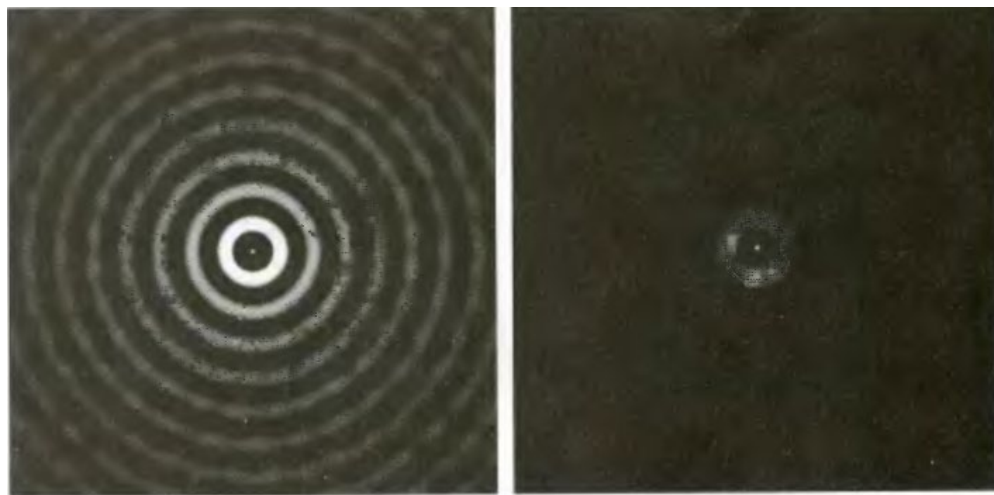
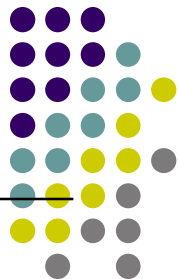
$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$



理想高通与巴特沃斯高通滤波器的频率响应。



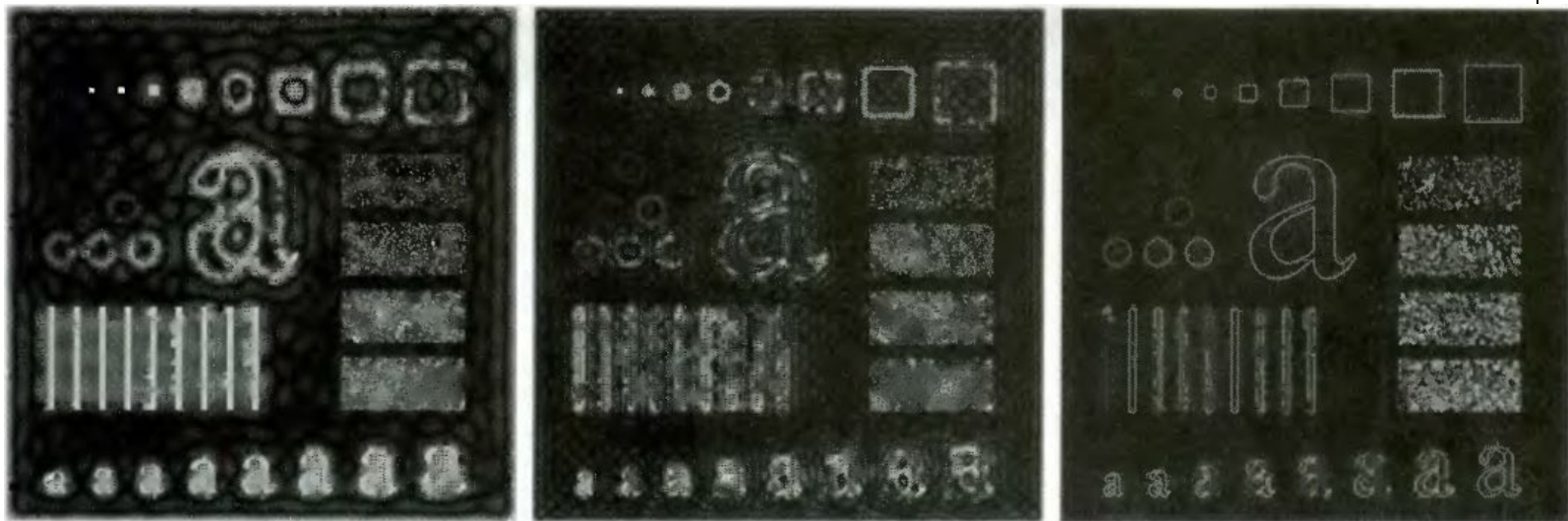
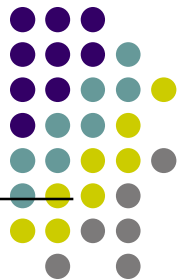
应用三. 图像的高通滤波



理想高通与巴特沃斯高通滤波器的频率响应。



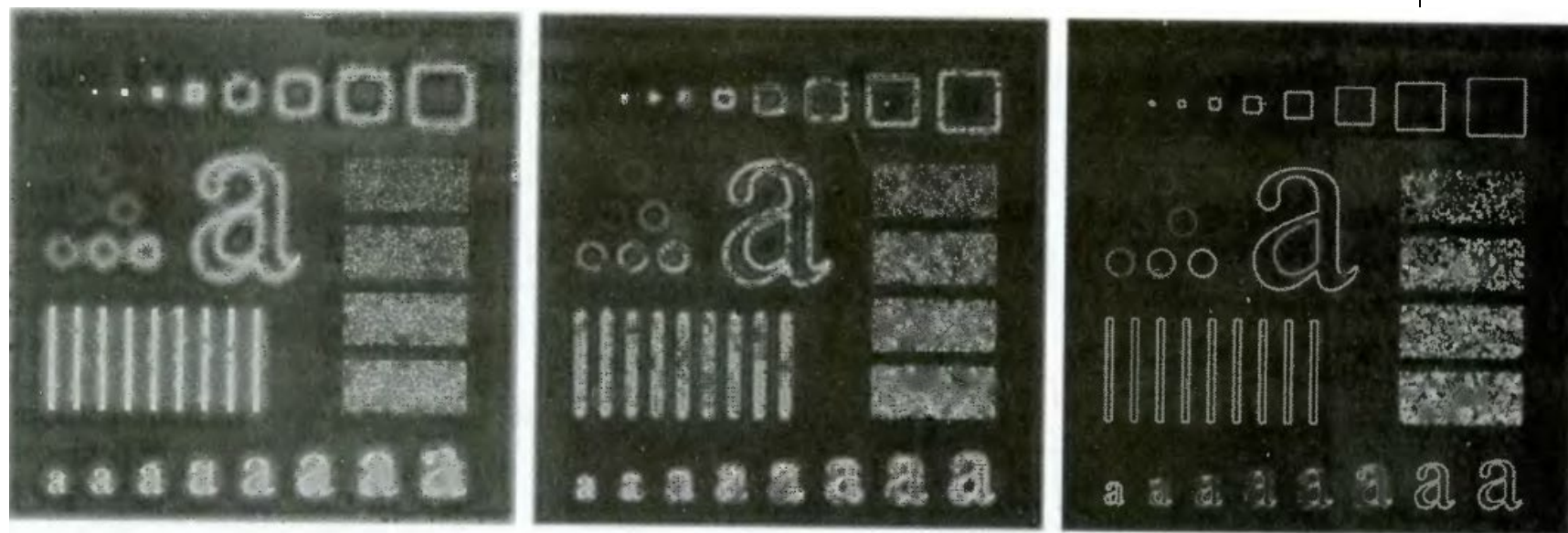
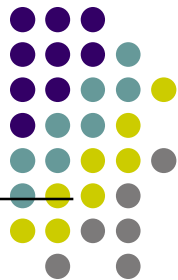
应用三. 图像的高通滤波



理想高通滤波器，截止频率分别为15,30,80像素。



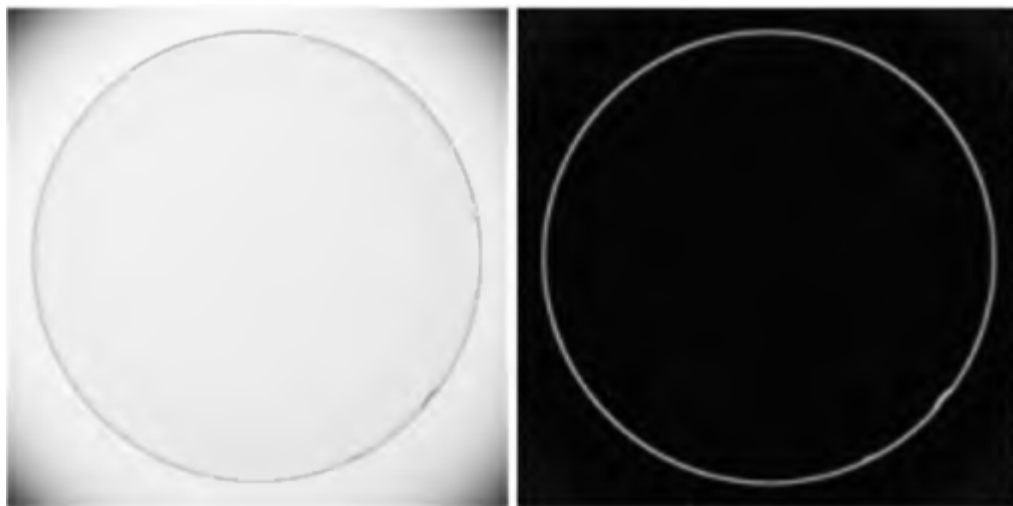
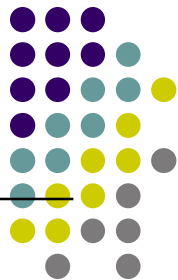
应用三. 图像的高通滤波



二阶巴特沃斯高通滤波器，截止频率分别为15,30,80像素。



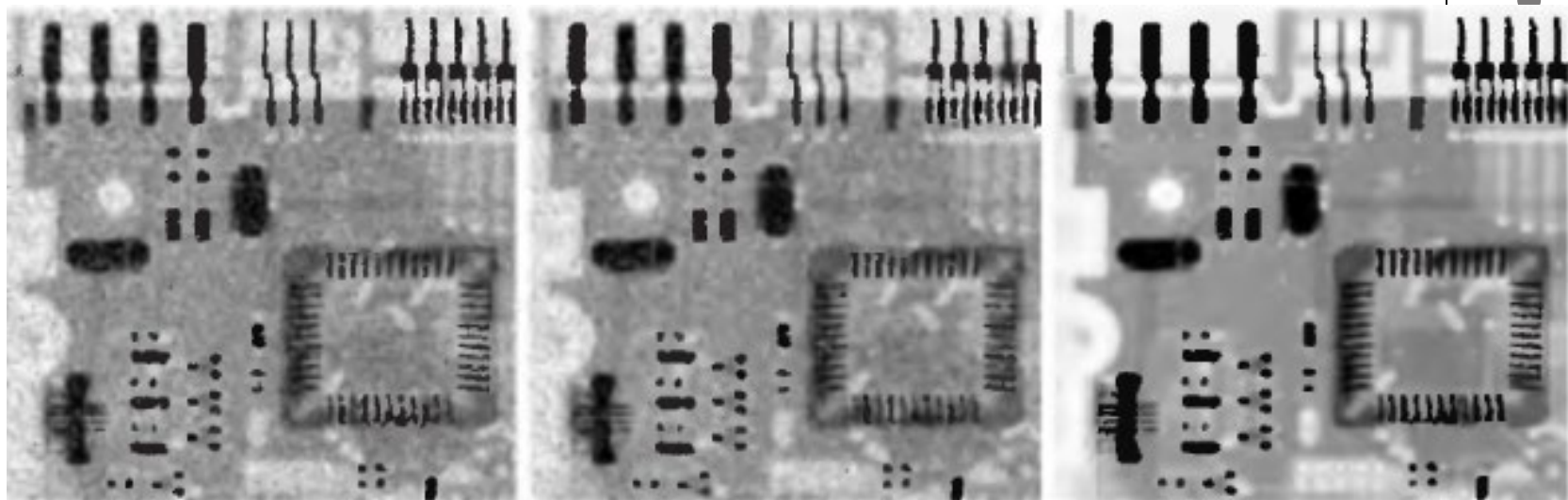
应用三. 图像的滤波 – 时域直接相减



$$y(t) = \frac{dx}{dt}$$



应用三. 图像的滤波 – 线性滤波器的局限性



(1)

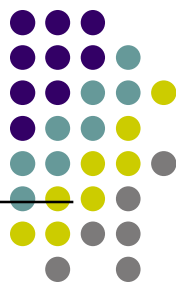
(2)

(3)

(1) 原图； (2) 低通滤波后的图像； (3) 中值滤波后的图像。



应用四. 正弦载波幅度调制



幅度调制: $y(t) = x(t) \cdot c(t)$

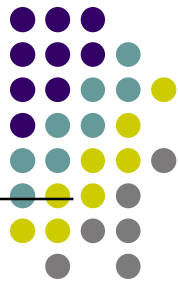
一般将载有信息的 $x(t)$ 信号称为调制信号, $c(t)$ 称为载波信号, 一般为高频周期信号或正弦波信号。

广泛利用正弦载波幅度调制有两个基本的原因:

- $\cos \omega_c t$ 信号与任意信号相乘具有频谱搬移功能, 可以将有用信号搬移到适当的频段上。
- 为了充分利用信道的频率资源, 可以利用正弦载波幅度调制的频谱搬移功能, 在同一信道上传输多路已调信号, 从而实现多路信号的同时通信, 即频分复用。



应用四. DSB与同步解调



双边带正弦载波幅度调制是指载波为等幅的正弦波。

此时已调信号 $y(t)$ 为 $y(t) = x(t) \cos \omega_c t$

$$C(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * C(j\omega)$$

$$= \frac{1}{2} [X(j(\omega - \omega_c)) + X(j(\omega + \omega_c))]$$

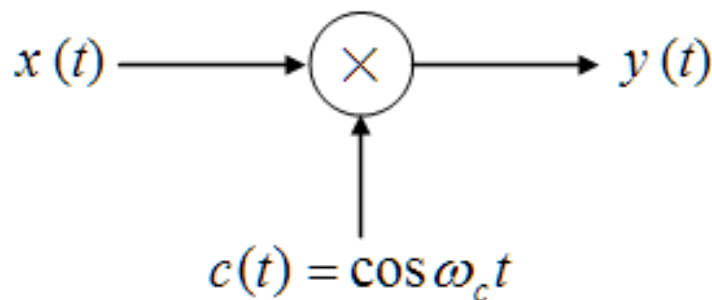


图5-31 正弦载波的幅度调制



应用四. DSB与同步解调

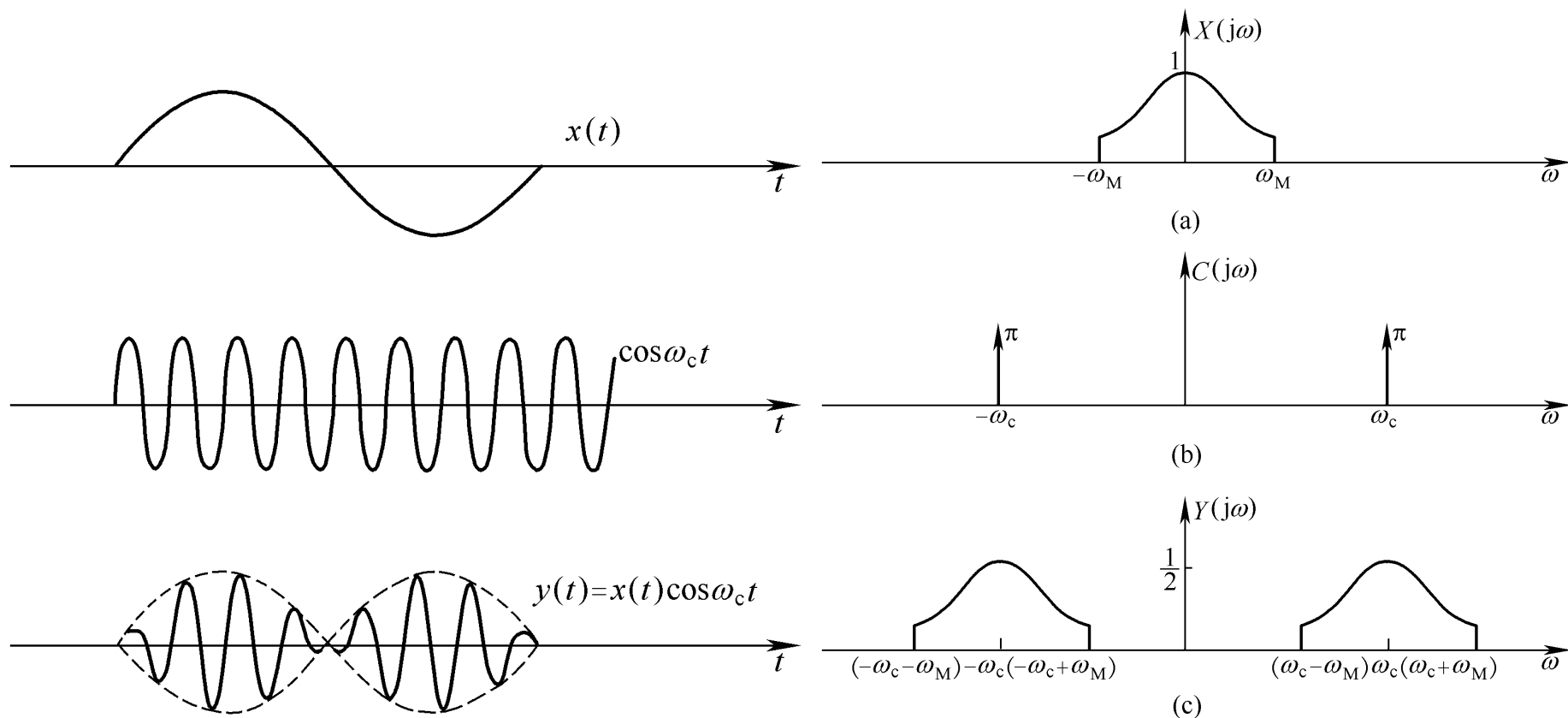


图5-32 DSB调制波形

图5-33 DSB调制的频谱说明



应用四. DSB与同步解调



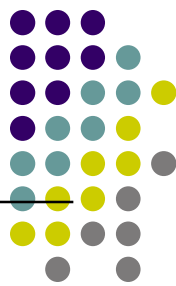
- 正弦载波幅度调制的主要功能是实现频谱搬移功能。
- DSB调制通常也称为抑制载波的正弦载波调制。
- DSB正弦载波幅度调制一般要满足：

载频 ω_c > 信号的最高频率 ω_M

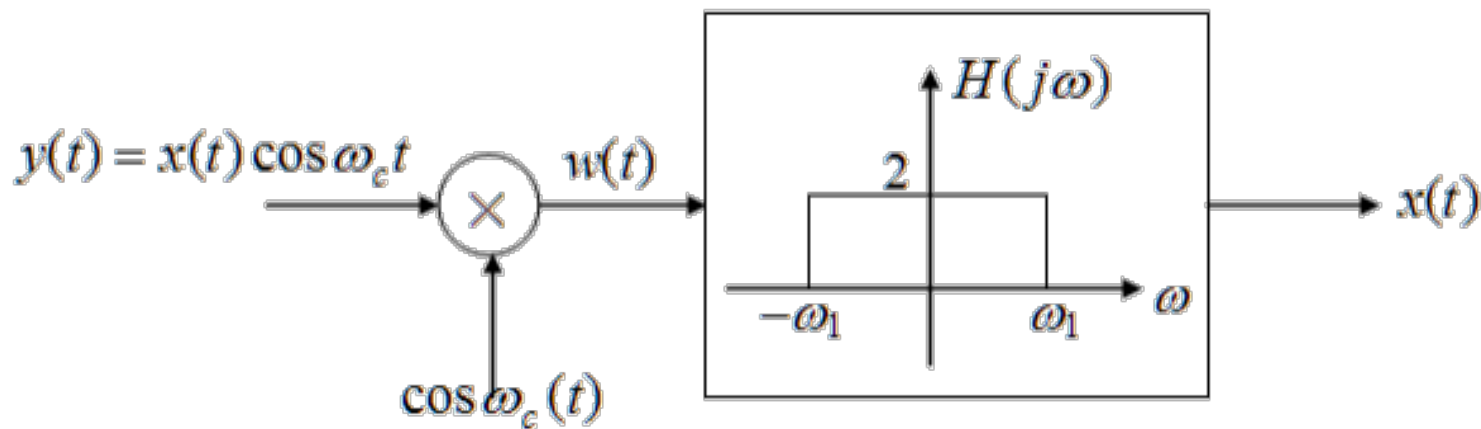
通常 ω_c 要比 ω_M 的多。



应用四. DSB与同步解调



同步解调：通过对已调信号二次调制来恢复调制信号 $x(t)$ 。

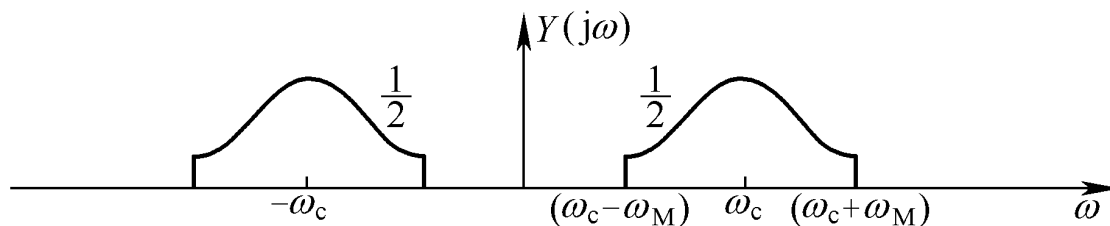
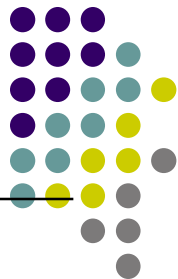


$$\text{其中, } w(t) = x(t) \cos^2 \omega_c t = \frac{1}{2} x(t) + \frac{1}{2} x(t) \cos 2\omega_c t$$

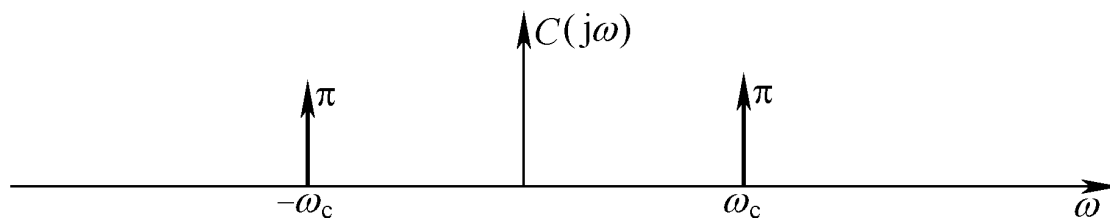
接收端的本地载波信号必须与发送端的载波同频同相。



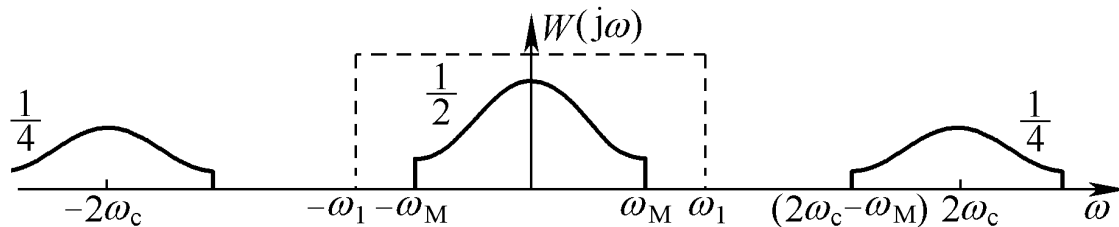
应用四. DSB与同步解调



(a) 已调信号的频谱



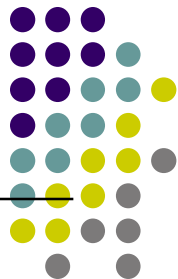
(b) 载波信号的频谱



(c) 已调信号乘以载波后的频谱, 其中虚线表示用于提取调制信号 $x(t)$ 的低通滤波器的理想频率响应特性



应用四. 频分复用



频分复用：利用调制技术把不同信号的频谱分别搬移到不同的载频上，使这些已调信号的频谱不再重叠，在同一个宽带信道上同时传输不同的信号。



应用四. 频分复用

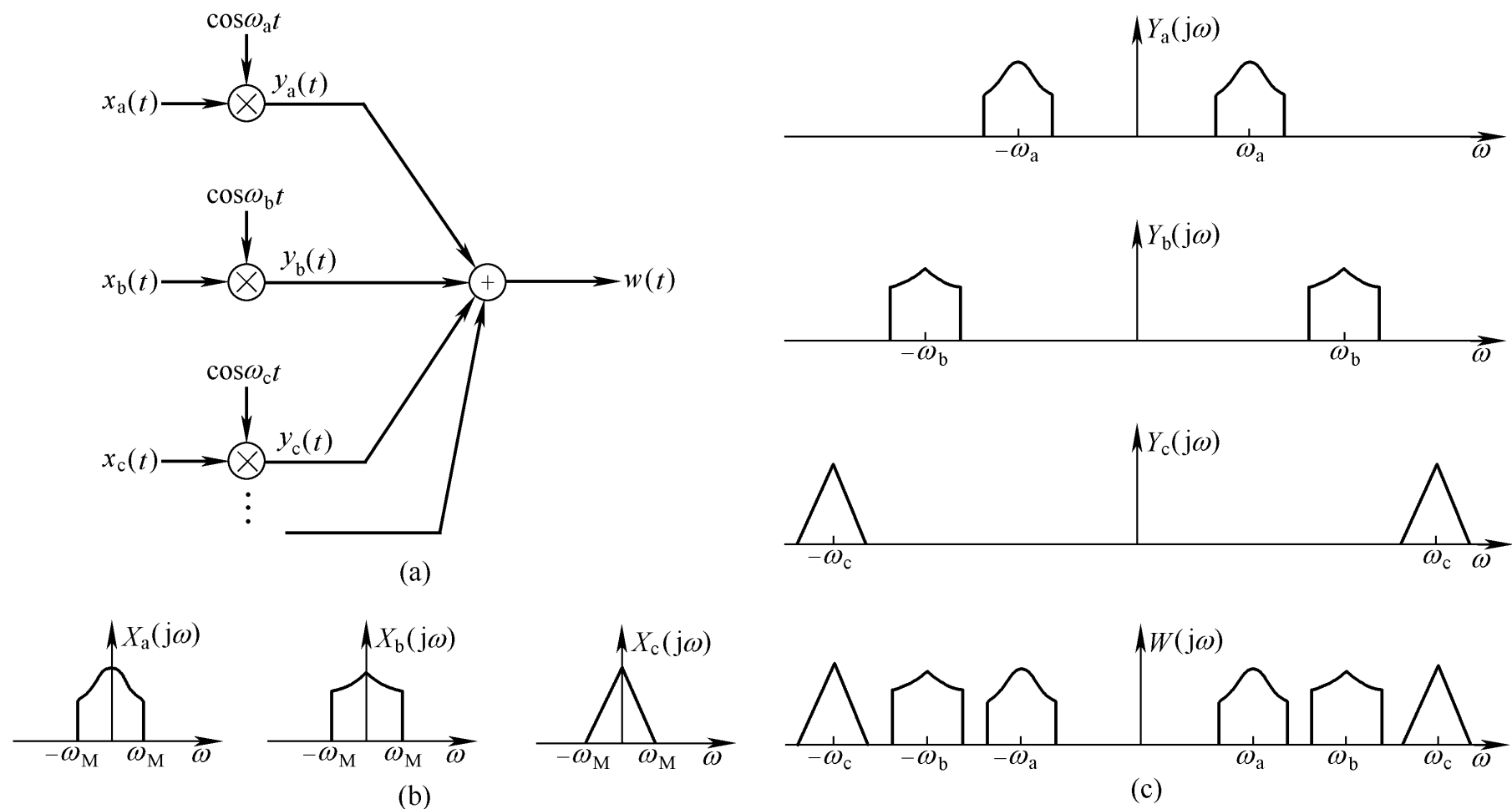
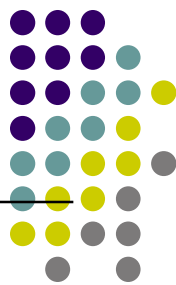


图5-36 频分多路复用



应用四. 频分复用



解调:

1. 利用带通滤波器进行解复, 从复用信道中选取所需要的信号;
2. 通过对已调信号二次调制来恢复调制信号。

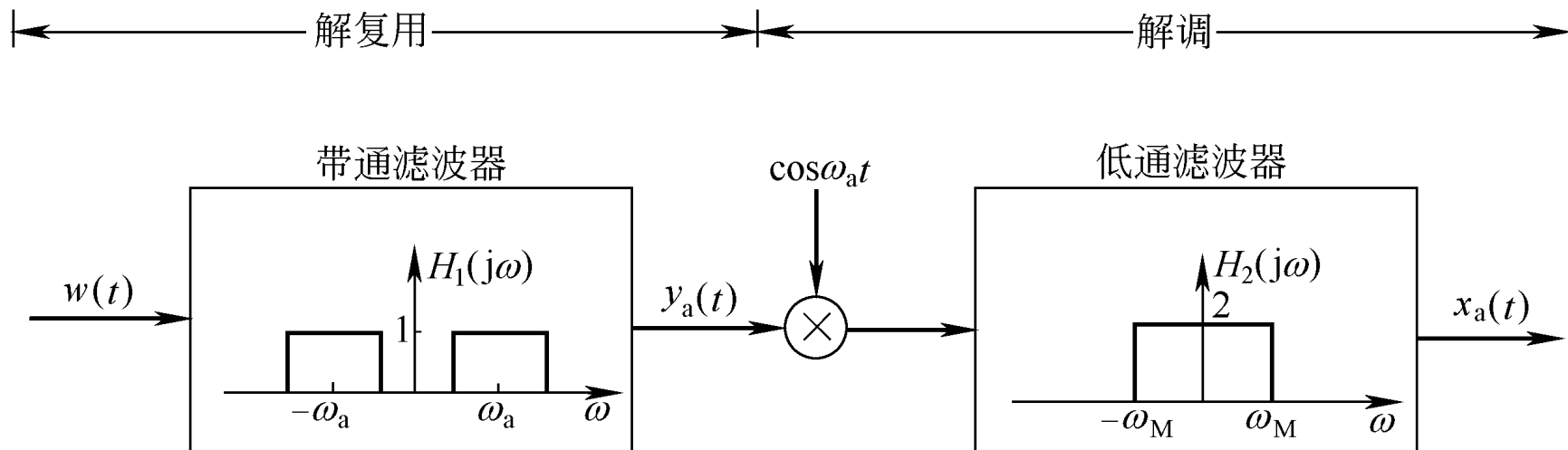
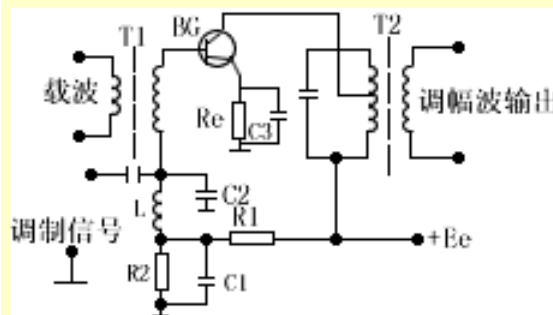


图5-37 某一路频分复用信号的解复与解调

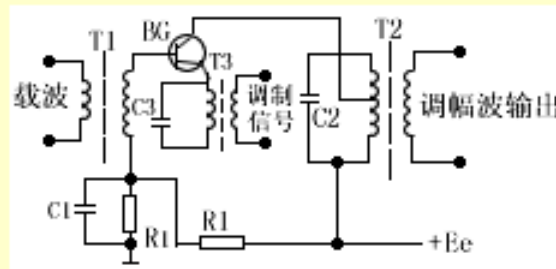
应用四. 调制与解调电路



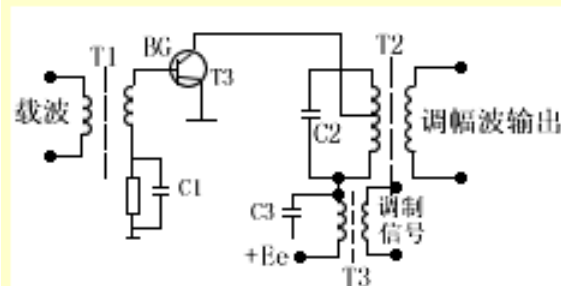
调制电路:



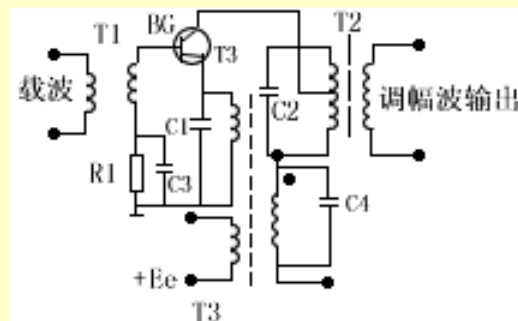
图一、基极调幅电路



图二、发射极调幅电路



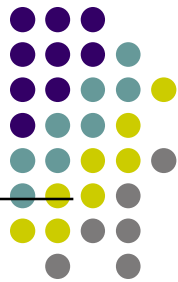
图三、集电极调幅电路



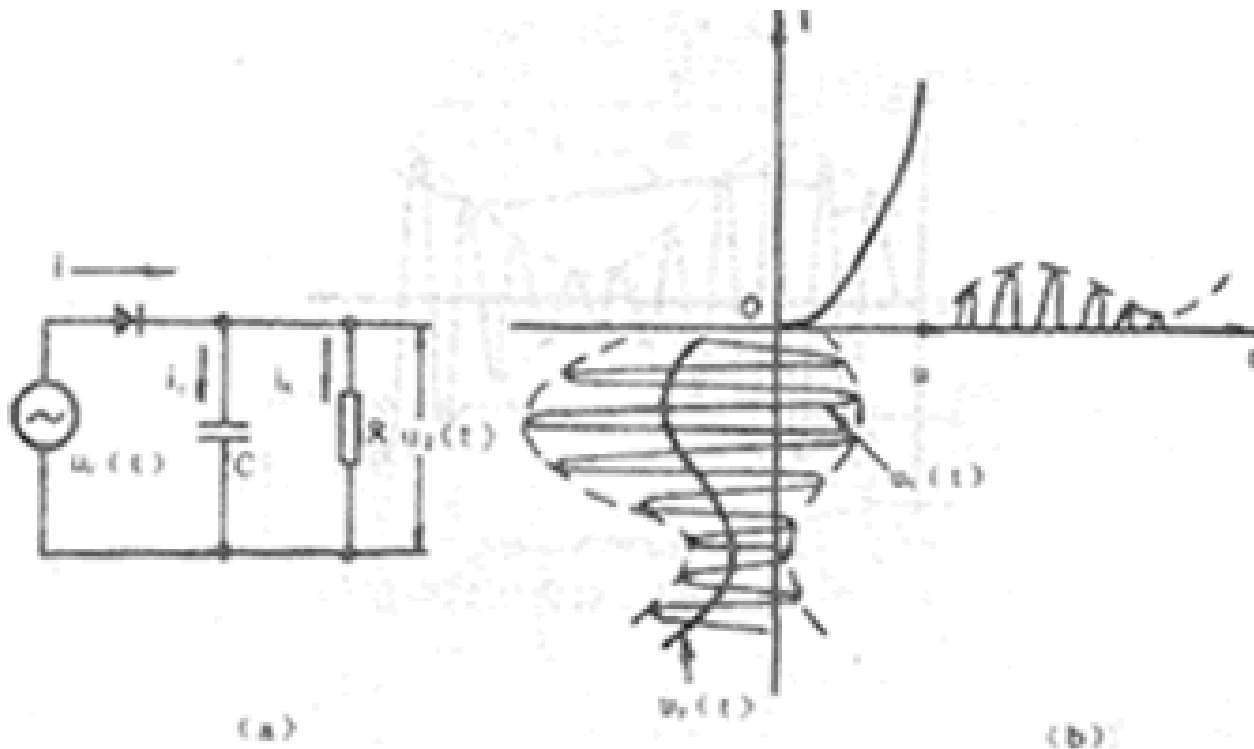
图四、双重调幅电路



应用四. 调制与解调电路



解调电路:

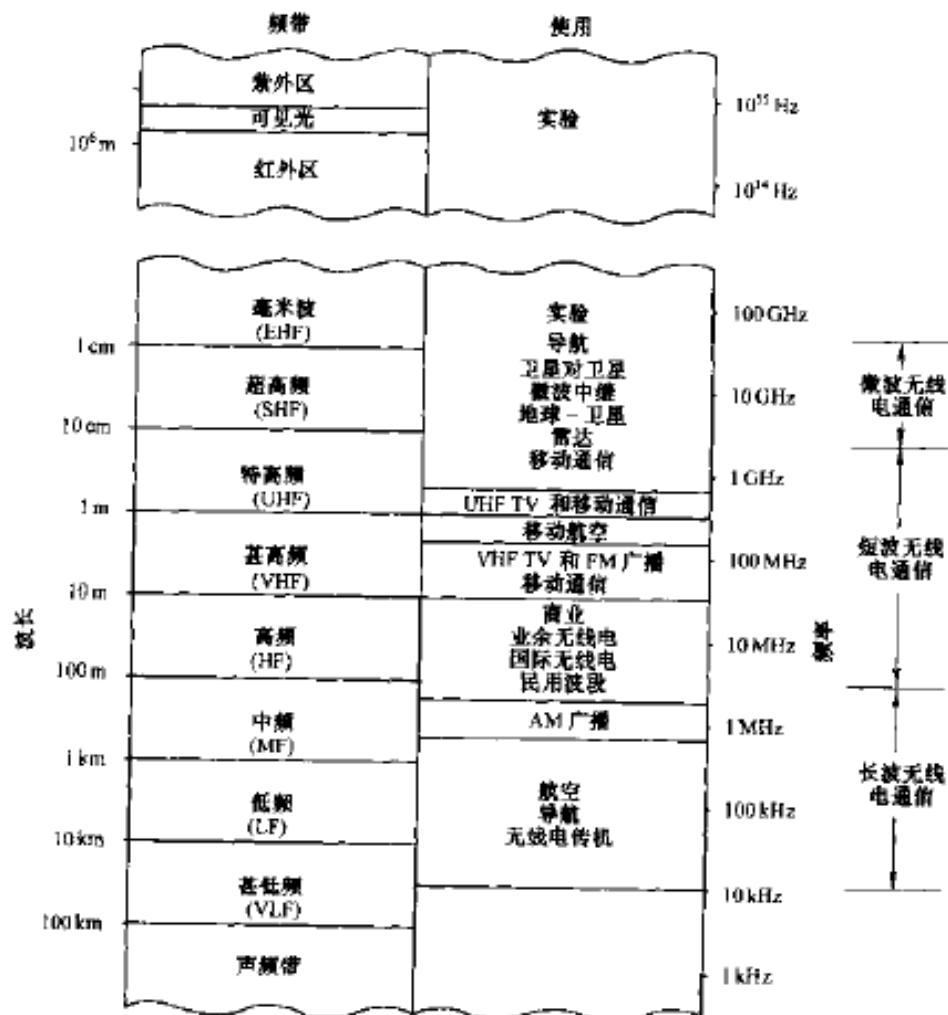




应用四. 调制与解调电路



无线频段划分:





应用四. 调制与解调电路



【环球网综合报道】韩联社4月1日报道称，韩国国防部1日发表声明将朝鲜向韩发射**GPS**（全球定位系统）干扰信号定性为明确违反停战协定和国际电联规定的挑衅行径，并警告朝鲜如不停止**GPS**干扰，韩国将与国际社会密切合作让朝鲜付出相应的代价。韩国国防部指出，朝鲜自上月31日下午7时30分许从临近军事分界线（**MDL**）以北的海州市、延安郡、平康郡、金刚郡4地实施**GPS**干扰至今，企图妨碍韩国的军事活动，威胁民间交通安全。

韩国国家安保室主任金宽镇主持召开国家安全保障会议常委会讨论朝鲜**GPS**干扰对策后，韩国青瓦台发言人郑然国在书面新闻发布会上表示，继接连不断的核武及导弹挑衅之后，朝鲜又实施干扰**GPS**的电磁波挑衅，此举不仅违反国际公约，也危及韩国国民的安全，朝鲜应立即停止盲目挑衅。韩国统一部发言人郑俊熙也在例行记者会上表示，**GPS**电波干扰本身就是挑衅，并敦促朝鲜立即停止挑衅，多做有益于韩朝关系发展也有益于己的事。