FIR滤波器设计

FIR = Finite Impulse Response（有限冲激响应）

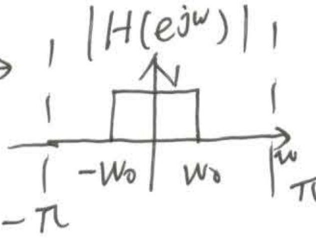
更通俗的说，FIR滤波器设计就是设计一个有限长序列 $h[n]$，使它的离散傅里叶变换

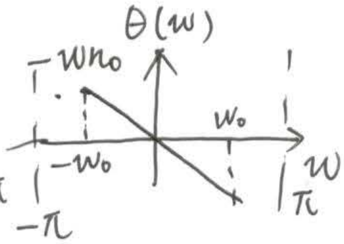
$$h[n] \xrightarrow{F} H(e^{j\omega})$$

满足我们需要的性质。

我们以低通滤波器为例来说明FIR滤波器的设计准则。我们在第四章中学到理想低通滤波器

$$h[n] = \frac{\sin[\omega_0(n-n_0)]}{\pi(n-n_0)} \xrightarrow{F}$$

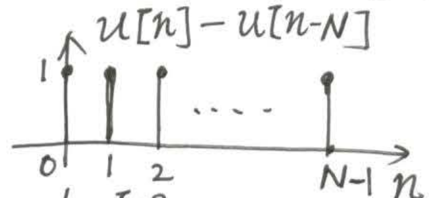




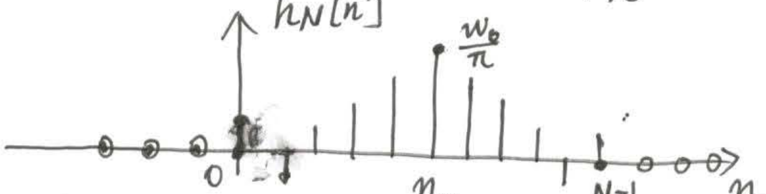
但是以上 $h[n]$ 却不能物理实现，这是因为 $h[n]$ 是无限长，而我们的硬件设备只能处理有限长；另一方面，我们需要保证 $h[n]$ 是因果序列（即 $h[n]=0$ 当 $n<0$ 时）。

一个直接的想法就是截断 $h[n]$，如下所示：

$$h_N[n] = h[n] \cdot$$



$=$



一般来说，我们取 $N=2n_0+1$，这样取到的点就以 n_0 为中心对称，在第二节中我们可以看到，对称的 $h[n]$ 可以使 $H(e^{j\omega})$ 具有线性相位。

在程序 showhn.m 中，我们给出了 $h_N[n]$ 的时域和频域图像。

可以看到$h_N[n]$的幅度谱$H(e^{jw})$有一些波纹，这是由于截断效应导致的吉布斯现象。分析如下：

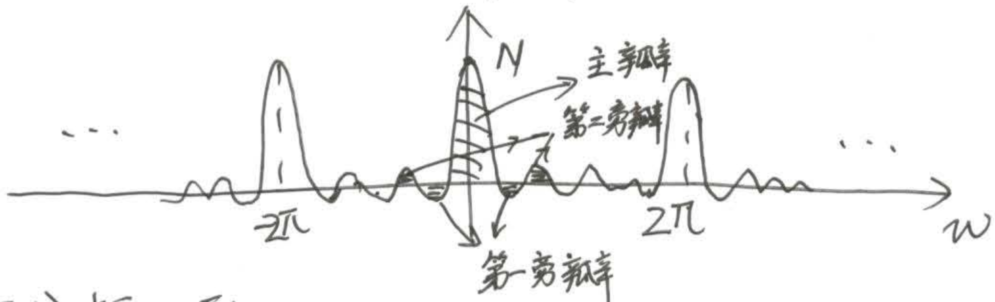
$$h_N[n] = h[n]\,(u[n]-u[n-N])$$

$$\downarrow F \qquad \downarrow F \qquad \downarrow F$$

$$H_N(e^{jw}) = \frac{1}{2\pi}H(e^{jw}) \circledast \left[\frac{\sin\left(\frac{N}{2}w\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}w\right)}e^{-jw\frac{N-1}{2}}\right]$$

括号中$e^{-jw\frac{N-1}{2}}$是线性相位，对应延时$\frac{N-1}{2}$。而$\frac{\sin\left(\frac{N}{2}w\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}w\right)}$是一个$2\pi$为周期函数，它的图像如下：

$$\frac{\sin\left(\frac{N}{2}w\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}w\right)}$$



与第三章分析一致，如果要让$H_N(e^{jw})$尽量接近$H(e^{jw})$则我们最好令主瓣面积越大越好，而旁瓣面积越小越好。因此，矩形窗$u[n]-u[n-N]$不是最好的窗函数，我们会构造其他窗函数来增大主瓣面积，降低旁瓣面积。

除了矩形窗之外，常见的窗函数有汉宁窗(Hamming Window)，汉明窗(Hamming Window)，布莱克曼窗(Blackman Window)、凯泽窗(Kaiser Window)等。

下表是这些窗函数形式及参数。

窗名称	时域序列 $h[n]$ $0 \le n \le N-1$	主瓣 3dB带宽	最高旁瓣	旁瓣每10个倍频程衰减 (dB)
矩形窗	$u[n]-u[n-N]$	0.89	-13.3	-20
汉宁窗	$\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi n}{N-1}\right)$	1.44	-31.5	-60
汉明窗	$0.54-0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1}$	1.30	-43.2	-20
凯泽窗	$\dfrac{I_0\left[a\sqrt{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2-\left(n-\frac{N-1}{2}\right)^2}\right]}{I_0\left[a\left(\frac{N-1}{2}\right)\right]}$	1.71	-66.6	-20
布莱克曼窗	$0.42-0.5\cos\frac{2\pi n}{N-1}+0.08\frac{4\pi n}{N-1}$	1.68	-92.2	-20

在 Showwindowfunction.m 中，我们给出了这些窗函数的频谱 $|H(e^{j\omega})|$，由于它们都是线性相位（即以 $n_0=\frac{N-1}{2}$ 对称），因此我们没有画 $\theta(\omega)$。可见，以上这些窗函数扩大了主瓣并压缩了旁瓣，尽可能减少了截断对频谱的影响。而具体哪一个窗函数更好，是需要根据实际情况确定。

(1) 基于窗函数的滤波器设计

我们以课程设计第1题为例，设计一个希尔伯特变换的FIR滤波器，用于计算窄带信号

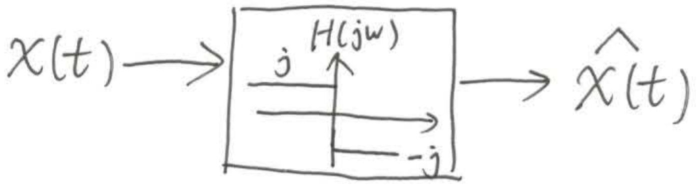
$$x(t)=A(t)\cos(w_0t+\theta(t))$$

的幅度 $|A(t)|$ 和瞬时相位 $w_0+\frac{d\theta(t)}{dt}$（其中 $A(t)$ 相比 $\cos(w_0t+\theta(t))$ 变化缓慢很多。）

②理论分析

利用希尔伯特变换求解 $|A(t)|$ 和 $w_0+\frac{d\theta(t)}{dt}$ 的步骤如下：

首先将 $x(t)$ 通过希尔伯特变换器得到 $\hat{x}(t)$



因为 $x(t)=A(t)\cos(w_0t+\theta(t))$，则有

$$\hat{x}(t)\approx A(t)\sin(w_0t+\theta(t))$$

因此：

$$|A(t)|=\sqrt{x(t)^2+\hat{x}(t)^2}$$

$$\varphi(t)=w_0t+\theta(t)=\arctan\left(\frac{\hat{x}(t)}{x(t)}\right)$$

设 $q(t)=x(t)+j\hat{x}(t)=|A(t)|e^{j\varphi(t)}$

则有：

$$\ln[q(t)]=\ln|A(t)|+j\varphi(t)$$

则有：

$$\varphi(t)=Im\{\ln[q(t)]\}$$

则有瞬时相位

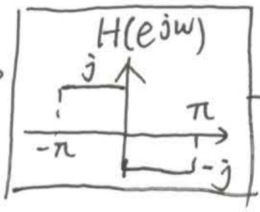
$$w_0+\frac{d\theta(t)}{dt}=\frac{d\varphi(t)}{dt}=Im\left\{\frac{d\ln(q(t))}{dt}\right\}$$

$$=Im\left\{\frac{1}{q(t)}\frac{dq(t)}{dt}\right\}$$

我们会用上述公式来求瞬时相位。

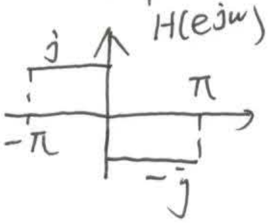
ⓑ 编程细节

首先我们需要把上述连续信号变成离散信号，用离散希尔伯特变换代替连续希尔伯特变换

$x[n]=x(nT) \longrightarrow$ 

$\longrightarrow \hat{x}[n]$

首先我们计算

$h[n] = F^{-1}\Big[$ 

$\Big] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} je^{jwn}\,dw - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} je^{jwn}\,dw$

$$= \frac{1-(-1)^n}{\pi n}$$

因此，

$$h[n] = \begin{cases} 0，当n为偶数时 \\ \frac{2}{\pi n}，当n为奇数时。\end{cases}$$

这是一个以原点为中心对称的奇函数。

和设计低通滤波器一样，我们将$h[n]$右移n_0，同时在$[0, N-1]$上用窗函数，其中$N=2n_0+1$，得到

$$h_N[n] = h\left[n-\frac{N-1}{2}\right] \cdot \text{windowfunction}(N)$$

根据第四章知识可知，$h[n]$右移n_0后，导致系统相位增加了一个线性值$-wn_0$，这个线性相位不影响对$|A(t)|$和$w_0+\frac{d\theta(t)}{dt}$的计算。

获得$h_N[n]$后，我们可以直接卷积获得$\hat{x}[n]$

$$\hat{x}[n] \approx x[n] * h_N[n]$$

需要注意，为了让 $x[n]$ 和 $\hat{x}[n]$ 序列长度一致，我们用如下 Matlab 函数

$$\hat{x} = \text{conv}(x, h_N, \text{'same'})$$

其中 'same' 表示 卷积结果去除边缘点，使 $\hat{x}$ 与 x 长度一致。

接下来可以计算包络幅度

$$|A[n]| \approx \sqrt{x[n]^2 + \hat{x}[n]^2}$$

由于瞬时频率

$$w_0 + \frac{d\theta(t)}{dt} = Im\left\{\frac{1}{q(t)} \frac{dq(t)}{dt}\right\}$$

以上式子中，我们做如下近似：

$$q[n] = q(nT) = x[n] + j\hat{x}[n]$$

$$\frac{dq(t)}{dt} \approx \frac{q[n+1] - q[n]}{T} \quad (\text{T是采样周期})$$

$$\frac{1}{q(t)} = \frac{1}{\frac{q[n+1]+q[n]}{2}} = \frac{2}{q[n+1]+q[n]}$$

代入后得到

$$\text{瞬时频率} = w_0 + \frac{d\theta(t)}{dt} \approx Im\left[\frac{2(q[n+1]-q[n])}{T(q[n+1]+q[n])}\right]$$

在程序 testHilbert.m 中，我们给出了基于以上思路求包络和瞬时频率的程序。

(2) 最优等纹波线性相位FIR滤波器设计

从前面的讨论可知，设计FIR滤波器等价于寻找一个 $h[n]$ 使之满足如下条件：

① $h[n]$ 在 $0 \sim N-1$ 范围内有值（这个条件保证 $h[n]$ 有限长和因果）

② $h[n]$ 的傅里叶变换 $H(e^{jw})$ 是线性相位（这个条件保证 $H(e^{jw})$ 具有理想滤波器的相位特性）。

③ 在一些特定的频率点上，如 $w_0, w_1 \cdots w_k$ 上，$H(e^{jw_0}), H(e^{jw_1}) \cdots H(e^{jw_k})$ 等于我们想要的值。

这一节我们分析并寻找方法来实现上述条件。

首先我们看条件①和②，研究表明，同时满足有限、因果和线性相位的 $h[n]$ 有如下4种情况：

情况1：N 为奇数且 $h[n] = h[N-1-n]$，此时

$$H(e^{jw}) = e^{-jw\frac{N-1}{2}}\left\{h\left[\frac{N-1}{2}\right] + 2\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h[n]\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)w\right]\right\}$$

此时，我们只须确定 $h[0] \sim h\left[\frac{N-1}{2}\right]$ 这 $\frac{N+1}{2}$ 个数即可。设

$$a[k] = \begin{cases} h\left[\frac{N-1}{2}\right] & \text{当 } k=0 \text{ 时} \\ 2h\left[\frac{N-1}{2}-k\right] & \text{当 } k=1,2,\cdots \frac{N-1}{2} \end{cases}$$

则有

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} a[k]\cos(\omega k)$$

情况2： N为偶数且 $h[n] = h[N-1-n]$，此时

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \cdot 2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n]\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

此时我们只须确定 $h[0] \sim h[\frac{N}{2}-1]$ 这 $\frac{N}{2}$ 个数即可。

设 $a[k] = 2h[\frac{N}{2}-k]$，则有：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a[k]\cos\left[\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\omega\right] \cdot e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

情况3：N为奇数且 $h[n] = -h[N-1-n]$，此时：

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h[n]\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

设 $a[k] = 2h[\frac{N-1}{2}-k]$，则有

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} a[k]\sin(\omega k)$$

情况4：N为偶数且 $h[n] = -h[N-1-n]$，此时

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h[n]\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

设 $a[k]=2h[\frac{N}{2}-k]$ 则有：

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} a[k]\sin\left[\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\omega\right]$$

总结如下：

① N为奇数且 $h[n]=h[N-1-n]$ 时

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} a[k]\cos(\omega k)$$

需要求 $a[k]$ ($k=0\sim\frac{N-1}{2}$) 总共 $\frac{N+1}{2}$ 个未知数。

② N为偶数且 $h[n]=h[N-1-n]$ 时

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_k\cos\left[\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\omega\right]$$

需要求 a_k ($k=0\sim\frac{N}{2}-1$) 总共 $\frac{N}{2}$ 个未知数。

③ N为奇数且 $h[n]=-h[N-1-n]$

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} a[k]\sin(\omega k)$$

需要求 a_k ($k=0\sim\frac{N-3}{2}$) 总共 $\frac{N-1}{2}$ 个未知数。

④ N为偶数且 $h[n]=-h[N-1-n]$

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} a[k]\sin\left[\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\omega\right]$$

需要求 a_k ($k=1\sim\frac{N}{2}$) 总共 $\frac{N}{2}$ 个未知数。

回到条件③，我们要在一组特定的 $w_0, w_1 \cdots w_k$ 上使 $H(e^{j\omega})$ 等于某些确定的值，这实际上是一个解方程的问题，不过这个方程组有点复杂，包含 cos，sin，可能不会精确相等。

前人在这里做了大量工作，发明了很多以上方程组的近似解法，其中比较有名的是Parks-McClellan方法，在这里我们不详细展开，有兴趣的同学可以参阅《数字信号处理—原理、算法和应用》(Digital Signal Processing — Principles, Algorithms, and Applications)

Matlab中的firpm函数集成了Parks-McClellan方法。在程序testHilbertPMAlgorithm.m中，我们给出了用Park-McClellan算法求信号包络和瞬时相位的程序。

请注意，我发现Matlab中Park-McClellan算法只能取N较小时才有用，当N很大如N>1000时，该算法不收敛。由于N较小，导致Park-McClellan算法在$x(t)$取得较复杂时效果不如窗函数法。同学们可以研究如何完善这个算法。