12-E

优先级队列

多叉堆

他说到一件事，时常萦绕我的心头，就是每个人若能窥清其他人的心意，那么愿意下来的人会多于愿意高升的人

匏有苦葉，濟有深涉

深則厲，淺則揭

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

优先级搜索

❖ 回顾图的PFS以及统一框架：g->pfs()...

❖ 无论何种算法，差异仅在于所采用的优先级更新器prioUpdater()

- Prim算法： g->pfs(0, PrimPU());
- Dijkstra算法： g->pfs(0, DijkPU());

❖ 每一节点引入遍历树后，都需要

- **更新**树外顶点的优先级（数），并
- **选出**新的优先级最高者

❖ 若采用邻接表，两类操作的累计时间，分别为$\mathcal{O}(n+e)$和$\mathcal{O}(n^2)$

❖ 能否更快呢?

优先级队列

❖ 自然地，PFS中的各顶点可组织为**优先级队列**

❖ 为此需要使用PQ接口

heapify():	由n个顶点创建初始PQ	总计$\mathcal{O}$(n)
delMax():	取优先级最高（极短）跨边(u, w)	总计$\mathcal{O}$(n * logn)
increase():	更新所有关联顶点到U的距离，提高优先级	总计$\mathcal{O}$(e * logn)

❖ 总体运行时间 = $\mathcal{O}$((n+e)*logn)

- 对于**稀疏图**，处理效率很高
- 对于**稠密图**，反而不如常规实现的版本

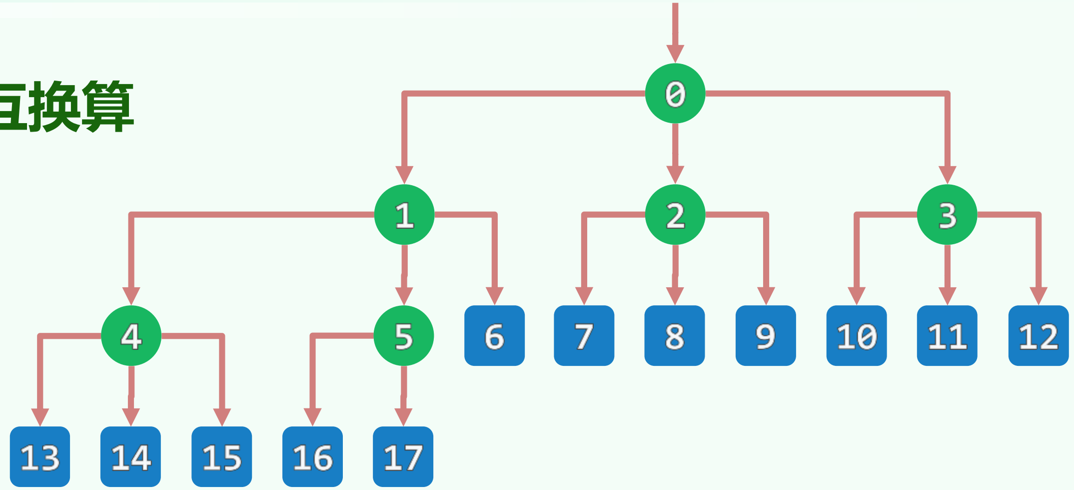
❖ 有无更好的办法?

多叉堆

❖ **仍可基于向量实现，且父、子节点的秩可简明地相互换算**

- $parent(k) \ = \ \lfloor (k-1)/d \rfloor$
- $child(k, i) \ = \ k \cdot d + i, \ 0 < i \leq d$

//d不是2的幂时，不能借助移位加速秩的换算



❖ `heapify()`: $\mathcal{O}(n)$

//不可能再快了

❖ `delMax()`: $\mathcal{O}(\log n)$

//实质就是`percolateDown()`，已是极限了——为什么？

❖ `increase()`: $\mathcal{O}(\log n)$

//实质就是`percolateUp()` —— 似乎仍有改进空间...

上山容易下山难

❖ 若将二叉堆改成多叉堆（d-heap）

则堆高降至

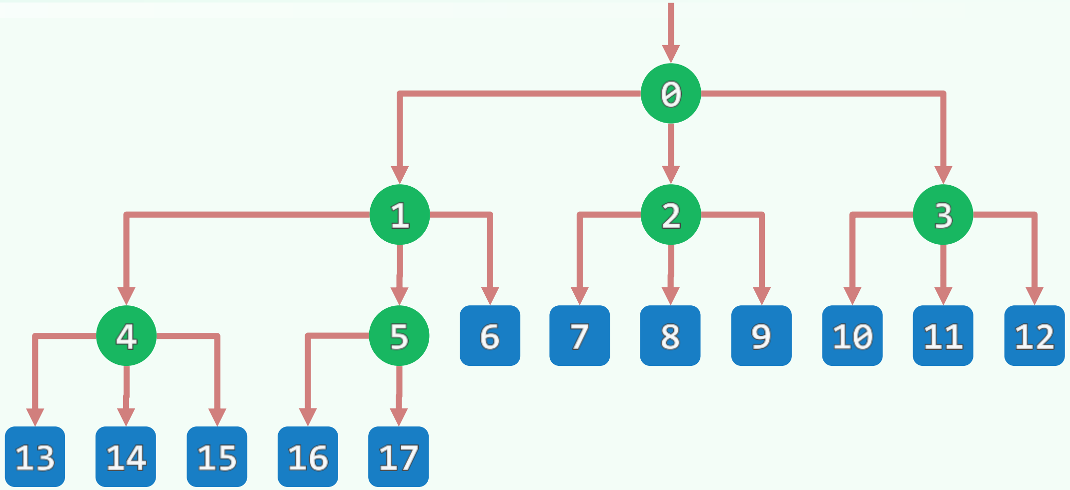
$$\mathcal{O}(\log_d n)$$

❖ 相应地，上滤成本降至

$$\log_d n$$

但（只要d>4）下滤成本却增至

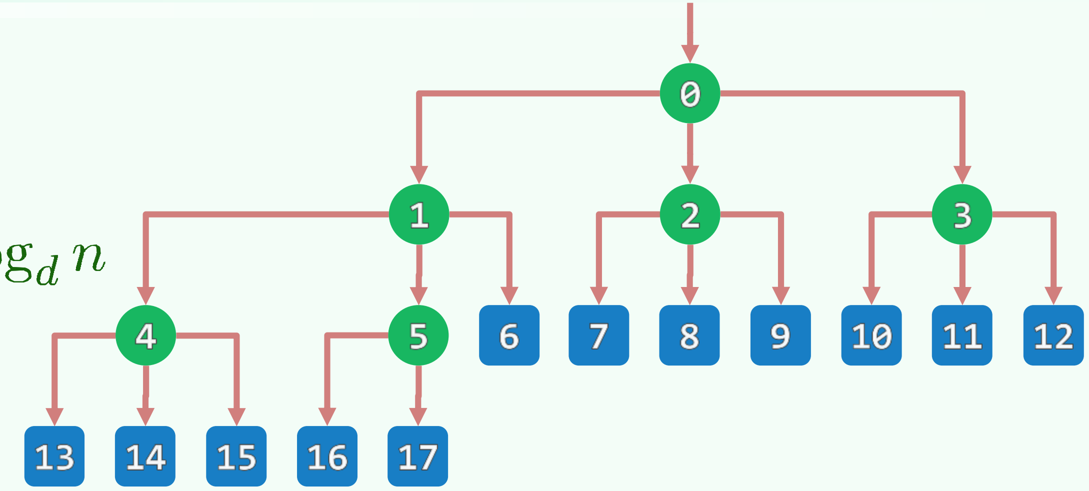
$$d \cdot \log_d n \;=\; \frac{d}{\ln d} \cdot \ln n$$



PFS

❖ 如此，PFS的运行时间将是：

$$n \cdot d \cdot \log_d n \;+\; e \cdot \log_d n \;=\; (n \cdot d \;+\; e) \cdot \log_d n$$



❖ 取 $d \;\approx\; e/n + 2$ 时

总体性能达到最优：$\mathcal{O}(e \cdot \log_{(e/n+2)} n)$

❖ 对于**稀疏**图保持高效： $e \cdot \log_{(e/n+2)} n \;\approx\; n \cdot \log_{(n/n+2)} n \;=\; \mathcal{O}(n \log n)$

对于**稠密**图改进极大： $e \cdot \log_{(e/n+2)} n \;\approx\; n^2 \cdot \log_{(n^2/n+2)} n \;\approx\; n^2 \;=\; \mathcal{O}(e)$

对于一般的图，会**自适应**地实现最优