## 纸质作业选做题

1. 请证明:

   (a) $x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0))$

   (b) $\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\delta\left(t+\frac{b}{a}\right)$

2. 定义冲激偶信号 $\delta'(t)=\frac{\mathrm{d}[\delta(t)]}{\mathrm{dt}}$ （书上 14 页）, 请证明

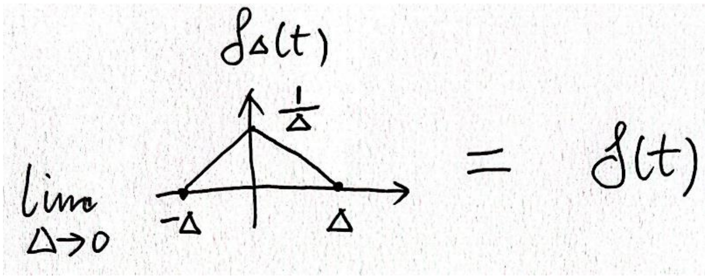
（1） $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)x(t)dt=-x'(0)$

（2） $\delta'(t)=-\delta'(-t)$ (即$\delta'(t)$是奇函数)

（3） $x(t)\delta'(t)=x(0)\delta'(t)-x'(0)\delta(t)$

（4） (选做题) 请根据（3），试一下你能否将$x(t)\delta''(t)$写成$\delta'(t)$和$\delta(t)$的形式。

3. 证明:

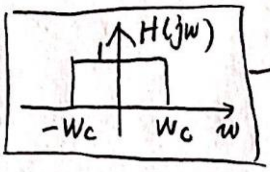



4. 设$\delta(t)$的 $n$阶导数为$\delta^{(n)}(t)=\frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$，证明

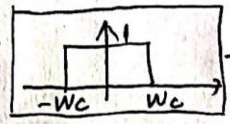
$$t^n\delta^{(n)}(t)=(-1)^n n!\,\delta(t)$$

5. 如果两个函数$h_1(t)$和$h_2(t)$，对任意函数$x(t)$都有： $x(t)*h_1(t)=x(t)*h_2(t)$
请证明：$h_1(t)$=$h_2(t)$ （等号是勒贝格函数相等的定义）

6. 本题考查低通滤波器在边界点情况下的表现。）试证明:

$\sin(w_c t) \longrightarrow$  $\longrightarrow \frac{1}{2}\sin(w_c t)$



$\cos(w_c t) \longrightarrow$  $\longrightarrow \frac{1}{2}\cos(w_c t)$



提示：在时域做，即证明

$$\sin(W_c t) * \frac{\sin(W_c t)}{\pi t} = \frac{1}{2}\sin(w_c t)$$

$$\cos(w_c t) * \frac{\sin(W_c t)}{\pi t} = \frac{1}{2}\cos(w_c t)$$

# 纸质作业选做题答案

1. ⓐ 左边 $= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt$

换元 $t' = t - t_0$

左边 $= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[y(t'+t_0)\,x(t'+t_0)\right]\delta(t')\,dt'$

$= y(0+t_0)\,x(0+t_0) = x(t_0)\,y(t_0)$

（这一步用到 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0)$ ）

右边 $= x(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,\delta(t-t_0)\,dt$

换元 $t' = t - t_0$

右边 $= x(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} y(t'+t_0)\,\delta(t')\,dt'$

$= x(t_0)\,y(t_0)$

左边 = 右边，命题成立。

ⓑ 左边 $= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,\delta(at+b)\,dt$

换元 $t' = at+b$

(i) 当 $a>0$ 时

左边 $= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} y\left(\frac{t'-b}{a}\right)\delta(t')\,dt'$

$= \frac{1}{a}\,y\left(-\frac{b}{a}\right)$

ii) 当 $a<0$ 时

左边 $= \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} y\left(\frac{t'-b}{a}\right)\delta(t')\,dt'$

$= -\frac{1}{a}\,y\left(-\frac{b}{a}\right)$

因此 左边 $= \frac{1}{|a|}\,y\left(-\frac{b}{a}\right)$

右边 $= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,\delta\left(t+\frac{b}{a}\right)dt$

换元 $t' = t+\frac{b}{a}$

右边 $= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} y\left(t'-\frac{b}{a}\right)\delta(t')\,dt'$

$= \frac{1}{|a|}\,y\left(-\frac{b}{a}\right)$

左边 = 右边，命题成立

2. ① $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)\,x(t)\,dt$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,d[\delta(t)]dt$

$=x(t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,d[x(t)]$

$=0-\int_{-\infty}^{+\infty}x'(t)\delta(t)\,dt$

$=-x'(0)$

② 左边 $=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)\delta'(t)\,dt=-y'(0)$（利用①的结论）

右边 $=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)[-\delta'(-t)]\,dt$

换元 $t'=-t$

右边 $=+\int_{+\infty}^{-\infty}y(-t')\delta'(t')\,dt'$

$=-\int_{-\infty}^{+\infty}y(-t)\delta'(t)\,dt$

$=-\int_{-\infty}^{+\infty}y(-t)\,d[\delta(t)]$

$=-y(-t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,d[y(-t)]$

$=0+\int_{-\infty}^{+\infty}[-y'(-t)]\delta(t)\,dt$

$=-y'(0)$

左边=右边，命题成立。

③ 左边 $=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)x(t)\delta'(t)\,dt$

$=-[x(t)y(t)]'_{t=0}$（利用①的结论）

$=-[x'(t)y(t)+x(t)y'(t)]_{t=0}$

$=-x'(0)y(0)-x(0)y'(0)$

右边 $=x(0)\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)\delta'(t)\,dt-x'(0)\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)\delta(t)\,dt$

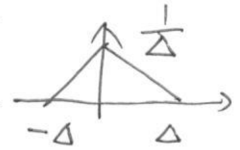
$=-x(0)y'(0)-x'(0)y(0)$

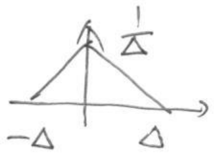
左边=右边，命题成立

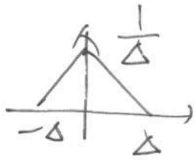
④ $x(t)f''(t) = x''(0)f(t) - 2x'(0)f'(t) + x(0)f''(t)$

（请自己证明）

3，证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\lim_{\Delta\to 0}\Big[$$

$$\Big]dt$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\Big[$$

$$\Big]dt$$

$$\approx y(0)\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\Delta}^{\Delta}\Big[$$

$$\Big]dt$$

$$= y(0)$$

命题成立。

4. 数学归纳法

① 当 $n=1$ 时，要证明

$$t f'(t) = -f(t)$$

应用 2③ 有：

$$t f'(t) = 0\cdot f'(t) - f(t) = -f(t)$$

命题成立

② 若 $n=k$ 时有：$t^k f^{(k)}(t) = (-1)^k k!\, f(t)$

则~~有~~要证明：

$$t^{k+1} f^{(k+1)}(t) = (-1)^{k+1}(k+1)!\, f(t)$$

左边 $= \int_{-\infty}^{+\infty} t^{k+1} y(t) f^{(k+1)}(t)\,dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} t^{k+1} y(t)\, d\big[f^{(k)}(t)\big]$$

$$= t^{k+1} y(t) f^{(k)}(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(t) d[t^{k+1} y(t)]$$

$$= 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} [(k+1) t^k y(t) + t^{k+1} y'(t)] f^{(k)}(t)\, dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} (k+1) [t^k f^{(k)}(t)] y(t)\, dt$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot [t^k f^{(k)}(t)] y'(t)\, dt$$

将 $t^k f^{(k)}(t) = (-1)^k k!\, f(t)$ 代入上式得:

左边 $= -\int_{-\infty}^{+\infty} (k+1)(-1)^k k!\, f(t) y(t)\, dt$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot (-1)^k k!\, f(t) y'(t)\, dt$$

$$= (-1)^{k+1} (k+1)!\, y(0) - 0$$

(这一步用到 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$)

$$= (-1)^{k+1} (k+1)!\, y(0)$$

右边 $= \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{k+1} (k+1)!\, y(t) \delta(t)\, dt$

$$= (-1)^{k+1} (k+1)!\, y(0)$$

左边 = 右边，命题成立。

6. ① $\sin(w_c t) * \dfrac{\sin(w_c t)}{\pi t}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(w_c \tau)}{\pi \tau} \sin[w_c (t-\tau)]\, d\tau$$

$$= ~~\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos[}{\pi\tau}~~$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(w_c\tau) [\sin(w_c t) \cos(w_c \tau) - \cos(w_c t) \sin(w_c \tau)]}{\pi \tau}\, d\tau$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(w_c\tau)\cos(w_c\tau)}{\pi\tau}d\tau\right]\sin(w_ct)-$$

$$\boxed{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(w_c\tau)}{\pi\tau}\right]\cos(w_ct)}$$

奇函数，这一项为0

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin[2w_c\tau]}{\pi\tau}d\tau\right]\sin(w_ct)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin(w_ct)\right]\quad\left(\text{这一步用到 }\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(w\tau)}{\pi\tau}d\tau=1\ (\text{当 } w>0)\right)$$

② $\cos(w_ct)*\dfrac{\sin(w_ct)}{\pi t}$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(w_c\tau)}{\pi\tau}\cos[w_c(t-\tau)]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(w_c\tau)[\cos(w_ct)\cos(w_c\tau)+\sin(w_ct)\sin(w_c\tau)]}{\pi\tau}d\tau$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(w_c\tau)\cos(w_c\tau)}{\pi\tau}d\tau\right]\cos(w_ct)+$$

$$\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(w_c\tau)}{\pi\tau}d\tau\right]\sin(w_ct)}$$

这一项为0

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(2w_c\tau)}{\pi\tau}d\tau\right]\cos(w_ct)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos(w_ct)\right]$$

5、证明：由于 $x(t)*h_1(t)=x(t)*h_2(t)$

即对 $\forall x(t)$ 和 $\forall t$，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h_1(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h_2(\tau)d\tau$$

取 $t=0$，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)h_1(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)h_2(\tau)d\tau$$

设 $y(\tau)=x(-\tau)$，由于 $x(\tau)$ 是任意的，则 $y(\tau)$ 也是任意的。那么有

$$\forall y(\tau),\ \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)h_1(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)h_2(\tau)d\tau$$

根据勒贝格定义，有：

$$h_1(t)=h_2(t)$$