信号与系统（甲）

-- 傅里叶级数导引

讲解人：胡浩基

傅里叶级数导引

英国科学期刊《物理世界》曾让科学家们投票评选了“最伟大的公式”，最终榜上有名的十个公式既有无人不知的1+1=2，又有著名的$E = mc^2$；既有简单的圆周公式，又有复杂的欧拉公式。

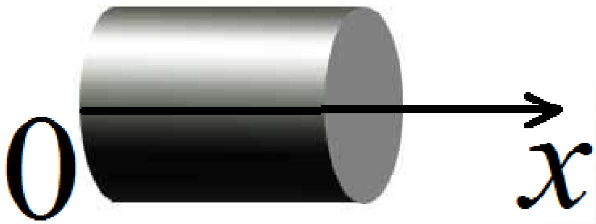
这个地球上有多少伟大的智慧曾耗尽一生，才最终写下一个等号。

- 排名第九的公式

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad \text{(P95 3-44)}$$

傅里叶级数导引

- 问题的缘起：求解热传导方程



一个条形均匀介质物体，假设物体上温度分布为 $f(x,t)$，设 $f(x)=f(x,0)$ 为 $t=0$ 时刻的温度分布，求 $f(x,t)$（当 $t>0$ 时）。

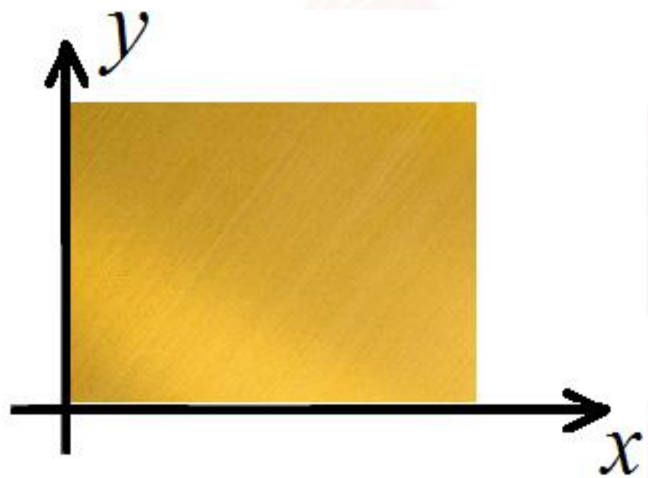
答案即为热传导公式，$f(x,t)$ 满足以下偏微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & (1) \\ f(x,0) = f(x) & (2) \end{cases}$$

其中 K 为导热系数，与介质有关。

傅里叶级数导引

- 二维情况下的热传导方程



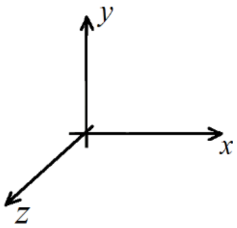
已知 $f(x,y,0)=f(x,y)$, 求 $f(x,y,t)$（当 $t>0$ 时）。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}=K\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) & (1) \\ f(x,y,0)=f(x,y) & (2) \end{cases}$$

其中 K 为导热系数，与介质有关。

傅里叶级数导引

- 三维情况下的热传导方程



空气

已知 $f(x,y,z,0)=f(x,y,z)$, 求 $f(x,y,z,t)$ （当 $t>0$时）。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}=K\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) & (1) \\ f(x,y,z,0)=f(x,y,z) & (2) \end{cases}$$

其中 K 为导热系数，与介质有关。

傅里叶级数导引

- 解热传导方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & (1) \\ f(x,0) = f(x) & (2) \end{cases}$$

对于一般的 $f(x)$，上述方程没有解析解，但是，如果 $f(x)$是某些特殊的函数，方程存在解析解。

- 情况一：如果 $f(x) = B_0$，那么 $f(x,t) = B_0$

验证：将 $f(x,t) = B_0$ 代入（1），则左边=右边=0；同时又有

$$f(x) = f(x,0) = B_0$$

满足(2)。

傅里叶级数导引

- 解热传导方程

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = K\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & (1) \\ f(x,0) = f(x) & (2) \end{cases}$$

- 情况二：如果

$$f(x) = B\cos(\omega x)$$

则有：

$$f(x,t) = B\cos(\omega x)e^{-K\omega^2 t}$$

傅里叶级数导引

- 解热传导方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & (1) \\ f(x,0) = f(x) & (2) \end{cases}$$

- 情况三：如果

$$f(x) = C\sin(\omega x)$$

- 则有：

$$f(x,t) = C\sin(\omega x)e^{-K\omega^2 t}$$

傅里叶级数导引

- 解热传导方程

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = K\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & (1) \\ f(x,0) = f(x) & (2) \end{cases}$$

- 情况四：如果 $f(x)$ 是常数、正弦和余弦函数的线性组合，例如：

$$f(x) = B_0 + B\cos(\omega_1 x) + C\sin(\omega_2 x)$$

则有：

$$f(x,t) = B_0 + B\cos(\omega_1 x)e^{-K\omega_1^2 t} + C\sin(\omega_2 x)e^{-K\omega_2^2 t}$$

傅里叶级数导引

傅里叶的生平和主要贡献

傅里叶：1768年3月21日生于欧塞尔，1830年5月16日卒于巴黎。9岁父母双亡， 被当地教堂收养。12岁由一主教送入地方军事学校读书。17岁（1785）回乡教数学，1794到巴 黎，成为高等师范学校的首批学员， 次年到巴黎综合工科学校执教。1798年随拿破仑远征埃及时任军中文书和埃及研究院秘书，1801年回国后任伊泽尔 省地方长官。1817年当选为科学院院 士，1822年任该院终身秘书，后又任法兰西学院终身秘书和理工科大学校务委员会主席。

主要贡献：1807年向巴黎科学院呈交《热的传播》论文，推导出著名的热传导方程 ，并在求解该方程时发现解函数可以由三角函数构成的级数形式表示，从而提出任一函 数都可以展成三角函数的无穷级数。傅里叶级数、傅里叶分析等理论均由此创始。

傅里叶级数导引

- 解热传导方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & (1) \\ f(x,0) = f(x) & (2) \end{cases}$$

傅里叶认为，如果 $f(x)$可以写成如下形式：

$$f(x) = B_0 + (B_1\cos(\omega_0 x) + B_2\cos(2\omega_0 x) + \ldots) + (C_1\sin(\omega_0 x) + C_2\sin(2\omega_0 x) + \ldots)$$

或

$$f(x) = B_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k\cos(k\omega_0 x) + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k\sin(k\omega_0 x) \quad (k\text{是自然数})$$

那么热传导方程的解为：

$$f(x,t) = B_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k\cos(k\omega_0 x)e^{-Kk^2\omega_0^2 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k\sin(k\omega_0 x)\, e^{-Kk^2\omega_0^2 t}$$

傅里叶级数导引

$$f(x)=B_0+\sum_{k=1}^{+\infty}B_k\cos\left(k\omega_0 x\right)+\sum_{k=1}^{+\infty}C_k\sin\left(k\omega_0 x\right)\quad (k\text{是自然数})$$

- 傅里叶的基本假设: $f(x)$可以表示为 一族基函数

$$1,\cos(\omega_0 x),\cos(2\omega_0 x),\cos(3\omega_0 x)\ldots,\sin(\omega_0 x),\sin(2\omega_0 x),\sin(3\omega_0 x)\ldots$$

的线性组合。

- 概念定义 （P84）

1. B_0 : $f(x)$的直流分量。
2. ω_0 : $f(x)$的基波频率。
3. B_k ,C_k : $f(x)$的k次谐波的频谱分量。

傅里叶级数导引

$$f(x)=B_0+\sum_{k=1}^{+\infty}B_k\cos k\omega_0 x+\sum_{k=1}^{+\infty}C_k\sin k\omega_0 x \quad (k\text{是自然数})$$

- 问题转化为：给定一个 $f(x)$，对于任意的 $k\in N$，如何求上式中的 B_0, B_k, C_k？
- 傅里叶解法如下：

比如， 我们要求 B_0，将等式（1）两边从0到 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 积分：

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(x)dx=\underbrace{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} B_0 dx}_{=\frac{2\pi B_0}{\omega_0}}+\sum_{k=1}^{+\infty}B_k\underbrace{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}\cos(k\omega_0 x)dx}_{=0}+\sum_{k=1}^{+\infty}C_k\underbrace{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}\sin(k\omega_0 x)dx}_{=0}$$

因此有：

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(x)dx=\frac{2\pi B_0}{\omega_0} \Longrightarrow B_0=\frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(x)dx$$

傅里叶级数导引

根据3.1节推导得出：

$$\begin{cases} B_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(x)dx \\ B_k = \dfrac{\omega_0}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(x)\cos(k\omega_0 x)dx \\ C_k = \dfrac{\omega_0}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(x)\sin(k\omega_0 x)dx \end{cases}$$

（P86 公式3-19）

频谱分量 B_0，B_k，C_k之所以能有如此简单的表达式，是因为基函数族

$$1, \cos(\omega_0 x), \cos(2\omega_0 x), \cos(3\omega_0 x)\ldots, \sin(\omega_0 x), \sin(2\omega_0 x), \sin(3\omega_0 x)\ldots$$

任意取两个相乘，在区间 $\left[0, \dfrac{2\pi}{\omega_0}\right)$ 上积分的结果都为0。

■ **概念定义**

正交性：基函数族任意两个函数的内积都为0的性质。

傅里叶级数导引

- 对傅里叶这套方法的不同意见

（1）收敛性问题

$$f(x) = B_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \cos k\omega_0 x + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \sin k\omega_0 x$$

等号只是假设

狄里赫利关于傅里叶级数收敛的三条件 （P92）

（1） 在一个周期内，$f(x)$必须绝对可积。

（2） 在一个周期内，$f(x)$的最大值和最小值数目必须有限。

（3） 在一个周期内，$f(x)$只有有限个不连续点，而且在这些不连续点上，$f(x)$的值是有限的。

傅里叶级数导引

- 对傅里叶这套方法的不同意见

（2）计算量的问题

$$f(x)=B_0+\sum_{k=1}^{+\infty}B_k\cos k\omega_0 x+\sum_{k=1}^{+\infty}C_k\sin k\omega_0 x$$

$$B_0=\frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}f(x)dx$$

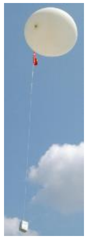
$$B_k=\frac{\omega_0}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}f(x)\cos(k\omega_0 x)dx$$

$$C_k=\frac{\omega_0}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}f(x)\sin(k\omega_0 x)dx$$

计算数值积分在当年是困难问题，但由于大规模计算机的普及，已经是一个解决的问题。

傅里叶级数导引

（2）计算量的问题



天气预报结果

天气预报

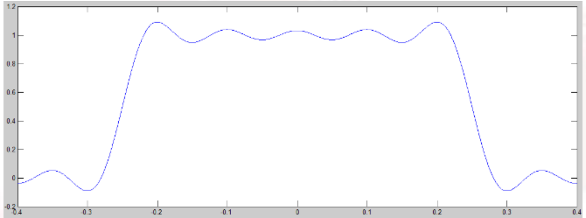
傅里叶级数导引

- 对傅里叶这套方法的不同意见

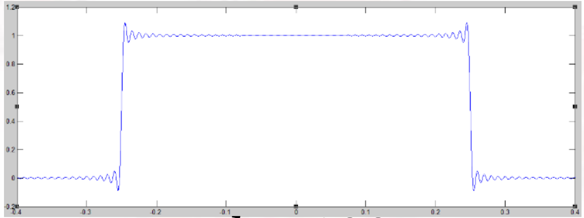
（3）由自然界产生的函数真的是由sin和cos叠加到一起的吗?

$$f(x)=B_0+\sum_{k=1}^{+\infty}B_k\cos k\omega_0x+\sum_{k=1}^{+\infty}C_k\sin k\omega_0x$$

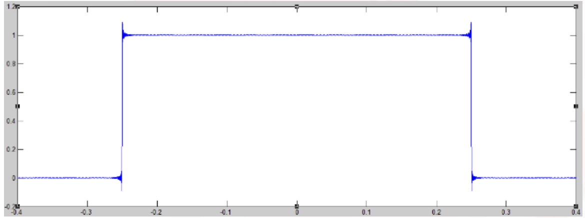
- 吉布斯现象



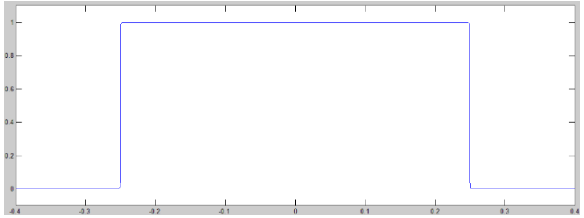
$k=10$



$k=100$



$k=1000$



$f(x)$

傅里叶级数导引

- 对傅里叶这套方法的不同意见

（4）缺乏美感

$$f(x)=B_0+\sum_{k=1}^{+\infty}B_k\cos k\omega_0 x+\sum_{k=1}^{+\infty}C_k\sin k\omega_0 x$$

以图像压缩和识别为例：

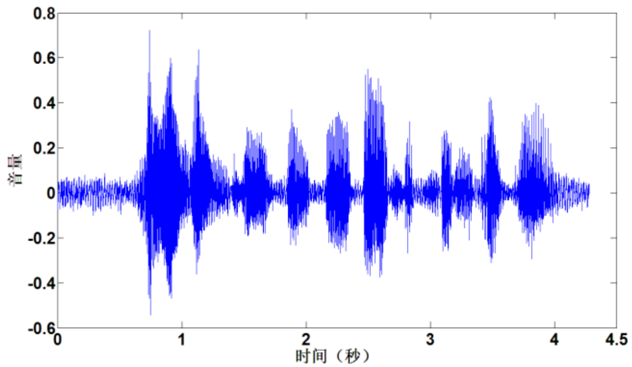
运用傅里叶发明的正交基函数的分解方法，得到一组数：

$$(3559,351,-256,\ldots)$$

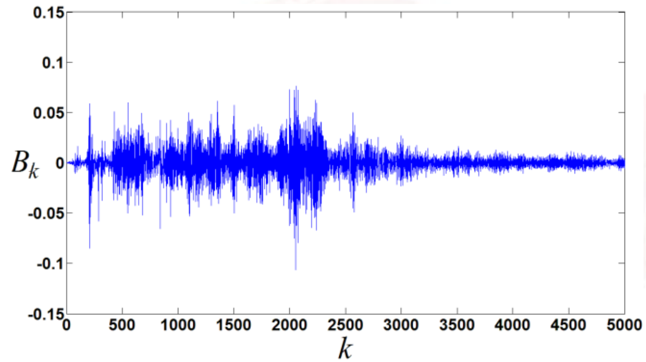
用这组数来表达图像的本质特征，并用于对图像的进一步处理。

傅里叶级数导引

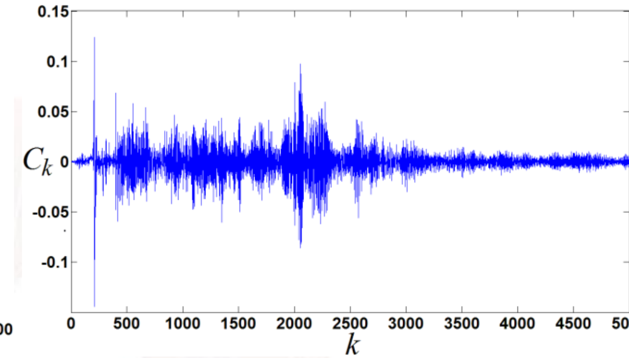
- 举例：声音信号频谱



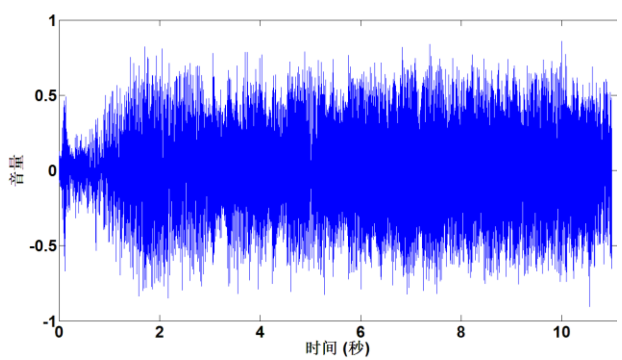
声音1



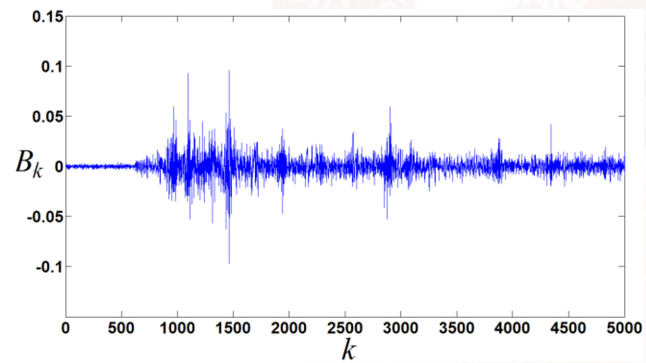
B_k



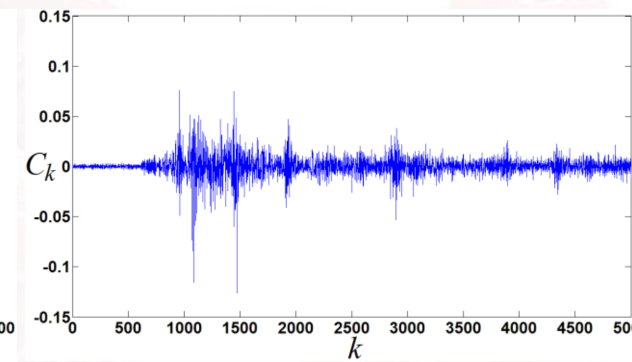
C_k



声音2



B_k



C_k

傅里叶级数导引

参考读物

(1) Transnational College of Lex (2012). Who is Fourier? A mathematical adventure.

(2) R. N. Bracewell (2000). The Fourier transform and its applications. McGraw-Hill Higher Education.

(3) M. A. Pinsky (2003). Introduction to Fourier analysis and wavelets. 机械工业出版社

上机作业

运用给出的MATLAB程序，打印出自己声音的频谱。

谢谢各位老师!

胡浩基