

图应用

双连通分量：判定准则

11-B1

伤其十指，不如断其一指

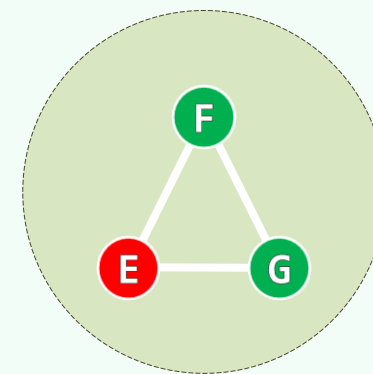
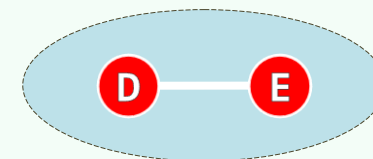
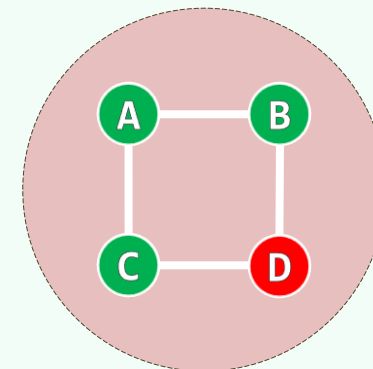
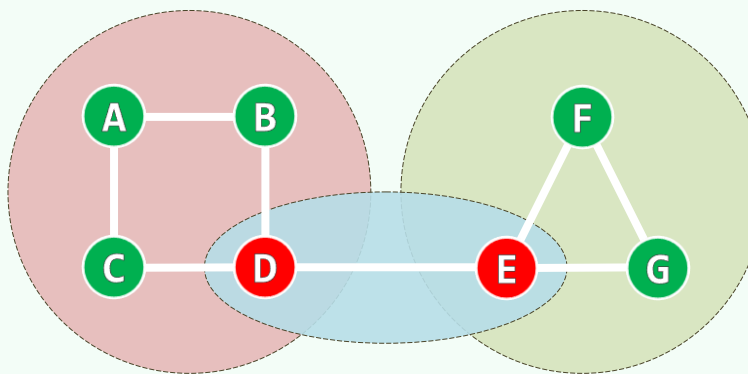
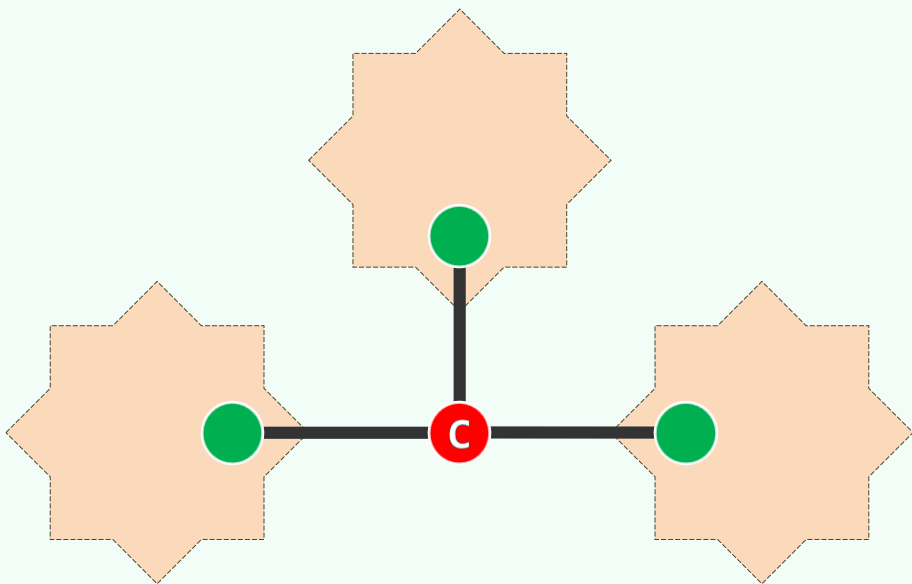
帝高阳之苗裔兮，朕皇考曰伯庸

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

# 关节点 + 双连通分量

- ❖ **无向图的关节点**: //articulation point, cut-vertex  
其删除之后, 原图的双连通分量增多 //connected components
- ❖ **无关节点的图**, 称作双 (重) 连通图 //bi-connectivity
- ❖ **极大的双连通子图**, 称作双连通分量 //Bi-Connected Components



# Brute-Force

- ❖ 给定无向图，如何确定各BCC?
- ❖ 先考察简单的版本：如何确定关节点?
- ❖ 蛮力：对每一顶点 $v$ ，通过遍历检查 $G \setminus \{v\}$ 是否连通

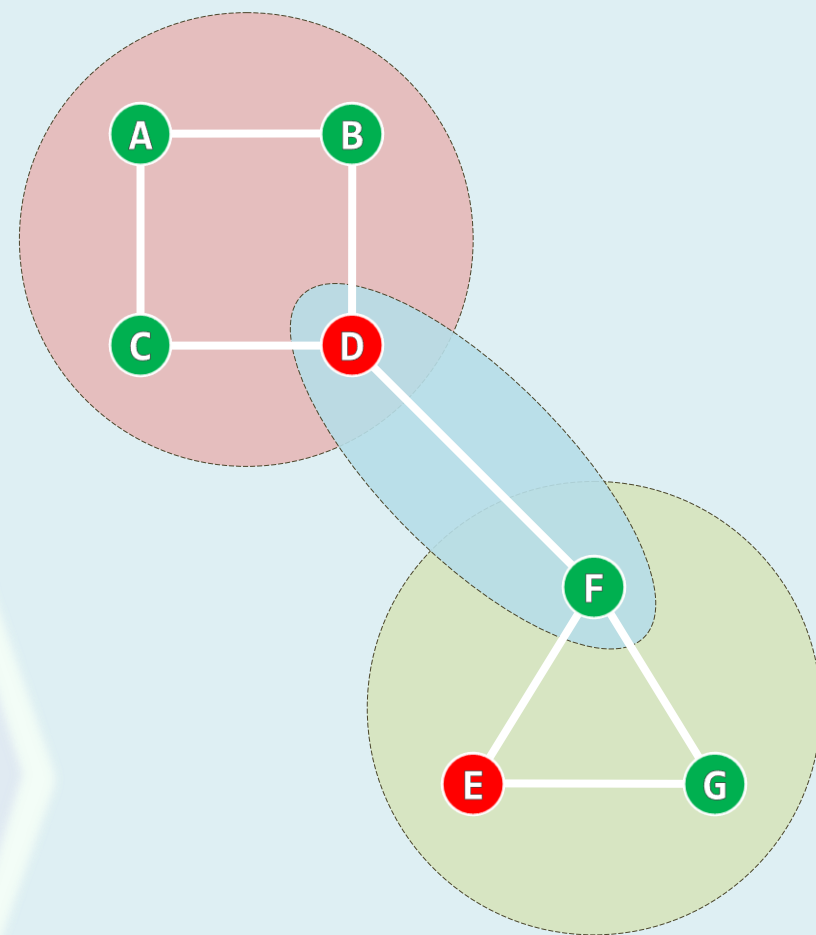
❖ 共需 $O(n * (n + e))$ 时间，太慢!

而且，即便找出关节点，各BCC仍需确定

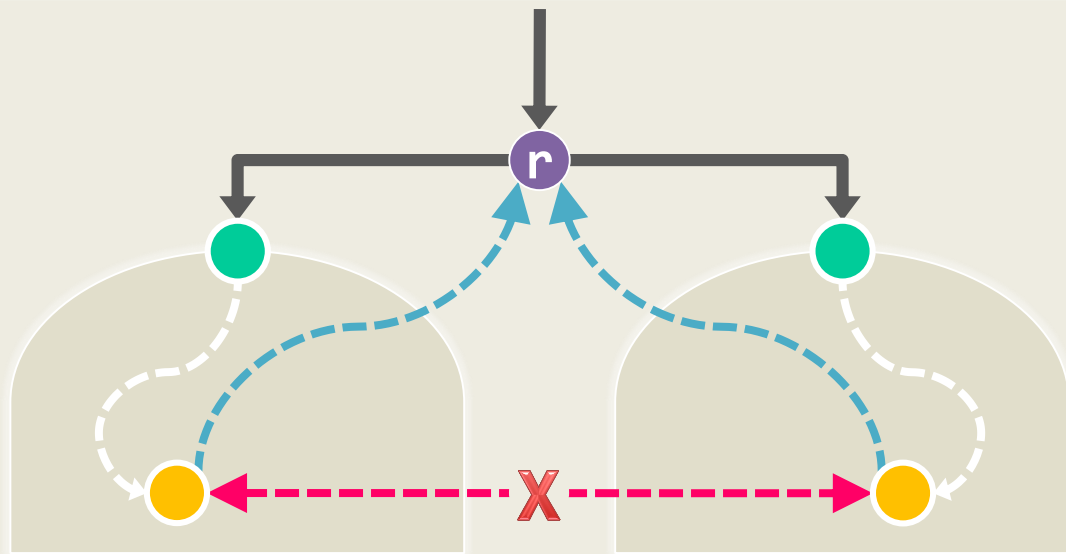
- ❖ 改进：从任一顶点出发，构造DFS树

根据DFS留下的标记，甄别是否关节点

- ❖ 比如，**叶节点**绝不可能是关节点 //为什么?



# 非叶节点

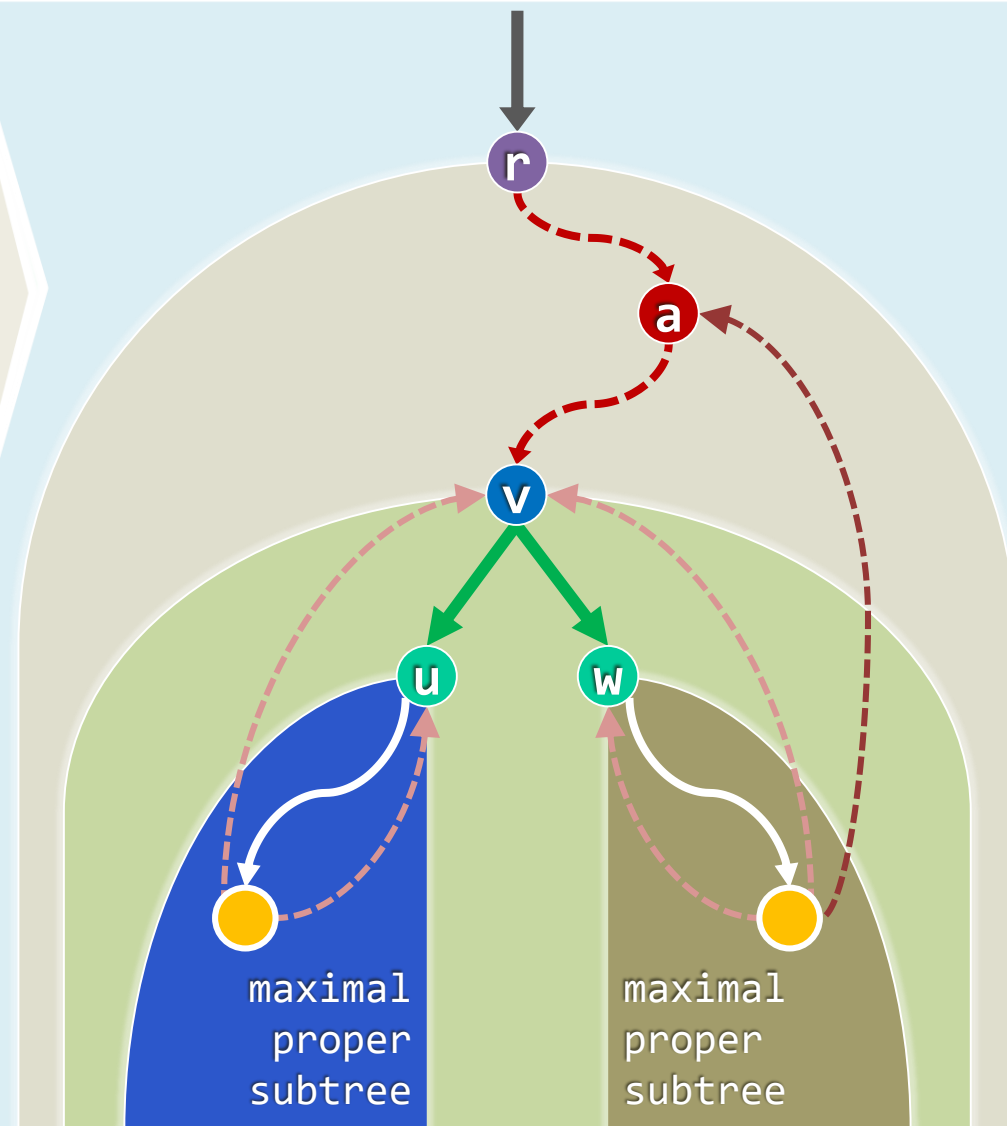


❖ 根 $r$ : 必须至少有2棵子树

❖ 内部节点 $v$ :

- 有某个孩子 $u$ , 而 $\text{subtree}(u)$ 不能  
经由BACKWARD边, 联接到 $v$ 的任何真祖先 $a$

❖ 此时,  $\{v\} = \text{BCC}(u) \cap \text{BCC}(\text{parent}(v))$



# Highest Connected Ancestor

- ❖  $\text{hca}(v)$  = subtree( $v$ )经后向边能抵达的最高祖先
- ❖ 由括号引理: **dTime**越小的祖先, 辈份越高
- ❖ DFS过程中, 一旦发现后向边( $v, u$ )  
即取:  $\text{hca}(v) = \min(\text{hca}(v), \text{dTime}(u))$
- ❖ DFS( $u$ )完成并返回 $v$ 时  
若有:  $\text{hca}(u) < \text{dTime}(v)$   
即取:  $\text{hca}(v) = \min(\text{hca}(v), \text{hca}(u))$
- ❖ 否则, 即可断定:  $v$ 系关节点, 且  
 $\{v\} + \text{subtree}(u)$ 即为一个BCC

