

排序

快速排序：递归深度

14-A4

今夫盲者行于道，人谓之左则左，谓之右则右。遇君子则得其平易，遇小人则蹈于沟壑。

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

## 居中 + 偏侧

❖ 最坏情况 (  $\Omega(n)$  递归深度 ), 概率极低

平均情况 (  $\mathcal{O}(\log n)$  递归深度 ), 概率极高

$$(1 - \lambda) / 2$$

$$\text{width} = \lambda = \text{Pr.}$$

$$(1 - \lambda) / 2$$

❖ 实际上: 除非**过于**侧偏的pivot, 都会**有效**地缩短递归深度

❖ **准居中**: pivot落在宽度为  $\lambda \cdot n$  的居中区间

(  $\lambda$  也是这种情况出现的概率 )

❖ 每一递归路径上, **至多**出现  $\log_{\frac{2}{1+\lambda}} n$  个**准居中**的pivots ...



# 期望深度

- ❖ 每递归一层，都有  $\lambda (1 - \lambda)$  的概率**准居中**（**准偏侧**）
- ❖ 深入  $\frac{1}{\lambda} \cdot \log_{\frac{2}{1+\lambda}} n$  层后，即可**期望出现**  $\log_{\frac{2}{1+\lambda}} n$  次**准居中**，且有**极高的概率出现**

$$(1 - \lambda) / 2$$

$$\text{width} = \lambda = \text{Pr.}$$

$$(1 - \lambda) / 2$$

- ❖ **相反情况的概率**  $< (1 - \lambda)^{\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \cdot \log_{\frac{2}{1+\lambda}} n} = n^{\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \cdot \log_{\frac{2}{1+\lambda}} (1 - \lambda)}$

且随着  $\lambda$  增加而**下降**，比如  $\lambda > 1/3$  之后，即...

- ❖ 至少有  $1 - n^{2 \cdot \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)} = 1 - n^{-2}$  的概率，使得

递归深度不超过  $\frac{1}{\lambda} \cdot \log_{\frac{2}{1+\lambda}} n = 3 \cdot \log_{\frac{3}{2}} n \approx 5.129 \cdot \log n$

