05-J2

二叉树

Huffman编码树：正确性

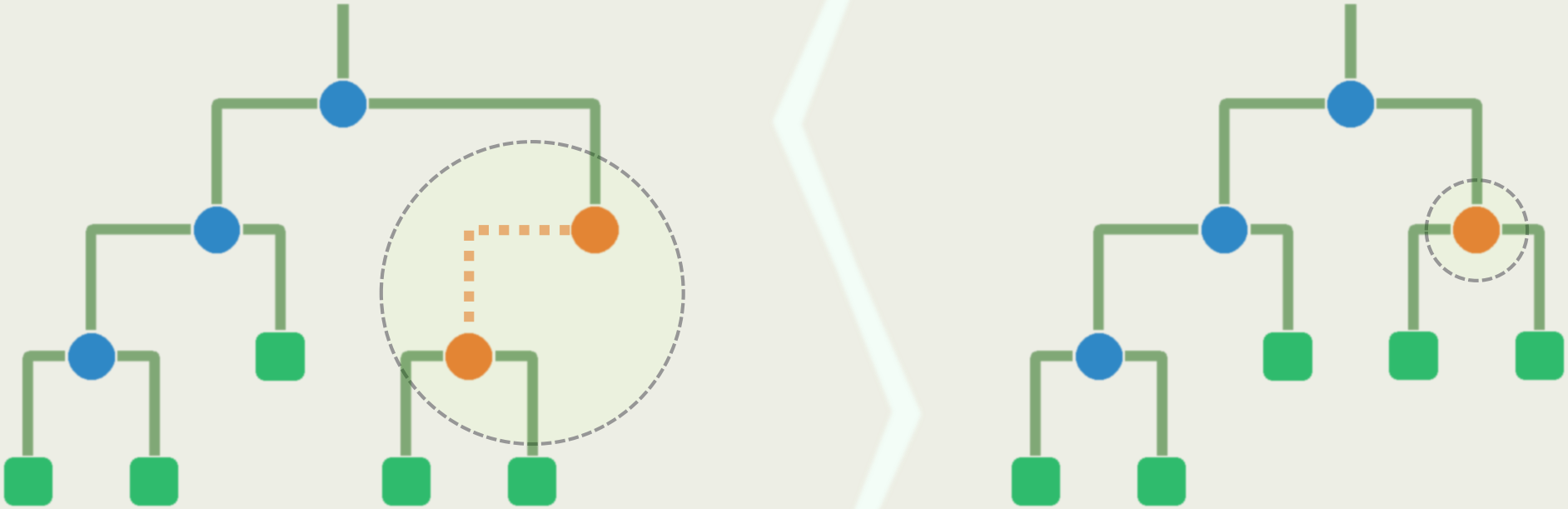
我生来就不像我所见过的任何一个人；我敢断言，我与世上的任何一个人都迥然不同；虽说我不比别人好，但至少我与他们完全两样。

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

双子性

- 最优编码树有何特征?
- 首先，每一内部节点都有两个孩子——节点度数均为偶数（0或2），即真二叉树
- 否则，将1度节点替换为其唯一的孩子，则新树的wald将更小



不唯一性

- 对任一内部节点而言

  左、右子树互换之后wald不变

- 上述算法中，兄弟子树的次序系随机选取

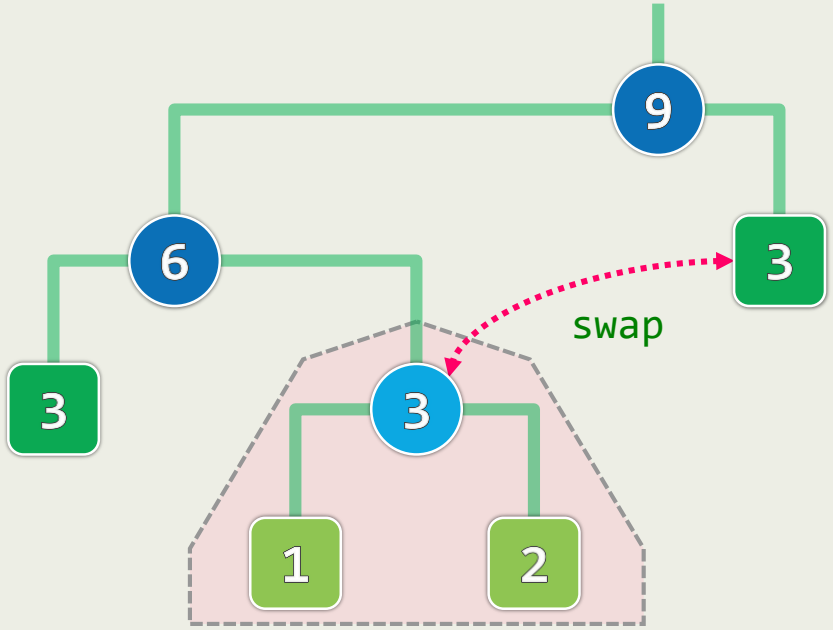
  故有可能...

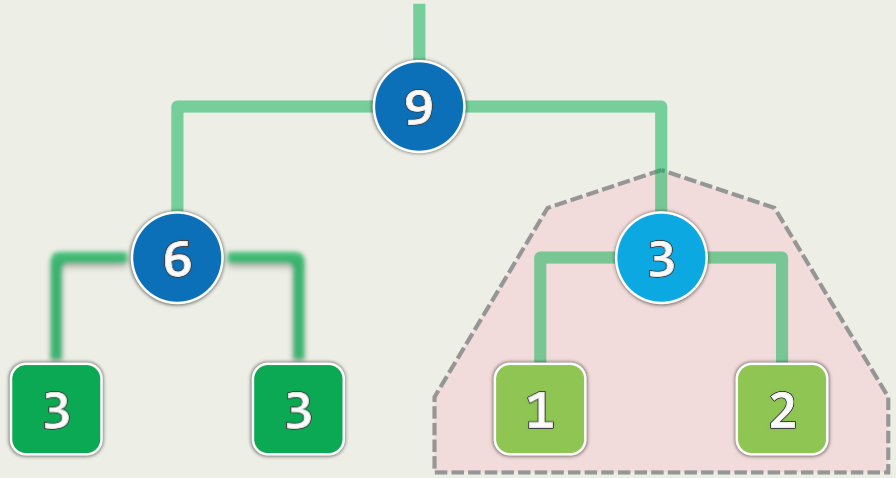
- 为消除这种歧义，可以（比如）

  明确要求左子树的频率更低

- 不过，倘若

  它们（甚至更多节点）的频率恰好相等...

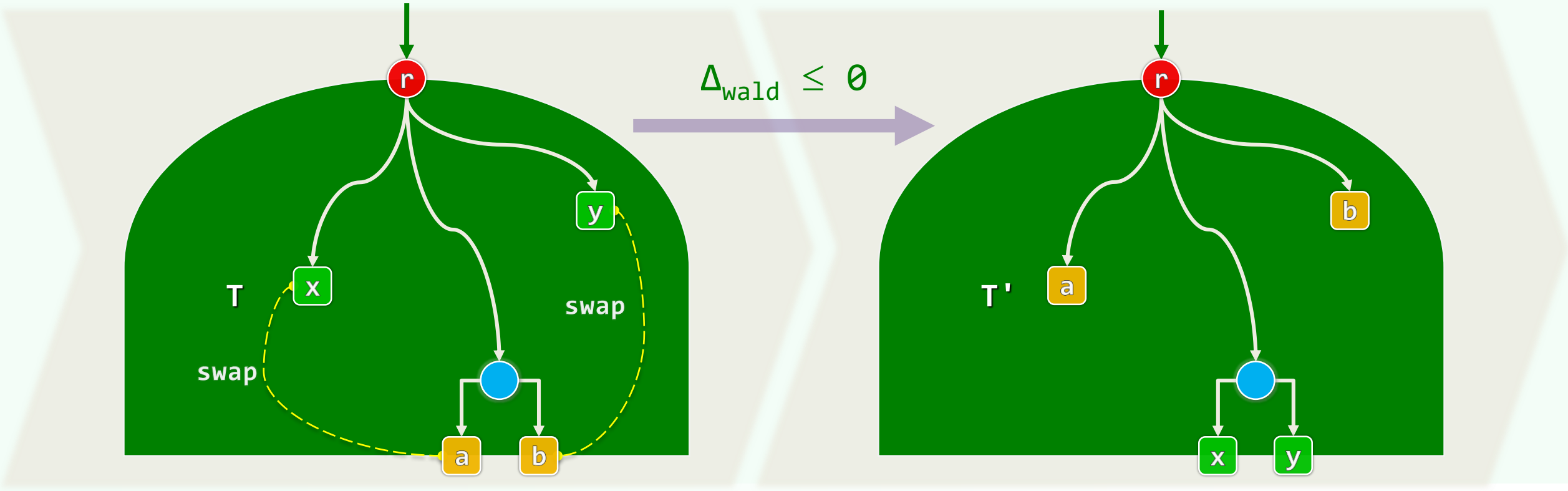




层次性

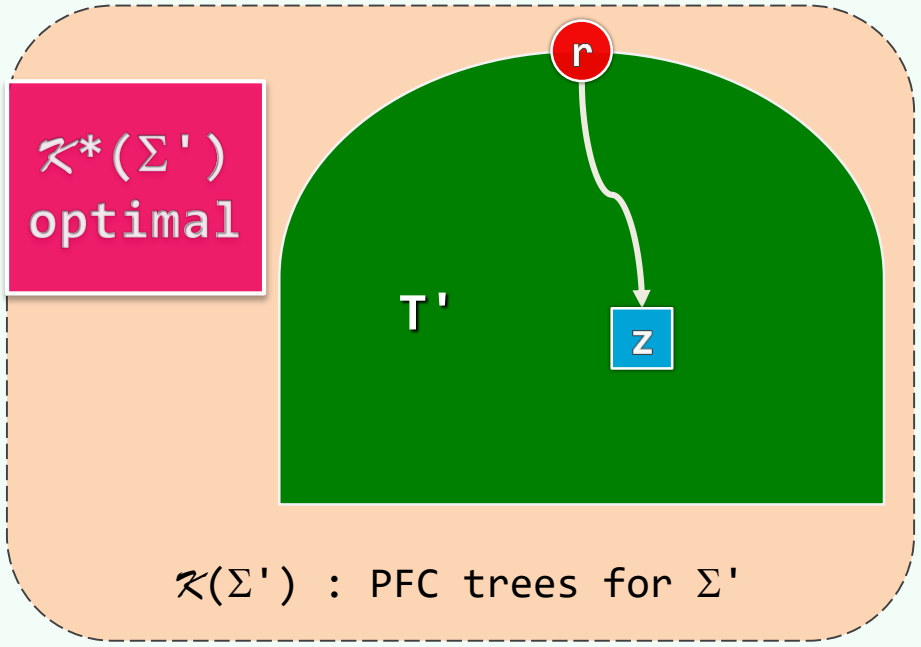
- 出现频率最低的字符x和y，必在某棵最优编码树中处于最底层，且互为兄弟
- 否则，任取一棵最优编码树，并在其最底层任取一对兄弟a和b

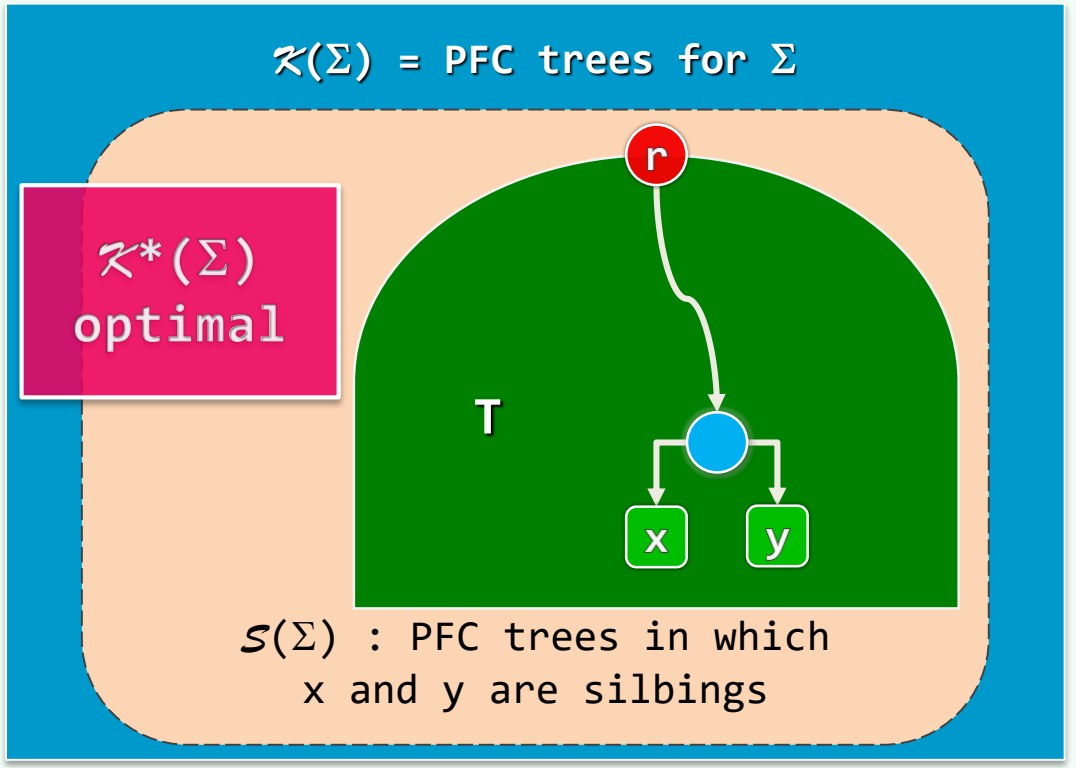
  于是，a和x、b和y交换之后，wald绝不会增加



数学归纳

- 对|Σ|做归纳可证：Huffman算法所生成的，必是一棵最优编码树！ |Σ| = 2时显然
- 设算法在|Σ|<n时均正确。现设|Σ|=n，取Σ中频率最低的x、y（不妨就设二者互为兄弟）
- 令：$\Sigma' = (\Sigma \backslash \{x, y\}) \cup \{z\}$，$w(z) = w(x) + w(y)$



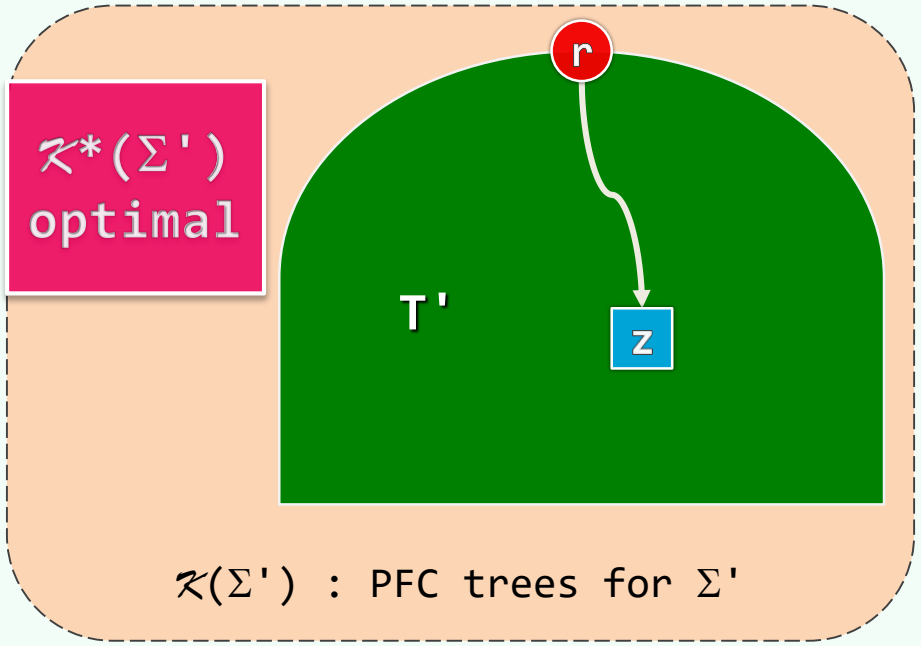


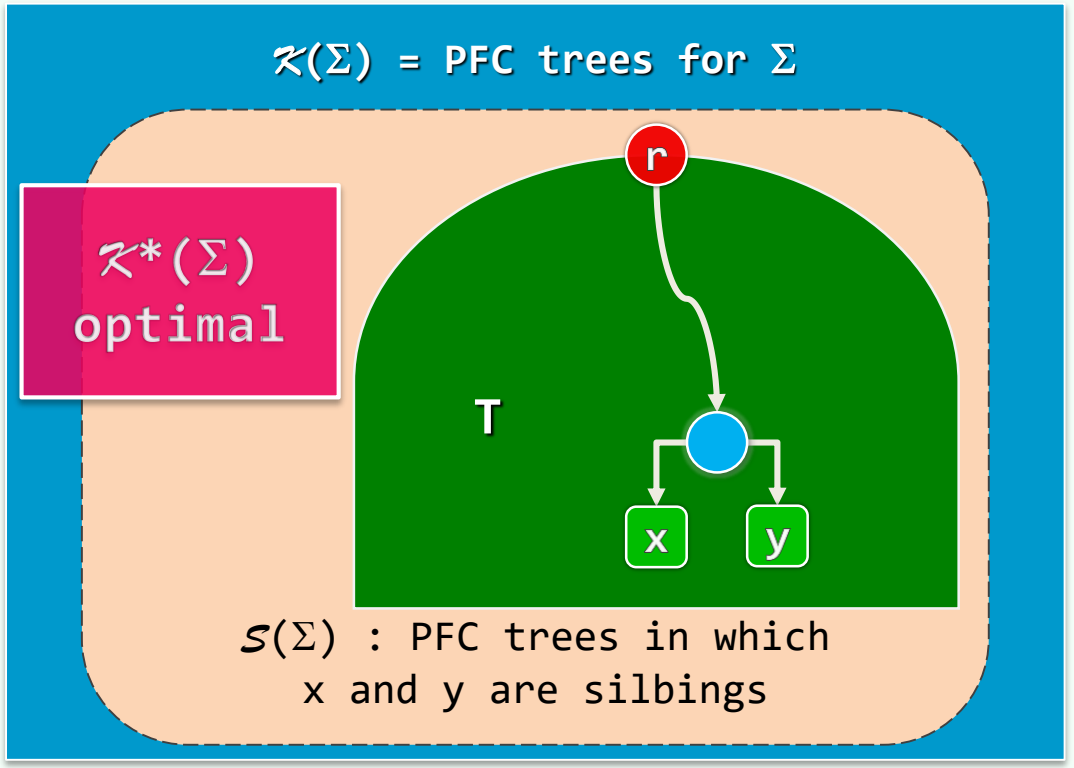
定差

❖ 对于Σ'的任一编码树T'，只要为z添加孩子x和y，即可得到Σ的一棵编码树T，且

$$wd(T) - wd(T') = w(x) + w(y) = w(z)$$

❖ 可见，如此对应的T和T'，wd之差与T的具体形态无关





从最优，到最优

- 因此，只要T'是Σ'的最优编码树，则T也必是Σ的最优编码树（之一）
- 实际上，Huffman算法的过程，与上述归纳过程完全一致

  ——每一步迭代都可视作，从某棵T转入对应的T'