# 向量

## 有序向量：二分查找（版本A）

# θ2-D2

自从爷爷去后，这山被二郎菩萨点上火，烧杀了大半。我们蹲在井里，钻在涧内，藏于铁板桥下，得了性命。及至火灭烟消，出来时，又没花果养赡，难以存活，别处又去了一半。我们这一半，捱苦的住在山中，这两年，又被些打猎的抢了一半去也。

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

# 统一接口

```
template <typename T> //查找算法统一接口，0 <= lo < hi <= _size

Rank Vector<T>::search( T const & e, Rank lo, Rank hi ) const {

   return ( rand() % 2 ) ? //等概率地随机选用

      binSearch( _elem, e, lo, hi ) //二分查找算法，或

    : fibSearch( _elem, e, lo, hi ); //Fibonacci查找算法

}
```

# 有序向量中，每个元素都是轴点

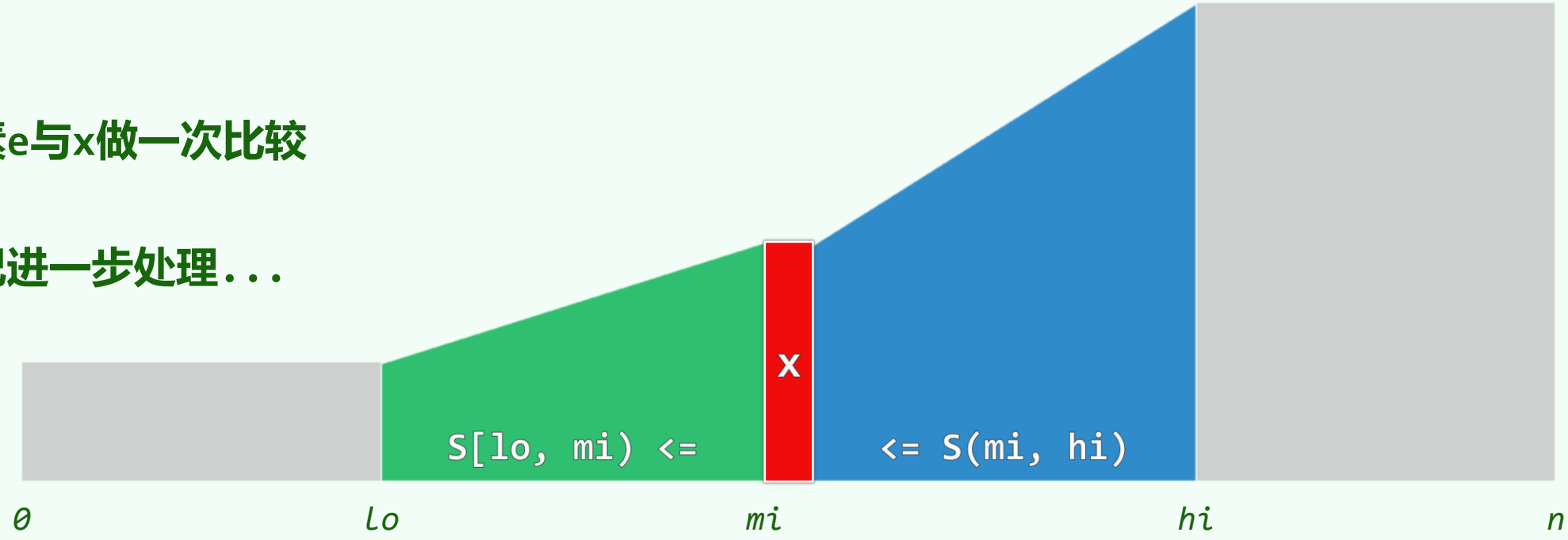
❖ 以任一元素 x = S[mi] 为界，都可将待查找区间[lo,hi)分为三部分

$$S[lo, mi) \ \leq \ S[mi] \ \leq \ S(mi, hi)$$

因此...

❖ 只需将目标元素e与x做一次比较

即可分三种情况进一步处理...



# 减而治之

- e < x：则e若存在必属于左侧子区间，故可（减除S[mi,hi)并）递归深入S[lo，mi)

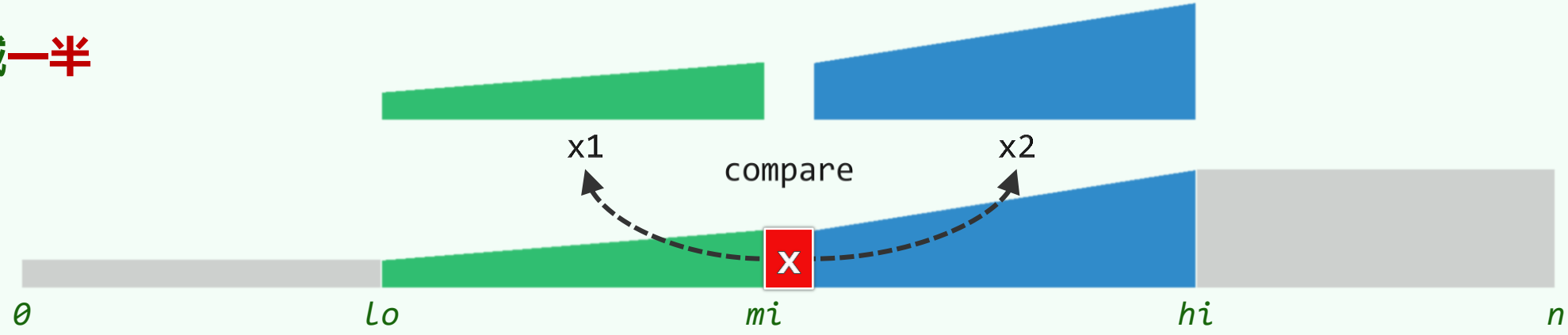
  x < e：则e若存在必属于右侧子区间，亦可（减除S[lo,mi]并）递归深入S(mi，hi)

  e = x：已在此处命中，可随即返回 //若有多个，返回何者?

- 若轴点mi取作中点，则每经过至多两次比较

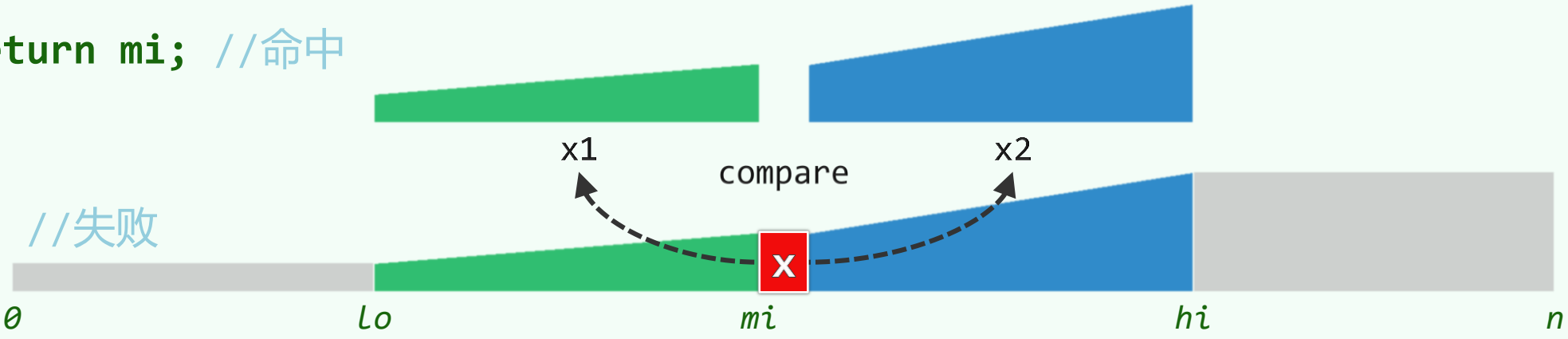
- 或者能够命中，或者

  将问题规模缩减一半



# 实现

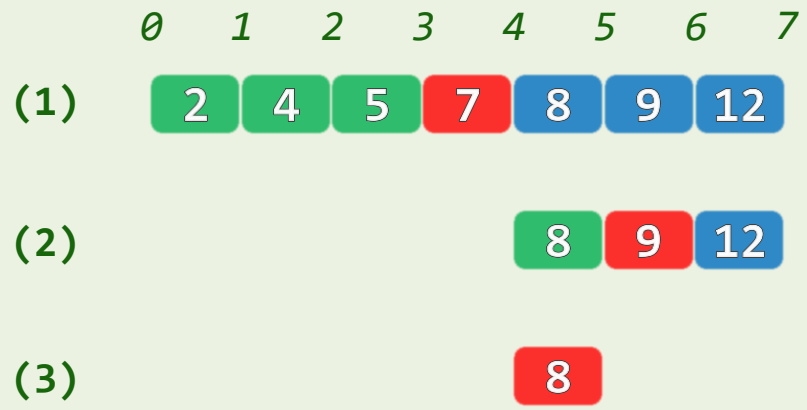
```
template <typename T> //在有序向量[lo, hi)区间内查找元素e
static Rank binSearch( T * S, T const & e, Rank lo, Rank hi ) {
   while ( lo < hi ) { //每步迭代可能要做两次比较判断，有三个分支
      Rank mi = ( lo + hi ) >> 1; //以中点为轴点（区间宽度折半，其数值表示右移一位）
      if ( e < S[mi] ) hi = mi; //深入前半段[lo, mi)
      else if ( S[mi] < e ) lo = mi + 1; //深入后半段(mi, hi)
      else return mi; //命中
   }
   return -1; //失败
}
```



# 实例 + 复杂度

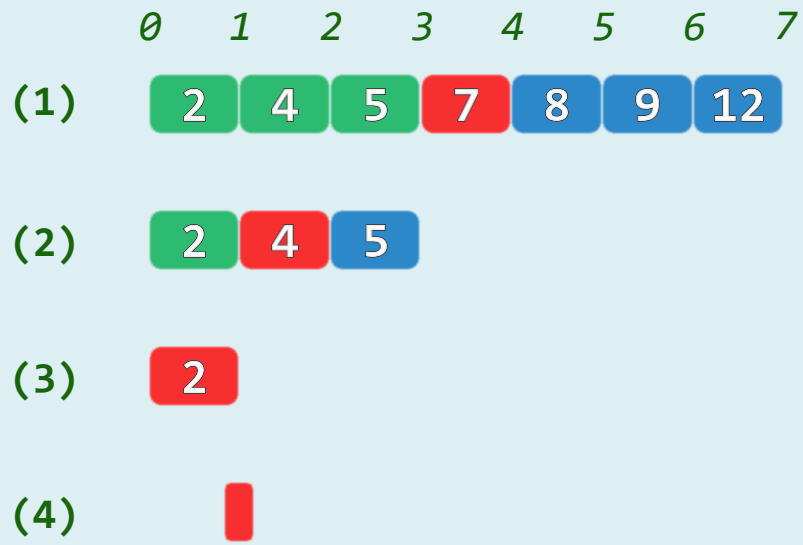
S.search( 8, 0, 7 ):

经 2 + 1 + 2 = 5 次比较，在S[4]命中




S.search( 3, 0, 7 ):

经 1 + 1 + 2 = 4 次比较，在S[1]失败



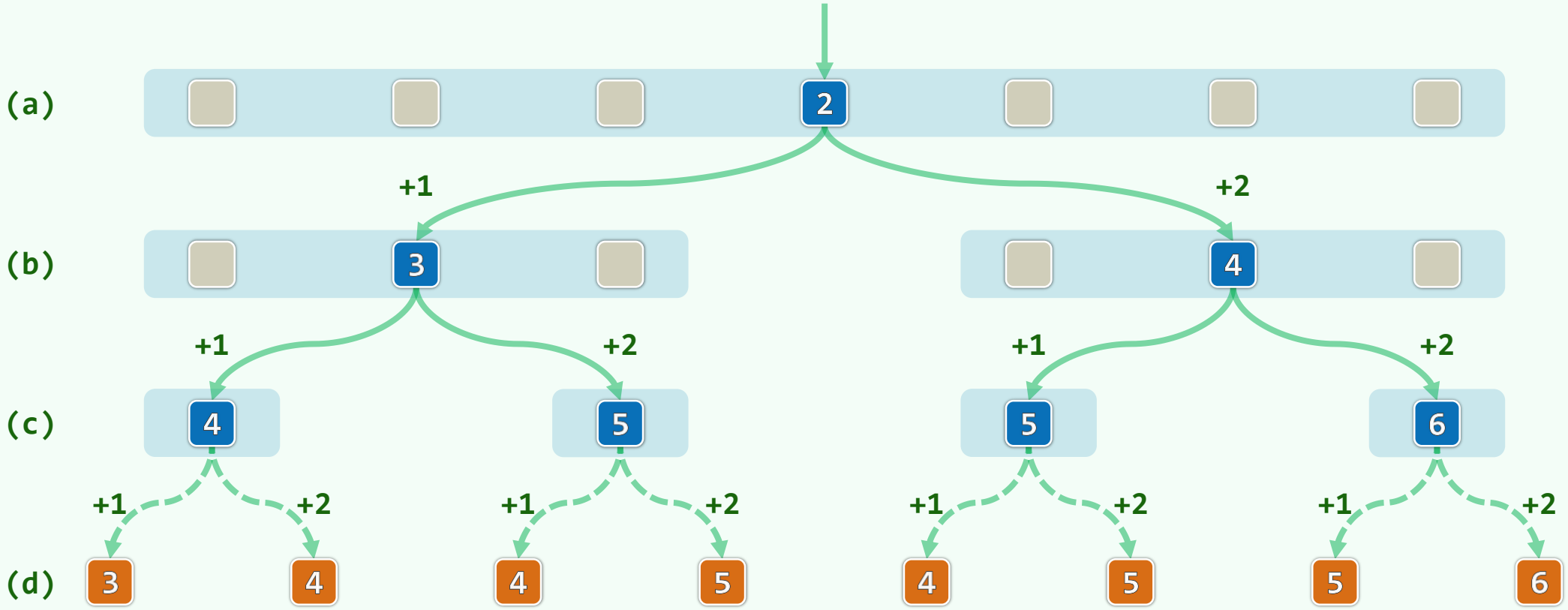

❖ 线性“递归”：$T(n) = T(n/2) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(\log n)$，大大优于顺序查找

“递归”跟踪：轴点总能取到中点，递归深度 $\mathcal{O}(\log n)$；各递归实例仅耗时 $\mathcal{O}(1)$

# 关键码的比较次数 ~ 查找长度（search length）

❖ 通常，需分别针对成功与失败查找，从最好、最坏、平均等角度评估

❖ 比如，成功、失败时的平均查找长度均大致为 $\mathcal{O}(1.50 \cdot \log n)$ //详见教材、习题解析



# 查找长度实例：n = 7

❖ 成功情况共7种，查找长度分别为

{ 4, 3, 5, 2, 5, 4, 6 }

等概率情况下，平均 = 29 / 7 = 4.14

❖ 失败情况共8种，查找长度分别为

{3, 4, 4, 5, 4, 5, 5, 6}

等概率情况下，平均 = 36 / 8 = 4.50