14-B2

排序

选取：中位数

中也者，天下之大本也；和也者，天下之达道也

德性是两种恶——过度与不及——的中间。在感情与实践中，恶要么达不到正确，要么超过正确。德性则找到并且选取那个正确。所以虽然从其本质或概念来说德性是适度，从最高善的角度来说，它是一个极端

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

归并向量的中位数

- 任给有序向量 S_1 和 S_2，长度n_1和n_2

  如何快速找出 $S = S_1 \cup S_2$ 的中位数?

- 蛮力：　经归并得到有序向量 S

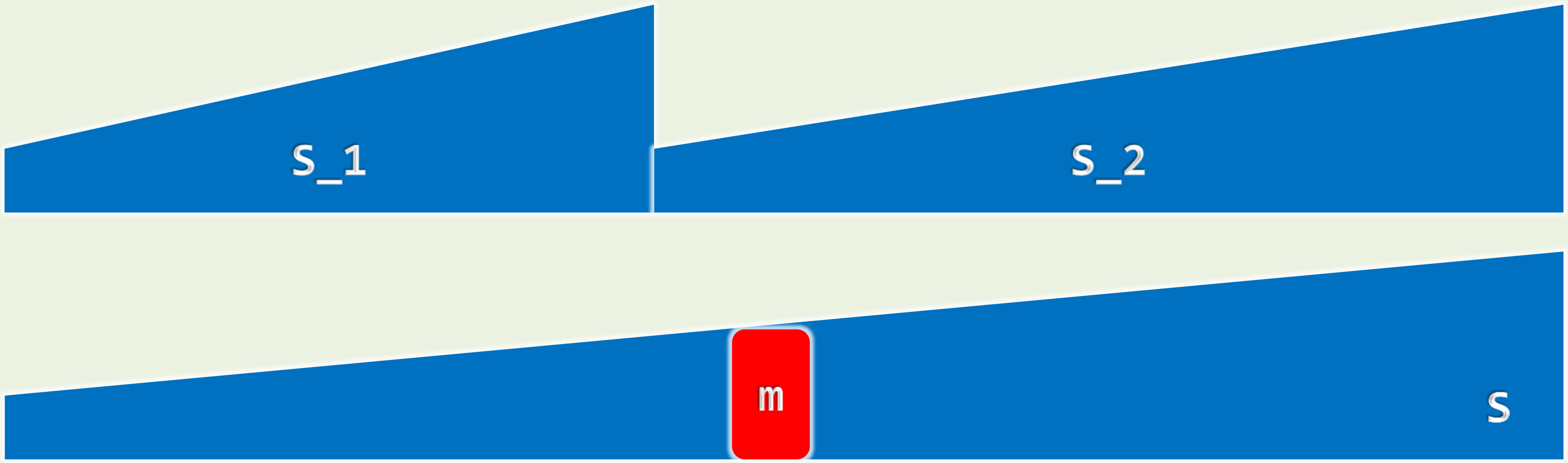
  取 $S[(n_1 + n_2)/2]$ 即是

- 如此，共需$\mathcal{O}(n_1 + n_2)$ 时间

  但毕竟未能充分利用 S_1 和S_2 的**有序性**

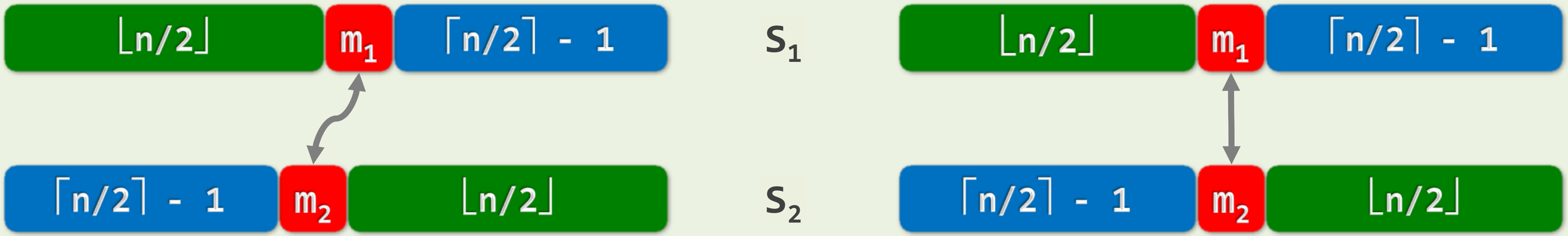
- 以下，先解决 $n_1 = n_2$ 的情况

  依然采用**减而治之**策略...



等长子向量：构思

❖ 考查： $m_1 = S_1[\lfloor n/2 \rfloor]$ 和 $m_2 = S_2[\lceil n/2 \rceil - 1] = S_2[\lfloor (n-1)/2 \rfloor]$



❖ 若 $m_1 = m_2$，则它们同为 S_1 、 S_2 和 S 的中位数

❖ 若 $m_1 < m_2$，则 n 无论偶奇，必有：

$$median(S_1 \cup S_2) = median(S_1.suffix(\lceil n/2 \rceil) \cup S_2.prefix(\lceil n/2 \rceil))$$

这意味着，如此减除（一半规模）之后，中位数不变

❖ $m_1 > m_2$ 时同理

等长子向量：实现

```
template <typename T> //尾递归，可改写为迭代形式
T median( Vector<T> & S1, Rank lo1, Vector<T> & S2, Rank lo2, Rank n ) {
   if ( n < 3 ) return trivialMedian( S1, lo1, n, S2, lo2, n ); //递归基
   Rank mi1 = lo1 + n/2, mi2 = lo2 + (n - 1)/2; //长度减半
   if ( S1[ mi1 ] < S2[ mi2 ] ) //取S1右半、S2左半
      return median( S1, mi1, S2, lo2, n + lo1 - mi1 );
   else if ( S1[ mi1 ] > S2[ mi2 ] ) //取S1左半、S2右半
      return median( S1, lo1, S2, mi2, n + lo2 - mi2 );
   else
      return S1[ mi1 ];
}
```

任意子向量：实现（1/2）

```
template <typename T>
T median ( Vector<T>& S1, Rank lo1, Rank n1, Vector<T>& S2, Rank lo2, Rank n2 ) {
   if ( n1 > n2 )
      return median( S2, lo2, n2, S1, lo1, n1 ); //确保n1 <= n2
   if ( n2 < 6 )
      return trivialMedian( S1, lo1, n1, S2, lo2, n2 ); //递归基
   if ( 2 * n1 < n2 )
      return median( S1, lo1, n1, S2, lo2 + (n2-n1-1)/2, n1+2-(n2-n1)%2 );
```

任意子向量：实现（2/2）

```
Rank mi1 = lo1 + n1/2, mi2a = lo2 + (n1 - 1)/2, mi2b = lo2 + n2 - 1 - n1/2;
if ( S1[ mi1 ] > S2[ mi2b ] ) //取S1左半、S2右半
   return median( S1, lo1, n1 / 2 + 1, S2, mi2a, n2 - (n1 - 1) / 2 );
else if ( S1[ mi1 ] < S2[ mi2a ] ) //取S1右半、S2左半
   return median( S1, mi1, (n1 + 1) / 2, S2, lo2, n2 - n1 / 2 );
else //S1保留，S2左右同时缩短
   return median( S1, lo1, n1, S2, mi2a, n2 - (n1 - 1) / 2 * 2 );
} //O( log(min(n1,n2)) )——可见，实际上等长版本才是难度最大的
```