

图应用

Prim算法：最小支撑树

11-E1

“疯子么，怎能绳之以常理？还有更荒唐的事呢，他要在普济造一条风雨长廊，把村里的每一户人家都连接起来，哈哈，他以为，这样一来，普济人就可免除日晒雨淋之苦了。”

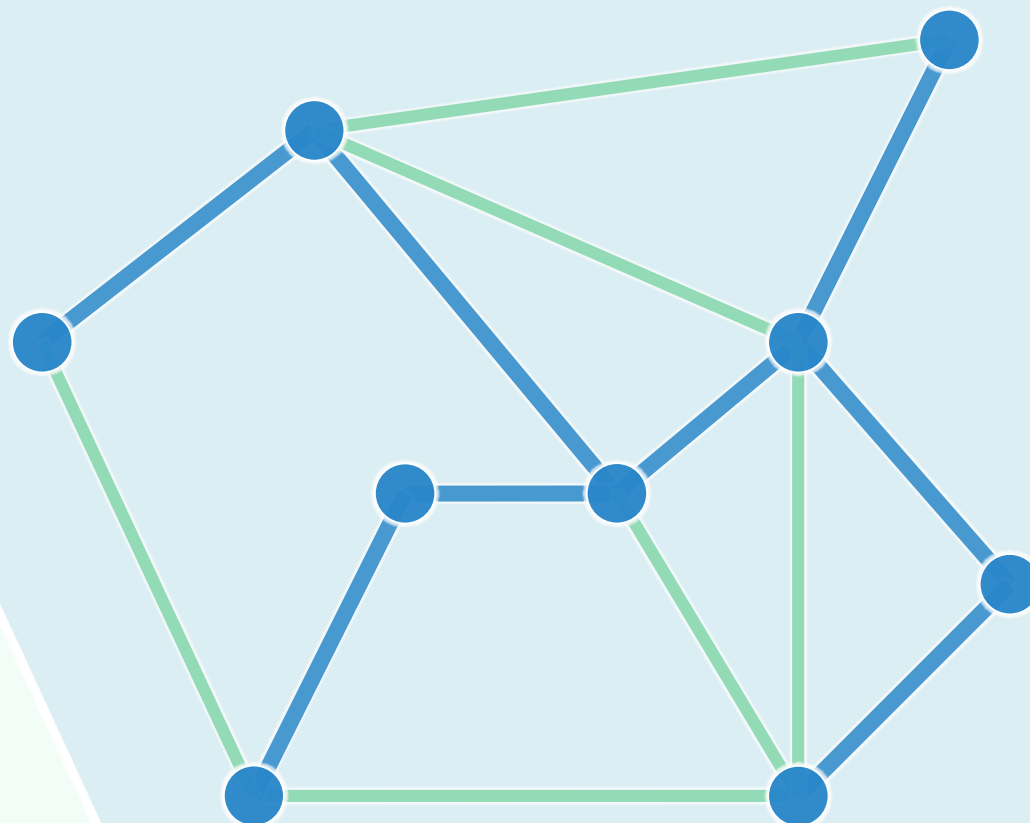
邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

# 最小 + 支撑 + 树

- ❖ 连通网络 $N=(V;E)$ 的子图 $T=(V;F)$
- ❖ 支撑/spanning = 覆盖 $N$ 中所有顶点
- ❖ 树/tree = 连通且无环,  $|F| = |V| - 1$
- ❖ 同一网络的支撑树, 未必唯一
- ❖ minimum = optimal:  
总权重  $w(T) = \sum_{e \in F} w(e)$  达到最小
- ❖ 谁感兴趣?

电信公司、网络设计师、VLSI布线算法设计师、...



# MST

## ❖ 为何重要?

- 自身可**有效计算**
- 众多优化问题的**基本模型**
- 为许多NP问题提供足够好的**近似解**

比如, Euclidean TSP

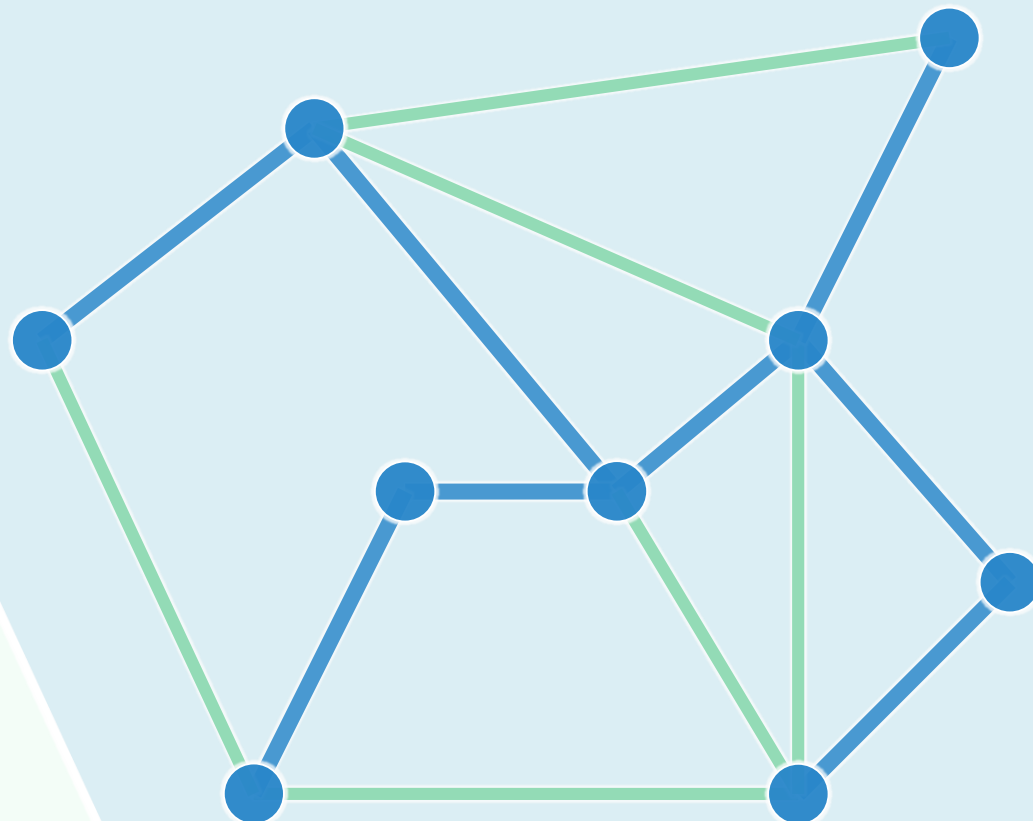
## ❖ 延伸问题: Proximity Graphs $// \Omega(n \log n)$

Steiner MST  $// \text{NP-hard}$

## ❖ 众多算法: Boruvka-1926、Jarnik-1930、

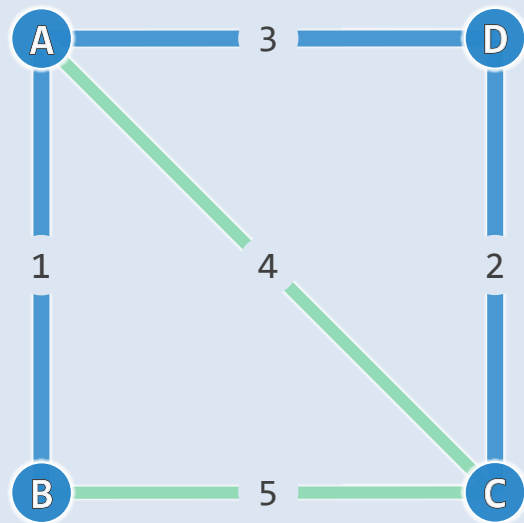
Prim-1956、Kruskal-1956

Karger-Klein-Tarjan-1995、Chazelle-2000、...

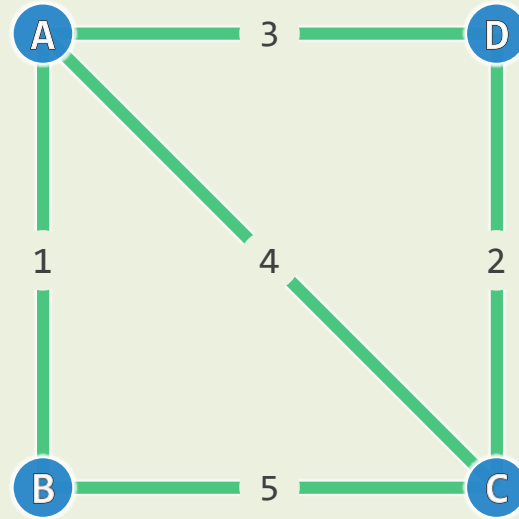


# MST $\neq$ SPT

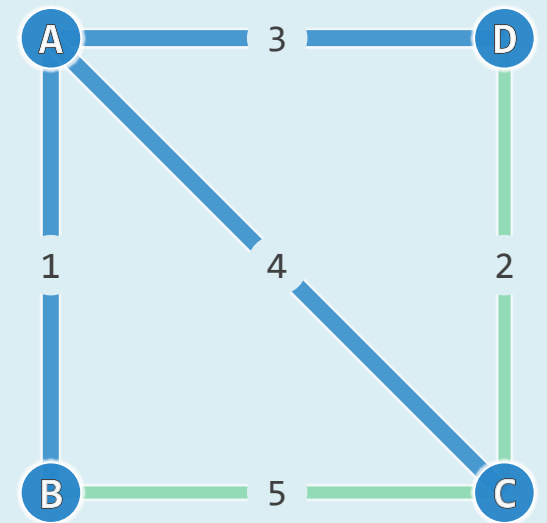
MST



G



SPT



# 负权 & 退化

## ❖ 权值必须是正数?

- 允许为零, 有何影响?
- 允许为负数呢?

## ❖ 所有支撑树所含的边数, 必相等

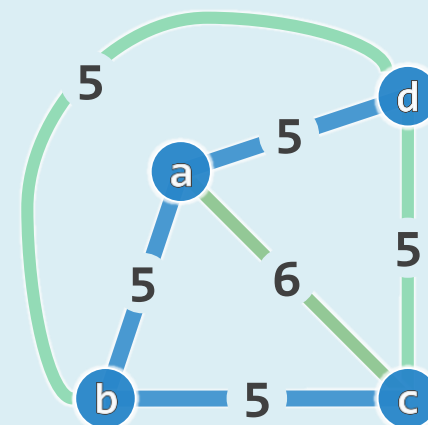
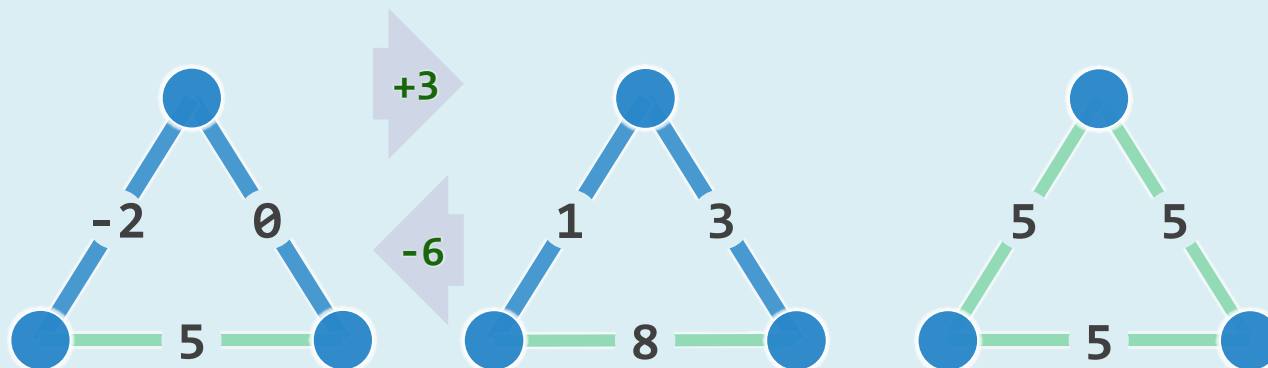
故可统一调整: `increase(1 - findMin())`

## ❖ The minimum? A minimal!

- 同一网络, 或有多棵MST
- 可强制消除歧义...

## ❖ 合成数 (composite number) : $(w(u, v), \min(u, v), \max(u, v))$

$5ab < 5ad < 5bc < 5bd < 5cd < 6ac$



# 蛮力算法

❖ 枚举出N的所有支撑树，从中找出代价最小者

❖ 包含n个顶点的图，可能有多少棵支撑树？

n = 1          1

n = 2          1

n = 3          3

n = 4          16

n = 5          125

...          ...

❖ Cayley公式：完全图  $K_n$  有  $n^{n-2}$  棵支撑树

❖ 如何高效地构造MST呢？

