11-A1

图

拓扑排序：零入度算法

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

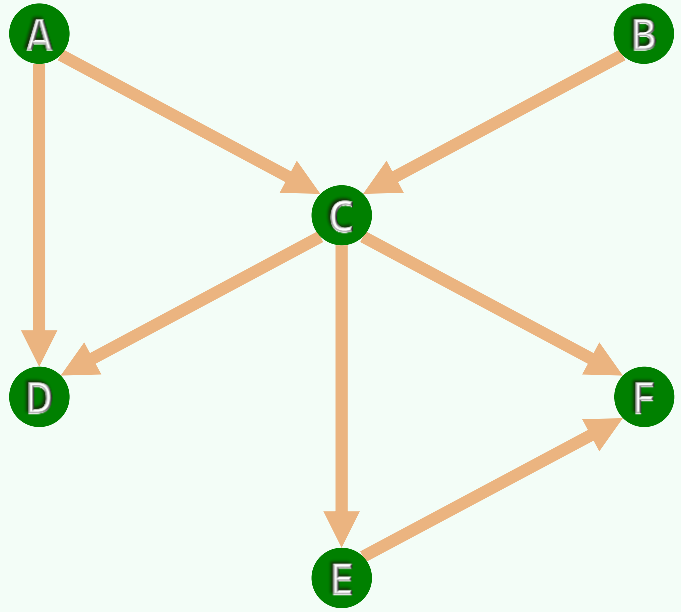
一吕二马三典韦，四关五赵六张飞，七许八黄九姜维

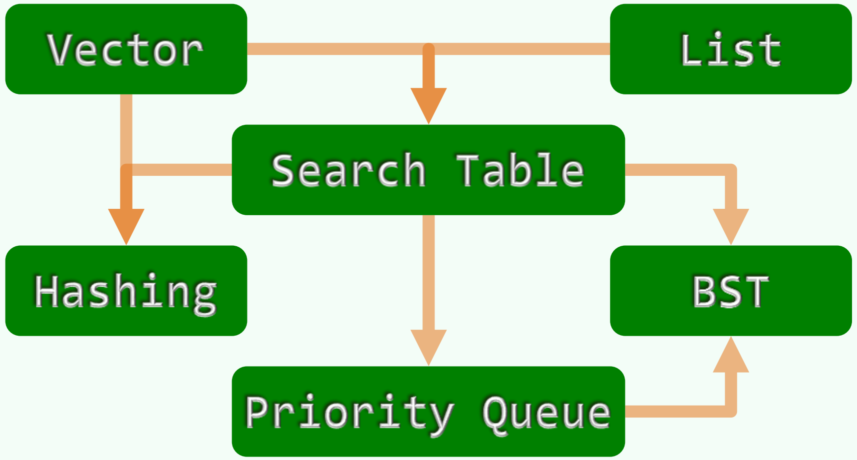
有向无环图

❖ Directed Acyclic Graph

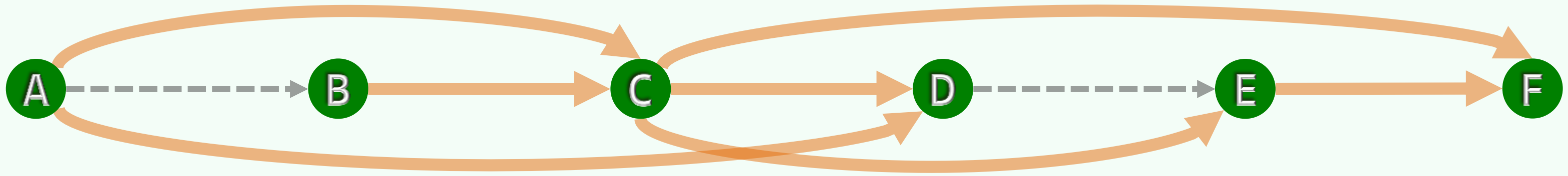
❖ 应用

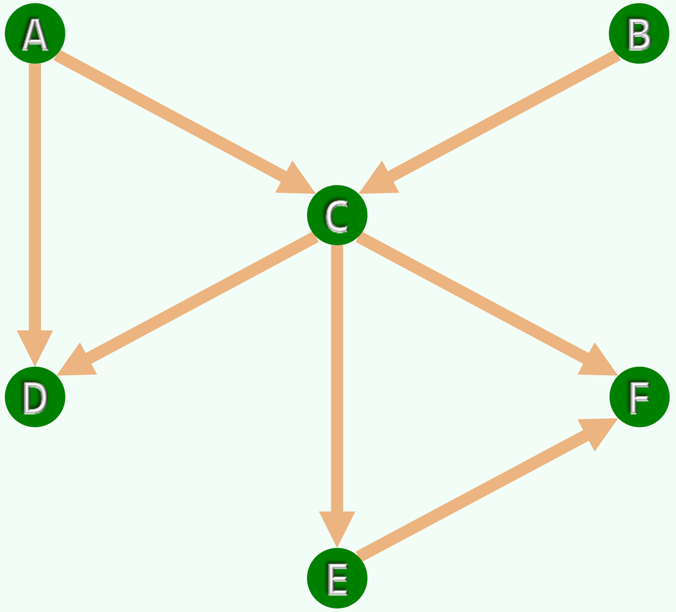
- 类派生和继承关系图中，是否存在循环定义
- 操作系统中相互等待的一组线程，如何调度
- 给定一组相互依赖的课程，设计可行的培养方案
- 给定一组相互依赖的知识点，设计可行的教学进度方案
- 项目工程图中，设计可串行施工的方案
- email系统中，是否存在自动转发或回复的回路
- ...





拓扑排序





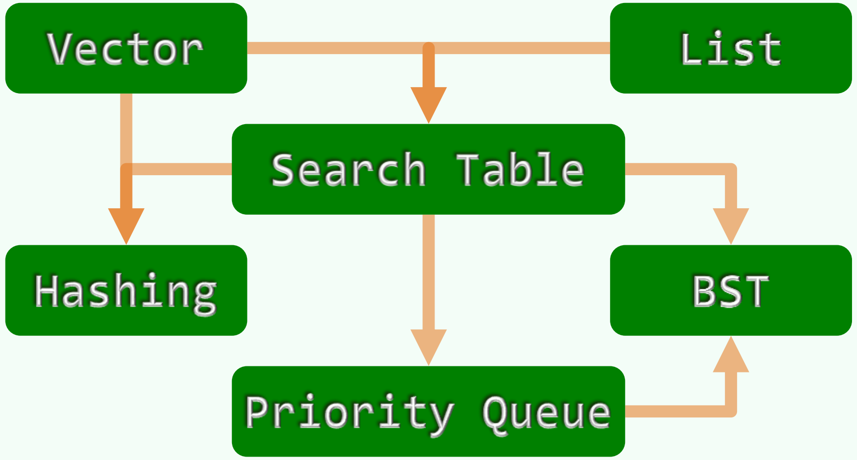
- ❖ 任给有向图G（不一定是DAG），尝试

  将所有顶点排成一个**线性序列**，使其次序须与原图**相容**

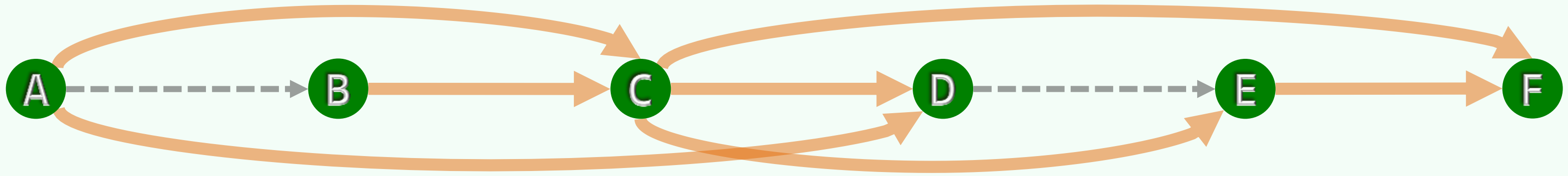
  （每一顶点都不会通过边指向**前驱**顶点）

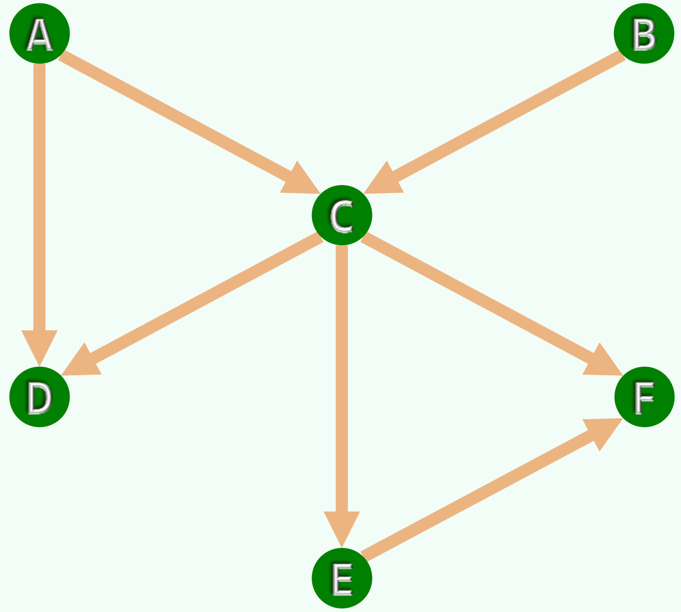
- ❖ 接口要求

  - 若原图存在回路（即并非DAG），检查并报告
  - 否则，给出一个相容的线性序列



偏序 ~ 极值





- 每个DAG对应于一个偏序集；拓扑排序对应于一个全序集

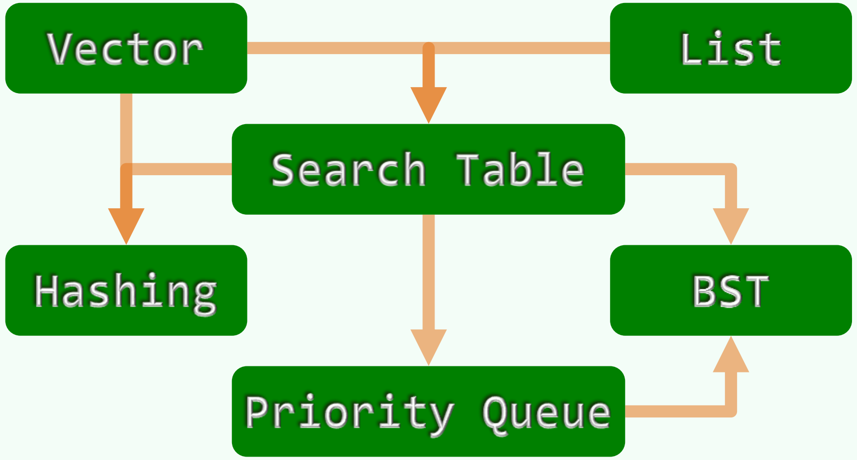
  所谓的拓扑排序，即构造一个与指定偏序集相容的全序集

- 可以拓扑排序的有向图，必定无环 //反之...

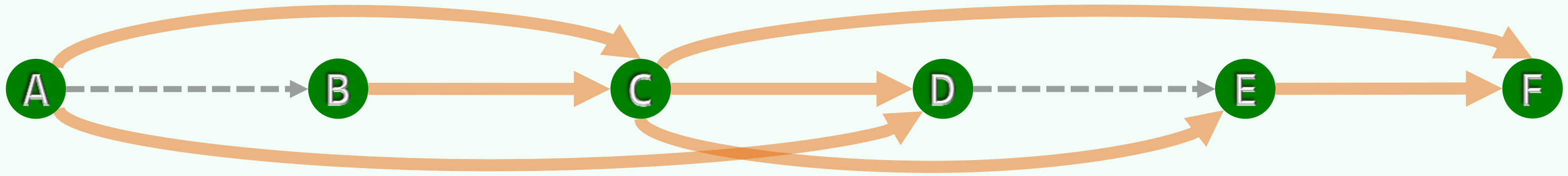
  任何DAG，都存在（至少）一种拓扑排序？是的！

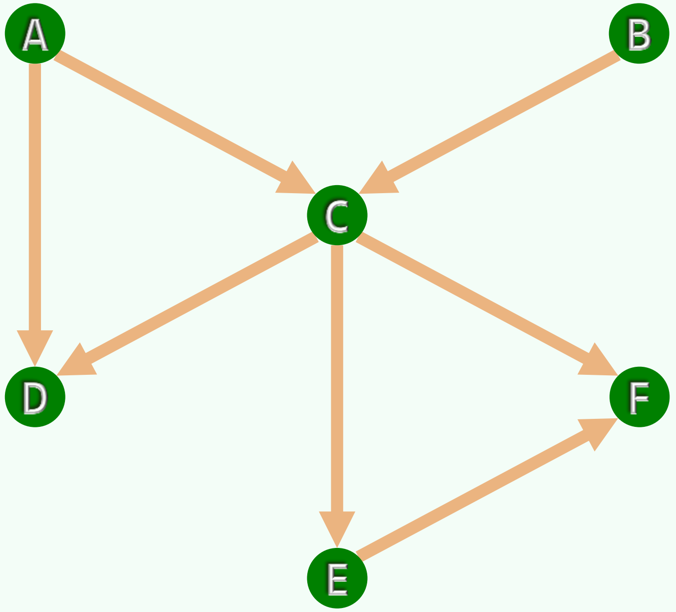
- 有限偏序集必有极值元素...

- 可归纳证明，并直接导出一个算法...



存在性





- **任何有向无环图 $\mathcal{G}$ 中**

  必有一个零入度的顶点 m

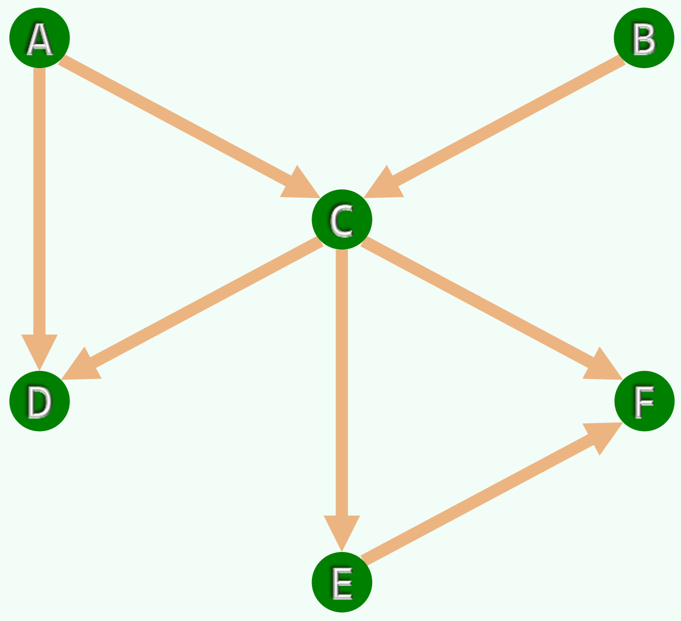
- **若 $\mathcal{G}\backslash\{m\}$ 存在拓扑排序 $S = \{\ \underline{u_{k_1},\ u_{k_2},\ u_{k_3},\ \ldots\ u_{k_{n-1}}}\ \}$** //subtraction

  则 $S' = \{\ m,\ \underline{u_{k_1},\ u_{k_2},\ u_{k_3},\ \ldots\ u_{k_{n-1}}}\ \}$ 即为 $\mathcal{G}$ 的拓扑排序 //DAG子图亦为DAG

- **当然，只要 m 不唯一，拓扑排序也应不唯一** //反之呢?

策略：顺序输出零入度顶点

```
将所有入度为零的顶点存入栈S，取空队列Q //O(n)

while ( ! S.empty() ) { //O(n)

   Q.enqueue( v = S.pop() ); //栈顶v转入队列

   for each edge( v, u ) //v的邻接顶点u若入度仅为1

      if ( u.inDegree < 2 ) S.push( u ); //则入栈

   G = G \ { v }; //删除v及其关联边（邻接顶点入度减1）

} //总体O(n + e)

return |G| ? "NOT_A_DAG" :  Q; //残留的G空，当且仅当原图可拓扑排序
```



实例