ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΘΕΜΑΤΑ

Σετ 0 – Εισαγωγή

0.1 Να αναφέρετε τουλάχιστον τρεις τύπους καναλιών

<u>Απάντηση</u>

- Ενσύρματα
  - συνεστραμμένο ζεύγους χαλκού (twisted-pair)
  - Ομοαξονικό (coaxial cable)

- Κυματοδηγοί
  - καθοδηγούμενη διάδοση ηλεκτρομαγνητικού κύματος

- Οπτικές Ίνες
  - οπτικός κυματοδηγός
  - βελτίωση απόσβεσης από 1000 dB/Km σε 0.1 dB/Km
- Ασύρματα
  - VLF
  - Μικροκυματικά
    - UHF
    - SHF
    - millimeter waves
  - Υπέρυθρα, ορατού φωτός

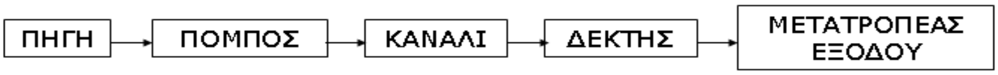
- Υποβρύχια ακουστικά κανάλια

- Κανάλια αποθήκευσης
  - μαγνητικά (μαγνητική ταινία, δίσκος)
  - οπτικά (CD)

0.2. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα βαθμίδων του γενικού μοντέλου ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος και να σχολιαστεί ο ρόλος των βαθμίδων

<u>Απάντηση</u>

Το διάγραμμα βαθμίδων του γενικού μοντέλου ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα:



- Η πηγή παράγει το προς μετάδοση σήμα
- Ο πομπός μετατρέπει το σήμα εισόδου σε μορφή κατάλληλη για τη μετάδοση από το κανάλι (αναλογικό σήμα)
- Το κανάλι εισάγει παραμόρφωση, θόρυβο και παρεμβολή
- Ο δέκτης αποδιαμορφώνει και επεξεργάζεται το ληφθέν σήμα
- Ο μετατροπέας εξόδου μετατρέπει την έξοδο του δέκτη στην αρχική μορφή της πληροφορίας

0.3 Να αναφέρετε τρεις τουλάχιστον τρόπους διάδοσης του κύματος στον ελεύθερο χώρο

<u>Απάντηση</u>

- **Κυματόδηγηση μεταξύ εδάφους – ιονόσφαιρας**
  -10KHz – 100KHz
  -πολύ χαμηλές ταχύτητες μετάδοσης πληροφορίας
  -απαιτούνται τεράστιες κεραίες

- **Εδαφικό κύμα**
  -Όσο μεγαλύτερη η αγωγιμότητα του εδάφους τόσο μεγαλύτερη απόσταση διανύει
  -0.3MHz – 3MHz

- **Κύμα χώρου**
  -Διάδοση με ανάκλαση στην ιονόσφαιρα (σε ύψος >1000Km)
  -3MHz – 30MHz

- **Τροποσφαιρική διάδοση**
  -σκέδαση στα σωματίδια της τροπόσφαιρας
  -30MHz – 400MHz

- **Διάδοση οπτικής επαφής**

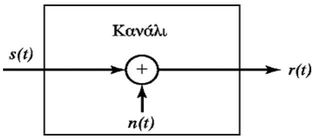
-Ο κύριος τρόπος διάδοσης στη μικροκυματική περιοχή
-Η κάλυψη περιορίζεται (πλην των εμποδίων) και από την καμπυλότητα της Γης

- **Διάδοση μέσω μετεωριτών**
  -Η διάδοση επιτυγχάνεται με ανάκλαση σε περιοχές που ιονίζονται (σε ύψος 80-120Km) λόγω διέλευσης μετεωριτών

0.4 Με ποιο μαθηματικό μοντέλο περιγράφεται ικανοποιητικά ένα ενσύρματο κανάλι

Απάντηση

Το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει ικανοποιητικά ένα ενσύρματο κανάλι είναι το κανάλι του προσθετικού θορύβου το οποίο έχει την ακόλουθη μορφή:



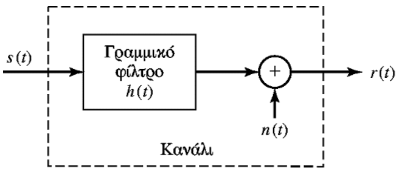
Είναι το απλούστερο και πιο γενικό μοντέλο καναλιού. Το εκπεμπόμενο σήμα διαβρώνεται από προσθετικό θόρυβο. Ο θόρυβος είναι μια τυχαία διαδικασία, ανεξάρτητη του σήματος και μοντελοποιείται ως Gaussian μηδενικής μέσης τιμής. Η Φυσική Εξήγηση του θορύβου είναι ότι πρόκειται για θερμικό θόρυβο που προέρχεται από ηλεκτρονικά στοιχεία και ενισχυτές του δέκτη και διάφορες παρεμβολές. Το σήμα εξόδου του καναλιού περιγράφεται από τον τύπο r(t)=s(t)+n(t) όπου n(t) ο θόρυβος. Όταν το κανάλι εισάγει εξασθένηση, το μοντέλο τροποποιείται ως r(t)=α•s(t)+n(t) όπου $a<1$ είναι η εξασθένηση του καναλιού. Εναλλακτικά (επειδή μας ενδιαφέρει το SNR) μπορεί να θεωρηθεί $a=1$ και να αυξηθεί η ισχύς του θορύβου έναντι του σήματος

0.5 Με ποιο μαθηματικό μοντέλο περιγράφεται ικανοποιητικά ένα ενσύρματο κανάλι που χρησιμοποιεί φίλτρα για να περιορίσει το εύρος ζώνης του σήματος στο εύρος ζώνης του καναλιού

Απάντηση

Σε πολλά κανάλια (π.χ. ενσύρματα τηλεφωνικά) χρησιμοποιούνται φίλτρα για να περιορίσουν το εύρος ζώνης του σήματος στο εύρος ζώνης του καναλιού. (στα πλαίσια αυτού της ζώνης διέλευσης εισάγεται παραμόρφωση πλάτους και φάσης). Έτσι, γενικά, αρκετά κανάλια μοντελοποιούνται ως γραμμικά φίλτρα με απόκριση *h(t)*. Στην έξοδο του φίλτρου εισάγεται και θόρυβος

Το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει ικανοποιητικά ένα τέτοιο κανάλι έχει την ακόλουθη μορφή:

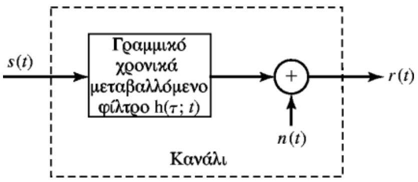


Η έξοδος του καναλιού περιγράφεται από το σήμα: $r(t) = h(t) * s(t) + n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h}(\tau)\mathrm{s}(t-\tau)\mathrm{d}\tau + \mathrm{n}(t)$

0.6 Με ποιο μαθηματικό μοντέλο περιγράφεται ικανοποιητικά ένα κανάλι που μεταβάλλεται χρονικά;

Απάντηση

Το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει ικανοποιητικά ένα κανάλι που μεταβάλλεται χρονικά έχει την ακόλουθη μορφή:



Πολλά φυσικά κανάλια μεταβάλλονται χρονικά. Η φυσική Εξήγηση είναι η πολύδρομη διάδοση μεταξύ πομπού και δέκτη ή η αλλαγή περιβάλλοντος. Κάθε χρονική στιγμή t το κανάλι χαρακτηρίζεται από μια διαφορετική κρουστική απόκριση h(τ). Το κανάλι περιγράφεται πλήρως από την h(t;τ).

Η έξοδος του καναλιού περιγράφεται από το σήμα: $\mathrm{r(t) = h(t;\tau) * s(t) + n(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h(t;\tau) \bullet s(t-\tau)d\tau + n(t)}$

Ο υπολογισμός της h(t;τ) γίνεται ως εξής: Σε κανάλια πολύδρομης μετάδοσης π.χ. ιονοσφαιρικό (f>30MHz), ραδιοκανάλια στην κινητή κυψελωτή τηλεφωνία, θεωρούμε ότι το σήμα ακολουθεί L διαδρομές (μονοπάτια). Κάθε μονοπάτι έχει διαφορετική εξασθένηση $\alpha_k(t)$ (που είναι χρονικά μεταβαλλόμενη) και χρονική καθυστέρηση τ_k η οποία συνήθως είναι χρονικά σταθερή ή αργά μεταβαλλόμενη.

Η Κρουστική απόκριση καναλιού (παραμετρική έκφραση) είναι: $h(t;\tau)=\sum_{k=1}^{L} a_k(t)\delta(\tau-\tau_\kappa)$

Το λαμβανόμενο σήμα είναι: $r(t)=\sum_{k=1}^{L}\alpha_k(t)s(t-\tau_\kappa)+n(t)$

0.7 Έστω πολυδρομικό κανάλι με 4 διαφορετικά μονοπάτια με αποσβέσεις {0.5, 0.3, 0.2, 0.1} και αντίστοιχες χρονικές καθυστερήσεις {0, 0.03, 0.01, 0.003}. Να γραφτεί η έκφραση για το λαμβανόμενο σήμα συναρτήσει του σήματος που αποστέλλει ο πομπός

Απάντηση

Έστω x(t) το σήμα που στέλνει ο πομπός και y(t) είναι το σήμα που λαμβάνει ο δέκτης. Τότε με βάση την περιγραφή του πολυδρομικού καναλιού έχουμε: y(t)=0.5·x(t)+0.3·x(t-0.03)+0.2·x(t-0.01)+0.1·x(t-0.003)

0.8 Έστω πολυδρομικό κανάλι με 5 διαφορετικά μονοπάτια με αποσβέσεις [0.8, 0.3, 0.2, 0.1, 0.15] και αντίστοιχες χρονικές καθυστερήσεις [0 0.04 0.01 0.005 0.006]. Να γραφεί η έκφραση για το λαμβανόμενο σήμα συναρτήσει του σήματος που αποστέλλει ο πομπός

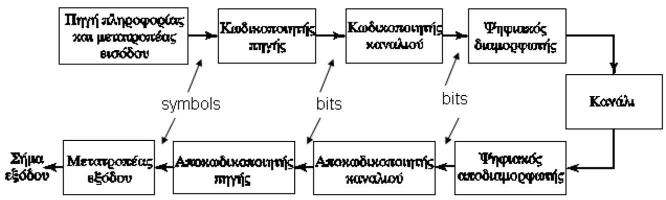
Απάντηση

Έστω x(t) είναι το σήμα που στέλνει ο πομπός και y(t) αυτό που λαμβάνει ο δέκτης. Τότε η έξοδος είναι y(t)=0.8·x(t)+0.3·x(t-0.04)+0.2·x(t-0.01)+0.1·x(t-0.005)+0.15·x(t-0.006)

0.9 α)Να σχεδιαστεί το διάγραμμα βαθμίδων του γενικού μοντέλου ενός ψηφιακού τηλεπικοινωνιακού συστήματος και να σχολιαστεί ο ρόλος των βαθμίδων β)σε ποιες βαθμίδες θα τοποθετούσατε τη διαμόρφωση Δέλτα και το φίλτρο ανυψωμένου συνημίτονου γ)Ποιος είναι ο λόγος που συχνά εφαρμόζουμε κάποιο τύπο ανομοιόμορφης κβάντισης;

Απάντηση

α) Το διάγραμμα βαθμίδων του γενικού μοντέλου ενός **ψηφιακού** τηλεπικοινωνιακού συστήματος φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα:



Πηγή:

- **Αναλογική** (μπορεί να μετατραπεί σε ψηφιακή με δειγματοληψία (Nyquist) και κβαντισμό) είτε
- **Ψηφιακή (περιλαμβάνει** σύμβολα από πεπερασμένο αλφάβητο τα οποία μπορούν να μετατραπούν σε δυαδική ή Μ-αδική μορφή)

Ο (Από)Κωδικοποιητής Πηγής:

- Σε ένα ψηφιακό σύστημα τα μηνύματα που παράγονται από την πηγή μετατρέπονται συνήθως σε μια ακολουθία δυαδικών ψηφίων. Ιδανικά θα θέλαμε να αναπαραστήσουμε την έξοδο της πηγής (το μήνυμα) με όσο το δυνατόν λιγότερα δυαδικά ψηφία γίνεται. Ο ρόλος του κωδικοποιητή πηγής είναι η αποδοτική μετατροπή της εξόδου μιας αναλογικής ή ψηφιακής πηγής σε ακολουθία δυαδικών ψηφίων με όσο το δυνατόν λιγότερα bits, δηλαδή με άλλα λόγια η αποδοτικότερη αναπαράσταση της εξόδου μιας πηγής που να φέρει λίγο έως καθόλου πλεονασμό (περισσότερα bits) Παραδείγματα κωδικοποιητών πηγής είναι:
  - οι κώδικες Morse και Huffman
  - οι αλγόριθμοι συμπίεσης στα πρότυπα jpeg, mpeg
  - PCM, ADPCM, DM
- Είσοδος: ακολουθία συμβόλων
- Έξοδος: ακολουθία bits
- Η κωδικοποίηση μπορεί να είναι
  - με απώλειες (lossy)
  - και χωρίς απώλειες (lossless)
- Αν η πηγή είναι αναλογική, τότε η κωδικοποίηση είναι πάντοτε με απώλειες
- Ο Αποκωδικοποιητής πηγής κάνει ακριβώς την αντίστροφη διαδικασία

Ο (Από)Κωδικοποιητής Καναλιού:

- Η ακολουθία των δυαδικών ψηφίων από τον κωδικοποιητή πηγής εισέρχεται στον κωδικοποιητή καναλιού. Ο ρόλος του κωδικοποιητή καναλιού είναι να εισάγει κάποιο πλεονασμό (περισσότερα bits) στην ακολουθία των δυαδικών ψηφίων ο οποίος να χρησιμοποιηθεί στο δέκτη για να αντιμετωπίσει τις επιδράσεις του θορύβου. Άρα ο προστιθέμενος πλεονασμός χρησιμεύει στο να αυξάνει την αξιοπιστία των λαμβανόμενων δεδομένων και να βελτιώνει την πιστότητα του λαμβανόμενου σήματος. Συνεπώς ο στόχος του κωδικοποιητή καναλιού είναι ο έλεγχος σφαλμάτων (ανίχνευση ή/και διόρθωση σφαλμάτων)

- Είσοδος: ακολουθία bits
- Έξοδος: ακολουθία bits
- Μπλοκ των k bits αντιστοιχίζονται σε μπλοκ των n bits (n>k)
  - n=k+r
  - εισάγεται πλεονασμός με έναν ελεγχόμενο τρόπο
  - Η ποσότητα πλεονασμού μετριέται με το λόγο n/k
  - Ο ρυθμός κωδικοποίησης είναι k/n
- Παραδείγματα κωδικών ανίχνευσης και διόρθωσης σφαλμάτων:
  - γραμμικοί μπλοκ κώδικες
  - κυκλικοί κώδικες (CRC)
  - συνελικτικοί κώδικες

Φίλτρα Πομπού και Δέκτη

- **Αναφερόμαστε στη μετάδοση βασικής ζώνης**
- Στόχος: το μεταδιδόμενο σύμβολο μορφοποιείται κατάλληλα προκειμένου να αντιμετωπιστούν οι ατέλειες του καναλιού βασικής ζώνης
- Στη διαμόρφωση PAM τα δυαδικά σύμβολα κωδικοποιούνται με ορθογώνιους παλμούς (ένας ορθογώνιος παλμός έχει άπειρο εύρος ζώνης)
- Η μορφοποίηση παλμού (TX+RX) γίνεται ακριβώς επειδή απαιτεί πεπερασμένο εύρος ζώνης, είναι υλοποιήσιμη και ικανοποιεί το κριτήριο του Nyquist για μηδενική διασυμβολική παρεμβολή στη μετάδοση

Διαμορφωτής

- **Αναφερόμαστε στη ζωνοπερατή μετάδοση**
- Η δυαδική ακολουθία της εξόδου του κωδικοποιητή καναλιού οδηγείται στον διαμορφωτή ο οποίος χρησιμεύει ως «διεπαφή» με το κανάλι επικοινωνίας. Επειδή σχεδόν όλα τα κανάλια επικοινωνίας που συναντάμε στην πράξη είναι ικανά να μεταδίδουν ηλεκτρικά σήματα (κυματομορφές) ο πρωταρχικός σκοπός του διαμορφωτή είναι να απεικονίζει τις δυαδικές ακολουθίες πληροφορίας σε κυματομορφές. Ο ψηφιακός διαμορφωτής μπορεί απλώς να απεικονίζει το δυαδικό ψηφίο 0 στην κυματομορφή $s_0(t)$ και το δυαδικό ψηφίο 1 στην κυματομορφή $s_1(t)$. Με τον τρόπο αυτό κάθε bit από τον κωδικοποιητή καναλιού μεταδίδεται ξεχωριστά. Αυτό καλείται δυαδική διαμόρφωση. Εναλλακτικά ο διαμορφωτής θα μπορούσε να εκπέμπει b κωδικοποιημένα bits πληροφορίας μαζί κάθε φορά χρησιμοποιώντας $M=2^b$ κυματομορφές $s_i(t)$ i=0, 1, ... M-1. Αυτόν τον τρόπο διαμόρφωσης τον ονομάζουμε M-αδική διαμόρφωση. **Πρέπει να τονίσουμε ότι τα μεταδιδόμενα σήματα (που αντιστοιχούν σε σύμβολα) αντιστοιχίζονται όπως ήδη αναφέραμε σε κυματομορφές σήματος, οι οποίες μπορούν να διέλθουν από το ζωνοπερατό κανάλι. Το σήμα που «φέρει» την πληροφορία βασικής ζώνης λέγεται φέρον και έχει ημιτονοειδή μορφή**. Η πληροφορία αποτυπώνεται στις παραμέτρους του ημιτόνου
    - Πλάτος (διαμόρφωση ASK)
    - Φάση (διαμόρφωση PSK)
    - Συχνότητα (διαμόρφωση FSK)

Κανάλι

- Το κανάλι παρέχει τη σύνδεση μεταξύ πομπού και δέκτη
- Προβλήματα
  - περιορισμένο εύρος ζώνης
  - εξασθένηση
    - » παραμόρφωση πλάτους
    - » παραμόρφωση φάσης
  - εισάγεται θόρυβος
    - » θερμικός AWGN
    - » κρουστικός θόρυβος
    - » παρεμβολή
  - πολύδρομη μετάδοση – διαλείψεις (ασύρματο κανάλι)
  - χρονική μεταβολή

Αποδιαμορφωτής

- **Αναφερόμαστε στη ζωνοπερατή μετάδοση**
- Στο άλλο άκρο της λήψης ενός ψηφιακού συστήματος επικοινωνίας ο διαμορφωτής επεξεργάζεται τις αλλοιωμένες από το κανάλι μεταβιβασμένες κυματομορφές και αντιστοιχεί κάθε κυματομορφή

σε ένα αριθμό ο οποίος αναπαριστάνει μια εκτίμηση του ληφθέντος συμβόλου δεδομένων (δυαδικού ή Μ-αδικού). Για παράδειγμα αν χρησιμοποιείται δυαδική διαμόρφωση ο αποδιαμορφωτής μπορεί να επεξεργαστεί την λαμβανόμενη κυματομορφή και να αποφανθεί ως προς το αν μεταδόθηκε το bit 0 ή το bit 1. Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι ο αποδιαμορφωτής έλαβε μια δυαδική απόφαση. Εναλλακτικά ο αποδιαμορφωτής μπορεί να λάβει μια τριαδική απόφαση δηλαδή να αποφασίσει ότι το ληφθέν bit είναι ένα 0 ή ένα 1 ή δεν παίρνει καμία απόφαση ανάλογα με την ποιότητα του λαμβανόμενου σήματος. Γενικά αν το σύστημα χρησιμοποιεί Μ-αδική διαμόρφωση όπου Μ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των δυνατών μεταδιδόμενων συμβόλων που το καθένα αντιστοιχεί σε μια ακολουθία $b=\log_2 M$ bits ο αποδιαμορφωτής παίρνει μια Q-αδική διαμόρφωση με Q>=M.

β)**Η διαμόρφωση Δέλτα τοποθετείται στον Κωδικοποιητή Πηγής ενώ το φίλτρο ανυψωμένου συνημιτόνου τοποθετείται στα φίλτρα πομπού και δέκτη**

γ)Ο βασικός λόγος χρησιμοποίησης κάποιου τύπου ανομοιόμορφης κβάντισης είναι ότι χαλαρώνοντας τον περιορισμό ότι οι περιοχές κβάντισης (εκτός της πρώτης και της τελευταίας) έχουν ίσα εύρη, τότε η ελαχιστοποίηση της παραμόρφωσης του κβαντιστή μπορεί να γίνει με λιγότερους περιορισμούς και ο κβαντιστής που προκύπτει λειτουργεί με καλύτερες επιδόσεις σε σύγκριση με ένα ομοιόμορφο κβαντιστή με τον ίδιο αριθμό σταθμών

0.10 Σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα επιδιώκουμε την όσο το ακριβέστερη αναδημιουργία στο δέκτη της πληροφορίας (σήματος) που έστειλε ο πομπός, Σε ότι αφορά αυτό το ζητούμενο ποιες είναι οι μετρικές απόδοσης ενός αναλογικού τηλεπικοινωνιακού συστήματος και ενός ψηφιακού τηλεπικοινωνιακού συστήματος

<u>Απάντηση</u>

Κατά τη μετάδοση μέσα από ένα αναλογικό τηλεπικοινωνιακό σύστημα μας ενδιαφέρει πόσο «κοντά» είναι το σήμα $x(t)$ που έστειλε ο πομπός με το σήμα $\hat{x}(t)$ που έλαβε ο δέκτης. Για τη μέτρηση της «απόστασης» των δύο σημάτων θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί π.χ. το απόλυτο σφάλμα $|x(t)-\hat{x}(t)|$ ή τετραγωνικό σφάλμα $|x(t)-\hat{x}(t)|^2$ ή κάποια άλλη κατάλληλη μετρική.

Η μετάδοση των σημάτων μέσα από ένα ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα πραγματοποιείται μεταδίδοντας bits. Επομένως, εδώ ως μετρική απόδοσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί η *πιθανότητα σφάλματος bit* (bit error rate, BER).

Μια άλλη χρήσιμη μετρική απόδοσης των ψηφιακών τηλεπικοινωνιακών συστημάτων είναι ο *ρυθμός μετάδοσης bit* (μετριέται σε bps, bits per second). Αυτή η μετρική, όμως, αφορά την ταχύτητα μετάδοσης και όχι την ποιότητα αναδημιουργίας του σήματος στην δέκτη. Επομένως, δεν μας ενδιαφέρει για το συγκεκριμένο ερώτημα.

0.11 Γιατί σύμφωνα με όλα τα μοντέλα ο θόρυβος εισάγεται στο δέκτη και όχι πριν το κανάλι;

<u>Απάντηση</u>

Ο θόρυβος είναι μια τυχαία διαδικασία, ανεξάρτητη του σήματος, μοντελοποιείται ως Gaussian μηδενικής μέσης τιμής και είναι θερμικός θόρυβος που προκαλείται από ηλεκτρονικά στοιχεία και ενισχυτές του δέκτη, γιαυτό και εισάγεται στο δέκτη.

0.12 Από ποιό γενικό τύπο περιγράφεται ένα κανάλι προσθετικού θορύβου; Πως τροποποιείται ο τύπος αυτός όταν το κανάλι εισάγει εξασθένηση; Τι αλλάζει όταν εξαλείψουμε την εξασθένηση;

<u>Απάντηση</u>

Ο γενικός τύπος που περιγράφει ένα κανάλι προσθετικού θορύβου είναι: $r(t)=s(t)+n(t)$ όπου $s(t)$ είναι η καθαρή πληροφορία που μεταδίδεται και $n(t)$ είναι ο θόρυβος. Όταν το κανάλι εισάγει εξασθένηση, το μοντέλο τροποποιείται ως $r(t)=as(t)+n(t)$. Εναλλακτικά (επειδή μας ενδιαφέρει το SNR) μπορεί να θεωρηθεί α=1 (ώστε να εξαλείψουμε την εξασθένηση) και να αυξηθεί η ισχύς του θορύβου έναντι του σήματος.

0.13 Για ποιό λόγο χρησιμοποιούνται φίλτρα σε κανάλια μετάδοσης; Ποιο το μειονέκτημα τους;

<u>Απάντηση</u>

Σε πολλά κανάλια (π.χ. ενσύρματα τηλεφωνικά) χρησιμοποιούνται φίλτρα για να περιορίσουν το εύρος ζώνης του σήματος στο εύρος ζώνης του καναλιού (στα πλαίσια αυτού της ζώνης διέλευσης εισάγεται παραμόρφωση πλάτους και φάσης). Έτσι, γενικά, αρκετά κανάλια μοντελοποιούνται ως γραμμικά φίλτρα με απόκριση h(t). Στην έξοδο του φίλτρου εισάγεται και θόρυβος.

Σετ 1 – Κωδικοποίηση Πηγής (Εντροπία Πηγής, Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής

1.1 Πως ορίζεται η εντροπία μιας δυαδικής DMS; Πότε γίνεται μέγιστη και πότε ελάχιστη;

Απάντηση

Αν έχω δυαδική DMS Φ={0,1}, με πιθανότητες εμφάνισης {p,1-p}, τότε ορίζεται η συνάρτηση δυαδικής εντροπίας ως $H_b(p)=-p\cdot\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)$. Ελαχιστοποιείται όταν p=0 ή 1 οπότε H(0)=H(1)=0. Μεγιστοποιείται όταν τα σύμβολα είναι ισοπίθανα δηλαδή H(0.5)=1

1.2 Πως ορίζεται η εντροπία πηγής Ν-οστής τάξης επέκταση πηγής; Ποιο το πλεονέκτημα της;

Απάντηση

Για Ν-οστής τάξης επέκταση πηγής χωρίς μνήμη ισχύει ότι: $H(X^n) = n \bullet H(X)$ και προκύπτει ότι:

$$H(X) \le \bar{L} < H(X) + \frac{1}{n}$$

Συμπέρασμα: Η n-οστής τάξης επέκταση μιας πηγής αποφέρει κώδικες που είναι ολοένα και πιο κοντά στο όριο συμπίεσης (εντροπία) της πηγής δηλαδή: $\lim_{n->\infty} \bar{L} = H(X)$

Ερώτηση: Γιατί δε χρησιμοποιώ ένα πολύ μεγάλο *n*, ώστε να πετύχω συμπίεση κοντά στο όριο της εντροπίας; Διότι όσο μεγαλύτερο είναι το n τόσο αυξάνεται η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου αποκωδικοποίησης.

1.3 Πότε μεγιστοποιείται η εντροπία μιας πηγής; Να δώσετε είτε διαισθητική είτε μαθηματική εξήγηση

Απάντηση

Η εντροπία μιας Ν-αδικής DMS μεγιστοποιείται όταν τα σύμβολά της ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή, δηλαδή $p_i=1/N$ για i=1,..., N. Η εντροπία φράσσεται ως: $0 \le H(\Phi) \le \log_2 K$ όπου *K* το πλήθος του αλφαβήτου και το άνω όριο επιτυγχάνεται για ομοιόμορφη πηγή.

Η διαισθητική εξήγηση είναι ότι αφού η εντροπία μιας πηγής εκφράζει τη μέση αβεβαιότητα που έχουμε για μια πηγή (είναι ο μέσος όρος της πληροφορίας των συμβόλων) όσο μεγαλύτερη εντροπία έχει μια πηγή, τόσο περισσότερη πληροφορία φέρει. Άρα η μεγιστοποίηση της επιτυγχάνεται όταν μεγιστοποιείται η αβεβαιότητα για τα σύμβολα που θα παράγει. Επίσης όπως η **ομοιόμορφη κατανομή μεγιστοποιεί την εντροπία για τις πηγές διακριτού αλφαβήτου έτσι και η Gaussian κατανομή μεγιστοποιεί τη διαφορική εντροπία για τις πηγές συνεχούς αλφαβήτου.**

1.4 Να διατυπώσετε το 1^o θεώρημα Shannon. Ποια η φυσική του σημασία

Απάντηση

Το 1ο Θεώρημα Shannon ή θεώρημα κωδικοποίησης πηγής διατυπώνεται ως εξής: Έστω πηγή με εντροπία (ή ρυθμό εντροπίας) H που κωδικοποιείται (συμπιέζεται) με ρυθμό R (bits/έξοδο πηγής). Αν R>H η πηγή μπορεί να κωδικοποιηθεί με οσοδήποτε μικρή πιθανότητα σφάλματος. Αν R<H όσο πολύπλοκος κι αν είναι ο κωδικοποιητής πηγής, η πιθανότητα σφάλματος θα είναι μακριά από το 0 (όπου R μπορούμε να θεωρήσουμε το μέσο μήκος κώδικα)

Η φυσική του σημασία είναι ότι δείχνει το πόσο μπορούμε να συμπιέσουμε μια πηγή χωρίς να εισάγουμε σφάλματα.

1.5 Πόσες είναι οι τυπικές ακολουθίες που παράγει μια πηγή; Πόσα bits απαιτούνται για την κωδικοποίηση α)όλων των ακολουθιών που παράγει μια πηγή β)μόνο των τυπικών ακολουθιών. Ποια η διαφορά των τυπικών από τις μη τυπικές ακολουθίες;

Απάντηση

Κάθε μία από αυτές εμφανίζεται με πιθανότητα:

$$p_{typical} \approx \prod_{i=1}^{N} p_i^{np_i} = \prod_{i=1}^{N} 2^{np_i \log_2 p_i} = 2^{n\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i} = 2^{-nH(X)}$$

Κάθε μη τυπική ακολουθία έχει σχεδόν μηδενική πιθανότητα εμφάνισης. Επομένως, όλες οι δυνατές ακολουθίες εξόδου είναι τυπικές και εμφανίζονται ισοπίθανα Αν είναι Κ, θα ισχύει $p_{typical}=1/K$

Άρα, οι τυπικές ακολουθίες είναι σε πλήθος $K = 2^{nH(X)}$

Για την κωδικοποίηση όλων των δυνατών ακολουθιών όταν το αλφάβητο αποτελείται από Ν σύμβολα και το κάθε μπλοκ έχει n σύμβολα υπάρχουν N^n δυνατές ακολουθίες για τις οποίες απαιτούνται $n\log_2 N$ bits/μπλοκ ή $\log_2 N$ bits/έξοδο. Αν το n είναι πολύ μεγάλο, μπορώ να αγνοήσω τις μη τυπικές διαδικασίες και να συμπιέσω (κωδικοποιήσω) μόνο τις τυπικές. Για την κωδικοποίηση μόνο των τυπικών ακολουθιών απαιτούνται $\log_2 K=nH(X)$ bits/μπλοκ ή H(X) bits/έξοδο

Αν έχουμε μια DMS με αλφάβητο $Φ=\{α_1,...,α_N\}$ και παρατηρήσουμε ταυτόχρονα n εξόδους της πηγής (ένα μπλοκ) τότε αν το n τείνει στο άπειρο, τότε παρατηρώντας το σύνολο των εξόδων, κάθε σύμβολο εμφανίζεται περίπου τις εξής φορές. Αν επαναλάβουμε το πείραμα, τότε τα σύμβολα προκύπτουν περίπου ίδιες φορές εμφάνισης και θα είναι ανακατεμένα. Όλες αυτές οι ακολουθίες συμβόλων ονομάζονται τυπικές ακολουθίες και κάθε μία εμφανίζεται με την ίδια πιθανότητα εμφάνισης (ασυμπτωτικά για μεγάλο *n*)

1.6 Ποια είδη πηγής υπάρχουν;

Απάντηση

- **Διάκριση ως προς το χρόνο:**
  - συνεχούς χρόνου (π.χ. αναλογικό ηχητικό σήμα)
  - διακριτού χρόνου (δειγματοληπτημένο σήμα, bits)
- **Διάκριση ως προς τις δυνατές τιμές (αλφάβητο):**
  - συνεχείς τιμές (π.χ. αναλογικό σήμα)
  - διακριτές τιμές (π.χ. ASCII)

1.7 Πότε μεγιστοποιείται η εντροπία μιας διακριτής πηγής χωρίς μνήμη (DMS). Ποιο το άνω όριο της εντροπίας και πότε επιτυγχάνεται;

Απάντηση

Η εντροπία μιας (N-αδικής) DMS μεγιστοποιείται όταν τα σύμβολά της ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή, δηλαδή $p_i=1/N$ για $i=1,...,N$. Η εντροπία φράσσεται ως: $\mathbf{0 \leq H(Φ) \leq \log_2 K}$ όπου K το πλήθος του αλφαβήτου και το άνω όριο επιτυγχάνεται για ομοιόμορφη πηγή.

1.8 Ποια κατανομή μεγιστοποιεί την εντροπία για τις πηγές διακριτού αλφαβήτου και ποια την εντροπία για τις πηγές συνεχούς αλφαβήτου;

Απάντηση

Η **ομοιόμορφη** κατανομή μεγιστοποιεί την εντροπία για τις πηγές **διακριτού** αλφαβήτου και η **Gaussian** κατανομή μεγιστοποιεί τη διαφορική εντροπία για τις πηγές **συνεχούς** αλφαβήτου

1.9 Ποια πηγή δεν μπορεί να συμπιεστεί;

Απάντηση

Η Ομοιόμορφη Πηγή με εντροπία $H(X)=\log_2 N$ δεν μπορεί να συμπιεστεί διότι κάθε ακολουθία εξόδου είναι δυνατή (τυπική) και ισοπίθανη

1.10 Για ποιο λόγο ποσοτικοποιείται η πληροφορία;

Απάντηση

Η ποσότητα της πληροφορίας που παρέχει μια έξοδος a_j με πιθανότητα p_j πρέπει να ικανοποιεί τις επόμενες 4 συνθήκες:

i) Το περιεχόμενο της πληροφορίας της εξόδου a_j εξαρτάται μόνο από την πιθανότητα της a_j και όχι από την τιμή της a_j. Αυτή η συνάρτηση συμβολίζεται με $I(p_j)$ και ονομάζεται **ιδία-πληροφορία**

ii) Η ιδία πληροφορία είναι μια συνεχής συνάρτηση της p_j δηλαδή η I(.) είναι συνεχής συνάρτηση

iii) Η ιδία πληροφορία είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του ορίσματος της

iv) Αν $p_j=p^{j1}p^{j2}$ τότε $I(p_j)=I(p^{j1})+I(p^{j2})$

Μπορεί να αποδειχτεί ότι η μόνη συνάρτηση που ικανοποιεί όλες τις παραπάνω ιδιότητες είναι η λογαριθμική συνάρτηση δηλαδή I(x)=-log(x). Η βάση του λογαρίθμου εκφράζει τη μονάδα μέτρησης της πληροφορίας. Αν η βάση πληροφορίας είναι το 2 τότε η πληροφορία εκφράζεται σε bits ενώ αν χρησιμοποιηθεί ο φυσικός λογάριθμος η μονάδα είναι τα nats

1.11 Να αναφέρετε μια τουλάχιστο μέθοδο κωδικοποίησης διακριτής πηγής και μια τουλάχιστο μέθοδο κωδικοποίησης αναλογικής πηγής

Απάντηση

Μέθοδοι κωδικοποίησης αναλογικής πηγής είναι η δειγματοληψία (Nyquist) και ο κβαντισμός. Μια μέθοδος κωδικοποίησης ψηφιακής πηγής είναι ο κώδικας Huffman.

1.12 Ποια προβλήματα εισάγει μια διακριτή πηγή και μια αναλογική πηγή

Απάντηση

Η διακριτή πηγή μπορεί να έχει πολύ μεγάλη εντροπία (πολλά bits/symbol) αλλά οι πόροι αποθήκευσης και/ή μετάδοσης να είναι περιορισμένοι. Στην αναλογική πηγή χάνεται πληροφορία κατά την κβάντιση, άρα απαιτείται άπειρο πλήθος bits για ιδανική αναπαράσταση

1.13 Ποια η φυσική σημασία του θεωρήματος Κωδικοποίησης Πηγής;

Απάντηση

Το 1ο Θεώρημα Shannon ή **θεώρημα κωδικοποίησης πηγής** διατυπώνεται ως εξής:

Έστω πηγή με εντροπία (ή ρυθμό εντροπίας) H που κωδικοποιείται (συμπιέζεται) με ρυθμό R (bits/έξοδο πηγής). Αν R>H η πηγή μπορεί να κωδικοποιηθεί με οσοδήποτε μικρή πιθανότητα σφάλματος. Αν R<H

όσο πολύπλοκος κι αν είναι ο κωδικοποιητής πηγής, η πιθανότητα σφάλματος θα είναι μακριά από το 0 (όπου R μπορούμε να θεωρήσουμε το μέσο μήκος κώδικα)
Η φυσική του σημασία είναι ότι δείχνει το πόσο μπορούμε να συμπιέσουμε μια πηγή χωρίς να εισάγουμε σφάλματα.

1.14. Πόσο πολύ μπορούν να συμπιεστούν τα δεδομένα μιας διακριτής πηγής αν απαιτείται αποσυμπίεση χωρίς απώλειες;
<u>Απάντηση</u>
Το 1^{ο} Θεώρημα του Shannon δείχνει πόσο μπορούμε να συμπιέσουμε μια πηγή χωρίς να εισάγουμε σφάλματα. Συγκεκριμένα αν έχουμε μια πηγή με εντροπία H που κωδικοποιείται (συμπιέζεται) με ρυθμό R (bits/έξοδο πηγής) τότε θα πρέπει R>H ώστε η πηγή να μπορεί να κωδικοποιηθεί με οσοδήποτε μικρή πιθανότητα σφάλματος. Αντίθετα αν R<H όσο πολύπλοκος κι αν είναι ο κωδικοποιητής πηγής, η πιθανότητα σφάλματος θα είναι μακριά από το 0.

1.15 Να δειχθεί ότι αν γίνει n-οστής τάξης επέκταση μιας πηγής τότε μπορούμε να έχουμε κώδικες που θα είναι ολοένα και πιο κοντά στο θεωρητικό όριο συμπίεσης της πηγής (ποιό;) Ποιο ή ποια μειονεκτήματα θα είχε ένας τέτοιος κώδικας;
<u>Απάντηση</u>
Έστω μια Διακριτή Πηγή χωρίς Μνήμη. Το θεωρητικό όριο συμπίεσης της πηγής είναι η εντροπία της, $H(X)$.

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι για την κωδικοποίηση της πηγής μπορεί να κατασκευαστεί προθεματικός κώδικας με μέσο μήκος

$$H(X) \le \overline{L} < H(X)+1 \qquad (1)$$

Αν κάνουμε n-οστής τάξης επέκταση της πηγής, τότε η εντροπία της θα είναι

$$H(X^n) = nH(X) \qquad (2)$$

Το μέσο μήκος του προθεματικού κώδικα θα είναι

$$H(X^n) \le \overline{L}_n < H(X^n)+1 \qquad (3)$$

Το $\overline{L}$ εκφράζει το μέσο πλήθος των bits που χρησιμοποιούνται για την κωδικοποίηση ενός συμβόλου, ενώ το $\overline{L}_n$ εκφράζει το μέσο πλήθος των bits για την κωδικοποίηση ενός μπλοκ των n συμβόλων. Άρα προκύπτει η σχέση

$$\overline{L}_n = n\overline{L} \qquad (4)$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (2) και (4) στη σχέση (3) και προκύπτει

$$nH(X) \le n\overline{L} < nH(X)+1$$
$$\Rightarrow \quad H(X) \le \overline{L} < H(X)+\frac{1}{n} \qquad (5)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1) και (5) βλέπουμε ότι κάνοντας επέκταση της πηγής μικραίνει το άνω φράγμα για το μέσο μήκος του κώδικα. Όσο μεγαλύτερο είναι το n, τόσο μικρότερο είναι και το άνω φράγμα. Άρα τόσο πιο πολύ το μέσο μήκος πλησιάζει την εντροπία της πηγής (δηλ. το θεωρητικό όριο συμπίεσης της πηγής).

Όμως, η χρησιμοποίηση μεγάλου n έχει και κάποια μειονεκτήματα. Πιο συγκεκριμένα, όσο μεγαλύτερο είναι το n, τόσο

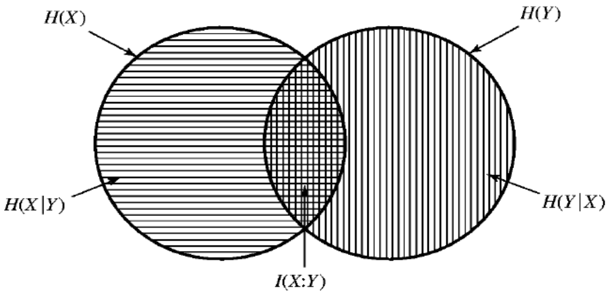
- μεγαλύτερη είναι και η καθυστέρηση της κωδικοποίησης. Αφού πριν ξεκινήσει η κωδικοποίηση θα πρέπει να περιμένουμε μέχρι να ληφθούν και τα n σύμβολα του μλοκ.
- μεγαλύτερη είναι η απαίτηση σε αποθηκευτικό χώρο. Αφού θα πρέπει να αποθηκεύσουμε τα n σύμβολα του μπλοκ.
- μεγαλύτερη είναι η πολυπλοκότητα του κωδικοποιητή.

1.16 Να δείξετε ότι αν 2 πηγές X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τότε H(X, Y)=H(X)+H(Y)

<u>Απάντηση</u>

<u>Α’ τρόπος.</u>

Το παρακάτω Σχήμα δείχνει πώς συνδέονται η Εντροπία, η Υπό Συνθήκη Εντροπία, η Από Κοινού Εντροπία και η Αμοιβαία Πληροφορία για τις τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) X και Y.



Μια από τις σχέσεις που μπορούμε να εξάγουμε από το Σχήμα είναι:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y) - I(X,Y)$$

Όταν οι X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε η αμοιβαία πληροφορία είναι $I(X,Y) = 0$. Επειδή η ποσότητα της πληροφορίας που παρέχεται από τη μια τ.μ. για την άλλη είναι 0.

Άρα για ανεξάρτητες τ.μ. ισχύει $H(X,Y)=H(X)+H(Y)$.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να εξάγουμε από το Σχήμα τη σχέση:

$$H(X,Y)=H(X)+H(Y\,|\,X)$$

Όταν οι X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε $H(Y\,|\,X)=H(Y)$. Επειδή η αβεβαιότητα για τη Y είναι ίδια είτε γνωρίζουμε τη X είτε όχι.

Άρα και πάλι για ανεξάρτητες τ.μ. ισχύει $H(X,Y)=H(X)+H(Y)$.

<u>Β' τρόπος.</u>

Στον δεύτερο τρόπο θα βασιστούμε στους ορισμούς της Εντροπίας και της Από Κοινού Εντροπίας.

Η εντροπία της τ.μ. X ορίζεται ως $H(X)=-\sum_{j=0}^{J-1}p(x_j)\log_2(p(x_j))$

Η εντροπία της τ.μ. Y ορίζεται ως $H(Y)=-\sum_{i=0}^{I-1}p(y_i)\log_2(p(y_i))$

Η από κοινού εντροπία των X και Y ορίζεται ως $H(X,Y)=-\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{i=0}^{I-1}p(x_j,y_i)\log_2(p(x_j,y_i))$

Λόγω ανεξαρτησίας των X και Y ισχύει $p(x_j,y_i)=p(x_j)p(y_i)$.

Οπότε έχουμε:

$$H(X,Y)=-\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{i=0}^{I-1}p(x_j)p(y_i)\log_2(p(x_j)p(y_i))=-\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{i=0}^{I-1}p(x_j)p(y_i)(\log_2(p(x_j))+\log_2(p(y_i)))$$

Παραπάνω χρησιμοποιήθηκε μια βασική ιδιότητα των λογαρίθμων: $\log(ab)=\log(a)+\log(b)$

Συνεχίζουμε

$$H(X,Y)=-\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{i=0}^{I-1}p(x_j)p(y_i)\log_2(p(x_j))-\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{i=0}^{I-1}p(x_j)p(y_i)\log_2(p(y_i)) \quad \Rightarrow$$

$$H(X,Y)=-\sum_{j=0}^{J-1}p(x_j)\log_2(p(x_j))\sum_{i=0}^{I-1}p(y_i)-\sum_{j=0}^{J-1}p(x_j)\sum_{i=0}^{I-1}p(y_i)\log_2(p(y_i))$$

Από τη θεωρία των πιθανοτήτων ξέρουμε ότι $\sum_{i=0}^{I-1}p(y_i)=1$ και $\sum_{j=0}^{J-1}p(x_j)=1$

Άρα $H(X,Y)=-\sum_{j=0}^{J-1}p(x_j)\log_2(p(x_j))-\sum_{j=0}^{J-1}p(y_i)\log_2(p(y_i)) \quad \Rightarrow \quad H(X,Y)=H(X)+H(Y)$

1.17 Ποια η διαφορά μεταξύ τυπικών και δυνατών ακολουθιών μιας πηγής; Ποιο το πλήθος τους και πόσα bits απαιτούνται για την κωδικοποίηση τους; Ποιες κωδικοποιούμε πρακτικά;

<u>Απάντηση</u>

Οι τυπικές ακολουθίες μιας πηγής είναι οι ακολουθίες χαρακτήρων που εμφανίζονται πιο συχνά στην έξοδο μιας πηγής, ενώ οι δυνατές ακολουθίες είναι όλες οι ακολουθίες συμβόλων μιας πηγής. Το πλήθος των τυπικών ακολουθιών είναι $K=2^{nH(x)}$ όπου H(X) είναι η εντροπία της πηγής και n το μέγεθος κάθε μπλοκ συμβόλων στην έξοδο της πηγής και για την κωδικοποίηση τους απαιτούνται $log2K=nH(X)$

bits/μπλοκ ή H(X) bits/έξοδο. Το πλήθος των δυνατών ακολουθιών είναι N^n και για την κωδικοποίηση τους απαιτούνται *nlog2N bits/μπλοκ* ή *log2N bits/έξοδο*. Κωδικοποιούμε μόνο τις τυπικές ακολουθίες.

Σετ 2 – Προθεματικοί κώδικες (Αλγόριθμος Huffman)

2.1 Ποια τα πλεονεκτήματα των προθεματικών κωδικών; Ποιο είναι ειδικότερα το πλεονέκτημα του κώδικα Huffman και ποιο το μειονέκτημα του;

Απάντηση

Αλγόριθμοι κωδικοποίησης (συμπίεσης) πηγής επιτυγχάνουν ρυθμούς κωδικοποίησης κοντά στην εντροπία (στο όριο συμπίεσης). Το πρόβλημα είναι ότι κατά την κωδικοποίηση από μπλοκ συμβόλων σταθερού μήκους σε μπλοκ bits μεταβλητού μήκους δεν ξέρουμε που θα βρούμε τα όρια των μπλοκ στην έξοδο για να γίνει η αποκωδικοποίηση. Στους προθεματικούς κωδικούς κάθε μπλοκ εξόδου δεν αποτελεί πρόθεμα κάποιου άλλου μπλοκ. Αυτό σημαίνει ότι οι προθεματικοί κώδικες είναι άμεσοι (επιτρέπουν απευθείας αποκωδικοποίηση) και μοναδικά αποκωδικοποιήσιμοι (κάθε έξοδος αντιστοιχεί σε μοναδική είσοδο). Ο κώδικας Huffman είναι βέλτιστος ανάμεσα σε όλους τους προθεματικούς κώδικες διότι επιτυγχάνει το ελάχιστο μέσο μήκος κώδικα. Το μειονέκτημα του Huffman είναι ότι απαιτεί να γνωρίζει εκ των προτέρων τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων της πηγής και επειδή αυτό είναι σπάνιο δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου.

2.2 Για ποιο λόγο κάνουμε επέκταση πηγής;

Απάντηση

Η *n*-οστής τάξης επέκταση μιας πηγής αποφέρει κώδικες που είναι ολοένα και πιο κοντά στο όριο συμπίεσης (εντροπία) της πηγής. Πιο συγκεκριμένα: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \overline{L} = H(X)}$

2.3 Ποιο το πλεονέκτημα και το μειονέκτημα του κώδικα Huffman

Απάντηση

Το πλεονέκτημα του κώδικα Huffman είναι ότι ανάμεσα σε όλους τους προθεματικούς (άρα μονοσήμαντα αποκωδικοποιήσιμους και άμεσους) κώδικες πετυχαίνει το ελάχιστο μέσο μήκος κώδικα. Το μειονέκτημα του κώδικα Huffman είναι απαιτεί να γνωρίζει εκ των προτέρων τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων της πηγής και ως εκ τούτου δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου

Σετ 3 – Χωρητικότητα Καναλιού (DMC, Αμοιβαία Πληροφορία, Χωρητικότητα Καναλιού AWGN)

3.1 Τι είναι η εντροπία, η υπο συνθήκη εντροπία και η αμοιβαία πληροφορία αντίστοιχα; Ποια(ες) από τις ποσότητες αυτές έχει(ουν) σχέση με το κανάλι; Πότε μηδενίζονται οι 2 τελευταίες ποσότητες;

Απάντηση

Η εντροπία μιας διακριτής πηγής χωρίς μνήμη (DMS) ορίζεται ως:

$$H(\Phi)=\sum_{i=1}^{N} p_i I(s_i) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i$$

Η Φυσική της Σημασία είναι ότι εκφράζει τη μέση αβεβαιότητα για την πηγή ή εναλλακτικά εκφράζει το μέσο όρο της πληροφορίας των συμβόλων. Όσο μεγαλύτερη εντροπία έχει μια πηγή τόσο περισσότερη πληροφορία φέρει και τόσο περισσότερα bits χρειάζονται για την κωδικοποίησή της.

Η εντροπία μιας πηγής διακριτού χρόνου αλλά συνεχούς αλφάβητου ορίζεται ως:

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\log_2 f_x(x)dx$$

Η έξοδος της πηγής είναι ένας πραγματικός αριθμός άρα απαιτούνται άπειρα bits για αναπαράσταση. Δε μπορεί να οριστεί η εντροπία, οπότε ορίζουμε τη διαφορική εντροπία η οποία δίνεται από τον προηγούμενο τύπο. Η $f_X(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X. Δεν έχει το διαισθητικό νόημα της εντροπίας και μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές

Η **διαφορική εντροπία ομοιόμορφης πηγής** ορίζεται ως: $h(X) = -\int_0^a \frac{1}{a}\log_2\frac{1}{a}dx = \log_2 a$

Η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο συνεχές διάστημα [0,α]. Για α<1, μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές.

Η Υπό Συνθήκη Εντροπία ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} H\left(X\,|\,Y\right) &= \sum_{k=0}^{K-1} H\left(X\,|\,y_k\right)p\left(y_k\right) \\ &= -\sum_j\sum_k p\left(x_j\,|\,y_k\right)p\left(y_k\right)\log_2 p\left(x_j\,|\,y_k\right) \\ &= -\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p\left(x_j, y_k\right)\log_2 p\left(x_j\,|\,y_k\right) \end{aligned}$$

Η Φυσική της σημασία είναι ότι εκφράζει την αβεβαιότητα για την τυχαία μεταβλητή X, αν γνωρίζουμε την τιμή (έκβαση) της Y

Η αμοιβαία πληροφορία αποτελεί ένα σημαντικό μέγεθος για την κωδικοποίηση πηγής και την κωδικοποίηση καναλιού και ορίζεται ως εξής: I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)

Η Αμοιβαία Πληροφορία είναι η διαφορά των μεγεθών H(X) και H(X|Y) και εκφράζει την ποσότητα πληροφορίας που παρέχεται από την τυχαία μεταβλητή Y για την X. Εναλλακτικά η αμοιβαία πληροφορία είναι η ποσότητα της αβεβαιότητας που διαλύεται για την X όταν παρατηρούμε την τυχαία μεταβλητή Y. O δέκτης δε γνωρίζει την είσοδο του καναλιού (X), αλλά βλέπει την έξοδό του (Y). Η τυχαία μεταβλητή X μεταφέρει ποσότητα πληροφορίας H(X). Αρχικά, ο δέκτης έχει αβεβαιότητα H(X) για την X. Η Y είναι εξαρτημένη από την είσοδο του καναλιού, στην ουσία είναι μια ενθόρυβη έκδοση της X. Η αβεβαιότητα του δέκτη μειώνεται σε H(X|Y). Ο δέκτης έμαθε πληροφορία H(X)-H(X|Y). Η αμοιβαία πληροφορία είναι το ποσό της πληροφορίας που έμαθε ο δέκτης για την είσοδο του καναλιού X παρατηρώντας την έξοδο του καναλιού Y. Όσο μεγαλύτερη είναι η αμοιβαία πληροφορία, τόσο καλύτερο είναι το κανάλι, δηλαδή τόσο περισσότερα μας λέει η έξοδος Y για την είσοδο X.
Με το κανάλι έχουν σχέση η αμοιβαία πληροφορία και η υπο συνθήκη Εντροπία. Η αμοιβαία πληροφορία I(X;Y)>=0. Μηδενίζεται όταν H(X)=H(X|Y) δηλαδή όταν είναι πάντα γνωστή η είσοδος στο κανάλι ανεξάρτητα της εξόδου.

3.2 Έστω ότι πρόκειται να μεταδώσουμε ένα τηλεπικοινωνιακό σήμα με μέση ισχύ ίση με S μέσα από ενθόρυβο κανάλι στο οποίο η φασματική πυκνότητα ισχύος του λευκού προσθετικού Gaussian θορύβου είναι ίση με $N_0/2$. Ποια η χωρητικότητα του καναλιού όταν το διαθέσιμο εύρος ζώνης τείνει στο άπειρο;

Απάντηση

Σύμφωνα με το Θεώρημα Shannon-Hartley, η χωρητικότητα ενός Καναλιού AWGN δίνεται από $C = W\log_2(1+SNR)$, όπου W είναι το εύρος ζώνης του Καναλιού και SNR είναι ο λόγος της ισχύος του σήματος προς την ισχύ του θορύβου.

Έχουμε $SNR = \frac{P}{N}$, όπου P είναι η ισχύς του σήματος και N είναι η ισχύς του θορύβου. Επειδή ο θόρυβος είναι λευκός ισχύει $N = N_0 W$, όπου $\frac{N_0}{2}$ είναι η πυκνότητα φάσματος ισχύος του θορύβου.

Αρχικά θα υπολογίσουμε την χωρητικότητα ενός ενθόρυβου καναλιού με άπειρο εύρος ζώνης και μετά την χωρητικότητα ενός καναλιού με πεπερασμένο εύρους ζώνης και μηδενικό θόρυβο.

I. Υπολογισμός χωρητικότητας ενθόρυβου καναλιού με άπειρο εύρος ζώνης

$$\lim_{W\to\infty} C = \lim_{W\to\infty} W\log_2(1+SNR) = \lim_{W\to\infty} W\log_2\left(1+\frac{P}{N_0W}\right) = \lim_{W\to\infty} \frac{\log_2\left(1+\frac{P}{N_0W}\right)}{1/W}$$

Προκύπτει απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$. Γι’ αυτό εφαρμόζουμε τον κανόνα de L’Hospital:

$$\Rightarrow \lim_{W\to\infty} C = \lim_{W\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln 2}\times\frac{1}{1+P/N_0W}\times\frac{-P}{N_0W^2}}{-1/W^2} = \lim_{W\to\infty} \frac{1}{\ln 2}\times\frac{1}{1+P/N_0W}\times\frac{P}{N_0} = \frac{P}{N_0\ln 2} = 1.44\frac{P}{N_0}$$

3.3 Έστω κανάλι AWGN με εύρος ζώνης W=4KHz, φασματική πυκνότητα ισχύος θορύβου $\frac{n}{2} = 10^{-12}$ και ισχύς στο δέκτη S= $0.1\cdot 10^{-3}$ w. Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού. Αν είχαμε άπειρο Bandwith (εύρος ζώνης) ποια θα ήταν η χωρητικότητα του καναλιού;

Απάντηση

Η χωρητικότητα του καναλιού υπολογίζεται ως εξής:

$$C = W\log_2\left(1+\frac{P}{N_0W}\right) \Rightarrow 4000\log_2\left(1+\frac{0.1\bullet 10^{-3}}{2\bullet 10^{-12}4000}\right)$$

Αν το κανάλι είχε άπειρο εύρος ζώνης τότε η χωρητικότητα του υπολογίζεται θα ήταν:

$$\lim_{W\to\infty} C = \lim_{W\to\infty} W\log_2(1+SNR) = \lim_{W\to\infty} W\log_2\left(1+\frac{P}{N_0W}\right) = \lim_{W\to\infty} \frac{\log_2\left(1+\frac{P}{N_0W}\right)}{1/W}$$

Προκύπτει απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$. Γι’ αυτό εφαρμόζουμε τον κανόνα de L’Hospital:

$$\Rightarrow \lim_{W\to\infty} C = \lim_{W\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln 2}\times\frac{1}{1+P/N_0W}\times\frac{-P}{N_0W^2}}{-1/W^2} = \lim_{W\to\infty} \frac{1}{\ln 2}\times\frac{1}{1+P/N_0W}\times\frac{P}{N_0} = \frac{P}{N_0\ln 2} = 1.44\frac{P}{N_0}$$

3.4 (Θ). Αν είχατε να επιλέξετε μεταξύ ενός ενθόρυβου καναλιού με άπειρο εύρος ζώνης και ενός καναλιού με μηδενικό θόρυβο αλλά πεπερασμένο εύρος ζώνης, ποιο θα επιλέγατε και γιατί;

Απάντηση

Σύμφωνα με το Θεώρημα Shannon-Hartley, η χωρητικότητα ενός Καναλιού AWGN δίνεται από $C = W\log_2(1+SNR)$, όπου W είναι το εύρος ζώνης του Καναλιού και SNR είναι ο λόγος της ισχύος του σήματος προς την ισχύ του θορύβου.

Έχουμε $SNR = \frac{P}{N}$, όπου P είναι η ισχύς του σήματος και N είναι η ισχύς του θορύβου. Επειδή ο θόρυβος είναι λευκός ισχύει $N = N_0 W$, όπου $\frac{N_0}{2}$ είναι η πυκνότητα φάσματος ισχύος του θορύβου.

Αρχικά θα υπολογίσουμε την χωρητικότητα ενός ενθόρυβου καναλιού με άπειρο εύρος ζώνης και μετά την χωρητικότητα ενός καναλιού με πεπερασμένο εύρους ζώνης και μηδενικό θόρυβο.

I. Υπολογισμός χωρητικότητας ενθόρυβου καναλιού με άπειρο εύρος ζώνης

$$\lim_{W\to\infty} C = \lim_{W\to\infty} W\log_2(1+SNR) = \lim_{W\to\infty} W\log_2\left(1+\frac{P}{N_0W}\right) = \lim_{W\to\infty}\frac{\log_2\left(1+\frac{P}{N_0W}\right)}{1/W}$$

Προκύπτει απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$. Γι' αυτό εφαρμόζουμε τον κανόνα de L'Hospital:

$$\Rightarrow \lim_{W\to\infty} C = \lim_{W\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln 2}\times\frac{1}{1+P/N_0W}\times\frac{-P}{N_0W^2}}{-1/W^2} = \lim_{W\to\infty}\frac{1}{\ln 2}\times\frac{1}{1+P/N_0W}\times\frac{P}{N_0} = \frac{P}{N_0\ln 2} = 1.44\frac{P}{N_0}$$

II. Υπολογισμός χωρητικότητας καναλιού με πεπερασμένο εύρος ζώνης και μηδενικό θόρυβο

$$\lim_{N\to\infty} C = \lim_{N\to\infty} W\log_2(1+SNR) = \lim_{N\to\infty} W\log_2\left(1+\frac{P}{N}\right) = +\infty$$

Βλέπουμε ότι στην δεύτερη περίπτωση η χωρητικότητα είναι άπειρη, ενώ στην πρώτη είναι πεπερασμένη. Άρα το κανάλι με πεπερασμένο εύρους ζώνης και μηδενικό θόρυβο έχει μεγαλύτερη χωρητικότητα.

3.5 Πότε μεγιστοποιείται η αμοιβαία πληροφορία ενός AWGN καναλιού;

Απάντηση

Η αμοιβαία πληροφορία ενός AWGN μεγιστοποιείται όταν η είσοδος είναι επίσης Gaussian, $X \sim N(0,P)$

3.6 Ποιο είναι το άνω όριο ρυθμού μετάδοσης για οποιοδήποτε τηλεπικοινωνιακό κανάλι;

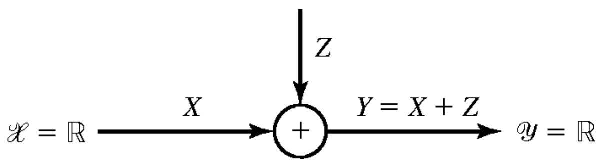
Απάντηση

Το άνω όριο ρυθμού μετάδοσης για οποιοδήποτε τηλεπικοινωνιακό κανάλι είναι ίσο με την χωρητικότητα του καναλιού που δίνεται από τον τύπο $C = W\cdot\log2(1+\frac{P}{N})$

3.7 Να περιγράψετε το κανάλι λευκού προσθετικού θορύβου (AWGN κανάλι)

Απάντηση

Από τα κανάλια συνεχούς αλφαβήτου, το απλούστερο και βασικότερο είναι το κανάλι AWGN. Ονομάζεται **Κανάλι Προσθετικού Λευκού Gaussian Θορύβου** (Additive White Gaussian Noise - AWGN Channel)



Τα χαρακτηριστικά του καναλιού AWGN είναι τα ακόλουθα:

i) Τα αλφάβητα εισόδου *X* και εξόδου *Y* είναι συνεχή
ii) Στην είσοδο τίθεται περιορισμός ισχύος όπου *n* είναι το μέγεθος του μπλοκ κωδικοποίησης
iii) Προστίθεται θόρυβος ο οποίος είναι λευκός (διαδοχικά δείγματα θορύβου είναι ανεξάρτητα) και ακολουθεί Gaussian κατανομή *N(0,N)*

Η χωρητικότητα του καναλιού AWGN είναι $C = W\log 2(1+\frac{P}{N})$

3.8 Πότε είναι αποδοτική η διανυσματική κβάντιση;

Απάντηση

Η διανυσματική κβάντιση είναι αποδοτική όταν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των δειγμάτων εξόδου της πηγής (δηλαδή να έχουμε πηγή με μνήμη). Για στατικές και εργοδικές πηγές ο βέλτιστος διανυσματικός κβαντιστής προσεγγίζει τα όρια της συνάρτησης ρυθμού παραμόρφωσης για n→∞

3.9 Να διατυπώσετε τις 2 μορφές του θεωρήματος Shannon-Hartley

Απάντηση

Η 1η μορφή του θεωρήματος Shannon-Hartley είναι η $C=W\cdot\log 2(1+\frac{P}{N})$

Η 2η μορφή του θεωρήματος Shannon-Hartley προκύπτει αν αντί της ισχύος θορύβου N, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η πυκνότητα φάσματος ισχύος, $N_0/2$

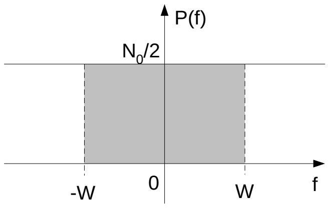
Επειδή το εύρος ζώνης κυμαίνεται και σε αρνητικές τιμές, θέτουμε $N = (\frac{N_0}{2})(2W) = N_0 W$ και προκύπτει

$$C = W\log_2\left(1+\frac{P}{N_0 W}\right)$$

3.10 Πως ορίζεται ο λευκός θόρυβος;

Απάντηση

Ένα σήμα x(t) ονομάζεται λευκός θόρυβος εάν η πυκνότητα φασματικής ισχύος του παραμένει σταθερή για κάθε συχνότητα και ορίζεται από τη σχέση $S_{xx}(f)=n/2$.



Παίρνοντας δύο οποιαδήποτε δείγματα ενός λευκού θορύβου τα οποία λαμβάνονται σε δύο χρονικές στιγμές αυτά είναι ασυσχέτιστα και κατά συνέπεια ανεξάρτητα. Ως στοχαστικό σήμα ο λευκός θόρυβος έχει κατανομή Gauss με μηδενική μέση τιμή. Ο λευκός θόρυβος είναι προσθετικής μορφής και συνήθως συνοδεύει το σήμα στην είσοδο του δέκτη. Παραδείγματα λευκού θορύβου αποτελούν ο θερμικός και ηλιακός θόρυβος.

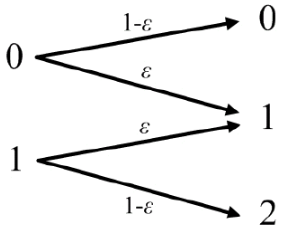
3.11 Ποια είναι κατά την κρίση σας η σημαντικότερη συνέπεια της θεωρίας του Shannon σε ότι αφορά τη διέλευση πληροφορίας μέσα από κανάλι με θόρυβο;

Απάντηση

Η σημαντικότερη συνέπεια της θεωρίας του Shannon σε ότι αφορά τη διέλευση πληροφορίας μέσα από κανάλι με θόρυβο είναι ότι ορίζει το μέγιστο ρυθμό αξιόπιστης μετάδοσης μέσα από ένα ενθόρυβο κανάλι. Συγκεκριμένα ο Shannon ορίζει ως άνω όριο ρυθμού μετάδοσης για οποιοδήποτε τηλεπικοινωνιακό κανάλι το $C=W\cdot\log 2(1+\frac{P}{N})$.

Ένα αθόρυβο κανάλι έχει άπειρη χωρητικότητα. Όταν υπάρχει θόρυβος και η ισχύς του μεταδιδόμενου σήματος είναι σταθερή τότε η χωρητικότητα του καναλιού τείνει σε ένα πεπερασμένο ανώτατο όριο καθώς το εύρος ζώνης τείνει στο άπειρο. Η θεωρία του Shannon προσφέρει τη δυνατότητα για ανταλλαγή (trade-off) σήματος-προς-θόρυβο (SNR) με εύρος ζώνης και συμπιέζει το εύρος ζώνης του μεταδιδόμενου σήματος.

3.12 Το κανάλι του ακόλουθου σχήματος είναι γνωστό ως binary erasure channel. Υπολογίστε τη χωρητικότητα του



Απάντηση

Η χωρητικότητα ενός καναλιού είναι εξ ορισμού η μέγιστη τιμή της αμοιβαίας πληροφορίας $I(X;Y)$. Επειδή το κανάλι είναι συμμετρικό, η αμοιβαία πληροφορία μεγιστοποιείται για ισοπίθανα σύμβολα εισόδου. Δηλαδή όταν $P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2}$.

Πάμε λοιπόν να βρούμε την $I(X;Y)$.

Ισχύει $I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)$.

$H(X)=\log_2 2=1$ bit/σύμβολο

Για να υπολογίσουμε την $H(X|Y)$ υπολογίζουμε τις παρακάτω πιθανότητες:

$P(X=0\|Y=0)=1$	$P(X=0,Y=0)=0.5(1-\varepsilon)$
$P(X=0\|Y=1)=0.5$	$P(X=0,Y=1)=0.5\varepsilon$
$P(X=0\|Y=2)=0$	$P(X=0,Y=2)=0$
$P(X=1\|Y=0)=0$	$P(X=1,Y=0)=0$
$P(X=1\|Y=1)=0.5$	$P(X=1,Y=1)=0.5\varepsilon$
$P(X=1\|Y=2)=1$	$P(X=1,Y=2)=0.5(1-\varepsilon)$

Τότε $H(X|Y)=-\frac{1-\varepsilon}{2}\log_2(1)-\frac{\varepsilon}{2}\log_2(\frac{1}{2})-\frac{\varepsilon}{2}\log_2(\frac{1}{2})-\frac{1-\varepsilon}{2}\log_2(1)=0+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+0=\varepsilon$

Επομένως $I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=1-\varepsilon$ bits/σύμβολο.

Άρα η χωρητικότητα του binary erasure channel είναι $C=1-\varepsilon$ bits/σύμβολο.

3.13 α)Πως ορίζεται η χωρητικότητα ενός διακριτού καναλιού; β)Πως υπολογίζεται η χωρητικότητα ενός ιδανικού αναλογικού καναλιού που υποβαθμίζεται από προθετικό λευκό θόρυβο με κατανομή Gauss; γ)Ποια η σχέση των χωρητικοτήτων του διακριτού και του αναλογικού καναλιού;

Απάντηση

α)

Η χωρητικότητα ενός διακριτού καναλιού χωρίς-μνήμη, δίνεται από τη σχέση

$$C=\max_{p(x)} I(X;Y)$$

όπου $I(X;Y)$ είναι η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της εισόδου και της εξόδου.

Αν ο ρυθμός μετάδοσης $R<C$ τότε για κάθε $\delta>0$ υπάρχει κώδικας με μήκος n ώστε η $P_e<\delta$.

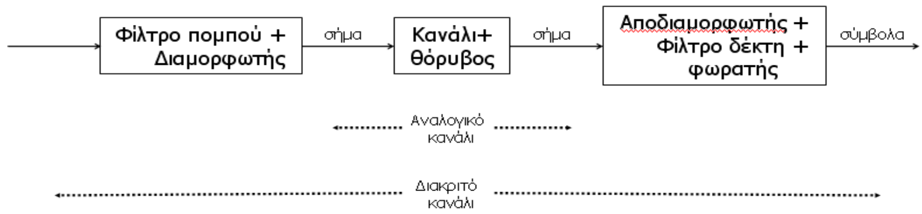
Αν ο ρυθμός μετάδοσης $R>C$ τότε η P_e λαμβάνει σημαντικές τιμές για κάθε κώδικα.

β)

Η χωρητικότητα ενός καναλιού διακριτού-χρόνου με προσθετικό λευκό Gaussian θόρυβο και με περιορισμό ισχύος εισόδου είναι

$$C=W\log_2\left(1+\frac{P}{N_0W}\right)\ \frac{\text{bits}}{\text{sec}}$$

γ) Η σχέση των χωρητικοτήτων του διακριτού και του αναλογικού καναλιού φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα:



Το συνολικό κανάλι περιγράφεται ως διακριτό κανάλι. Το αναλογικό κανάλι είναι ένα μέρος του διακριτού καναλιού και αφορά τη μετάδοση στο μέσο.

3.14 Πως γίνεται η ανταλλαγή εύρους ζώνης – ισχύος σε ένα κανάλι;

<u>Απάντηση</u>

Η χωρητικότητα ενός καναλιού με λευκό, προσθετικό, {Gaussian} θόρυβο δίνεται από την

$$C = W\log_2\left(1+\frac{P}{N_0 W}\right)\ \frac{\text{bits}}{\text{sec}}$$

Υπάρχει δυνατότητα ανταλλαγής μεταξύ της ισχύος ανά δείγμα, P, και του εύρους-ζώνης, W, υπό την έννοια ότι μείωση της μίας μπορεί να αντισταθμισθεί από την αύξηση της άλλης.

Η αύξηση της χωρητικότητας σε συνάρτηση με την ισχύ είναι λογαριθμική, δηλαδή είναι “αργή”.

Επίσης η χωρητικότητα του καναλιού μπορεί να αυξηθεί σε οποιαδήποτε τιμή, αυξάνοντας την ισχύ εισόδου

Η αύξηση του W έχει δύο αντίθετες επιπτώσεις.

• Μ' ένα κανάλι μεγαλύτερου εύρους-ζώνης μπορούμε να μεταδώσουμε περισσότερα δείγματα/sec και, επομένως, να επιτύχουμε υψηλότερο ρυθμό μετάδοσης.
• Ένα μεγαλύτερο εύρος-ζώνης σημαίνει υψηλότερο θόρυβο εισόδου στο δέκτη πράγμα που μειώνει την επίδοσή του.

Παρατηρούμε ότι

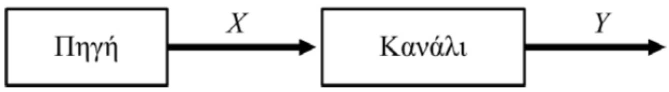
$$\lim_{W\to\infty} C = \frac{P}{N_0}\log e = 1{,}44\frac{P}{N_0}$$

Αυτό σημαίνει ότι με την αύξηση του εύρους-ζώνης δεν δυνατή η αύξηση της χωρητικότητας μέχρις οποιαδήποτε επιθυμητή τιμή.

3.15 Η χωρητικότητα ενός καναλιού εξαρτάται από την πηγή, το κανάλι ή και τα δύο; Αιτιολογήστε την απάντηση σας

<u>Απάντηση</u>

Έστω μια Πηγή η έξοδος της οποίας οδηγείται σε ένα Κανάλι.



Η είσοδος του Καναλιού (άρα και η έξοδος της Πηγής) συμβολίζεται με την τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X, ενώ η έξοδος του Καναλιού με την τ.μ. Y.

Η ποσότητα της πληροφορίας που μεταφέρει το Κανάλι είναι ίση με την αμοιβαία πληροφορία $I(X;Y)$ των τ.μ. X και Y. Η ποσότητα αυτή εξαρτάται και από την Πηγή και από το Κανάλι. Αν π.χ. βάλουμε άλλη Πηγή, τότε το ίδιο Κανάλι πιθανόν να μεταφέρει διαφορετική ποσότητα πληροφορίας.

Η χωρητικότητα C ενός καναλιού ορίζεται ως η μέγιστη ποσότητα της πληροφορίας που μπορεί να μεταφέρει το κανάλι. Δηλαδή $C = \max\{I(X;Y)\}$. Επομένως, είναι σαν να δοκιμάζουμε όλες τις πιθανές πηγές, υπολογίζουμε για κάθε πηγή την αμοιβαία πληροφορία και ορίζουμε ως χωρητικότητα του καναλιού τη μέγιστη αμοιβαία πληροφορία.

Από τον ορισμό της χωρητικότητας είναι προφανές ότι αυτή δεν εξαρτάται από την πηγή (που είναι συνδεδεμένη αυτή τη στιγμή στο κανάλι). Αφού η χωρητικότητα είναι η πληροφορία που θα μεταφέρει το κανάλι *εάν* του συνδέσουμε τη «βέλτιστη» πηγή, χωρίς να μας ενδιαφέρει ποια πηγή είναι συνδεδεμένη στην πραγματικότητα.

Συνοψίζοντας, η πληροφορία που μεταφέρει το κανάλι εξαρτάται και από το κανάλι και από την πηγή. Η χωρητικότητα του καναλιού εξαρτάται μόνο από το κανάλι.

3.16 Με τι ασχολούνται η κωδικοποίηση πηγής και η κωδικοποίηση καναλιού;

Απάντηση

Η κωδικοποίηση πηγής ασχολείται με την αποδοτική αναπαράσταση των δεδομένων που εξάγει μια πηγή πληροφορίας, ενώ η κωδικοποίηση καναλιού ασχολείται με την αποδοτική μετάδοση της πληροφορίας πάνω από ένα κανάλι.

Σετ 4 – Θεωρία Ρυθμού Παραμόρφωσης

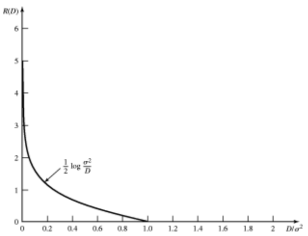
4.1 Έστω πηγή με συνεχές αλφάβητο X~N(0,σ2). Στην περίπτωση αυτή η παραμόρφωση Τετραγωνικού Σφάλματος δίνεται από την έκφραση

$$R(D)=\begin{cases}\frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D} & 0\le \mathrm{D}\le\sigma^2\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

Πως ερμηνεύετε αυτή την έκφραση;

<u>Απάντηση</u>

Η έκφραση αυτή δίνει τη συνάρτηση ρυθμού παραμόρφωσης για μια Gaussian πηγή με μηδενική μέση τιμή, διακύμανση σ^2 και με το τετραγωνικό σφάλμα ως μέτρο παραμόρφωσης. Όταν $D=\sigma^2$ τότε R(D)=0, δηλαδή όταν η παραμόρφωση πάρει τη μέγιστη τιμή της που είναι σ^2 τότε ο ρυθμός μηδενίζεται. Όταν D=0 (μηδενική παραμόρφωση) ο ρυθμός μετάδοσης τείνει στο άπειρο. Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα:



Η αύξηση του R κατά 1 bit θα μειώσει την παραμόρφωση D κατά ένα συντελεστή 4 ή ισοδύναμα κατά 6 dB. Αυτό σημαίνει ότι κάθε 1 bit μετάδοσης/έξοδο πηγής μειώνει την παραμόρφωση κατά 6 dB

4.2 Τι εκφράζει γενικά το θεώρημα ρυθμού παραμόρφωσης; Πότε έχουμε μεγαλύτερη παραμόρφωση; Ποιες είναι οι ακραίες τιμές για το ρυθμό μετάδοσης; Ποια η φυσική σημασία της συνάρτησης ρυθμού-παραμόρφωσης;

<u>Απάντηση</u>

Η συνάρτηση ρυθμού-παραμόρφωσης R(D) εκφράζει τον ελάχιστο αριθμό bits/έξοδο που απαιτείται για να αναπαραχθεί μια πηγή χωρίς μνήμη με παραμόρφωση μικρότερη ή ίση του D ονομάζεται και είναι:

$$\boxed{R(D)=\min_{p(\hat{x}|x):E\left[d\left(X,\hat{X}\right)\right]\le D} I\left(X;\hat{X}\right)}$$

Αν έχουμε μεγάλο R αυτό σημαίνει πολλές περιοχές, λεπτή κβάντιση, άρα και μικρή παραμόρφωση, ενώ μικρό R σημαίνει λίγες περιοχές, πολύ χονδρική κβάντιση, άρα μεγάλη παραμόρφωση. Οι ακραίες τιμές (περιπτώσεις) είναι να έχουμε R=0 όταν το κάθε σημείο είναι το κέντρο μάζας του χώρου της πηγής και μέγιστο *R όταν* κάθε περιοχή περιλαμβάνει μία τιμή εξόδου οπότε έχουμε μηδενική παραμόρφωση.
Η φυσική σημασία της συνάρτησης Ρυθμού Παραμόρφωσης είναι να βρούμε ποιος είναι ο ελάχιστος ρυθμός *R* για μια επιθυμητή παραμόρφωση *D* ή το αντίθετο δηλαδή ποια είναι η ελάχιστη παραμόρφωση *D* για ένα επιθυμητό ρυθμό *R*;

4.3 Αναφέρετε είδη παραμόρφωσης κατά την Κωδικοποίηση Πηγής α)πηγές διακριτού αλφαβήτου και β)πηγές συνεχούς αλφαβήτου. Ποια η μέση τιμή της παραμόρφωσης του κωδικοποιητή πηγής

<u>Απάντηση</u>

Στις πηγές με διακριτό αλφάβητο εισέρχεται Παραμόρφωση Hamming $d_H(x,\hat{x})=\begin{cases}1 & x\ne\hat{x}\\ 0 & x=\hat{x}\end{cases}$

Στις πηγές με συνεχές αλφάβητο εισέρχεται Παραμόρφωση Τετραγωνικού Σφάλματος: $d(x,\hat{x})=(x-\hat{x})^2$

Η έξοδος της πηγής είναι τυχαία διαδικασία. Η απόσταση αρχικού σήματος και αναπαραγωγής είναι επίσης τυχαία διαδικασία. Η μέση τιμή της είναι η παραμόρφωση του κωδικοποιητή που δίνεται από τον τύπο: $D=E\left[d(X^n,\hat{X}^n)\right]=E\left[d(X,\hat{X})\right]$. Αυτή η ισότητα υποθέτει στασιμότητα της πηγής, δηλαδή ότι τα δείγματα της τυχαίας διαδικασίας κάθε χρονική στιγμή ακολουθούν την ίδια κατανομή

4.4 Πως ορίζεται η μέση παραμόρφωση κωδικοποιητή και σε ποια υπόθεση βασίζεται;

<u>Απάντηση</u>

Η μέση παραμόρφωση κωδικοποιητή ορίζεται ως εξής:

$$D = E\left[d\left(\mathbf{X}^n, \hat{\mathbf{X}}^n \right) \right] = E\left[d\left(X, \hat{X} \right) \right]$$

Η δεύτερη ισότητα υποθέτει στασιμότητα της πηγής δηλαδή ότι τα δείγματα της τυχαίας διαδικασίας κάθε χρονική στιγμή ακολουθούν την ίδια κατανομή

4.5 Η αύξηση του ρυθμού κωδικοποίησης μειώνει την παραμόρφωση στον κωδικοποιητή. Τι πρόβλημα δημιουργείται με την αύξηση του;

Απάντηση

Απαιτούνται πολύπλοκοι κωδικοποιητές και αποκωδικοποιητές για την κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση μπλοκ όταν το μέγεθος τους $n \to \infty$

Σετ 5 – Κβάντιση (Βαθμωτή, Διανυσματική, Συνθήκες Lloyd-Max)

5.1 Όταν τα δείγματα μιας πηγής ακολουθούν κανονική κατανομή τι είναι καλύτερο να χρησιμοποιήσω, ένα ομοιόμορφο ή ένα μη ομοιόμορφο κβαντιστή; Αιτιολογήστε

Απάντηση

Αν η πηγή δεν ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε ένα μη ομοιόμορφο κβαντιστή διότι και λιγότερους περιορισμούς εισάγει κατά την ελαχιστοποίηση αλλά και καλύτερες επιδόσεις έχει

5.2 Ποια είναι η βασική ιδέα της διανυσματικής κβάντισης; Πότε είναι αποδοτικότερη από τη βαθμωτή;

Απάντηση

Στη βαθμωτή κβάντιση κάθε έξοδος κβαντίζεται ξεχωριστά, ενώ στη Διανυσματική κβάντιση τα μπλοκ εξόδων κβαντίζονται ταυτόχρονα. Το κέρδος είναι ότι οι περιοχές μπορεί να μην είναι ορθογώνιες. Έτσι μπορούμε να πετύχουμε μικρότερη παραμόρφωση κατά την κβάντιση με τον ίδιο ρυθμό R. Γενικά μπορούμε να πάρουμε n δείγματα εξόδου ταυτόχρονα. Αυτά αναπαρίστανται στον n-διάστατο Ευκλείδειο χώρο. Ο βέλτιστος κβαντιστής σχεδιάζεται στο συγκεκριμένο χώρο. Η διανυσματική κβάντιση έχει πολλές εφαρμογές, π.χ. κωδικοποίηση ομιλίας, κωδικοποίηση video κ.λ.π. Η διανυσματική κβάντιση για να είναι αποδοτική προϋποθέτει συσχέτιση μεταξύ των δειγμάτων εξόδου της πηγής (δηλαδή να έχουμε πηγή με μνήμη) γιατί έτσι ικανοποιείται το 1^{o} κριτήριο σχεδίασης του διανυσματικού κβαντιστή που λέει ότι:

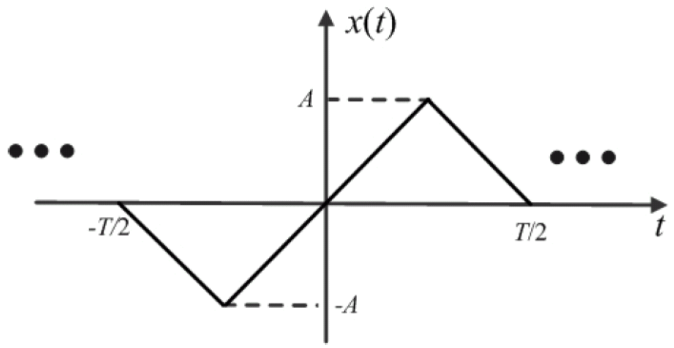
$$\boxed{R_i = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \left\| \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i \right\| < \left\| \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_j \right\|, \forall j \neq i \right\}}$$

Για στατικές και εργοδικές πηγές, ο βέλτιστος διανυσματικός κβαντιστής προσεγγίζει τα όρια της συνάρτησης ρυθμού παραμόρφωσης για $n \infty \rightarrow$

5.3 Δίνεται μια τριγωνική κυματομορφή με πλάτος 2Α (peak-to peak) και περίοδο Τ. Η κυματομορφή είναι είσοδος ενός PCM συστήματος που χρησιμοποιεί ομοιόμορφη κβάντιση L επιπέδων. Να υπολογιστεί το $(SNR)_0$ ή SQNR

Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα περιοδικό τριγωνικό σήμα (κυματομορφή) με πλάτος $2A$ (peak-to-peak) και περίοδο T. Στο σχήμα αυτό δείχνουμε μόνο τις τιμές του σήματος στη διάρκεια μιας περιόδου (από $-\frac{T}{2}$ έως $\frac{T}{2}$).



Ας υπολογίσουμε την ισχύ του σήματος $x(t)$:

$$P_{x(t)} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/4} x^2(t)dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/4} (\frac{4A}{T}t)^2 dt = \frac{4^3A^2}{T^3}\int_{0}^{T/4} t^2 dt = \frac{4^3A^2}{T^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{T/4}$$

$$\Rightarrow \quad P_{x(t)} = \frac{4^3A^2}{T^3}\times\frac{T^3}{3\times 4^3} = \frac{A^2}{3}$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την ισχύ του θορύβου κβάντισης.

Είναι γνωστό από της θεωρία ότι όταν ο θόρυβος κβάντισης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένος, τότε η ισχύς του δίνεται από $P_{noise} = \frac{\Delta^2}{12}$, όπου Δ είναι το βήμα κβάντισης.

Ισχύει $\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{L} = \frac{2A}{L}$. Άρα $P_{noise} = \frac{1}{12}(\frac{2A}{L})^2 = \frac{A^2}{3L^2}$.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να υπολογίσουμε το $SQNR$. Έχουμε:

$$SQNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \frac{P_{x(t)}}{P_{noise}} = \frac{A^2}{3}\times\frac{3L^2}{A^2} = L^2$$

5.4 Δίνεται μια περιοδική τριγωνική κυματομορφή με τιμές στο διάστημα [-A, A] και περίοδο T. Η κυματομορφή είναι είσοδος ενός PCM συστήματος που χρησιμοποιεί ομοιόμορφο κβαντιστή 2 bit με δυναμική περιοχή [-A, A]. Να υπολογιστεί το $(SNR)_0$ ή SQNR

Απάντηση

Ο κβαντιστής λειτουργεί στα 2 bit, άρα υπάρχουν $L = 2^2 = 4$ επίπεδα κβάντισης.

Κατά τα άλλα η άσκηση αυτή είναι ίδια με την προηγούμενη.

Άρα $SQNR = L^2 = 4^2 = 16$.

5.5 Δίνεται μια ορθογώνια κυματομορφή με πλάτος A (peak-to peak) και περίοδο T και διάρκεια παλμού τ. Η κυματομορφή είναι είσοδος ενός PCM συστήματος που χρησιμοποιεί ομοιόμορφη κβάντιση L επιπέδων. Να υπολογιστεί το $(SNR)_0$

Απάντηση

Στο ομοιόμορφο PCM το εύρος κάθε περιοχής είναι $\Delta = \frac{2x_{\max}}{N}$ όπου N οι στάθμες κβάντισης και x_{max} η μέγιστη τιμή της περιοχής σήματος. Στην εκφώνηση δίνεται ότι x_{max}=A/2 και N=L οπότε $\Delta = \frac{A}{L}$. Η ισχύς του σήματος είναι: $E[X^2] = \int_0^{\tau} A^2 dx \Rightarrow A^2\tau$ και η ισχύς του θορύβου κβάντισης είναι

$$E[\tilde{X}^2] = \frac{X_{\max}^2}{3N^2} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{(\frac{A}{L})^2}{12} = \frac{A^2}{12L^2}$$

Άρα ο λόγος σήματος προς θόρυβο στην έξοδο του PCM για την **ορθογώνια** κυματομορφή θα είναι:

$$(SNR)_0 = \frac{E[X^2]}{E[\tilde{X}^2]} = \frac{A^2\tau}{\frac{A^2}{12L^2}} = 12L^2\tau$$

5.6 Να υπολογίσετε το SQNR στο ομοιόμορφο PCM. Πως μπορούμε να αυξήσουμε το SQNR στο ομοιόμορφο PCM; Ποιο είναι το άνω φράγμα του SQNR στο ομοιόμορφο PCM;

Απάντηση

Ο Λόγος Σήματος προς Θόρυβο Κβαντισμού (SQNR) στο ομοιόμορφο PCM είναι:

$$SQNR = \frac{P_X}{N} = \frac{E[X]}{E[\tilde{X}^2]}$$ (μέση ισχύς σήματος προς μέση ισχύ θορύβου):

Επειδή $\Delta = \frac{2x_{max}}{N} = \frac{x_{max}}{2^{\nu-1}}$ όπου οι στάθμες κβάντισης N είναι δύναμη του 2 δηλ. $N=2^n$ προκύπτει ότι:

$$SQNR = \frac{E[X^2]}{E[\tilde{X}^2]} = \frac{3 \bullet 4^n \bullet E[X^2]}{x^2_{max}}$$

Αν συμβολίσουμε το κανονικοποιημένο σήμα εισόδου ως: $\breve{X} = \frac{X}{X_{max}}$ τότε το SQNR προκύπτει ως:

$SQNR = 3 \bullet N^2 \bullet E[\breve{X}^2] = 3 \bullet 4^n E[\breve{X}^2]$. Λόγω κανονικοποίησης $|\breve{X}| \leq 1 \Rightarrow E[\breve{X}^2] \leq 1$ οπότε το άνω όριο του SQNR είναι: $\mathbf{SQNR \leq 3 \bullet 4^n}$

Όταν αυξάνεται η δυναμική περιοχή (αύξηση x_{max}) χωρίς να αυξάνεται η διασπορά του σήματος, δηλαδή η ποσότητα $E[X^2]$ τότε υποβαθμίζεται το SQNR.

Εκφράζοντας το SQNR σε dB προκύπτει ότι: $SQNR|_{dB} \approx E[\breve{X}^2]|_{dB} + 6n + 4.8$

Είναι φανερό ότι κάθε επιπλέον bit (αύξηση του n κατά 1) αυξάνει το SQNR κατά 6dB.

5.7 Ποιο το εύρος ζώνης σήματος ενός συστήματος PCM; Πόσο αυξάνει το σύστημα PCM το εύρος ζώνης του αρχικού σήματος;

<u>Απάντηση</u>

Αν ένα σήμα έχει εύρος ζώνης W, τότε ο ελάχιστος αριθμός δειγμάτων για τέλεια αναπαραγωγή του σήματος δίνεται από το θεώρημα δειγματοληψίας του Nyquist και είναι ίσος με 2W δείγματα/sec. Συνήθως όμως χρησιμοποιείται υπερδειγματοληψία δηλ. f_s>2W δείγματα/sec. Αν χρησιμοποιούνται n bits/δείγμα τότε χρειάζονται συνολικά $f_s \bullet n$ bits/sec για τη διαβίβαση ενός συστήματος PCM. Στην περίπτωση δειγματοληψίας με το ρυθμό Nyquist αυτό είναι ίσο με 2•W•n bits/sec (επειδή f_s=2W).

Η ελάχιστη απαίτηση εύρους ζώνης BW για τη διαβίβαση R bits/sec είναι $\frac{R}{2}$, άρα απαιτείται εύρος ζώνης: $BW \geq \frac{nf_s}{2}$. Στην περίπτωση δειγματοληψίας με ρυθμό Nyquist η ελάχιστη απαίτηση εύρους ζώνης είναι $BW = \frac{nf_s}{2} \Rightarrow BW = nW$

Αυτό σημαίνει ότι στην καλύτερη περίπτωση το σύστημα PCM αυξάνει το εύρος ζώνης του αρχικού σήματος κατά ένα παράγοντα n. Καλύτερη περίπτωση σημαίνει ότι το ομοιόμορφο PCM λειτουργεί ικανοποιητικά για ομοιόμορφη κατανομή του σήματος εισόδου, δηλαδή το σήμα θα κατανέμεται ομοιόμορφα σε ολόκληρη τη δυναμική περιοχή των τιμών του.

5.8 Αν για τα δείγματα μιας πηγής που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [-8,8] σχεδιάσουμε έναν βέλτιστο μη ομοιόμορφο κβαντιστή των 3 bits, τότε ποια αναμένεται να είναι τα όρια και τα κέντρα των περιοχών κβάντισης;

<u>Απάντηση</u>

Η pdf της ομοιόμορφης κατανομής είναι f(x)= $\frac{1}{b-a}$ όπου το a≤x≤b. Τα άκρα των περιοχών κβάντισης δίνονται από τον αριθμητικό μέσο των γειτονικών τιμών κβάντισης. Επιλέγουμε ένα αρχικό σύνολο επιπέδων κβαντισμού $\{x_1, x_2, \ldots, x_M\}$. Εδώ θα επιλέξουμε ως επίπεδα τις τιμές: {-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8}. Τα όρια των ζωνών-περιοχών κβαντισμού πρέπει να είναι όπως αναφέραμε το μέσον των επιπέδων κβαντισμού δηλαδή:

$$x'_k = (\tilde{x}_k + \tilde{x}_{k+1})/2, \quad 1 \leq k \leq M-1$$

Άρα προκύπτουν τα ακόλουθα όρια:

1η περιοχή κβάντισης [-8,-6] με κέντρο το x_0=(-8-6)/2=-7
2η περιοχή κβάντισης [-6,-4] με κέντρο το x_1=(-6-4)/2=-5
3η περιοχή κβάντισης [-4,-2] με κέντρο το x_2=(-4-2)/2=-3
4η περιοχή κβάντισης [-2,0] με κέντρο το x_3=(-2-0)/2=-1
5η περιοχή κβάντισης [2,4] με κέντρο το x_5=(2+4)/2=3
6η περιοχή κβάντισης [4,6] με κέντρο το x_6=(4+6)/2=5
7η περιοχή κβάντισης [6,8] με κέντρο το x_7=(6+8)/2=7

5.9 Δίνεται μια Gaussian πηγή με συχνότητα δειγματοληψίας 200Hz (200 έξοδοι/sec), κβάντιση με 8 στάθμες (3bits/έξοδο) και ρυθμό κωδικοποίησης 600 bits/sec Κάθε δείγμα Xi~N(0, σ^2) (ακολουθεί Gaussian ή Normal Κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση σ^2) και σ^2=400. Με βάσει αυτά τα στοιχεία η μέση παραμόρφωση D προκύπτει 33.38, ενώ η συνάρτηση ρυθμού –παραμόρφωσης προβλέπει ότι η ιδανική παραμόρφωση θα είναι 6.25. Που οφείλεται αυτή η τόσο μεγάλη απόκλιση και πως μπορεί να μειωθεί;

<u>Απάντηση</u>

Η μεγάλη απόκλιση από τη βέλτιστη παραμόρφωση οφείλεται στους ακόλουθος λόγους:

- Το όριο ισχύει για διανυσματικό κβαντιστή και μάλιστα όταν το $n \to \infty$ και όχι για βαθμωτό ($n=1$),
- Τα διαστήματα και οι τιμές κβάντισης δεν είναι τα βέλτιστα
- Οι έξοδοι του κβαντιστή δεν είναι ισοπίθανες, οπότε θα μπορούσαν να κωδικοποιηθούν περαιτέρω

Η παραμόρφωση μπορεί να μειωθεί αν ο βαθμωτός κβαντιστής δεν είναι ομοιόμορφος και αν εφαρμόσουμε για την κατασκευή του αλγόριθμο Lloyd-Max. Για Gaussian ο μη ομοιόμορφος κβαντιστής πετυχαίνει $D=13.82$. Περαιτέρω η παραμόρφωση μπορεί να μειωθεί αν χρησιμοποιήσουμε διανυσματικό κβαντιστή διότι για στατικές και εργοδικές πηγές, ο βέλτιστος διανυσματικός κβαντιστής προσεγγίζει τα όρια της συνάρτησης ρυθμού παραμόρφωσης για $n \to \infty$.

Σετ 6 –Κωδικοποίηση Κυματομορφής (PCM, DPCM, DM)

6.1 Το PCM είναι αποδοτικό σε ότι αφορά την ισχύ αλλά μη αποδοτικό σε ότι αφορά το εύρος ζώνης. Μπορείτε να δώσετε μια διαισθητική εξήγηση;

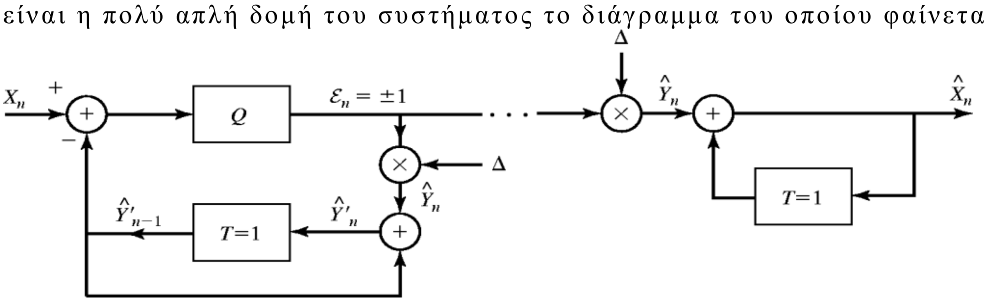
Απάντηση

Όσο περισσότερα bits χρησιμοποιούνται για την κωδικοποίηση ενός συμβόλου τόσο περισσότερο χρόνο θέλουμε για την κωδικοποίηση του συμβόλου. Ο χρόνος αυτός είναι ανάλογος του μεγέθους κωδικοποίησης, άρα αντιστρόφως ανάλογος της συχνότητας κωδικοποίησης, δηλαδή όσο περισσότερο αυξάνεται ο χρόνος κωδικοποίησης τόσο μειώνεται η συχνότητα κωδικοποίησης άρα και το εύρος ζώνης.

6.2 Να περιγράψετε συνοπτικά το σύστημα διαμόρφωσης δέλτα (δίνοντας και τα σχετικά διαγράμματα βαθμίδων). Τι γνωρίζετε για την προσαρμοστική διαμόρφωση δέλτα και πότε επιβάλλεται η χρησιμοποίηση της;

Απάντηση

Είναι η απλούστερη μορφή DPCM. Χρησιμοποιεί μόνο το προηγούμενο δείγμα, όπως στο απλό DPCM (p=1) και επίσης χρησιμοποιεί κβαντιστή ενός μόνο bit (για να κβαντίσει το σφάλμα πρόβλεψης). Με ένα bit κβάντισης προκύπτουν δύο στάθμες, ±Δ, γιαυτό και ονομάζεται διαμόρφωση Δέλτα. Επειδή χρησιμοποιείται μόνο ένα bit για την κβάντιση το σφάλμα κβάντισης θα πρέπει να είναι μικρό (μικρή δυναμική περιοχή). Είναι επιθυμητό διαδοχικά δείγματα του σήματος εισόδου να εμφανίζουν μεγάλη συσχέτιση δηλαδή να είναι σχεδόν ίδια. Αυτό επιτυγχάνεται αν η δειγματοληψία είναι αρκετά πυκνή δηλαδή αρκετά μεγαλύτερη από το όριο Nyquist. Αυξάνοντας το ρυθμό δειγματοληψίας, προκύπτουν πολλά δείγματα/sec. Αυτό όμως δεν μειώνει το ποσοστό συμπίεσης του κωδικοποιητή διότι ο αριθμός των bits/sec είναι μόνο 1, ο συνολικός αριθμός bits/sec που απαιτούνται για να διαβιβάσουμε μια κυματομορφή είναι τελικά μικρότερος από το ρυθμό ενός συστήματος PCM. Ένα κύριο πλεονέκτημα της διαμόρφωσης δέλτα είναι η πολύ απλή δομή του συστήματος το διάγραμμα του οποίου φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



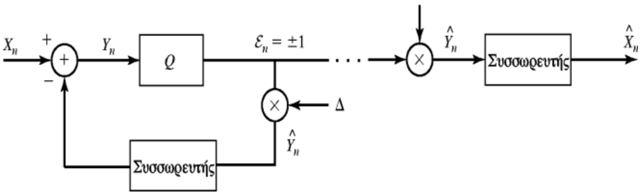
Στο δέκτη ισχύει:

$$\hat{X}_n - \hat{X}_{n-1} = \hat{Y}_n$$

Για $\hat{X}_1 = 0$ πτει

$$\hat{X}_n = \sum_{i=0}^{n} \hat{Y}_i = \sum_{i=0}^{n} \Delta sgn\{\varepsilon_i\}$$

Αυτό σημαίνει ότι για να προκύψει το $\hat{X}_n$ το πρέπει απλά να συσσωρεύονται οι τιμές του $\hat{Y}_n$, δηλαδή το ανακατασκευασμένο σήμα είναι το άθροισμα όλων των προηγούμενων τιμών που φθάνουν στο δέκτη. Αν οι τιμές των δειγμάτων αναπαριστάνονται από κρουστικούς παλμούς ο συσσωρευτής θα είναι ένας απλός ολοκληρωτής. Αυτό απλοποιεί το διάγραμμα βαθμίδων του συστήματος της διαμόρφωσης δέλτα σε αυτό της επόμενης εικόνας:



Η χρήση της διαμόρφωσης δέλτα συνίσταται όταν: (1) αν είναι απαραίτητο να μειωθεί ο ρυθμός bit κάτω από 40 kbit/sec και είναι ανεκτή η χαμηλή ποιότητα φωνής και (2) αν η σημαντική κυκλωματική απλούστευση είναι πρωταρχικής σημασίας και είναι αποδεκτή η ταυτόχρονη χρήση υψηλού ρυθμού bit.

Για να αντιμετωπίσω τα προβλήματα με την επιλογή του Δ μπορώ να επιλέξω μια «ενδιάμεση τιμή». Η λύση είναι η τιμή του Δ μεταβάλλεται ανάλογα με τις τρέχουσες τιμές του σήματος εισόδου, δηλαδή όταν το σήμα μεταβάλλεται γρήγορα, επέλεξε μεγάλο Δ, ενώ όταν το σήμα είναι σχεδόν σταθερό, επέλεξε μικρό Δ. Αυτή η λύση οδήγησε στην Προσαρμοστική Διαμόρφωση Δέλτα (Adaptive Delta Modulation, ADM). Χρειάζεται ένας απλός μηχανισμός παρακολούθησης του ρυθμού μεταβολής του σήματος. Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ένας διαφοριστής, αλλά αναζητείται μια απλή λύση ώστε να διατηρηθεί η απλότητα της DM. Η λύση αυτή είναι η ακόλουθη:

1. Για μικρή κλίση σήματος εισόδου,
   - κοκκώδης θόρυβος
   - η έξοδος του ADM είναι διαδοχικές εναλλαγές $+\Delta$ και $-\Delta$
   - **το Δ πρέπει να ελαττωθεί**
2. Για μεγάλη κλίση σήματος εισόδου,
   - υπερφόρτωση κλίσης
   - η έξοδος του ADM έχουν συνεχώς το ίδιο πρόσημο
   - **το Δ πρέπει να αυξηθεί**

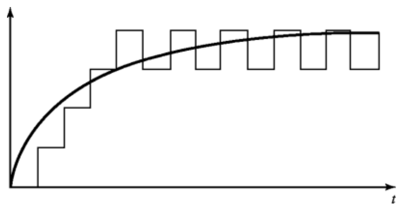
Ένας απλός Κανόνας Μεταβολής είναι ο $\Delta_n = \Delta_{n-1} K^{\varepsilon_n x \varepsilon_{n+1}}$ όπου ε_n είναι το πρόσημο της εξόδου του κβαντιστή και K>1 σταθερά

6.3 Ποια είδη θορύβου υπάρχουν στη διαμόρφωση δέλτα;

<u>**Απάντηση**</u>

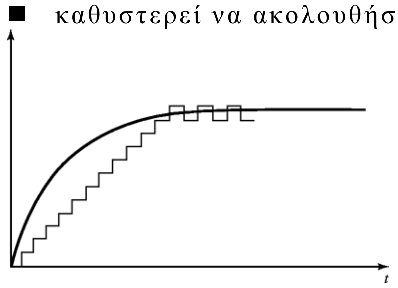
α)Κοκκώδης θόρυβος

- Η επιλογή του εύρους βαθμίδας Δ είναι πολύ σημαντική
- Αν επιλεχθεί μεγάλο Δ, ο διαμορφωτής δέλτα μπορεί μεν να παρακολουθήσει ταχείες μεταβολές σήματος αλλά εισάγεται σημαντικός θόρυβος κβάντισης όταν το σήμα μεταβάλλεται αργά



Β)υπερφόρτωση κλίσης

- Αν επιλεχθεί μικρό Δ, ο διαμορφωτής δέλτα δεν εμφανίζει πρόβλημα σε αργές μεταβολές σήματος
- καθυστερεί να ακολουθήσει απότομες μεταβολές του σήματος (όταν (Δ/Ts)<max|dx(t)/dt|)



6.4 Αναφέρετε συνοπτικά σε 10-15 γραμμές τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των μεθόδων DM και DPCM

<u>**Απάντηση**</u>

Ένα κύριο πλεονέκτημα της διαμόρφωσης δέλτα (DM) είναι η πολύ απλή δομή του συστήματος. Η χρήση της DM συνίσταται όταν: (1) αν είναι απαραίτητο να μειωθεί ο ρυθμός bit κάτω από 40 kbit/sec και είναι ανεκτή η χαμηλή ποιότητα φωνής και (2) αν η σημαντική κυκλωματική απλούστευση είναι πρωταρχικής σημασίας και είναι αποδεκτή η ταυτόχρονη χρήση υψηλού ρυθμού bit.

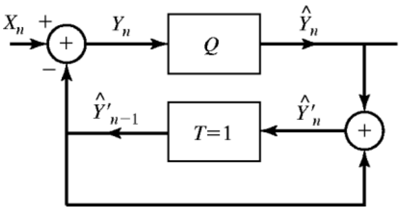
Ένα κύριο πλεονέκτημα της DPCM είναι όταν έχουμε μια τυχαία διαδικασία περιορισμένου εύρους ζώνης και δειγματοληπτείται με ρυθμό Nyquist (ή μεγαλύτερο) τότε τα διαδοχικά δείγματα εμφανίζουν σημαντική συσχέτιση, η οποία μπορεί να ελαττώσει τον αριθμό bits/έξοδο διατηρώντας την ίδια απόδοση. Συγκεκριμένα αντί να κβαντίζουμε το *Xn* κβαντίζουμε το *Yn* το οποίο έχει πολύ μικρότερη δυναμική περιοχή και μπορεί να κβαντιστεί με λιγότερα bits διατηρώντας την ίδια απόδοση. Επίσης για σταθερό λόγο σήματος προς θόρυβο κβαντισμού και θεωρώντας ρυθμό δειγματοληψίας 8 KHz, η χρήση της DPCM μπορεί να παρέχει μια εξοικονόμηση 8-16 kbit/sec σε σχέση με την PCM. Για σήματα τηλεόρασης, η DPCM είναι πλεονεκτικότερη στα συστήματα υψηλής ευκρίνειας. Για μονόχρωμη TV η DPCM παρέχει λόγο σήματος προς θόρυβο κβαντισμού περίπου 12 dB υψηλότερο από κλασική PCM. Για σταθερό λόγο σήματος προς θόρυβο και για δειγματοληψία στα 9MHz αυτό σημαίνει εξοικονόμηση 18 Mbit/ sec της DPCM σε σχέση με PCM. Το DPCM όμως λειτουργεί χειρότερα από το PCM σε μεταγωγικά δίκτυα όπου δεν έχουμε μόνο σήματα φωνής. Επίσης το PCM είναι πιο ανεκτικό σε θόρυβο σε σχέση με το DPCM. Στο DPCM αν μειώσουμε το θόρυβο κβαντισμού κατά k dB σε σχέση με την κλασική PCM τότε ο θόρυβος στο κωδικοποιημένο σήμα στην έξοδο του δέκτη που προκαλείται από λανθασμένα bit στο ψηφιακό κανάλι μετάδοσης αυξάνει κατά k dB.

6.5 α)Να περιγραφεί το σύστημα DPCM (στη γενική περίπτωση) β)Τι παρεμβάσεις θα προτείνατε στο σύστημα DPCM που περιγράψατε ώστε να λειτουργεί ικανοποιητικά ακόμα και όταν η είσοδος έχει στατιστικά χαρακτηριστικά τα οποία μεταβάλλονται με το χρόνο

Απάντηση

α)Στο PCM, κάθε δείγμα κβαντίζεται ξεχωριστά από έναν βαθμωτό κβαντιστή. Σε ένα διανυσματικό κβαντιστή, κβαντίζονται πολλά δείγματα ταυτόχρονα. Εναλλακτικά, μπορώ να εισάγω κάποιου είδους μνήμη στον κβαντιστή. Το κίνητρο είναι ότι όταν έχω τυχαία διαδικασία περιορισμένου εύρους ζώνης και δειγματοληπτείται με ρυθμό Nyquist (ή μεγαλύτερο) τότε τα διαδοχικά δείγματα εμφανίζουν σημαντική συσχέτιση η οποία μπορεί να ελαττώσει τον αριθμό bits/έξοδο διατηρώντας την ίδια απόδοση. Το αποτέλεσμα είναι η Διαφορική Παλμοκωδική Διαμόρφωση (Differential PCM - DPCM).

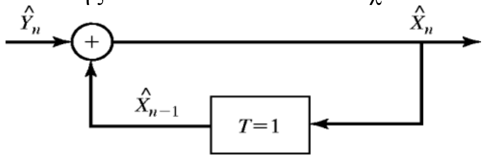
Ο Πομπός του απλού DPCM έχει το ακόλουθο διάγραμμα βαθμίδων:



Στην απλούστερη περίπτωση, κβαντίζεται η διαφορά δύο διαδοχικών δειγμάτων. Αν τα δείγματα έχουν μεγάλη συσχέτιση τότε η διαφορά τους θα έχει μικρή δυναμική περιοχή, άρα απαιτεί λιγότερα bits για την κβάντιση της. Αντί να κβαντίσουμε τη διαφορά X_n-X_{n-1} κβαντίζουμε τη διαφορά $X_n - \hat{Y}'_{n-1}$. Το $\hat{Y}'_{n-1}$ είναι κβαντισμένη ποσότητα (διακριτή) που προσεγγίζει το X_{n-1} (μέσω του κλάδου ανάδρασης συσσωρεύονται οι διαφορές και έτσι σχηματίζεται μία προσέγγιση του τρέχοντος δείγματος). Σφάλμα κβάντισης (είσοδος – έξοδος κβαντιστή) είναι:

$$\boxed{\hat{Y}_n - Y_n = \hat{Y}_n - \left(X_n - \hat{Y}'_{n-1}\right) = \hat{Y}_n - X_n + \hat{Y}'_{n-1} = \hat{Y}'_n - X_n}$$

δηλαδή το σφάλμα κβάντισης είναι ίσο με τη διαφορά του τρέχοντος δείγματος από μία εκτίμησή του.
Ο Δέκτης του απλού DPCM έχει το ακόλουθο διάγραμμα βαθμίδων:



Η έξοδός (ανακατασκευασμένο σήμα) δίνεται ως: $\hat{X}_n = \hat{Y}_n + \hat{X}_{n-1}$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις διαφορών στον πομπό: $\hat{Y}'_n = \hat{Y}_n + \hat{Y}'_{n-1}$ και στο δέκτη: $\hat{X}_n = \hat{Y}_n + \hat{X}_{n-1}$ παρατηρούμε ότι οι δύο ακολουθίες ικανοποιούν την ίδια εξίσωση διαφορών με την ίδια ακολουθία διέγερσης $\left\{\hat{Y}_n\right\}$. Για ίδιες αρχικές συνθήκες, π.χ. $\hat{Y}'_{-1} = \hat{X}_{-1} = 0$ οι δύο έξοδοι θα είναι ίσες και προκύπτει ότι $\hat{Y}_n - Y_n = \hat{X}_n - X_n$. Το συμπέρασμα είναι ότι το **σφάλμα κβάντισης μεταξύ του σήματος και της ανακατασκευής του είναι ίσο με το σφάλμα μεταξύ της εισόδου-εξόδου του κβαντιστή στον πομπό** οπότε αντί να κβαντίσουμε το X_n κβαντίζουμε το Y_n το οποίο έχει πολύ μικρότερη δυναμική περιοχή και μπορεί να κβαντιστεί με λιγότερα bits διατηρώντας την ίδια απόδοση

β)Όταν το σήμα εισόδου έχει μεταβαλλόμενα στατιστικά χαρακτηριστικά χρησιμοποιείται το **Προσαρμοστικό DPCM (Adaptive DPCM - ADPCM)** το οποίο χρησιμοποιεί προσαρμοστικό γραμμικό προγνώστη και βήμα κβάντισης

6.6 Να περιγραφεί το σύστημα DPCM με χρήση προγνώστη

Απάντηση

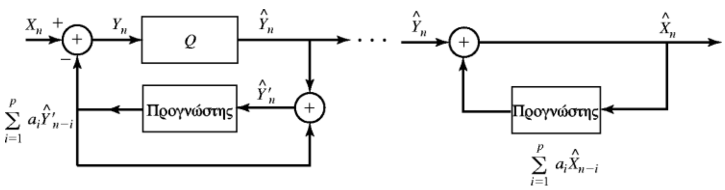
Σε μια πιο περίπλοκη εκδοχή του DPCM αντί να χρησιμοποιηθεί μόνο το προηγούμενο δείγμα, χρησιμοποιούνται τα p τελευταία δείγματα για την πρόγνωση της τιμής του επόμενου δείγματος. Στη συνέχεια κβαντίζεται η διαφορά μεταξύ του δείγματος x_n και της τιμής πρόγνωσης. Συνήθως χρησιμοποιείται ένας γραμμικός προγνώστης της μορφής $\sum_{i=1}^{p} a_i x_{n-i}$ και οι συντελεστές του α_i επιλέγονται ώστε να ελαχιστοποιούν το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μεταξύ του δείγματος x_n και της προβλεπόμενης τιμής του. Αναλύοντας αυτή την παράσταση και δεχόμενοι ότι το x_n είναι στατική διαδικασία προκύπτει το μέσο σφάλμα πρόγνωσης:

$$\boxed{D = R_X(0) - 2\sum_{i=1}^{p} a_i R_X(i) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_i a_j R_X(i-j)}$$

Για να ελαχιστοποιηθεί το D παραγωγίζουμε ως προς κάθε α_i και μηδενίζουμε τις παραγώγους οπότε προκύπτει το σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} a_i R_X(i-j) = R_X(j), \quad 1 \le j \le p}$$

Διάγραμμα Βαθμίδων Πομπού-Δέκτη DPCM με προγνώστη:



Είναι παρόμοιο με το απλό DPCM στο οποίο το *p=1. Η μόνη διαφορά στο διάγραμμα σε σχέση με το απλό DPCM είναι ότι η* καθυστέρηση *T=1* έχει αντικατασταθεί από το φίλτρο πρόγνωσης $\sum_{i=1}^{p} a_i x_{n-i}$. Όπως βλέπουμε στο σχήμα ο προγνώστης έχει ως είσοδο όχι την ίδια την ακολουθία $\{X_n\}$ αλλά τη διακριτή προσέγγισή της. Προκύπτει και εδώ ότι $\hat{Y}_n - Y_n = \hat{X}_n - X_n$.

Το πλεονέκτημα του DPCM με προγνώστη είναι ότι επειδή χρησιμοποιούνται περισσότερα δείγματα του σήματος για να προβλέψουμε την τρέχουσα τιμή η πρόβλεψη είναι καλύτερη, άρα το σφάλμα πρόβλεψης είναι μικρότερο και συνεπώς απαιτούνται λιγότερα bits για την κβάντιση του. Συμπέρασμα: το σύστημα DPCM με γραμμική πρόβλεψη πετυχαίνει ακόμη χαμηλότερους ρυθμούς κωδικοποίησης. Το σύστημα DPCM χρησιμοποιείται ευρέως για συμπίεση σημάτων ομιλίας και εικόνας

6.7 Τι γνωρίζετε για την ανομοιόμορφη κβάντιση (λόγοι χρησιμοποίησης, πλεονεκτήματα κ.λ.π.). Πότε δίνει ίδιο αποτέλεσμα με την ομοιόμορφη; Αναφέρετε επιγραμματικά ορισμένες μεθόδους ανομοιόμορφης κβάντισης

Απάντηση

Ο βασικός λόγος χρησιμοποίησης της μη ομοιόμορφης κβάντισης είναι ότι χαλαρώνοντας τον περιορισμό ότι οι περιοχές κβάντισης (εκτός της πρώτης και της τελευταίας) έχουν ίσα εύρη, τότε η ελαχιστοποίηση της παραμόρφωσης του κβαντιστή μπορεί να γίνει με λιγότερους περιορισμούς και ο κβαντιστής που προκύπτει λειτουργεί με καλύτερες επιδόσεις σε σύγκριση με ένα ομοιόμορφο κβαντιστή με τον ίδιο αριθμό σταθμών. Η παραμόρφωση δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{\begin{aligned} D = &\int_{-\infty}^{a_1} (x-\hat{x}_1)^2 f_X(x)\,dx + \sum_{i=1}^{N-2}\int_{a_i}^{a_{i+1}} (x-\hat{x}_{i+1})^2 f_X(x)\,dx \\ &+ \int_{a_{N-1}}^{+\infty} (x-\hat{x}_N)^2 f_X(x)\,dx \end{aligned}}$$

Η ελαχιστοποίηση της παραμόρφωσης D γίνεται παραγωγίζοντας ως προς α_i τον προηγούμενο τύπο οπότε προκύπτει: $\frac{\partial D}{\partial a_i} = 0 \Rightarrow a_i = \frac{\hat{x}_i + \hat{x}_{i+1}}{2}$

Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι σε ένα βέλτιστο κβαντιστή τα άκρα των περιοχών κβάντισης είναι ο αριθμητικός μέσος των γειτονικών τιμών κβάντισης. Έτσι η κβάντιση γίνεται με βάση την ελάχιστη απόσταση δηλ. κάθε τιμή x κβαντίζεται στην πλησιέστερη τιμή κβάντισης.

Δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με τον ομοιόμορφο κβαντιστή όταν η πηγή είναι ομοιόμορφη. Η πιο συνηθισμένη μέθοδος για την υλοποίηση της ανομοιόμορφης κβάντισης είναι τα δείγματα να διέλθουν πρώτα από ένα μη γραμμικό στοιχείο προκειμένου να συμπιεστούν τα μεγάλα πλάτη (μείωση της δυναμικής περιοχής του σήματος) και στη συνέχεια η έξοδος του μη γραμμικού στοιχείου να κβαντιστεί ομοιόμορφα. Στη λήψη εφαρμόζεται η αντίστροφη λειτουργία της συμπίεσης για να ανακτήσουμε τις τιμές των δειγμάτων. Η τεχνική αυτή λέγεται companding. Για την κωδικοποίηση ομιλίας χρησιμοποιούνται δύο τύποι συμπιεστών: ο συμπιεστής τύπου-μ και ο συμπιεστής τύπου-Α. Επίσης άλλη μέθοδος μη ομοιόμορφης κβάντισης είναι η κατασκευή του μη ομοιόμορφου κβαντιστή με τον αλγόριθμο Lloyd-Max.

6.8 Να βρεθεί η μέση ισχύς του θορύβου κβάντισης σε ομοιόμορφο κβαντιστή συναρτήσει του βήματος κβάντισης Δ. Υπόθεση: Ο θόρυβος κβάντισης θεωρείται ομοιόμορφα κατανεμημένος.

Απάντηση

Όταν χρησιμοποιείται ομοιόμορφος βαθμωτός κβαντιστής η δυναμική περιοχή σήματος $[-x_{max}, +x_{max}]$, με N στάθμες κβάντισης τότε απαιτούνται $n=\log_2 N$ bits/έξοδο. Το Εύρος κάθε περιοχής κβάντισης δίνεται από τον τύπο: $\Delta = \frac{2x_{max}}{N} = \frac{x_{max}}{2^{n-1}}$

Αν υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε πολλές περιοχές κβάντισης, το εύρος Δ είναι μικρό, η δυναμική περιοχή εισόδου είναι μικρή και τότε ο θόρυβος κβαντισμού μπορεί να θεωρηθεί ομοιόμορφα κατανεμημένος στο (-Δ/2,Δ/2], ασυσχέτιστος με το σήμα εισόδου, με μεγάλη μεταβλητότητα και εύρος ζώνης (όπως του θερμικού θορύβου).
Η μέση ισχύς του θορύβου κβάντισης είναι:

$$\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{\Delta} \tilde{x}^2 \, d\tilde{x} = \frac{\Delta^2}{12}$$

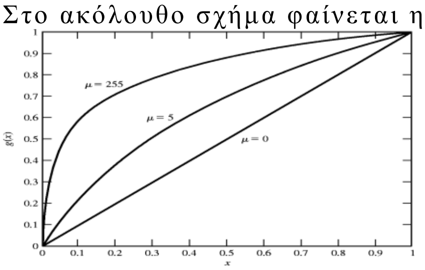
6.9 Τι γνωρίζετε για την ανομοιόμορφη κβάντιση με χρήση του νόμου-μ;

Απάντηση

Ο συμπιεστής τύπου-μ χρησιμοποιείται στις ΗΠΑ και τον Καναδά και έχει τη λογαριθμική συνάρτηση συμπίεσης:

$$\boxed{g(x) = \frac{\log\left(1+\mu|x|\right)}{\log\left(1+\mu\right)} \operatorname{sgn}(x), \quad |x| \le 1}$$

Η παράμετρος μ ελέγχει το βαθμό συμπίεσης και διάτασης. Το πρότυπο σύστημα στις ΗΠΑ και τον Καναδά χρησιμοποιεί ένα συμπιεστή με μ=255, ο οποίος συνοδεύεται από ένα ομοιόμορφο κβαντιστή με 128 στάθμες (8 bits/δείγμα). Η χρήση συμπιεστή σε αυτό ο σύστημα βελτιώνει την απόδοση του κατά 24 dB. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση των χαρακτηριστικών ενός συμπιεστή τύπου-μ.



6.10 Τι γνωρίζετε για την κωδικοποίηση γραμμής; Αναφέρετε τυπικούς Κώδικες Γραμμής. Ποια τα κριτήρια επιλογής κώδικα γραμμής;

Απάντηση

Οι κβαντισμένες τιμές αναπαρίστανται με δυαδικά σύμβολα. Τα δυαδικά σύμβολα εάν πρόκειται να αποσταλούν πρέπει να παρασταθούν με σήματα. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται Κωδικοποίηση Γραμμής.
Τυπικοί Κώδικες Γραμμής είναι:

- Κώδικας On-Off
- Πολική κωδικοποίηση: 0 → -A, 1 → +A
- Διπολική: 0 → 0, 1→1
- Χωρισμού φάσης: 0 → -A (1η ημιπερίοδος) +A (2η ημιπερίοδος), 1 → +A (1η ημιπερίοδος) -A (2η ημιπερίοδος)
- Διαφορική κωδικοποίηση: 0 → παρουσία μεταβολής του παλμού, 1 → απουσία μεταβολής του παλμού

Κριτήρια επιλογής κώδικα γραμμής:

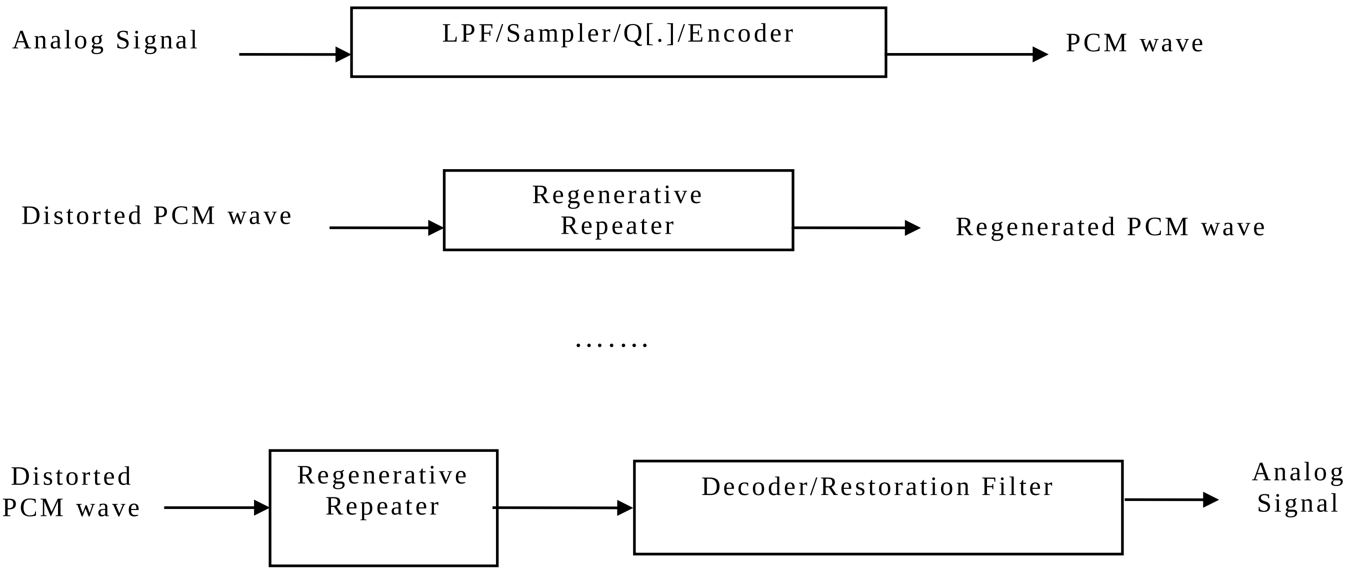
- Παρουσία ή όχι DC συνιστώσας (δηλ. σταθερού όρου)
- Αντοχή στο θόρυβο
- Επίδραση στην ανάκτηση ή απώλεια χρονισμού

6.11 Να περιγράψετε συνοπτικά τη βασική διαδικασία με την οποία ένα σύστημα PCM αντιμετωπίζει τις παραμορφώσεις που υφίσταται το σήμα λόγω μη ιδανικού διαύλου και προστιθέμενου θορύβου

Απάντηση

Ένα από τα πλέον σημαντικά χαρακτηριστικά των συστημάτων PCM είναι η ικανότητά τους να **ελέγχουν τις επιδράσεις της παραμόρφωσης καναλιού και του θορύβου μέσω της χρήσης αναγεννητικών επαναληπτών (regenerative repeaters). Το διάγραμμα βαθμίδων του συστήματος αυτού φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα:**

Το αρχικό αναλογικό σήμα διέρχεται μέσα από ένα χαμηλοπερατό φίλτρο (LPF), στη συνέχεια μέσα από ένα δειγματολήπτη (Sampler) μετά μέσα από ένα κβαντιστή (Q[.]) και τέλος μέσα από ένα κωδικοποιητή (Encoder). Η έξοδος του συστήματος είναι μια κυματομορφή PCM. Αυτή διέρχεται μέσα από το κανάλι και αλλοιώνεται λόγω θορύβου και παραμορφώσεων του καναλιού. Η αλλοιωμένη PCM κυματομορφή (Distorted PCM wave) διέρχεται μέσω ενός αναγεννητικού επαναλήπτη και ενισχύεται (Regenerative Repeater). Το ενισχυμένο σήμα φτάνει στο δέκτη όπου αποκωδικοποιείται (Decoder) και περνά από το φίλτρο αποκατάστασης (Restoration Filter) που δίνει το αρχικό αναλογικό σήμα



6.12 Από τι εξαρτάται κυρίως η απόδοση της ADPCM;

Απάντηση

Ένας βασικός περιορισμός του συστήματος DPCM είναι ότι τόσο ο προγνώστης όσο και ο κβαντιστής είναι σταθεροί σε όλη την εικόνα. Τα σχήματα DPCM μπορούν να γίνουν προσαρμοστικά είτε στον προγνώστη είτε στον κβαντιστή είτε και στα δύο. Η προσαρμοστική πρόγνωση (adaptive prediction) συνήθως μειώνει το σφάλμα πρόβλεψης πριν την κβάντιση και έτσι μειώνεται η δυναμική περιοχή του σήματος εισόδου στον κβαντιστή (για τον ίδιο ρυθμό bit) δίνοντας μικρότερο σφάλμα κβάντισης άρα και καλύτερη ποιότητα εικόνας. Το ADPCM χρησιμοποιείται όταν το σήμα έχει μεταβαλλόμενα στατιστικά χαρακτηριστικά. Η απόδοση της ADPCM εξαρτάται κυρίως από τον αριθμό των επιπέδων κβάντισης και από τον προγνώστη που αν είναι προσαρμοστικός βελτιώνει πολύ την πρόβλεψη ιδιαίτερα σε περιοχές όπου εμφανίζονται απότομες αλλαγές στις τιμές των pixel μιας εικόνας.

6.13 Να δοθεί το δομικό διάγραμμα του αναγεννητικού επαναλήπτη σε ένα σύστημα PCM και να περιγραφούν οι βασικότερες λειτουργίες του

Απάντηση

Κάθε αναγεννητικός επαναλήπτης αποτελείται από δύο βασικά τμήματα:

- το τμήμα λήψης, όπου γίνεται ανίχνευση και φώραση του σήματος που στάλθηκε από τον προηγούμενο επαναλήπτη
- το τμήμα εκπομπής, που εκπέμπει το σήμα απαλλαγμένο από τον θόρυβο

Το τμήμα λήψης αποτελείται από τον Αποδιαμορφωτή Σήματος και από τον Φωρατή.

Το τμήμα εκπομπής είναι ουσιαστικά ένας Διαμορφωτής.

Πιο συγκεκριμένα, η λειτουργία του αναγεννητικού επαναλήπτη είναι η εξής. Αρχικά λαμβάνεται το σήμα $r(t)$ που εμφανίζεται στην έξοδο του καναλιού. Το σήμα αυτό αποτελείται από το σήμα πληροφορίας $s_m(t)$ που μετέδωσε ο προηγούμενος επαναλήπτης και από τον θόρυβο $n(t)$ που προστέθηκε στο Κανάλι. Δηλαδή $r(t) = s_m(t) + n(t)$. Ο Αποδιαμορφωτής μετατρέπει το σήμα $r(t)$ σε ένα διάνυσμα r. Ο Φωρατής με βάση το διάνυσμα r εκτιμάει το σύμβολο που είχε σταλεί. Έστω εκτιμάει το s_m. Τέλος, ο Διαμορφωτής εκπέμπει το σήμα $s_m(t)$, που είναι πλέον απαλλαγμένο από τον θόρυβο.

6.14 Έστω ότι η είσοδος σε ένα σύστημα DM είναι το σήμα x(t)=A·cos(2·π·f$_x$t). Να αποδείξετε ότι για να μην υπεισέρχεται το ένα από τα σφάλματα που θα περιγράψετε στο πρώτο ερώτημα (ποιο;) θα πρέπει να ισχύει ότι $A \le \frac{\delta}{2\pi f_x T_s}$ όπου δ είναι το μέγεθος του βήματος και T$_s$ η περίοδος δειγματοληψίας

<u>Απάντηση</u>

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι για να μην έχουμε *υπερφόρτωση κλήσης* στο σύστημα DM πρέπει να ισχύει

$$\delta \ge T_s \times \left|\frac{dx(t)}{dt}\right|_{\max} \qquad (1)$$

όπου δ είναι το μέγεθος του βήματος κβάντισης, $x(t)$ είναι το σήμα εισόδου και T_s είναι η περίοδος δειγματοληψίας.

Η ερμηνεία της παραπάνω συνθήκης είναι η εξής. Στη διάρκεια μιας περιόδου, το βήμα κβάντισης πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο ώστε να μπορεί να παρακολουθεί τις μεταβολές (αυξήσεις ή μειώσεις) του σήματος εισόδου. Οι μεταβολές του σήματος εισόδου καθορίζονται από την παράγωγό του. Δηλαδή, το βήμα κβάντισης πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από τη μέγιστη αύξηση/μείωση του σήματος εισόδου στη διάρκεια μιας περιόδου δειγματολψίας.

Στη συγκεκριμένη άσκηση μας δίνεται το σήμα εισόδου $x(t) = A\cos(2\pi f_x t)$.

Υπολογίζουμε την παράγωγό του:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2\pi f_x A \sin(2\pi f_x t) \;\Rightarrow\; \left|\frac{dx(t)}{dt}\right|_{\max} = 2\pi f_x A$$

Άρα, λόγω της σχέσης (1) έχουμε $\delta \ge 2\pi f_x T_s A \;\Rightarrow\; A \le \frac{\delta}{2\pi f_x T_s}$

6.15 Πότε ο θόρυβος κβάντισης είναι ασυσχέτιστος με το σήμα εισόδου στο PCM;

<u>Απάντηση</u>

Αν υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε πολλές περιοχές κβάντισης, το εύρος Δ είναι μικρό λόγω του τύπου $\Delta = \frac{2x_{max}}{N}$ (Ν μεγάλο) και η δυναμική περιοχή εισόδου είναι μικρή. Τότε ο θόρυβος κβαντισμού μπορεί να θεωρηθεί ομοιόμορφα κατανεμημένος στο (-Δ/2,Δ/2], ασυσχέτιστος με το σήμα εισόδου, με μεγάλη μεταβλητότητα και εύρος ζώνης.

6.16 Πως σχετίζεται η δυναμική περιοχή του σήματος με το SQNR;

<u>Απάντηση</u>

Όταν αυξάνεται η δυναμική περιοχή (αύξηση x_{max}) χωρίς να αυξάνεται η διασπορά του σήματος, δηλαδή η ποσότητα $E[X^2]$, τότε υποβαθμίζεται το SQNR διότι $SQNR = \frac{E[X^2]}{E[\tilde{X}^2]} = \frac{E[X^2]}{\frac{x_{max}^2}{3N^2}}$. Όπως παρατηρούμε όταν αυξάνεται το x_{max} το SQNR μειώνεται.

6.17 Πως σχετίζονται τα bits ή τα επίπεδα του κβαντιστή με το SQNR του κβαντιστή;

<u>Απάντηση</u>

Στο ομοιόμορφο PCM το άνω όριο του $SQNR \le 3 \bullet 4^n$ όπου n τα bits του κβαντιστή. Παρατηρούμε ότι όταν αυξάνονται τα bits του κβαντιστή, άρα και τα επίπεδα του κβαντιστή λόγω της σχέσης $N=2^n$, αυξάνεται το άνω όριο του SQNR άρα και το SQNR.

6.18 Πως σχετίζονται τα bits ή τα επίπεδα του κβαντιστή με το εύρος ζώνης του μεταδιδόμενου σήματος στο PCM;

<u>Απάντηση</u>

Το εύρος ζώνης του μεταδιδόμενου σήματος δίνεται από τον τύπο: $BW \ge \frac{nf_s}{2}$ ή τον τύπο: $BW \ge nW$.

Παρατηρούμε ότι το PCM αυξάνει το εύρος ζώνης του αρχικού σήματος κατά n στην καλύτερη περίπτωση δηλ. όταν πάρουμε ως συχνότητα δειγματοληψίας $f_s=2W$ δηλ. τη μικρότερη τιμή της f_s.

6.19 Σε ποια περίπτωση θα επιλέγατε ομοιόμορφο PCM και σε ποια περίπτωση μη ομοιόμορφο PCM;

<u>Απάντηση</u>

Το ομοιόμορφο σύστημα PCM λειτουργεί ικανοποιητικά για ομοιόμορφη κατανομή του σήματος εισόδου δηλ. όταν το σήμα εισόδου κατανέμεται ομοιόμορφα σε ολόκληρη τη δυναμική περιοχή των τιμών του. Το μη ομοιόμορφο σύστημα PCM χρησιμοποιείται όταν το σήμα δεν έχει ομοιόμορφη κατανομή όπως π.χ. ένα σήμα φωνής. Στα σήματα φωνής τα μικρότερα πλάτη εμφανίζονται πιο συχνά από τα μεγάλα, άρα ο κβαντιστής θα πρέπει να σχεδιαστεί με περισσότερες περιοχές κβάντισης στα μικρά πλάτη. Ο συμπιεστής μειώνει τη δυναμική περιοχή του σήματος, συμπιέζει τα μεγάλα πλάτη του σήματος και η έξοδος του είναι μια ακολουθία δειγμάτων από ομοιόμορφο κβαντιστή.

Σετ 7 - Γεωμετρική Αναπαράσταση Κυματομορφών Σήματος

7.1 Ποιές είναι οι βασικές διαφορές της ορθοκανονικής αναπαράστασης κατά Grahm-Schmidt με άλλες αναπαραστάσεις (αναπτύξεις) όπως π.χ. σειρά Fourier, ανάπτυξη με συναρτήσεις sinc() κ.λ.π.

Απάντηση

Ο βασικές διαφορές της ορθοκανονικής αναπαράστασης κατά Gram-Schmidt με άλλες αναπαραστάσεις όπως π.χ. σειρά Fourier, ανάπτυξη με συναρτήσεις sinc κλπ, είναι:

- Κατά την ανάπτυξη των σημάτων σε σειρά Fourier ή με συναρτήσεις sinc, οι συναρτήσεις βάσης είναι προκαθορισμένες. Δηλαδή για όλα τα σήματα χρησιμοποιούνται ίδιες συναρτήσεις βάσης. Αντιθέτως, κατά την αναπαράσταση Gram-Schmidt, οι συναρτήσεις βάσης εξαρτώνται από τα σήματα που θέλουμε να αναπαραστήσουμε.
- Κατά την ανάπτυξη των σημάτων σε σειρά Fourier ή με συναρτήσεις sinc, για ακριβή αναπαράσταση χρειαζόμαστε (στη γενική περίπτωση) άπειρο πλήθος όρων. Αντιθέτως, η αναπαράσταση κατά Gram-Schmidt οδηγεί σε πεπερασμένο ανάπτυγμα.

7.2 Σε τι χρησιμεύει η γεωμετρική αναπαράσταση των κυματομορφών που έχουμε στην ψηφιακή διαμόρφωση σημάτων; Στην ανάλυση της επίδοσης τους, ως εργαλείο σχεδιασμού ή και τα δύο; Αιτιολογήστε την απάντηση σας

Απάντηση

Η γεωμετρική αναπαράσταση των κυματομορφών χρησιμεύει και ως εργαλείο σχεδιασμού διαφόρων συστημάτων διαμόρφωσης σήματος και κατά την ανάλυση της επίδοσης τέτοιων συστημάτων.

Ο λόγος είναι ότι μπορούν να αξιοποιηθούν γνωστά εργαλεία από τη γραμμική άλγεβρα και τη θεωρία πιθανοτήτων και στοχαστικών διαδικασιών. Επίσης, δίνεται μια καλύτερη διαισθητική κατανόηση.

Όσον αφορά το σχεδιασμό.

Π.χ. για τον σχεδιασμό ενός συστήματος διαμόρφωσης M-PAM απλά τοποθετούμε τα σύμβολα πάνω σε μια ευθεία. Για τον σχεδιασμό ενός M-PSK, απλά τοποθετούμε τα σύμβολα, πάνω σε έναν κύκλο με κατάλληλα επιλεγμένη ακτίνα.

Όσον αφορά την ανάλυση επίδοσης.

Μετράμε την απόσταση του συμβόλου από την αρχή των αξόνων για να βρούμε την ενέργειά του (είναι το τετράγωνο της απόστασης). Μετράμε τις αποστάσεις μεταξύ των συμβόλων για να εκτιμήσουμε την πιθανότητα σφάλματος συμβόλου.

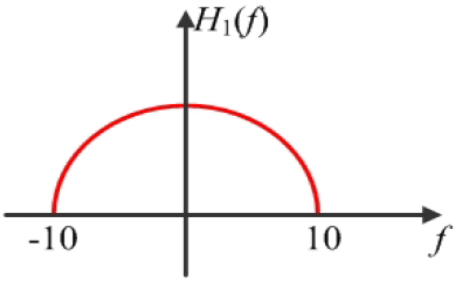
7.3 Για ποιους λόγους είναι χρήσιμη η ζωνοπερατή μετάδοση;

Απάντηση

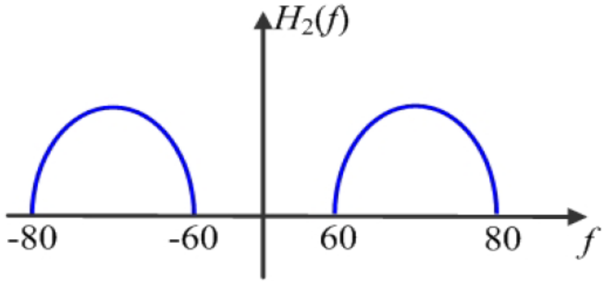
Υπάρχουν δύο κατηγορίες καναλιών:

- Βασικής ζώνης (baseband): η ζώνη διέλευσης περιλαμβάνει τη συχνότητα $f = 0$
- Ζωνοπερατά (bandpass): η ζώνη διέλευσης ΔΕΝ περιλαμβάνει τη συχνότητα $f = 0$

Στο παρακάτω Σχήμα φαίνεται η απόκριση συχνοτήτων ενός καναλιού βασικής ζώνης και ενός ζωνοπερατού καναλιού.



Κανάλι βασικής ζώνης.

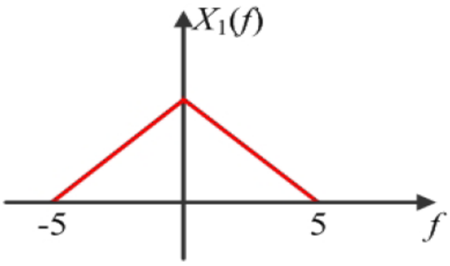


Ζωνοπερατό κανάλι.

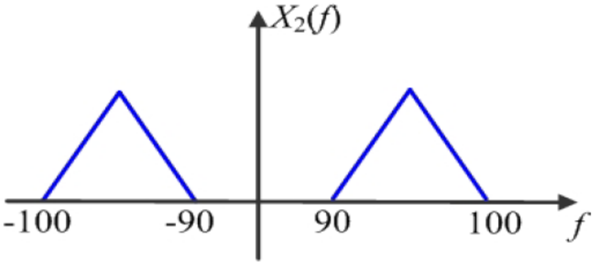
Ομοίως, και τα σήματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

- Βασικής ζώνης: το φάσμα τους περιλαμβάνει τη συχνότητα $f = 0$
- Ζωνοπερατά: το φάσμα τους ΔΕΝ περιλαμβάνει τη συχνότητα $f = 0$

Στο παρακάτω Σχήμα φαίνεται το φάσμα (Μετασχηματισμός Fourier) ενός σήματος βασικής ζώνης και ενός ζωνοπερατού σήματος.

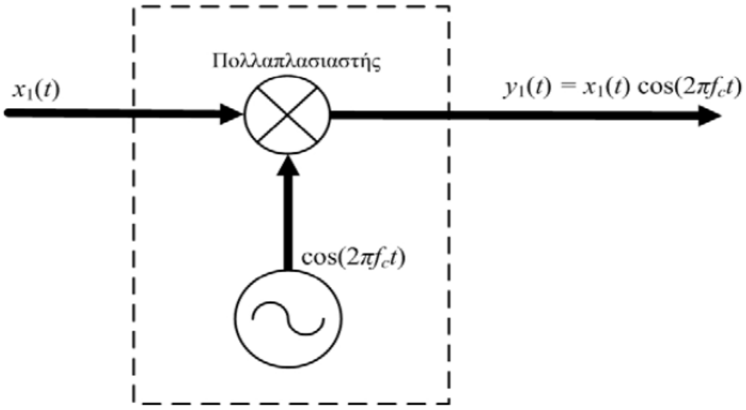


Σήμα βασικής ζώνης.



Ζωνοπερατό σήμα.

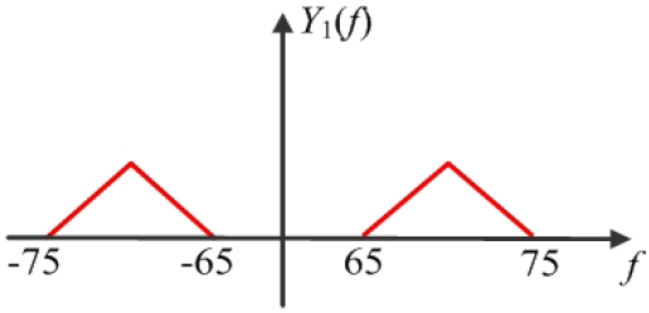
Έστω ότι διαθέτουμε ένα ζωνοπερατό κανάλι (π.χ. το $H_2(f)$ του πρώτου σχήματος) και μέσα από αυτό θέλουμε να μεταδώσουμε ένα σήμα βασικής ζώνης (π.χ. το $X_1(f)$ του δεύτερου σχήματος). Για να μπορεί να γίνει η μετάδοση θα πρέπει το φάσμα του σήματος να τοποθετηθεί στη ζώνη διέλευσης του καναλιού. Δηλαδή το σήμα να γίνει ζωνοπερατό. Αυτό επιτυγχάνεται με διαμόρφωση του σήματος. Δηλαδή πολλαπλασιάζουμε το σήμα (στο πεδίο του χρόνου) με το σήμα $\cos(2\pi f_c t)$, όπου f_c είναι η κεντρική (φέρουσα) συχνότητα του καναλιού. Στο ζωνοπερατό κανάλι $H_2(f)$ η φέρουσα συχνότητα είναι $f_c = 70\,Hz$.



Επομένως, μετά τη διαμόρφωση προκύπτει το σήμα $y_1(t) = x_1(t)\cos(2\pi f_c t)$. Στο πεδίο της συχνότητας, λόγω της ιδιότητας της διαμόρφωσης του Μετασχηματισμού Foureir θα έχουμε:

$$Y_1(f) = \frac{1}{2}X_1(f - f_c) + \frac{1}{2}X_1(f + f_c)$$

Το φάσμα του διαμορφωμένου σήματος φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα και βλέπουμε ότι είναι ζωνοπερατό.



Συνοψίζοντας, ένας από τους λόγους που κάνουμε ζωνοπερατή μετάδοση είναι όταν διαθέτουμε ένα ζωνοπερατό κανάλι. Αν το σήμα που θέλουμε να μεταδώσουμε είναι βασικής ζώνης, τότε πριν από τη μετάδοση κάνουμε διαμόρφωση του σήματος ώστε αυτό να γίνει ζωνοπερατό.

Ένας άλλος λόγος που είναι χρήσιμη η ζωνοπερατή μετάδοση είναι η δυνατότητα εφαρμογής της Πολυπλεξίας Διαίρεσης Συχνοτήτων (Frequency Division Multiplexing, FDM). Δηλαδή το εύρος ζώνης του καναλιού χωρίζεται σε διαστήματα συχνοτήτων, κάτι που επιτρέπει την ταυτόχρονη μετάδοση πολλών σημάτων μέσα από το ίδιο κανάλι.

7.4 Να αποδειχτεί ότι η προβολή του θορύβου σε καθεμία από τις συναρτήσεις βάσης του χώρου σημάτων είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μηδέν

Απάντηση

Έστω έχουμε K συναρτήσεις βάσης: $\psi_k(t),\ k=1,2,...,K$. Με $n(t)$ συμβολίζουμε τον θόρυβο.

Όπως είναι γνωστό, η προβολή του θορύβου στη συνάρτηση βάσης $\psi_k(t)$ είναι:

$n_k = \int_0^{T_s} n(t)\psi_k(t)dt,\ \ k=1,2,...,K$, όπου T_s είναι η διάρκεια του συμβόλου.

Ο θόρυβος $n(t)$ μοντελοποιείται ως στοχαστικό σήμα (τυχαίο σήμα). Οι συναρτήσεις βάσης είναι ντετερμινιστικά σήματα. Επομένως, η προβολή $n_k,\ (k=1,2,...,K)$ είναι τυχαία μεταβλητή.

Ας υπολογίσουμε τη μέση της τιμή: $E[n_k] = \int_0^{T_s} E[n(t)]\psi_k(t)dt = \int_0^{T_s} 0\cdot\psi_k(t)dt = 0$.

Στον παραπάνω υπολογισμό θεωρήσαμε ότι η μέση τιμή του θορύβου είναι μηδέν, δηλ. $E[n(t)]=0$. Η υπόθεση αυτή είναι αληθής εάν π.χ. ο θόρυβος είναι λευκός (που είναι μια συνηθισμένη υπόθεση).

7.5 Ποιο το πλεονέκτημα της χρήσης ορθοκανονικής βάσης; Πότε η διάσταση του χώρου ορθοκανονικών κυματομορφών είναι ίση με τη διάσταση του χώρου σημάτων;

Απάντηση

Το πλεονέκτημα της χρήσης ορθοκανονικής βάσης είναι ότι λόγω του γεγονότος ότι δύο ή περισσότερες κυματομορφές σήματος μπορεί να είναι γραμμικά εξαρτημένες μεταξύ τους ο χώρος σημάτων (ορθοκανονικής βάσης) N είναι μικρότερος του αριθμού των κυματομορφών M.

Η διάσταση N του χώρου ορθοκανονικών κυματομορφών θα είναι ίση με τη διάσταση M του χώρου σημάτων (ή αναλογικών κυματομορφών) μόνο αν οι M αναλογικές κυματομορφές είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους

Σετ 8 -Διαμόρφωση Παλμών κατά Πλάτος (PAM)

8.1 Ποιά σχέση συνδέει το εύρος ζώνης και την ενέργεια σήματος στη διαμόρφωση PAM βασικής ζώνης και στη ζωνοπερατή διαμόρφωση PAM;

Απάντηση

Το διαμορφωμένο κατά πλάτος σήμα στη ζωνοπερατή διαμόρφωση PAM καταλαμβάνει ένα εύρος ζώνης καναλιού ίσο με 2W το οποίο είναι διπλάσιο του εύρους ζώνης που απαιτείται για τη μετάδοση του σήματος βασικής ζώνης. Η ενέργεια του ζωνοπερατού σήματος είναι το μισό της ενέργεια του σήματος βασικής ζώνης.

8.2 Ποιο είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε ως σύμβολα τετραδικού PAM, τα [-3, -1, 1, 3] ή τα [0, 2, 4, 6]; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας

Απάντηση

Για την επιλογή των συμβόλων βασιζόμαστε στα δύο παρακάτω κριτήρια

- ελαχιστοποίηση της πιθανότητας σφάλματος συμβόλου
- ελαχιστοποίηση της απαιτούμενης μέσης ενέργειας

Όσον αφορά το 1° κριτήριο, οι επιλογές $[-3,-1,\ 1,\ 3]$ και $[0,\ \ 2,\ \ 4,\ 6]$ είναι ισοδύναμες. Αφού και στις δύο επιλογές οι αποστάσεις των συμβόλων είναι ίδιες.

Όσον αφορά το 2° κριτήριο, θα υπολογίσουμε τη μέση ενέργεια για κάθε μια από τις δύο επιλογές και θα προτιμήσουμε την επιλογή που έχει μικρότερη απαίτηση σε ενέργεια.

Η μέση ενέργεια του M-αδικού PAM δίνεται από:

$$E_{av} = E_g \sum_{m=1}^{M} A_m^2 P(s_m)\,,$$

όπου E_g είναι η ενέργεια του βασικού παλμού $g(t)$, $A_m,\ m=1,\ldots,M$ είναι το πλάτος του συμβόλου s_m και $P(s_m)$ είναι η πιθανότητα του συμβόλου s_m.

Η εκφώνηση της άσκησης δεν αναφέρει ποιες είναι οι πιθανότητες των συμβόλων. Οπότε υποθέτουμε ισοπίθανα σύμβολα. Δηλαδή $P(s_m) = \dfrac{1}{M},\ m=1,\ldots,M$.

Τότε η μέση ενέργεια είναι:

$$E_{av} = \frac{E_g}{4} \sum_{m=1}^{4} A_m^2$$

Άρα έχουμε:

- επιλογή $[-3,-1,\ 1,\ 3]$: $E_{av} = \dfrac{E_g}{4}((-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2) = 5E_g$
- επιλογή $[0,\ \ 2,\ \ 4,\ 6]$: $E_{av} = \dfrac{E_g}{4}(0^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2) = 14E_g$

Βλέπουμε ότι η επιλογή $[-3,-1,\ 1,\ 3]$ χρησιμοποιεί μικρότερη μέση ενέργεια. Άρα επιλέγουμε αυτήν.

8.3 Να σχολιαστούν τα σχετικά πλεονεκτήματα του Μ-αδικού PAM βασικής ζώνης (αναφορικά με το απαιτούμενο εύρος ζώνης, ρυθμό μεταδιδόμενης πληροφορίας, απαιτούμενη ισχύ, πολυπλοκότητα κ.λ.π.)

Απάντηση

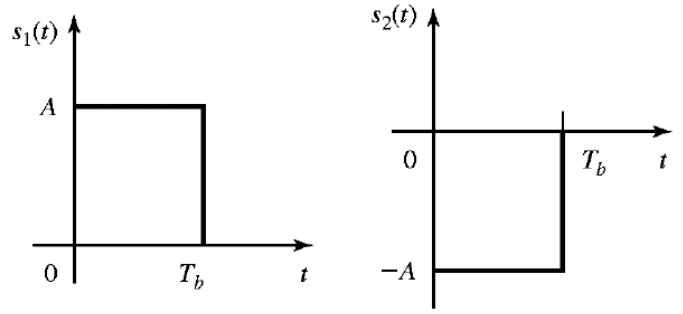
Είναι γνωστό ότι για να μην έχουμε διασυμβολική παρεμβολή, το εύρος ζώνης του καναλιού πρέπει να είναι $W_{ch} \geq \dfrac{R_{pulse}}{2}$, όπου R_{pulse} είναι ο ρυθμός μετάδοσης παλμών.

Στα δυαδικά συστήματα διαμόρφωσης κάθε παλμός μεταφέρει ένα bit. Άρα $R_{pulse} = R_b$.

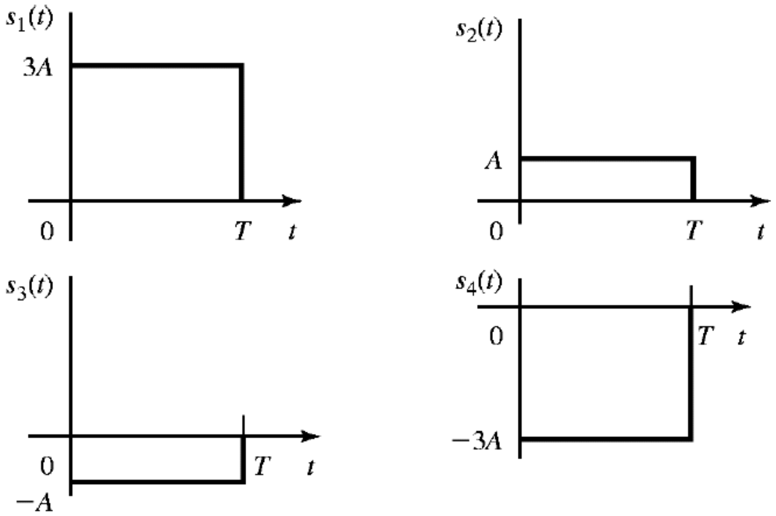
Στα M-αδικά συστήματα διαμόρφωσης κάθε παλμός μεταφέρει $k = \log_2 M$ bits . Άρα $R_{pulse} = \dfrac{R_b}{k}$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι για το ίδιο R_b το M-αδικό PAM απαιτεί k φορές μικρότερο εύρος ζώνης σε σύγκριση με το δυαδικό PAM.

Το δυαδικό PAM χρησιμοποιεί τις δύο ακόλουθες κυματομορφές



Το M-αδικό PAM χρησιμοποιεί M κυματομορφές. Π.χ. αν $M = 4$, τότε οι κυματομορφές είναι



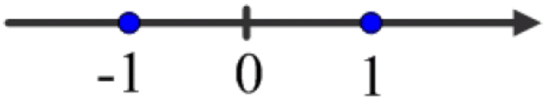
Βλέπουμε ότι η απαιτούμενη ισχύς στην περίπτωση του M-αδικού PAM είναι μεγαλύτερη σε σύγκριση με το δυαδικό PAM.

Όσον αφορά την πολυπλοκότητα, το δυαδικό PAM είναι απλούστερο, αφού χρησιμοποιεί λιγότερες κυματομορφές σε σύγκριση με το M-αδικό PAM.

8.4 Δίνεται δυαδικό PAM βασικής ζώνης με απόσταση συμβόλου ίση με ένα. Υποθέτουμε ότι προστίθεται θόρυβος με τριγωνική κατανομή τιμών στο εύρος [0, 1.5] (με την πιθανότητα να μειώνεται όσο η τιμή μεγαλώνει). Που θα τοποθετούσατε το κατώφλι απόφασης και γιατί;

<u>Απάντηση</u>

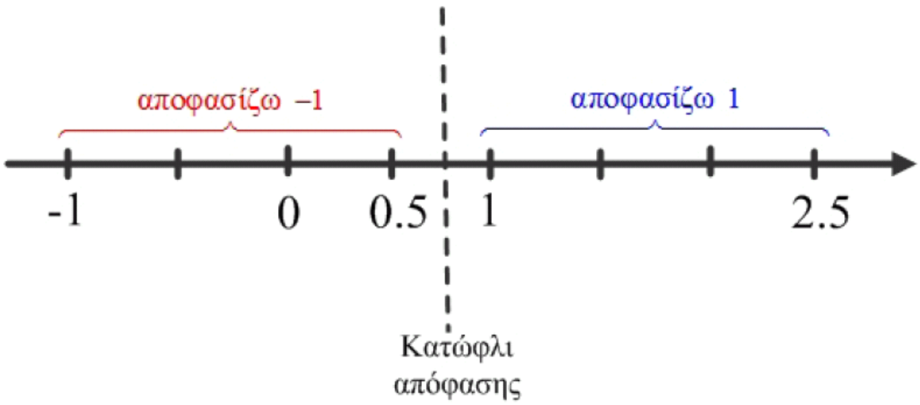
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ο αστερισμός 2-PAM με απόσταση κάθε συμβόλου από το κέντρο να είναι ίση με 1.



Σχήμα 1: Σύστημα 2-PAM με πλάτος συμβόλου ίσο με 1.

Ο θόρυβος παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1.5]$. Αυτό σημαίνει ότι όταν μεταδίδεται το σύμβολο -1, τότε λαμβάνεται τιμή στο διάστημα $[-1, 0.5]$ (αφού ο θόρυβος είναι προσθετικός). Ενώ όταν μεταδίδεται το σύμβολο 1, τότε λαμβάνεται τιμή στο διάστημα $[1, 2.5]$.

Παρατηρούμε ότι τα διαστήματα $[-1, 0.5]$ και $[1, 2.5]$ είναι μη επικαλυπτόμενα. Άρα η δουλειά του φωρατή είναι πολύ εύκολη. Αν λάβει τιμή στο διάστημα $[-1, 0.5]$, τότε αποφασίζει ότι είχε σταλεί το σύμβολο -1. Ενώ αν λάβει τιμή στο διάστημα $[1, 2.5]$, τότε αποφασίζει ότι είχε σταλεί το σύμβολο 1. Επομένως, το κατώφλι απόφασης του φωρατή πρέπει να τοποθετηθεί κάπου μεταξύ των διαστημάτων αυτών. Π.χ. στο σημείο 0.75.



Να σημειωθεί ότι επειδή τα διαστήματα $[-1, 0.5]$ και $[1, 2.5]$ είναι μη επικαλυπτόμενα, δεν έχει καμιά σημασία η κατανομή των τιμών του θορύβου.

8.5. Χρειάζεται ή όχι σε ένα ζωνοπερατό σύστημα η μορφοποίηση παλμού όπως αυτή γίνεται σε ένα σύστημα PAM βασικής ζώνης

<u>Απάντηση</u>

Σε συστήματα PAM (βασικής ζώνης και ζωνοπερατά) τα σύμβολα διακρίνονται με βάση το διαφορετικό πλάτος A_m με το οποίο πολλαπλασιάζεται ο βασικός παλμός $g(t)$.

Στο *M*-αδικό PAM βασικής ζώνης τα σήματα που μεταδίδονται είναι $s_m(t) = A_m g(t),\ m = 1,\ldots,M$.

Στο *M*-αδικό ζωνοπερατό PAM τα σήματα είναι $s_m(t) = A_m g(t)\cos(2\pi f_c t)$, όπου f_c είναι η κεντρική συχνότητα του καναλιού.

Βλέπουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις χρειάζεται να γίνει μορφοποίηση του βασικού παλμού με κατάλληλο πλάτος.

Η διαφορά της ζωνοπερατής μετάδοσης από την μετάδοση στη βασική ζώνη είναι ότι στην ζωνοπερατή μετάδοση, μετά την μορφοποίηση του παλμού, το φάσμα του πρέπει να μεταφερθεί στη ζώνη διέλευσης του καναλιού. Αυτό επιτυγχάνεται πολλαπλασιάζοντας με το σήμα βασικής ζώνης με $\cos(2\pi f_c t)$.

8.6 Ποιο το πλεονέκτημα και ποιο το μειονέκτημα του ζωνοπερατού PAM σε σχέση με το PAM βασικής ζώνης;

Απάντηση

Το πλεονέκτημα του ζωνοπερατού PAM είναι ότι η ενέργεια του ζωνοπερατού σήματος είναι η μισή της ενέργειας του σήματος βασικής ζώνης. Το μειονέκτημα του ζωνοπερατού PAM είναι ότι καταλαμβάνει το διπλάσιο εύρος ζώνης σε σχέση με το PAM βασικής ζώνης.

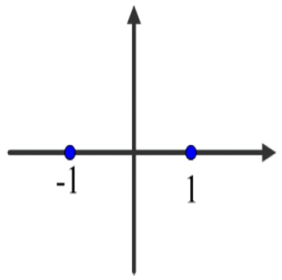
Σετ 9 -Δισδιάστατες Κυματομορφές Σήματος (PSK, Κώδικας GRAY, QAM)

9.1 Δίνονται i)σύστημα 2-PSK με πλάτος συμβόλου ίσο με 1 και β)σύστημα 4-PSK με πλάτος συμβόλου ίσο με 2. Σε ποιο από τα 2 συστήματα αναμένεται να έχουμε μικρότερη πιθανότητα σφάλματος και γιατί;

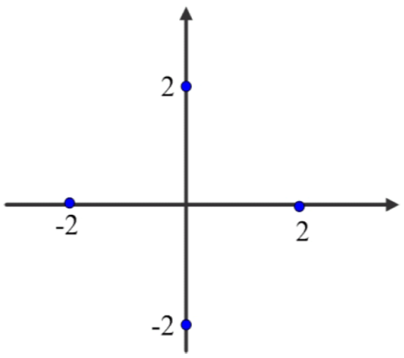
<u>Απάντηση</u>

Στα Σχήματα 1 και 2 παρουσιάζονται οι αστερισμοί των δύο συστημάτων. Η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου εξαρτάται από την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των συμβόλων. Όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση αυτή, τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα σφάλματος.

Στο πρώτο σύστημα η ελάχιστη απόσταση είναι $d_1 = 2$, ενώ στο δεύτερο είναι $d_2 = 2\sqrt{2}$. Άρα στο δεύτερο σύστημα αναμένεται να έχουμε μικρότερη πιθανότητα σφάλματος.



Σχήμα 1: Σύστημα 2-PSK με πλάτος συμβόλου ίσο με 1.

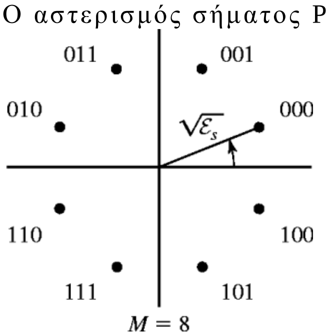


Σχήμα 2: Σύστημα 4-PSK με πλάτος συμβόλου ίσο με 2.

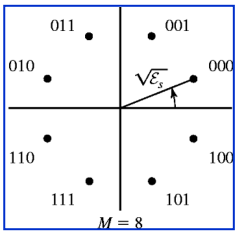
9.2 Να δώσετε τον αστερισμό σήματος PSK για M=8 σήματα. Ποια αντιστοίχηση είναι η πιο αποδοτική και ποια τα πλεονεκτήματα της;

<u>Απάντηση</u>

Ο αστερισμός σήματος PSK για M=8 σήματα φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα:



Η αντιστοίχιση των μπλοκ k bits σε σύμβολα μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Η απεικόνιση που προτιμάται είναι αυτή της κωδικοποίησης Gray κατά την οποία διαδοχικές φάσεις διαφέρουν κατά ένα δυαδικό ψηφίο όπως φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα:



Κατά τη μετάδοση του σήματος προστίθεται θόρυβος. Ο δέκτης λαμβάνει σύμβολο συν το θόρυβο. Το ληφθέν σημείο μετατοπίζεται στη γεωμετρική αναπαράσταση του δέκτη. Η μετατόπιση γίνεται στη γειτονιά του πραγματικού συμβόλου. Ο δέκτης μπορεί να πάρει εσφαλμένη απόφαση για το σύμβολο που στάλθηκε. Επειδή τα πιθανότερα σφάλματα που προκαλούνται από το θόρυβο οδηγούν στην εσφαλμένη επιλογή μιας φάσης γειτονική ως προς τη μεταδιδόμενη φάση, με την κωδικοποίηση Gray μόνο ένα Bit είναι εσφαλμένο στην ακολουθία των k bits. Το λανθασμένο σύμβολο είναι συνήθως κάποιο από τα γειτονικά του πραγματικού συμβόλου.

9.3 Πως επηρεάζει η ελάχιστη ευκλείδεια απόσταση δύο σημείων σήματος την επίδοση του ρυθμού σφαλμάτων στο δέκτη;

<u>Απάντηση</u>

Η ελάχιστη ευκλείδεια απόσταση δύο σημείων σήματος είναι

$$d_{\min} = \sqrt{2E_s\left(1-\cos\frac{2\pi}{M}\right)}$$

Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σημείων ενός αστερισμού σημάτων επηρεάζει σημαντικά την απόδοση του αστερισμού ως προς τα σφάλματα. Η πιθανότητα σφάλματος μεταξύ δύο σημάτων s1 και s2 μπορεί να εκφρασθεί τη βοήθεια της απόστασης ανάμεσα τους. Όταν τα δύο σύμβολα είναι ισοπίθανα, η μέση πιθανότητα σφάλματος bit (συμβόλου) είναι:

$$P_b = \frac{1}{2}P(e|s_1) + \frac{1}{2}P(e|s_2) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Αντικαθιστώντας το $\varepsilon_b = d_{12}^2/4$ στην προηγούμενη εξίσωση παίρνουμε:

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^{\;2}}{2N_0}}\right)$$

Η έκφραση αυτή δείχνει την εξάρτηση της πιθανότητας σφάλματος από την απόσταση μεταξύ δύο σημείων σήματος. **Αυτό που προκύπτει από την έκφραση αυτή είναι ότι όσο μεγαλώνει η απόσταση μεταξύ δύο σημείων σήματος, τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα του σφάλματος**. Η εξίσωση $P_b = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^{\;2}}{2N_0}}\right)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της πιθανότητας σφάλματος οποιουδήποτε τηλεπικοινωνιακού συστήματος το οποίο χρησιμοποιεί δύο ισοπίθανα σήματα

9.4. Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα QAM με 16 σύμβολα (M=16) .Προφανώς υπάρχουν πολλές δυνατές διατάξεις των 16 συμβόλων στο επίπεδο. Με βάση ποιο-α κριτήριο-α (κατά την κρίση σας) θα γίνει ο σχεδιασμός;

<u>Απάντηση</u>

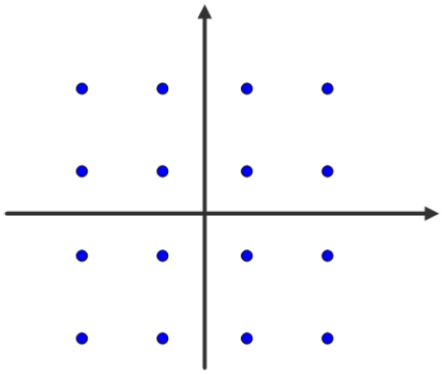
Ο σχεδιασμός θα γίνει με βάση τα δύο παρακάτω κριτήρια:

- Ελαχιστοποίηση της μέσης ενέργειας συμβόλου
- Ελαχιστοποίηση της μέσης πιθανότητας σφάλματος συμβόλου

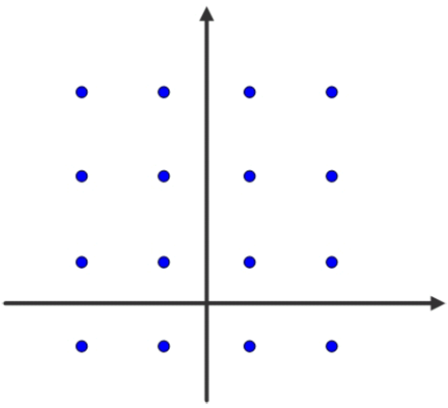
I. Βελτιστοποίηση όσον αφορά το 1^{o} κριτήριο

Όσον αφορά το 1^{o} κριτήριο, η βέλτιστη επιλογή είναι να τοποθετηθούν τα σύμβολα συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Αυτή η επιλογή χρησιμοποιεί τη μικρότερη δυνατή μέση ενέργεια συμβόλου για δεδομένη μέση πιθανότητα σφάλματος συμβόλου (δηλ. για δεδομένη απόσταση μεταξύ των συμβόλων).

Για γίνει πιο κατανοητός ο παραπάνω ισχυρισμός, ας δούμε ένα παράδειγμα. Στα Σχήματα 1 και 2 δίνονται δύο διαφορετικές τοποθετήσεις των 16 συμβόλων στο επίπεδο. Βλέπουμε ότι οι αποστάσεις μεταξύ των συμβόλων στον αστερισμό του Σχήματος 1 είναι ίσες με τις αποστάσεις μεταξύ των συμβόλων του αστερισμού του Σχήματος 2. Αυτό σημαίνει ότι και οι δύο επιλογές οδηγούν στην ίδια πιθανότητα σφάλματος. Άρα όσον αφορά το 2^{ο} κριτήριο, οι δύο αυτοί αστερισμοί είναι ισοδύναμοι. Όμως, ο πρώτος αστερισμός έχει μικρότερη μέση απαίτηση σε ενέργεια, αφού εκεί η μέση απόσταση συμβόλου από την αρχή των αξόνων είναι μικρότερη σε σύγκριση με τον δεύτερο αστερισμό. Δηλαδή, όσον αφορά το 1^{ο} κριτήριο, ο πρώτος αστερισμός είναι προτιμότερος.



Σχήμα 1: $M = 16$, συμμετρική τοποθέτηση συμβόλων.

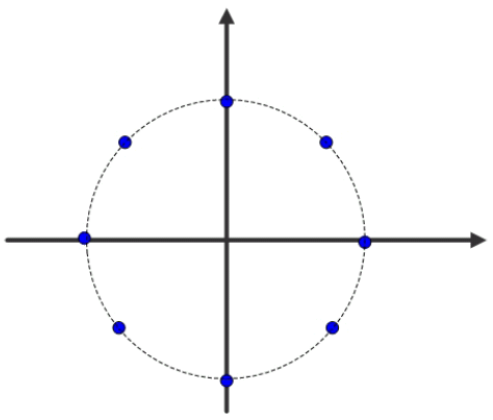


Σχήμα 2: $M = 16$, μη συμμετρική τοποθέτηση συμβόλων.

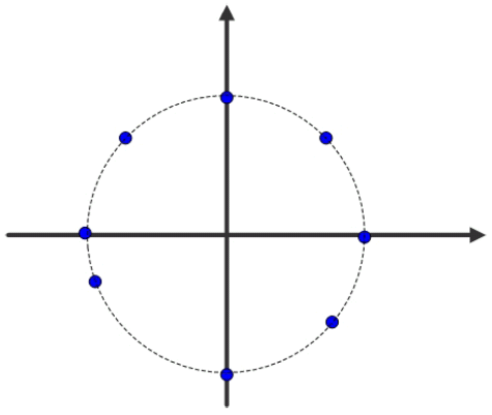
II. Βελτιστοποίηση όσον αφορά το 2^{ο} κριτήριο

Όσον αφορά το 2^{ο} κριτήριο, η βέλτιστη επιλογή είναι να τοποθετηθούν τα σύμβολα έτσι ώστε οι αποστάσεις μεταξύ των γειτονικών συμβόλων να είναι ίσες. Αυτή η επιλογή επιτυγχάνει τη μικρότερη δυνατή πιθανότητα σφάλματος για δεδομένη μέση ενέργεια συμβόλου.

Για είναι τα παραπάνω πιο κατανοητά, ας δούμε ένα παράδειγμα. Στα Σχήματα 3 και 4 δίνονται δύο διαφορετικές τοποθετήσεις των 8 συμβόλων στο επίπεδο. Βλέπουμε ότι οι αποστάσεις των συμβόλων από την αρχή των αξόνων και στα δύο Σχήματα είναι ίσες, αφού οι δύο κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες. Αυτό σημαίνει ότι οι δύο αυτοί αστερισμοί απαιτούν ίδια ενέργεια. Άρα όσον αφορά το 1ο κριτήριο, οι δύο αυτές επιλογές είναι ισοδύναμες. Όμως, η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο συμβόλων είναι μεγαλύτερη στο Σχήμα 3 σε σύγκριση με το Σχήμα 4. Αυτό σημαίνει ότι ο πρώτος αστερισμός επιτυγχάνει μικρότερη πιθανότητα σφάλματος συμβόλου σε σύγκριση με τον δεύτερο. Δηλαδή, όσον αφορά το 2ο κριτήριο, ο αστερισμός του Σχήματος 3 είναι προτιμότερος.

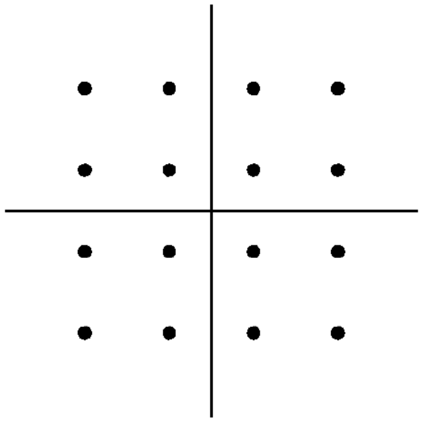


Σχήμα 3: $M = 8$, ίσες αποστάσεις μεταξύ των συμβόλων.

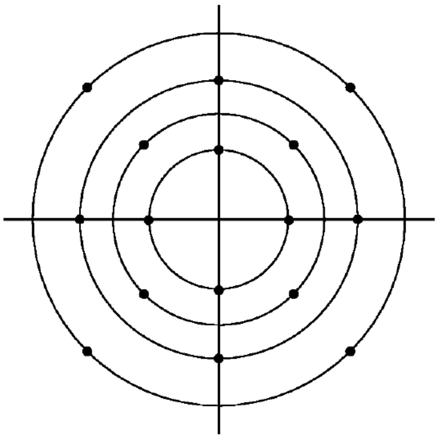


Σχήμα 4: $M = 8$, διαφορετικές αποστάσεις μεταξύ των συμβόλων.

Με βάση τα παραπάνω για το 16-QAM επιλέγουμε διάταξη συμβόλων που είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων και όπου οι αποστάσεις μεταξύ των συμβόλων είναι ίσες. Άρα οι πιθανές επιλογές είναι αυτές που παρουσιάζονται στα Σχήματα 5 και 6.



Σχήμα 5: 16-QAM (τετραγωνικός αστερισμός)

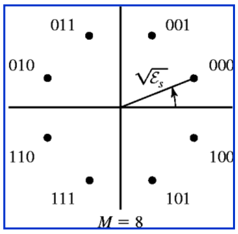


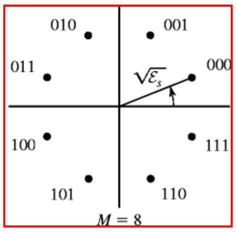
Σχήμα 6: 16-QAM (κυκλικός αστερισμός)

9.5. Γιατί χρησιμοποιείται κωδικοποίηση Gray στα M-αδικά συστήματα διαμόρφωσης;

Απάντηση

Κατά τη μετάδοση ενός σήματος προστίθεται θόρυβος. Ο δέκτης λαμβάνει το σύμβολο και το θόρυβο. Το ληφθέν σημείο μετατοπίζεται στη γεωμετρική αναπαράσταση του δέκτη. Η μετατόπιση αυτή γίνεται στη γειτονιά του πραγματικού συμβόλου. Ο δέκτης μπορεί να πάρει εσφαλμένη απόφαση για το σύμβολο που στάλθηκε. Το λανθασμένο σύμβολο είναι συνήθως κάποιο από τα γειτονικά του πραγματικού συμβόλου. Ο τρόπος τοποθέτησης των συμβόλων συμφέρει να είναι η κωδικοποίηση Gray διότι (όπως φαίνεται στην αριστερή εικόνα) στην **Κωδικοποίηση Gray τα γειτονικά (διαδοχικά) σύμβολα διαφέρουν μόνο κατά ένα bit**, ενώ σε μια τυχαία κωδικοποίηση (όπως φαίνεται στη δεξιά εικόνα) **τα γειτονικά (διαδοχικά) σύμβολα διαφέρουν μόνο κατά 3 bit**





Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η απόσταση μεταξύ 2 σημείων PSK είναι:

$$d_{\min} = \sqrt{2E_s(1-\cos\frac{2\pi}{M})}$$

Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σημείων ενός αστερισμού σημάτων επηρεάζει σημαντικά την απόδοση του αστερισμού ως προς τα σφάλματα. Σύμφωνα με την κωδικοποίηση Gray αν λάβουμε ένα εσφαλμένο σήμα αυτό θα διαφέρει από το σωστό του που θα είναι ένα γειτονικό σήμα κατά 1 bit. Η απόσταση του εσφαλμένου σήματος από το γειτονικό του είναι d_{min}.

9.6 Με ποιο τρόπο θα μπορούσε να γίνει η δυαδική κωδικοποίηση των συμβόλων ενός αστερισμού 8-PSK ώστε να επιτυγχάνεται πιθανότητα σφάλματος bit που να είναι περίπου ίση με το 1/3 της πιθανότητα σφάλματος συμβόλου; Εκτός από κατάλληλη κωδικοποίηση ποια άλλη προϋπόθεση πρέπει να ισχύει;

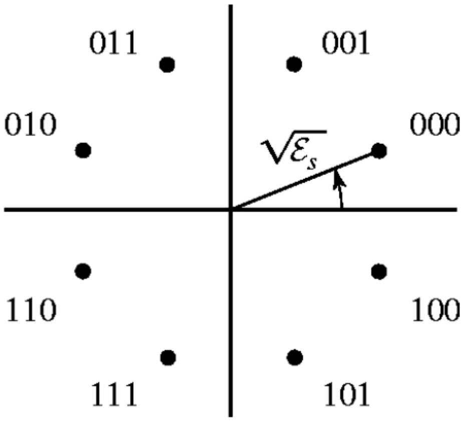
Απάντηση

Στο 8-PSK χρησιμοποιούνται $M = 8$ σύμβολά. Κάθε σύμβολο μεταφέρει $k = \log_2 M = 3$ bits.

Αν θέλουμε η πιθανότητα σφάλματος bit να είναι ίση με $\frac{1}{3}$ της πιθανότητας σφάλματος συμβόλου, τότε πρέπει για κάθε σφαλμένο σύμβολο να έχουμε ακριβώς ένα σφαλμένο bit.

Για να κατανοηθεί ο παραπάνω ισχυρισμός, ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω μεταδίδουμε 200 σύμβολα και η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου είναι $P_s = 0.3$. Αυτό σημαίνει ότι 60 σύμβολα θα μεταδοθούν εσφαλμένα. Θέλουμε η πιθανότητα σφάλματος bit να είναι $P_b = \frac{P_s}{3} = 0.1$. Τα 200 σύμβολα αντιστοιχούν σε 600 bits. Για να έχουμε $P_b = 0.1$, πρέπει να έχουμε σφάλμα σε 60 bits. Δηλαδή καταλήγουμε ότι το πλήθος των σφαλμένων bits πρέπει να είναι με το πλήθος των σφαλμένων συμβόλων. Άρα για κάθε σφαλμένο σύμβολο πρέπει να έχουμε ένα σφαλμένο bit.

Αυτό επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας την κωδικοποίηση Gray.
Στο παρακάτω Σχήμα φαίνεται η κωδικοποίηση Gray για το 8-PSK.



$M = 8$

Σύμφωνα με τη κωδικοποίηση Gray, στα γειτονικά σύμβολα αντιστοιχίζονται τριάδες από bits που διαφέρουν ακριβώς κατά ένα bit. Αν υποθέσουμε ότι το σφάλμα συμβόλου μπορεί να συμβεί μόνο σε γειτονικά σύμβολα (συνήθως αυτό ισχύει), τότε για κάθε σφαλμένο σύμβολο θα έχουμε ένα σφαλμένο bit.

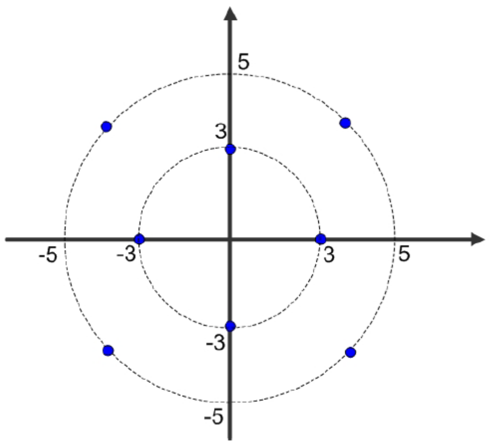
Συνοψίζοντας, λοιπόν, έχουμε ότι για να επιτυγχάνεται πιθανότητα σφάλματος bit να είναι ίση με $\frac{1}{3}$ της πιθανότητας σφάλματος συμβόλου, πρέπει να χρησιμοποιηθεί η κωδικοποίηση Gray και να ισχύει η προϋπόθεση ότι το σφάλμα συμβόλου συμβαίνει μόνο σε γειτονικά σύμβολα

9.7 Γιατί ένα σύστημα M-QAM μπορεί να πετύχει μικρότερη πιθανότητα σφάλματος συγκρινόμενο με ένα σύστημα M-PSK με την ίδια μέση ισχύ μετάδοσης

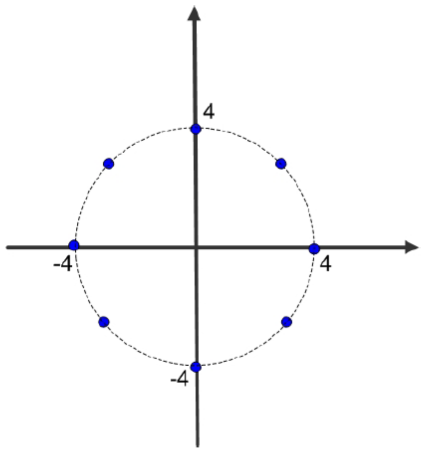
<u>Απάντηση</u>

Αρχικά ας δούμε ένα παράδειγμα.

Στο παρακάτω Σχήμα παρουσιάζονται οι αστερισμοί 8-QAM και 8-PSK.



8-QAM



8-PSK

Θεωρώντας ισοπίθανα σύμβολα, οι απαιτήσεις των δύο αστερισμών σε ενέργεια (ισχύ) είναι ίσες. Η μέση ενέργεια ανά σύμβολο είναι 4.

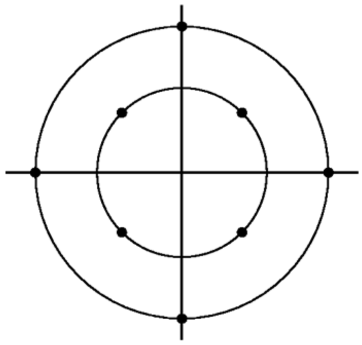
Όμως, το 8-QAM επιτυγχάνει μικρότερη πιθανότητα σφάλματος σε σύγκριση με το 8-PSK. Αυτό ισχύει επειδή (όπως φαίνεται στο παραπάνω Σχήμα και μπορεί επίσης να διαπιστωθεί με υπολογισμούς) στο 8-QAM η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των συμβόλων είναι μεγαλύτερη σε σύγκριση με την ελάχιστη απόσταση στο 8-PSK.

Γενικότερα, το M-QAM μπορεί να είναι καλύτερο από το M-PSK επειδή δεν έχει τον περιορισμό (που έχει το M-PSK) για σύμβολα ίσης ενέργειας. Επομένως, χρησιμοποιώντας στο M-QAM σύμβολα διαφορετικής ενέργειας, μπορούμε να πετύχουμε μεγαλύτερες αποστάσεις συμβολών σε σύγκριση με τις αποστάσεις στο M-PSK.

9.8 Στο 8-QAM πόσα bits περιλαμβάνει κάθε σύμβολο; Πόσα από αυτά χρησιμοποιούνται για διαμόρφωση πλάτους και πόσα για διαμόρφωση φάσης; Δείξτε τον αστερισμό 8-QAM και εξηγήστε ποια σημεία έχουν το ίδιο πλάτος και ποια την ίδια φάση; Επαναλάβετε την άσκηση για το 16-QAM

<u>Απάντηση</u>

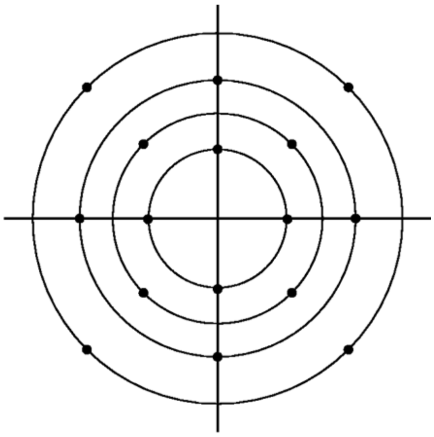
Στο 8-QAM έχουμε 8 σύμβολα και καθένα αποτελείται από 3 bits. Από αυτά χρησιμοποιούνται $k_1=\log_2 M_1=\log_2 2=1$ bit για διαμόρφωση πλάτους δίνοντας 2^1 διαφορετικά πλάτη και $k_2=\log_2 M_2=\log_2 4=2$ bit για διαμόρφωση φάσης δίνοντας 2^2 διαφορετικές φάσεις. Ο αστερισμός 8-QAM φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα:



$M = 8$

Όλα τα σημεία που βρίσκονται στον ίδιο κύκλο έχουν το ίδιο πλάτος και διαφορετική φάση, ενώ τα σημεία που βρίσκονται σε διαφορετικούς κύκλους έχουν διαφορετικά πλάτη.

Στο 16-QAM έχουμε 16 σύμβολα και καθένα αποτελείται από 4 bits. Από αυτά χρησιμοποιούνται $k_1=\log_2 M_1=\log_2 4= 2$ bit για διαμόρφωση πλάτους δίνοντας 2^2 διαφορετικά πλάτη και $k_2=\log_2 M_2=\log_2 4= 2$ bit για διαμόρφωση φάσης δίνοντας 2^2 διαφορετικές φάσεις. Ο αστερισμός 16-QAM φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα:



$M = 16$

9.9 Στο PSK πως γίνεται η μετάδοση των συμβόλων και σε τι είδους κανάλι μεταδίδονται; Ποια τα κοινά χαρακτηριστικά τους; Στο 8-PSK με ποια φάση μεταδίδονται τα 8 διαφορετικά σύμβολα;

Απάντηση

Η μετάδοση των συμβόλων γίνεται αλλάζοντας τη φάση του φέροντος. Συγκεκριμένα η φάση του φέροντος αλλάζει απότομα στην αρχή κάθε συμβόλου. Η μετάδοση γίνεται αποκλειστικά σε ζωνοπερατό κανάλι λόγω της ύπαρξης φέροντος. Όλα τα σύμβολα PSK έχουν σταθερή ενέργεια, σταθερή περιβάλλουσα και η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα τους είναι σταθερή.

Στο 8-PSK οι φάσεις των συμβόλων είναι οι εξής: [Γενικός συμβολισμός κυματομορφών PSK $u_1(t)=s_1(t)\cdot\cos(2\pi f_c t+\frac{2\pi m}{M})$ για m=0,1,... M-1]

$$\text{Για } m=0 \text{ προκύπτει: } u_0(t)=s_0(t)\cdot\cos(2\pi\cdot f_c\cdot t)$$

$$\text{Για } m=1 \text{ προκύπτει: } u_1(t)=s_1(t)\cdot\cos(2\pi f_c t+\frac{2\pi}{8})=s_1(t)\cdot\cos(2\pi f_c t+\frac{\pi}{4})$$

$$\text{Για } m=2 \text{ προκύπτει: } u_2(t)=s_2(t)\cdot\cos(2\pi f_c t+\frac{4\pi}{8})=s_2(t)\cdot\cos(2\pi f_c t+\frac{2\pi}{4})$$

$$\text{Για } m=3 \text{ προκύπτει: } u_3(t)=s_3(t)\cdot\cos(2\pi f_c t+\frac{6\pi}{8})=s_3(t)\cdot\cos(2\pi f_c t+\frac{3\pi}{4})$$

$$\text{Για } m=4 \text{ προκύπτει: } u_4(t)=s_4(t)\cdot\cos(2\pi f_c t+\frac{8\pi}{8})=s_4(t)\cdot\cos(2\pi f_c t+\frac{4\pi}{4})$$

$$\text{Για } m=5 \text{ προκύπτει: } u_5(t)=s_5(t)\cdot\cos(2\pi f_c t+\frac{10\pi}{8})=s_5(t)\cdot\cos(2\pi f_c t+\frac{5\pi}{4})$$

$$\text{Για } m=6 \text{ προκύπτει: } u_6(t)=s_6(t)\cdot\cos(2\pi f_c t+\frac{12\pi}{8})=s_6(t)\cdot\cos(2\pi f_c t+\frac{6\pi}{4})$$

$$\text{Για } m=7 \text{ προκύπτει: } u_7(t)=s_7(t)\cdot\cos(2\pi f_c t+\frac{14\pi}{8})=s_7(t)\cdot\cos(2\pi f_c t+\frac{7\pi}{4})$$

Σετ 10 -Πολυδιάστατες Κυματομορφές Σήματος (PPM, FSK)

10.1 Πως ορίζεται η διαμόρφωση PPM και σε ποιο χώρο αναπαριστάνεται ένα σήμα PPM;

Απάντηση

Αν ξεκινήσουμε από ένα σύνολο M κυματομορφών βασικής ζώνης μπούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt για να κατασκευάσουμε M<=K αμοιβαία ορθογώνιες κυματομορφές. Οι M κυματομορφές είναι απλά οι ορθοκανονικές κυματομορφές σήματος ψ_i (t) i=1, 2...., M που λαμβάνονται κατά τη διαδικασία Gram-Schmidt. Για παράδειγμα ένα σύνολο από $M=2^k$ ορθογώνιες κυματομορφές μπορεί να κατασκευασθεί από ακολουθίες Hadamard. Όταν οι M ορθογώνιες κυματομορφές είναι μη επικαλυπτόμενες χρονικά η διαβιβαζόμενη ψηφιακοί πληροφορία αποτυπώνεται από τη χρονική θέση στην οποία τοποθετείται ο παλμός. Ο τύπος αυτός σηματοδοσίας ονομάζεται διαμόρφωση παλμών κατά θέση (Pulse Code Modulation – PPM). Τα σήματα βασικής ζώνης δίνονται ως $s_m(t)=Ag_t(t-(m-1)T/M)$ για m=1...M και $(m-1)T/M\le t\le mT/M$
όπου *gT(t)* παλμός με διάρκεια *T/M* και αυθαίρετο σχήμα

Αν και κάθε κυματομορφή στο σύνολο των Ν ορθογώνιων κυματομορφών μπορεί να σχεδιαστεί ώστε να έχει διαφορετική ενέργεια εντούτοις είναι επιθυμητό για πρακτικούς λόγους όλες οι κυματομορφές να έχουν την ίδια ενέργεια. Στην περίπτωση των M PPM σημάτων (μη επικαλυπτόμενοι παλμοί διάρκειας T/M) όλες οι κυματομορφές έχουν το ίδιο πλάτος A και συνεπώς όλα τα σήματα PPM είναι ίσης ενέργειας. Οι *M* συναρτήσεις βάσεις είναι:

$$\psi_m(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{E_g}}g_T\left(t-(m-1)T/M\right), & (m-1)T/M\le t\le mT/M\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

Στο χώρο σημάτων οι M-αδικές κυματομορφές PPM αναπαρίστανται γεωμετρικά από τα M διάστατα διανύσματα:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_1&=\left[\sqrt{E_s}\quad 0\quad\cdots\quad 0\right]^{\mathrm{T}}\\ &\vdots\\ \mathbf{s}_M&=\left[0\quad 0\quad 0\quad \sqrt{E_s}\right]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

Όλα τα διανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους δηλ. $s_i\bullet s_j=0$ όταν $i\neq j$. Επίσης τα M διανύσματα σήματος ισαπέχουν δηλ. η απόσταση μεταξύ δύο σημείων στον M-D χώρο είναι:

$$d_{mn}=\sqrt{\left|\mathbf{s}_m-\mathbf{s}_n\right|^2}=\sqrt{2E_s}$$

10.2 Πως ορίζεται η διαμόρφωση FSK και σε ποιο χώρο αναπαριστάνεται ένα σήμα FSK; Τι γνωρίζετε για το συντελεστή διασυσχέτισης;

Απάντηση

Όταν τα M-αδικά σήματα επιτυγχάνουν την ορθογωνιότητα στο χώρο των συχνοτήτων τότε αυτός ο τύπος διαμόρφωσης ονομάζεται διαμόρφωση κατά συχνότητα φέροντος. Η απλούστερη μορφή αυτής της διαμόρφωσης ονομάζεται μεταλλαγή ολίσθησης συχνότητας (frequency shift keying - FSK).
Το δυαδικό FSK είναι το απλούστερο FSK στο οποίο χρησιμοποιούνται δύο φέροντα σήματα με συχνότητες *f1*, *f2* με *Δf=f2- f1*για μετάδοση δυαδικής πληροφορίας. Οι Κυματομορφές Σήματος είναι :

$$\begin{aligned}u_1(t)&=\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}}\cos 2\pi f_1 t,\quad 0\le t\le T_b\\ u_2(t)&=\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}}\cos 2\pi f_2 t,\quad 0\le t\le T_b\end{aligned}$$

Η συχνοτική απόσταση Δf επιλέγεται ώστε να επιτευχθεί ορθογωνιότητα

Στο M-αδικό FSK μεταδίδονται k=log2M bits/σύμβολο. Οι Κυματομορφές είναι:

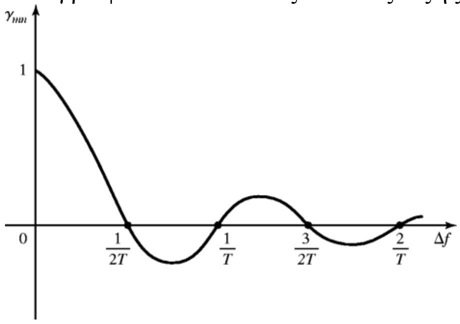
$$u_m(t)=\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\cos 2\pi\left(f_c+m\Delta f\right)t,\quad m=0,\ldots,M-1,\quad 0\le t\le T$$

Η ενέργεια συμβόλου είναι $E_s=k\bullet E_b$, η περίοδος συμβόλου είναι $T=k\bullet T_b$ και η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών συχνοτήτων είναι $\Delta f=f_m-f_{m-1}$ Όλες οι κυματομορφές έχουν την ίδια ενέργεια Es. Η απόσταση Δf καθορίζει το βαθμό που μπορούμε να διακρίνουμε τα μεταδιδόμενα σήματα.

Ο συντελεστής διασυσχέτισης είναι ένα μέτρο ομοιότητας δύο κυματομορφών σήματος. Ορίζεται ως:

$$\gamma_{mn} = \frac{1}{E_s}\int_0^T u_m(t)u_n(t)dt = \frac{\sin 2\pi(m-n)\Delta fT}{2\pi(m-n)\Delta fT}$$

και γραφικά απεικονίζεται ως εξής:



Οι κυματομορφές είναι ορθογώνιες όταν το *Δf* είναι πολλαπλάσιο του *1/(2T)*. Το ελάχιστο *Δf* για ορθογωνιότητα είναι *1/(2T)*.

10.3 Ποια η ελάχιστη απόσταση δύο διαδοχικών συχνοτήτων ενός Μ-αδικού FSK ώστε να διασφαλίζεται η συνέχεια φάσης; Γιατί η συνέχεια φάσης είναι επιθυμητή ιδιότητα;

Απάντηση

Η ελάχιστη απόσταση δύο διαδοχικών συχνοτήτων ενός Μ-αδικού FSK ώστε να διασφαλίζεται η συνέχεια φάσης είναι *Δf=1/T η οποία επιτυγχάνει και* ορθογωνιότητα μεταξύ φερουσών αλλά και συνέχεια φάσης αλλά με διπλάσιο εύρος ζώνης. Η συνέχεια φάσης είναι επιθυμητή ιδιότητα διότι διαφορετικά το μεταδιδόμενο σήμα εμφανίζει ασυνέχειες της φάσης στα όρια των συμβόλων και αυτές οδηγούν σε άπλωμα του φάσματος. Βέβαια ειδικές μορφές FSK μπορούν να επιτύχουν συνέχεια φάσης ακόμη και με *Δf=1/(2T)*

10.4 Το PPM είναι αποδοτικό σε ότι αφορά την ισχύ αλλά μη αποδοτικό σε ότι αφορά το εύρος ζώνης. Μπορείτε να δώσετε μια διαισθητική εξήγηση;

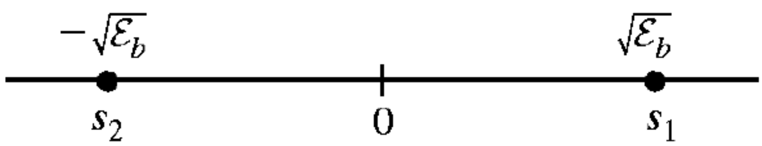
Απάντηση

Όσο περισσότερα σύμβολα πρόκειται να μεταδώσουμε τόσο περισσότερες διαφορετικές θέσεις θα χρειαστούμε για τη μετάδοση τους διότι σύμφωνα με τη διαμόρφωση PPM αυτό που αλλάζει στα μεταδιδόμενα σύμβολα είναι η θέση τους, άρα τόσο περισσότερες διαφορετικές θέσεις θα χρειαστούμε άρα και μεγαλύτερο εύρος ζώνης

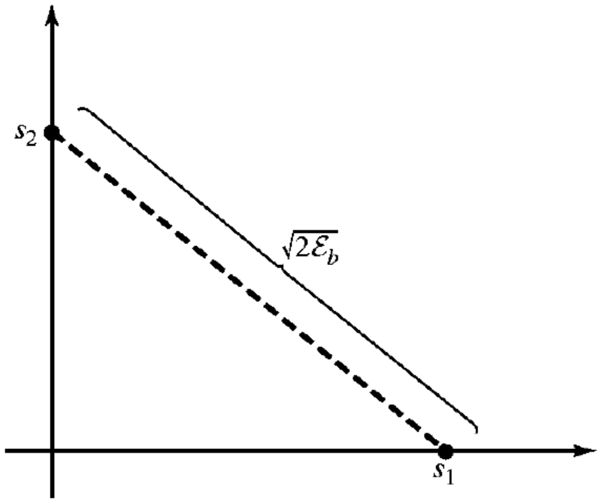
10.5 Ποιο μεταξύ των συστημάτων ζωνοπερατής μετάδοσης BPSK (δυαδικό PSK) και BFSK (δυαδικό FSK) επιτυγχάνει τη μικρότερη πιθανότητα σφάλματος για ίδιες τιμές E_b και N_0. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας με τη βοήθεια των διαγραμμάτων χώρου των αντίστοιχων σημάτων

Απάντηση

Στα Σχήματα 1 και 2 παρουσιάζονται τα διαγράμματα χώρου των σημάτων BPSKκαι BFSK, αντίστοιχα.



Σχήμα 1: Διάγραμμα χώρου σημάτων BPSK.



Σχήμα 2: Διάγραμμα χώρου σημάτων BFSK.

Βλέπουμε ότι στο δυαδικό αντίποδο σύστημα η απόσταση μεταξύ των συμβόλων είναι $d_1 = 2\sqrt{E_b}$, ενώ στο δυαδικό ορθογώνιο σύστημα η απόσταση είναι $d_1 = \sqrt{2E_b}$.

Και στις δύο περιπτώσεις οι τιμές του N_0 είναι ίδιες. Δηλαδή είναι ίδια η ισχύς του θορύβου. Άρα μικρότερη πιθανότητα σφάλματος θα επιτυγχάνεται σε εκείνο το σύστημα στο οποίο η απόσταση των συμβόλων είναι μεγαλύτερη, δηλαδή στο BPSK.

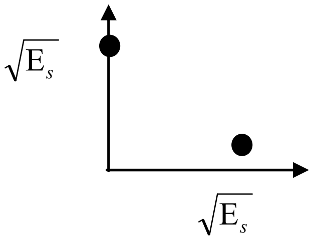
10.6. Να σχεδιαστεί η αναπαράσταση του δυαδικού FSK και του δυαδικού PSK στο χώρο σημάτων

Απάντηση

Οι δυαδικές ορθογώνιες FSK κυματομορφές αναπαριστάνονται γεωμετρικά ως δισδιάστατα ορθογώνια διανύσματα τα οποία ορίζονται ως: $S_1 = (\sqrt{E_s}, 0)$ και $S_2 = (0, \sqrt{E_s})$ αντίστοιχα και οι συναρτήσεις βάσης είναι:

$$\psi_m(t) = \sqrt{2/T}\cos 2\pi\left(f_c + m\Delta f\right)t$$

Η σχηματική αναπαράσταση είναι:



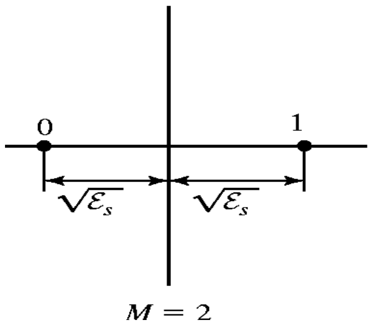
Τα ψηφιακά σήματα που είναι διαμορφωμένα κατά φάση μπορούν να αναπαρασταθούν γεωμετρικά από δισδιάστατα διανύσματα δηλαδή:

$$\mathbf{s}_m = \begin{bmatrix} A_{mc} \\ A_{ms} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{E_s}\cos 2\pi m/M \\ \sqrt{E_s}\sin 2\pi m/M \end{bmatrix}$$

Οι ορθοκανονικές συναρτήσεις βάσεις είναι τώρα οι

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}}g_T(t)\cos 2\pi f_c t \qquad \psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}}g_T(t)\sin 2\pi f_c t$$

Ο αστερισμός σημείων σήματος του δυαδικού PSK φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα:



10.7 Ποιες είναι οι διαστάσεις των χώρων σημάτων ενός τετραδικού FSK και ενός τετραδικού PSK και ποιες οι συναρτήσεις βάσεις;

Απάντηση

Η διάσταση του χώρου σημάτων στο τετραδικό FSK είναι ο 4-διάστατος χώρος. Οι συναρτήσεις βάσεις στο τετραδικό FSK είναι:

$$\psi_m(t)=\sqrt{2/T}\cos 2\pi\left(f_c+m\Delta f\right)t$$

για m=1,2,3,4

Η διάσταση του χώρου σημάτων στο τετραδικό PSK είναι το επίπεδο δηλαδή ο 2-διάστατος χώρος. Οι συναρτήσεις βάσεις στο τετραδικό PSK είναι:

$$\psi_1(t)=\sqrt{\frac{2}{E_g}}g_T(t)\cos 2\pi f_c t \qquad \psi_2(t)=-\sqrt{\frac{2}{E_g}}g_T(t)\sin 2\pi f_c t$$

10.8 Σε ποιο χώρο ορίζονται τα σήματα PAM, PSK, QAM, FSK, PPM; Ποια τα χαρακτηριστικά των αμοιβαία ορθογώνιων κυματομορφών;

Απάντηση

Τα σήματα PAM είναι Μονοδιάστατα Σήματα δηλ. ορίζονται σε μια ευθεία. Τα σήματα PSK και QAM είναι Δισδιάστατα Σήματα δηλ ορίζονται στο επίπεδο. Τα σήματα PPM και FSK είναι πολυδιάστατα σήματα δηλ. ορίζονται στο N-D χώρο. Στις αμοιβαία ορθογώνιες κυματομορφές ισχύει ότι N=M (δηλ. ο χώρος των διανυσμάτων ισούται με το χώρο των κυματομορφών. Μπορούν να κατασκευαστούν με διάφορους τρόπους, να επικαλύπτονται στο χρόνο ή όχι, να έχουν ίση ή διαφορετική ενέργεια, αλλά για πρακτικούς λόγους επιλέγονται ίσης ενέργειας. Επίσης μπορούν να παραχθούν με τη διαδικασία Gram-Schmidt

10.9 Στα N-D ορθογώνια ζωνοπερατά σήματα ποια σχέση συνδέει την ενέργεια τους με αυτή των σημάτων βασικής ζώνης;

Απάντηση

Η ενέργεια της ζωνοπερατής κυματομορφής είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης κυματομορφής' βασικής ζώνης

10.10 Ποια τα χαρακτηριστικά των κυματομορφών PPM; Δώστε τις κυματομορφές στο 8-PPM. Σε ποια ζώνη γίνεται η μετάδοση των κυματομορφών PPM;

Απάντηση

Στη διαμόρφωση PPM η ψηφιακή πληροφορία αποτυπώνεται στη θέση που τοποθετείται ο παλμός. Όλα τα σήματα PPM είναι ίσης ενέργειας $E_s=A^2\bullet E_g$. Όλα τα διανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων στον M-D χώρο είναι $\sqrt{2E_s}$ δηλ. όλα τα σημεία είναι ισαπέχοντα. Η μετάδοση PPM γίνεται στη βασική ζώνη καναλιού.

Οι 8 κυματομορφές PPM είναι: [Γενικός τύπος $s_m(t)=A\cdot g_T(t-(m-1)\cdot T/M)$ για m=1, 2,…M]

$$\text{Για } m=1 \text{ προκύπτει}: \ s_1(t)=A\cdot g_T(t) \text{ για } 0\le t\le T/8$$
$$\text{Για } m=2 \text{ προκύπτει}: \ s_2(t)=A\cdot g_T(t-T/8) \text{ για } T/8\le t\le 2\cdot T/8$$
$$\text{Για } m=3 \text{ προκύπτει}: \ s_3(t)=A\cdot g_T(t-2\cdot T/8) \text{ για } 2\cdot T/8\le t\le 3\cdot T/8$$
$$\text{Για } m=4 \text{ προκύπτει}: \ s_4(t)=A\cdot g_T(t-3\cdot T/8) \text{ για } 3\cdot T/8\le t\le 4\cdot T/8$$
$$\text{Για } m=5 \text{ προκύπτει}: \ s_5(t)=A\cdot g_T(t-4\cdot T/8) \text{ για } 4\cdot T/8\le t\le 5\cdot T/8$$
$$\text{Για } m=6 \text{ προκύπτει}: \ s_6(t)=A\cdot g_T(t-5\cdot T/8) \text{ για } 5\cdot T/8\le t\le 6\cdot T/8$$
$$\text{Για } m=7 \text{ προκύπτει}: \ s_7(t)=A\cdot g_T(t-6\cdot T/8) \text{ για } 6\cdot T/8\le t\le 7\cdot T/8$$
$$\text{Για } m=8 \text{ προκύπτει}: \ s_8(t)=A\cdot g_T(t-7\cdot T/8) \text{ για } 7\cdot T/8\le t\le 8\cdot T/8$$

10.11 Σε ποιούς αστερισμούς σημάτων η απόσταση μεταξύ δύο διανυσμάτων-σημείων είναι σταθερή και σε ποιους είναι μεταβαλλόμενη;

Απάντηση

Στις διαμορφώσεις PSK και QAM η απόσταση μεταξύ δύο κυματομορφών s_m και s_n δίνεται από τον τύπο:

$$d_{mn} = \sqrt{|s_m - s_n|^2} = \sqrt{2E_s(1 - \cos\frac{2\pi(m-n)}{M})}$$

Παρατηρούμε ότι η απόσταση αυτή εξαρτάται από τις κυματομορφές s_m και s_n δηλ. από τους δείκτες m και n των κυματομορφών. Όμως η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα σε δύο κυματομορφές δίνεται από τον τύπο:

$$d_{mn} = \sqrt{2E_s \cdot (1 - \cos\frac{2\pi}{M})}$$

Παρατηρούμε ότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο κυματομορφών είναι σταθερή και ανεξάρτητη από τις κυματομορφές, άρα αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα σφάλματος διατηρείται μικρή διότι οι δύο κυματομορφές δεν μπορούν να βρεθούν πιο κοντά από όσο ορίζει η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα τους και αυτό μειώνει την πιθανότητα σφάλματος.

Στη διαμόρφωση PAM η ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δύο σημάτων είναι:

$$d_{mn} = \sqrt{|s_m - s_n|^2} = \sqrt{E_g \cdot (A_m - A_n)^2}$$

Παρατηρούμε ότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο κυματομορφών PAM εξαρτάται από το πλάτος τους (συγκεκριμένα τη διαφορά τους). Αυτό σημαίνει ότι δύο κυματομορφές PAM (δηλ. τα αντίστοιχα σημεία τους στη γεωμετρική αναπαράσταση PAM) μπορούν να βρεθούν πολύ κοντά μεταξύ τους με αποτέλεσμα η πιθανότητα σφάλματος να είναι πολύ μεγάλη.

Στις διαμορφώσεις PPM και FSK η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο κυματομορφών είναι:

$$d_{mn} = \sqrt{|s_m - s_n|^2} = \sqrt{2E_s}$$

Παρατηρούμε ότι η απόσταση αυτή είναι σταθερή και ανεξάρτητη των κυματομορφών, άρα η πιθανότητα σφάλματος είναι μικρή.

Σετ 11 -Βέλτιστος Δέκτης (Αποδιαμορφωτής Συσχέτισης, Φωρατής, MAP, ML)

11.1 Να διατυπωθεί ο κανόνας του αποκωδικοποιητή μέγιστης πιθανοφάνειας. Να διατυπωθεί επίσης η πρακτική έκφραση αυτού του κανόνα.

Απάντηση

Ο κανόνας του αποκωδικοποιητή μέγιστης πιθανοφάνειας κριτήριο μέγιστης πιθανοφάνειας είναι ο εξής: Πρέπει να επιλέξουμε το σύμβολο s_m με τη μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης δεδομένης της παρατήρησης r δηλαδή, υπολογίζουμε την εκ των υστέρων (a-posteriori) πιθανότητα να στάλθηκε κάθε ένα από τα σύμβολα s_m που συμβολίζεται ως P(sm|r) και επιλέγουμε εκείνο με τη μεγαλύτερη πιθανότητα

Αν τα σύμβολα είναι ισοπίθανα τότε το κριτήριο MAP απλοποιείται στο κριτήριο μεγιστοποίησης της συνάρτησης πιθανοφάνειας δηλ. $\max\limits_{s_m} f(r\,|\,s_m)$ το οποίο εκφράζεται ως $\max\limits_{s_m} \ln f(r\,|\,s_m) = \min\limits_{s_m}\left\|r - s_m\right\|^2$ δηλαδή αντί να μεγιστοποιήσουμε την pdf f(r|sm), μπορούμε να μεγιστοποιήσουμε οποιοδήποτε μονότονη συνάρτησή της και συνήθως χρησιμοποιείται η ln(f(r|sm))

11.2 Να περιγράψτε πως απλοποιείται το κριτήριο MAP σε ML

Απάντηση

Το κριτήριο MAP μεγιστοποιεί την πιθανότητα σωστής λήψης, άρα ελαχιστοποιεί την πιθανότητα σφάλματος. Αν ο δέκτης δεν είχε την παρατήρηση **r** ($r = s_m + n$ το διάνυσμα ***r*** μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα σφαιρικό νέφος γύρω από το διάνυσμα $\boldsymbol{s}_m$) τότε θα διάλεγε ένα σύμβολο με βάση τις εκ των προτέρων πιθανότητες εμφάνισης $P(s_m)$ δηλαδή θα διάλεγε το πιθανότερο σύμβολο. Σύμφωνα με τον κανόνα του Bayes οι a-posteriori πιθανότητες μπορούν να εκφραστούν ως εξής: $P(s_m\,|\,r) = \dfrac{f(r\,|\,s_m)P(s_m)}{f(r)}$

όπου:

- f(**r**|**s**m): η πιθανότητα να λάβω **r**, αν στάλθηκε το $\mathbf{s}_m$
- P(**s**m): η a-priori πιθανότητα εμφάνισης του συμβόλου
- f(**r**): η πιθανότητα να λάβω το συγκεκριμένο διάνυσμα (ανεξάρτητη του συμβόλου)

Η απλοποίηση του κανόνα μέγιστης πιθανοφάνειας (απλοποίηση MAP σε ML) γίνεται ως εξής: αν τα σύμβολα είναι ισοπίθανα, τότε $P(\mathbf{s}_m)=1/M$, δηλαδή το $P(\mathbf{s}_m)$ γίνεται σταθερά ανεξάρτητη του συμβόλου. Η μεγιστοποίηση του P(**s**m|**r**) αντιστοιχεί σε μεγιστοποίηση του $f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ δηλαδή $\max\limits_{s_m} P(s_m\,|\,r) \Rightarrow \max\limits_{s_m} f(r\,|\,s_m)$

Συμπέρασμα: Υποθέτοντας ισοπίθανα σύμβολα, το κριτήριο MAP απλοποιείται στο κριτήριο μεγιστοποίησης της συνάρτησης πιθανοφάνειας

Το κριτήριο αυτό καλείται κριτήριο μέγιστης πιθανοφάνειας(maximum likelihood - ML). Παρατήρηση: αντί να μεγιστοποιήσουμε την pdf f(**r**|**s**m), μπορούμε να μεγιστοποιήσουμε οποιοδήποτε μονότονη συνάρτησή της. Συνήθως χρησιμοποιείται η ln(f(**r**|**s**m)).

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας υπολογίστηκε ως $f(r\,|\,s_m) = \dfrac{1}{(\pi N_0)^{\frac{N_0}{2}}} \exp(-\|\,r - s_m\,\|^2 / N_0)$

Το κριτήριο ML εκφράζεται πλέον ως $\max\limits_{s_m} \ln f(r\,|\,s_m) = \min\limits_{s_m}\left\|r - s_m\right\|^2$

Ο φωρατής καλείται να υπολογίσει τις μετρικές απόστασης: $D(r,s_m) = \left\|r - s_m\right\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{N}\left(r_k - s_{mk}\right)^2$ ανάμεσα σε όλα τα σύμβολα και το ληφθέν διάνυσμα και να επιλέξει το σύμβολο με τη μικρότερη απόσταση. Εναλλακτικά: $\min\limits_{s_m}\left(\left\|r\right\|^2 - 2r^T s_m + \left\|s_m\right\|^2\right) = \max\limits_{s_m}\left(2r^T s_m - \left\|s_m\right\|^2\right)$ εφόσον το μέτρο του ***r*** είναι κοινό για όλα τα σύμβολα

11.3 Πως μπορούμε ξεκινώντας από το κριτήριο MAP να οδηγηθούμε στο κριτήριο ML; Δώστε μια πρακτική μορφή του κανόνα απόφασης που βασίζεται στο κριτήριο ML

Απάντηση

Καταρχήν να αναφέρουμε ότι το κριτήριο MAP (ή αλλιώς κριτήριο μέγιστης εκ των υστέρων πιθανότητας) είναι ένας κανόνας απόφασης που βασίζεται στον υπολογισμό της εκ των υστέρων πιθανότητας (a-posteriori probability) να στάλθηκε ένα από τα σύμβολα s_m (η οποία συμβολίζεται ως $P(s_m|r)$ για m=1,2,3,...,M) και επιλογή του συμβόλου με τη μεγαλύτερη πιθανότητα. Το κριτήριο MAP μεγιστοποιεί την πιθανότητα σωστής λήψης και ελαχιστοποιεί την πιθανότητα σφάλματος. Σύμφωνα με τον κανόνα του Bayes οι a-posteriori πιθανότητες μπορούν να εκφραστούν ως εξής: $P(s_m|r)=\dfrac{f(r|s_m)P(s_m)}{f(r)}$

όπου:

- ➔ f(**r**|**s**m): η πιθανότητα να λάβω **r**, αν στάλθηκε το **sm**
- ➔ P(**s**m): η a-priori πιθανότητα εμφάνισης του συμβόλου
- ➔ f(**r**): η πιθανότητα να λάβω το συγκεκριμένο διάνυσμα (ανεξάρτητη του συμβόλου)

Η απλοποίηση του κριτηρίου MAP σε ML γίνεται ως εξής:
αν τα σύμβολα είναι ισοπίθανα, τότε P(**s**m)=1/M, δηλαδή το P(**s**m) γίνεται σταθερά ανεξάρτητη του συμβόλου. Η μεγιστοποίηση του P(**s**m|**r**) αντιστοιχεί σε μεγιστοποίηση του f(**r**|**s**$_m$) δηλαδή
$\max\limits_{s_m} P(s_m|r) \Rightarrow \max\limits_{s_m} f(r|s_m)$

Συμπέρασμα: Υποθέτοντας ισοπίθανα σύμβολα, το κριτήριο MAP απλοποιείται στο κριτήριο μεγιστοποίησης της συνάρτησης πιθανοφάνειας. Το κριτήριο απόφασης που βασίζεται στη μεγιστοποίηση του f(**r**|**s**$_m$) πάνω σε όλα τα δυνατά M σήματα ονομάζεται κριτήριο μέγιστης πιθανοφάνειας (ML κριτήριο)

Αντί λοιπόν να μεγιστοποιήσουμε την pdf f(**r**|**s**m), μπορούμε να μεγιστοποιήσουμε οποιοδήποτε μονότονη συνάρτησή της. Συνήθως χρησιμοποιείται η ln(f(**r**|**s**m)).

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας υπολογίστηκε ως $f(r|s_m)=\dfrac{1}{(\pi N_0)^{\frac{N_0}{2}}}\exp(-\|r-s_m\|^2/N_0)$

Το κριτήριο ML εκφράζεται πλέον ως $\max\limits_{s_m} \ln f(r|s_m)=\min\limits_{s_m}\left\|r-s_m\right\|^2$

Η πρακτική μορφή του κανόνα απόφασης που βασίζεται στο κριτήριο ML είναι ότι ο φωρατής καλείται να υπολογίσει τις μετρικές απόστασης ανάμεσα σε όλα τα σύμβολα και το ληφθέν διάνυσμα και να επιλέξει το σύμβολο με τη μικρότερη απόσταση. Επομένως ο κανόνας απόφασης για το AWGN κανάλι ο οποίος βασίζεται στο κριτήριο ML απλοποιείται στην εύρεση του σήματος s_m το οποίο είναι πλησιέστερο στο λαμβανόμενο διάνυσμα r. (Ο κανόνας αυτός ονομάζεται και φώραση ελάχιστης απόστασης)

Σετ 12 - Πιθανότητα Σφάλματος για Δυαδική Διαμόρφωση

12.1 Τι ονομάζεται Δυαδική Αντίποδη σηματοδοσία;

Απάντηση

Στο δυαδικό PAM το bit πληροφορίας 1 αντιπροσωπεύεται από ένα παλμό πλάτους Α και το bit πληροφορίας 0 αντιπροσωπεύεται από ένα παλμό πλάτους –Α. Ο τύπος αυτός σηματοδοσίας λέγεται Δυαδική Αντίποδη σηματοδοσία

12.2 Ποιο σύστημα διαμόρφωσης θεωρείτε ότι επιτυγχάνει μικρότερη πιθανότητα σφάλματος για ίδια μέση ισχύ μετάδοσης, το M-QAM ή το M-PSK; Αιτιολογήστε

Απάντηση

Η ελάχιστη Ευκλείδια απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημάτων M-PSK στον αστερισμό είναι:

$$d_{\min} = \sqrt{2E_s(1-\cos\frac{2\pi}{M})}$$

Ομοίως η ελάχιστη Ευκλείδια απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημάτων M-QAM στον αστερισμό είναι ακριβώς η ίδια, όμως η διαφορά είναι ότι στο M-PSK όλα τα σημεία είναι στον ίδιο κύκλο ενώ στο M-QAM μπορεί να είναι σε διαφορετικούς κύκλους. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα σφάλματος στο M-QAM είναι μικρότερη διότι είναι προτιμότερο να έχουμε γείτονες (γειτονικά σημεία) σε διαφορετικούς κύκλους παρά να είναι όλα στον ίδιο κύκλο οπότε μπορεί να συμβεί πιο εύκολα το σφάλμα αν το σημείο-σήμα είναι κοντά στο γειτονικό του στον ίδιο κύκλο, ενώ αν τα σημεία είναι σε διαφορετικούς κύκλους όπως στο M-QAM η πιθανότητα το σημείο να συμπέσει στο γειτονικό του είναι μικρότερη.

12.3 Πότε μια ψηφιακή διαμόρφωση καλείται ομόδυνη και γιατί έχει καλύτερη απόδοση από την αντίστοιχη της μη ομόδυνη;

Απάντηση

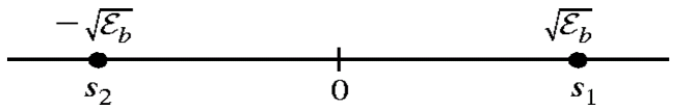
Η ψηφιακή διαμόρφωση καλείται ομόδυνη (coherent) όταν απαιτείται τέλειος συγχρονισμός πομπού και δέκτη. Δηλαδή ο δέκτης θέλει να γνωρίζει τη συχνότητα και τη φάση του φέροντος σήματος. Ενώ στην μη ομόδυνη (non-coherent) ψηφιακή διαμόρφωση δεν απαιτείται συγχρονισμός πομπού και δέκτη.

Ομόδυνα συστήματα έχουν καλύτερη απόδοση επειδή εκμεταλλεύονται την ακριβή γνώση της συχνότητας και της φάσης του φέροντος και έτσι επιτυγχάνουν χαμηλότερους ρυθμούς σφαλμάτων. Από την άλλη όμως, τα μη ομόδυνα συστήματα είναι λιγότερο πολύπλοκα από τα ομόδυνα.

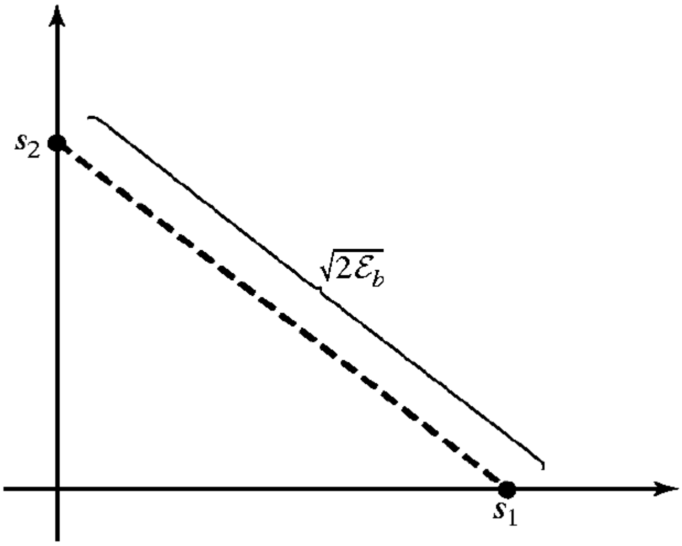
12.4 Μεταξύ ενός δυαδικού αντίποδου και ενός δυαδικού ορθογώνιου συστήματος διαμόρφωσης ποιο επιτυγχάνει τη μικρότερη πιθανότητα σφάλματος, για ίδιες τιμές E_b και N_0;Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας με τη βοήθεια διαγραμμάτων χώρου

Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται το διάγραμμα χώρου ενός δυαδικού αντίποδου συστήματος διαμόρφωσης.



Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται το διάγραμμα χώρου ενός δυαδικού ορθογωνίου συστήματος διαμόρφωσης.



Για μια δίκαιη σύγκριση των δύο συστημάτων θα θεωρήσουμε ότι και στα δύο χρησιμοποιείται ίδια τιμή E_b (ενέργεια ανά bit).

Βλέπουμε ότι στο δυαδικό αντίποδο σύστημα η απόσταση μεταξύ των συμβόλων είναι $d_1 = 2\sqrt{E_b}$, ενώ στο δυαδικό ορθογώνιο σύστημα η απόσταση είναι $d_1 = \sqrt{2}\sqrt{E_b}$.

Υποθέτουμε ότι τα δύο συστήματα έχουν ίδιο N_0, δηλαδή ίδια ισχύ θορύβου. Τότε μικρότερη πιθανότητα σφάλματος θα επιτυγχάνεται σε εκείνο το σύστημα στο οποίο η απόσταση των συμβόλων είναι μεγαλύτερη, δηλαδή στο δυαδικό αντίποδο.

12.5

α) Δίνεται τηλεπικοινωνιακό σύστημα στο οποίο η μέθοδος διαμόρφωσης είναι το δυαδικό PAM. Στο εν λόγω σύστημα, με χρήση K αναγεννητικών επαναληπτών έχουμε συνολική πιθανότητα σφάλματος (από τον αρχικό πομπό μέχρι τον τελικό δέκτη) που δίνεται από την Έκφραση 1, ενώ με χρήση K αναλογικών επαναληπτών έχουμε συνολική πιθανότητα σφάλματος που δίνεται από την Έκφραση 2. Ζητείται να ερμηνεύσετε και να σχολιάσετε τη διαφορά των δύο εκφράσεων.

β) Έστω ότι μια κεραία εκπέμπει ισότροπα στον κενό χώρο. Τότε γνωρίζουμε ότι η λαμβανόμενη ισχύς σε ένα σημείο που απέχει απόσταση d από το σημείο εκπομπής είναι αντιστρόφως ανάλογη του d^2. Εξηγείστε το λόγο που συμβαίνει αυτό.

Έκφραση 1: $p_h \approx KQ\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$

Έκφραση 2 : $p_h \approx Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{KN_0}}\right)$

Απάντηση

α) Γνωρίζουμε ότι όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος διαμόρφωσης δυαδικό PAM, τότε η πιθανότητα σφάλματος bit είναι

$$P_e = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}) \qquad (1)$$

όπου E_b είναι η ενέργεια ανά bit, $\frac{N_0}{2}$ είναι η φασματική πυκνότητα ισχύος του λευκού θορύβου και $Q(\cdot)$ είναι η γνωστή συνάρτηση.

Στα συστήματα αναλογικών επικοινωνιών, οι ενισχυτές, οι οποίοι καλούνται αναλογικοί επαναλήπτες, χρησιμοποιούνται για να ενισχύσουν περιοδικά την ισχύ του σήματος κατά τη μετάδοσή του μέσα από το κανάλι. Όμως, κάθε ενισχυτής αυξάνει και τον θόρυβο του συστήματος. Δηλαδή, εκτός από το χρήσιμο σήμα ενισχύεται κάθε φορά και ο θόρυβος.

Επομένως, αν χρησιμοποιούνται K αναλογικοί επαναλήπτες η ισχύς του θορύβου θα αυξηθεί K φορές. Και τότε η πιθανότητα σφάλματος bit θα είναι

$$P_h \approx Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{KN_0}}\right) \qquad (2)$$

Αντιθέτως, τα ψηφιακά συστήματα επικοινωνίας μας επιτρέπουν να εκτελούμε περιοδικά την φώραση και αναγέννηση των μεταδιδόμενων συμβόλων απαλλαγμένων από τον θόρυβο. Οι συσκευές που το κάνουν, ονομάζονται ψηφιακοί αναγεννητικοί επαναλήπτες. Κάθε αναγεννητικός επαναλήπτης αποτελείται από δύο τμήματα:

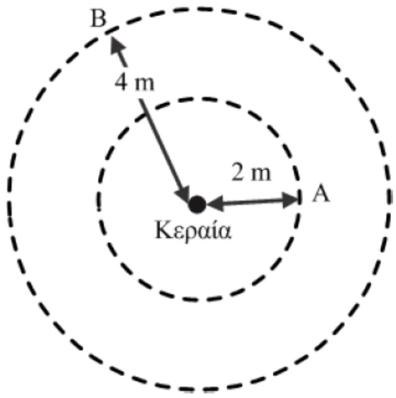
- το τμήμα λήψης, όπου γίνεται ανίχνευση και φώραση του σήματος που στάλθηκε από τον προηγούμενο επαναλήπτη
- το τμήμα εκπομπής, που εκπέμπει το σήμα απαλλαγμένο από τον θόρυβο.

Προφανώς, κατά την φώραση σε κάθε ψηφιακό αναγεννητικό επαναλήπτη μπορεί να συμβεί σφάλμα. Τότε το σφάλμα αυτό διαδίδεται στους επαναλήπτες που ακολουθούν. Όταν χρησιμοποιείται δυαδικό PAM, η πιθανότητα σφάλματος bit για ένα «άλμα» (μετάδοση από έναν επαναλήπτη στον επόμενο) δίνεται από τη σχέση (1). Επειδή τα σφάλματα συμβαίνουν με μικρή πιθανότητα, μπορούμε να αμελήσουμε την πιθανότητα ένα bit να ανιχνευτεί λανθασμένα περισσότερες από μια φορά κατά τη μετάδοσή του μέσα από ένα κανάλι με K επαναλήπτες. Δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σφάλμα μπορεί να συμβεί το πολύ σε έναν επαναλήπτη. Συνεπώς, ο αριθμός των σφαλμάτων θα αυξάνεται γραμμικά με τον αριθμό των επαναληπτών. Άρα η πιθανότητα να έχουμε εσφαλμένο bit κατά τη μετάδοση από τον αρχικό πομπό προς τον τελικό δέκτη είναι

$$P_h \approx KP_e = KQ\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \qquad (3)$$

β) Τα σημεία που απέχουν απόσταση d από την κεραία βρίσκονται πάνω σε μια σφαίρα ακτίνας d. Η επιφάνεια της σφαίρας αυτής έχει εμβαδόν $E = \pi d^2$. Λόγω της ισότροπης εκπομπής, η ισχύς που εκπέμπει η κεραία κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλα τα σημεία της σφαίρας. Επομένως, η ισχύς που λαμβάνεται σε ένα σημείο είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης.

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω, ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω ένα σημείο Α που απέχει απόσταση $d_1 = 2\,\mathrm{m}$ από την κεραία και ένα σημείο Β που απέχει απόσταση $d_2 = 4\,\mathrm{m}$ από την κεραία. Το σημείο Α βρίσκεται πάνω σε μια σφαίρα που έχει ως κέντρο την κεραία και έχει εμβαδόν $E_1 = \pi d_1^2 = 4\pi\,\mathrm{m}^2$. Το σημείο Β βρίσκεται πάνω σε μια σφαίρα που έχει ως κέντρο την κεραία και έχει εμβαδόν $E_2 = \pi d_2^2 = 16\pi\,\mathrm{m}^2$.



Έστω η κεραία εκπέμπει ισότροπα στον κενό χώρο με ισχύ P_K Watts. Τότε η πυκνότητα ισχύος στο σημείο Α θα είναι $P_A = \dfrac{P_K}{E_1} = \dfrac{P_K}{4\pi}$ Watts/m^2, ενώ στο σημείο Β θα είναι $P_B = \dfrac{P_K}{E_2} = \dfrac{P_K}{16\pi}$ Watts/m^2.

Βλέπουμε λοιπόν ότι ενώ το σημείο Β έχει διπλάσια απόσταση από την κεραία σε σύγκριση με το σημείο Α, η λαμβανόμενη ισχύς στο σημείο Β θα είναι τέσσερεις φορές μικρότερη από την λαμβανόμενη ισχύ στο σημείο Α.

12.6 Ποια η πιθανότητα σφάλματος κατά τη μετάδοση ψηφιακής πληροφορίας σε κανάλι AWGN;

Απάντηση

Η ψηφιακή μετάδοση δυαδικής πληροφορίας μέσω ενός καναλιού AWGN είτε με δυαδική αντίποδη σηματοδοσία, είτε με δυαδική ορθογώνια σηματοδοσία, μπορεί να μοντελοποιηθεί ως Binary Symmetric Channel. Ως εκ τούτου αν η μετάδοση στο AWGN γίνει με δυαδική αντίποδη σηματοδοσία τότε η πιθανότητα σφάλματος είναι $P_b = Q\left(\sqrt{\dfrac{2E_b}{N_0}}\right)$, ενώ αν γίνει με δυαδική ορθογώνια σηματοδοσία τότε η πιθανότητα σφάλματος είναι $P_b = Q\left(\sqrt{\dfrac{E_b}{N_0}}\right)$

Σετ 13 - Ψηφιακή Μετάδοση Σήματος σε Ζωνοπεριορισμένο Κανάλι AWGN (Διάγραμμα οφθαλμού, ISI, Παλμός Ανυψωμένου Συνημιτόνου)

13.1 Ποια η πρακτική χρησιμότητα του διαγράμματος οφθαλμού;

Απάντηση

Το διάγραμμα οφθαλμού είναι ένας τρόπος παρατήρησης της διασυμβολικής παρεμβολής και του θορύβου στο λαμβανόμενο σήμα. Το λαμβανόμενο σήμα *y(t)* προβάλλεται στον παλμογράφο στην κατακόρυφη θέση, ενώ στην οριζόντια θέση τίθεται ο ρυθμός σάρωσης *1/T*. Η απεικόνιση που προκύπτει καλείται διάγραμμα οφθαλμού (eye pattern) λόγω της σχηματικής της ομοιότητας με το ανθρώπινο μάτι

13.2 Τι γνωρίζετε για τη διασυμβολική παρεμβολή και πως προκύπτει;

Απάντηση

Ένα κανάλι γραμμικού φίλτρου παραμορφώνει το μεταδιδόμενο σήμα. Η παραμόρφωση καναλιού έχει ως αποτέλεσμα την αλληλοπαρεμβολή συμβόλων (symbol interference) στην έξοδο του αποδιαμορφωτή και οδηγεί σε αύξηση της πιθανότητας σφάλματος στο φωρατή.

Η διασυμβολική παρεμβολή δημιουργείται με τον ακόλουθο τρόπο:

Το σήμα στην έξοδο του φίλτρου πομπού είναι: $v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT)$

Η συνέλιξη του φίλτρου πομπού και του καναλιού h(t) είναι: $h(t)=g_T(t)*c(t)$

Η έξοδος του καναλιού εκφράζεται ως: $r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(t - nT) + n(t)$

Η έξοδος του φίλτρου λήψης είναι το σήμα: $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(t - nT_s) + v(t)$ όπου $x(t)=g_T(t)*c(t)*g_R(t)$ και ισοδύναμα $X(f)=G_T(f)\bullet C(f)\bullet G_R(f)$.

Θεωρούμε ότι έχει γίνει συγχρονισμός συμβόλων, δηλαδή ξέρουμε τα χρονικά διαστήματα κάθε συμβόλου $s_m(t)$ μέσα στο ληφθέν σήμα. Για να ανακτήσουμε την ακολουθία συμβόλων $\{\alpha_n\}$, δειγματοληπτούμε την έξοδο του φίλτρου λήψης ανά $t=m\cdot T$ και προκύπτει: $y(mT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(mT - nT) + v(mT)$

Ισοδύναμα σε διακριτό χρόνο προκύπτουν τα δείγματα:

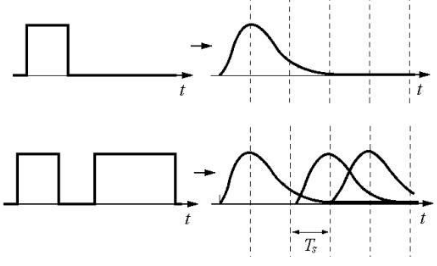
$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(m-n) + v(m) \quad \text{και} \quad y(m) = a_m x(0) + \underbrace{\sum_{n\neq m} a_n x(m-n)}_{\text{διασυμβλική παρεμβολή}} + v(m)$$

Το δείγμα *y(m)* που λαμβάνουμε, αποτελείται από α)Το επιθυμητό σύμβολο α_m κλιμακωμένο κατά x(0), εφόσον το φίλτρο λήψης είναι προσαρμοσμένο στο h(t) τότε $x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \, df = E_h$

β)τη διασυμβολική παρεμβολή: γραμμικός συνδυασμός προηγούμενων και μελλοντικών συμβόλων

και γ)το θόρυβο v(m) με διασπορά $\sigma_v^2 = \frac{N_0 E_h}{2}$

Η διασυμβολική παρεμβολή (ISI) εκφράζει την αλληλεπίδραση των άλλων συμβόλων τη χρονική στιγμή δειγματολήπτησης $t=m\cdot T$. Γενικά προκαλεί υποβάθμιση της επίδοσης του τηλεπικοινωνιακού συστήματος. Το αποτέλεσμα της είναι ότι γίνεται δυσκολότερη η φώραση του τρέχοντος συμβόλου και αυξάνεται η πιθανότητα σφάλματος. Σχηματικά η διασυμβολική παρεμβολή αναπαριστάνεται ως εξής:



13.3. Πως αντιμετωπίζεται η διασυμβολική παρεμβολή;

Απάντηση

Θεωρώντας ότι έχει γίνει συγχρονισμός συμβόλων δηλαδή γνωρίζοντας τα χρονικά διαστήματα κάθε συμβόλου $s_m(t)$ μέσα στο ληφθέν σήμα στο δέκτη κάνουμε δειγματοληψία στην έξοδο του φίλτρου λήψης ανά t=m·T και παίρνουμε τα ακόλουθα δείγματα: $y(mT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(mT - nT) + v(mT)$

Τα δείγματα αυτά σε διακριτό χρόνο είναι: $y(m) = a_m x(0) + \sum_{m \neq n} a_n x(m-n) + v(m)$

Η διασυμβολική παρεμβολή οφείλεται στη συνολική κρουστική απόκριση:

X(t)=g_T(t)*c(t)*gR(t) ή ισοδύναμα X(f)=GT(f)• C(f) •GR(f)

Το κανάλι μετάδοσης είναι δεδομένο και δεν αποτελεί σχεδιαστική παράμετρο, όμως τα φίλτρα πομπού και δέκτη μπορούν να σχεδιαστούν ώστε να ικανοποιούν έτσι ώστε: $x(m-n) = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$

Τότε το μόνο πρόβλημα που απομένει είναι ο θόρυβος.

13.4 Να διατυπώσετε τη συνθήκη Nyquist ώστε να μηδενίζεται η διασυμβολική παρεμβολή. Σε ποιο κανάλι εφαρμόζεται;

Απάντηση

Η Συνθήκη Nyquist για μηδενική ISI λέει ότι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει:

$$x(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος, X(f) να ικανοποιεί τη σχέση: $\sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f + \frac{m}{T}\right) = T$

Για να ικανοποιείται η συνθήκη του Nyquist θα πρέπει **το εύρος ζώνης σήματος ≤ εύρους ζώνης καναλιού ή αλλιώς το διατιθέμενο εύρος ζώνης καναλιού ≥ από το μισό του ρυθμού μετάδοσης** δηλαδή:

$$B_T = \frac{1}{2T} \leq W$$

Η ισότητα ικανοποιείται μόνο για παλμό sinc που έχει πολλά πρακτικά προβλήματα. Εάν BT<W, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορους παλμούς με πιο συχνά χρησιμοποιούμενο τον παλμό φάσματος ανυψωμένου συνημιτόνου. Γενικά θα πρέπει να ισχύει:

x_{rc}(t)=g_T(t)*c(t)*g_R(t) ή ισοδύναμα X_{rc}(f)=G_T(f)•C(f)•G_R(f)

Η συνθήκη Nyquist εφαρμόζεται όταν το κανάλι είναι ιδανικό.

13.5 Τι είδους παραμόρφωση εισάγει ένα μη ιδανικό κανάλι;

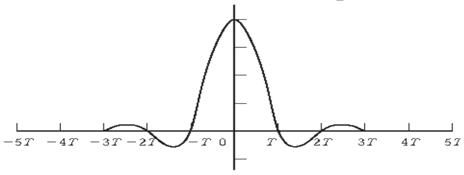
Απάντηση

Ένα κανάλι εισάγει δύο ειδών παραμορφώσεις:

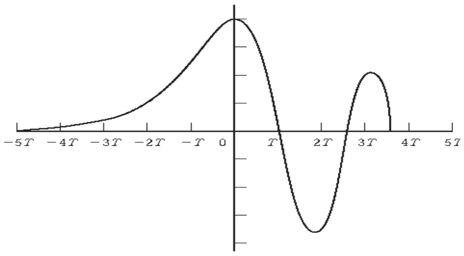
- **Παραμόρφωση Πλάτους:**
  - το πλάτος της απόκρισης συχνότητας του καναλιού, |C(f)|, δεν είναι σταθερό μέσα στο εύρος ζώνης του καναλιού και
  - κάθε συχνοτική συνιστώσα πολλαπλασιάζεται με διαφορετικό πλάτος

- **Παραμόρφωση Φάσης:**
  - η φάση της απόκρισης συχνότητας του καναλιού, Θc(f), δεν είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας και
  - κάθε συχνοτική συνιστώσα αντιμετωπίζει διαφορετική καθυστέρηση κατά τη διέλευσή της από το κανάλι
  - Για να ορίσουμε καλύτερα την παραμόρφωση φάσης, ορίζουμε την καθυστέρηση περιβάλλουσας (envelope delay) ως εξής: $\tau(\mathrm{f}) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\Theta_c(f)}{df}$
- Αν Θc(f) γραμμική, τότε η καθυστέρηση περιβάλλουσας είναι σταθερή και δεν έχουμε παραμόρφωση φάσης

Η Παραμόρφωση Πλάτους ή/και Παραμόρφωση Φάσης οδηγούν σε διασυμβολική παρεμβολή καθώς ο παλμός μετάδοσης gT(t) συνελίσσεται με την κρουστική απόκριση του καναλιού c(t) οπότε παύει να ισχύει η συνθήκη μηδενικής ISI. Αυτό φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα:



(α)



(β)

Παράδειγμα:
- Σχ. (α): παλμός μετάδοσης
- Σχ. (β): η μορφή του μετά το πέρασμά του από το κανάλι

Αποτέλεσμα: τα σημεία μηδενισμών έχουν μετατοπιστεί άρα ISI

13.6. Ποια η συνθήκη για να έχουμε μηδενική ISI στην περίπτωση μη ιδανικού καναλιού και στην περίπτωση ιδανικού καναλιού;

<u>Απάντηση</u>

Και στις 2 περιπτώσεις καναλιών **για να έχουμε μηδενική ISI** θα πρέπει να ισχύουν τα εξής:
- **εύρος ζώνης σήματος ≤ εύρος ζώνης καναλιού**
- **και ικανοποίηση συνθήκης Nyquist**

13.7Όταν η απόκριση συχνότητας Hc(f) του καναλιού είναι γνωστή τότε τα βέλτιστα φίλτρα πομπού και δέκτη (για μετάδοση δεδομένων στη βασική ζώνη) δίνονται από τις εξής απλουστευμένες εκφράσεις: $|G_T(f)| = k_1 \frac{\sqrt{|X_{rc}(f)|}}{\sqrt{|C(f)|}}$ $|G_R(f)| = k_2 \frac{\sqrt{|X_{rc}(f)|}}{\sqrt{|C(f)|}}$ όπου P(f) είναι η απόκριση συχνότητας του ρυθμού Nyquist και k_1, k_2 κατάλληλες σταθερές. Ο σχεδιασμός των φίλτρων με βάσει τις παραπάνω εκφράσεις εξασφαλίζει μηδενική διασυμβολική παρεμβολή και ελαχιστοποίηση της πιθανότητας σφάλματος. Όταν το κανάλι είναι άγνωστο τότε:

1. Πως γίνεται στην πράξη η επιλογή των φίλτρων πομπού και δέκτη;
2. Πως αντιμετωπίζεται το ανεπιθύμητο φαινόμενο της διασυμβολική παρεμβολής;

<u>Απάντηση</u>

Η Μεθοδολογία για σχεδιασμό συστήματος σε άγνωστο κανάλι είναι η ακόλουθη:
Σχεδιάζουμε τα φίλτρα πομπού και δέκτη σαν να είχαμε ιδανικό κανάλι (δηλαδή τέτοιο ώστε C(f)=1, |f|<W) $|G_T(f)| = |G_R(f)| = \sqrt{|X_{rc}(f)|}$

Τότε όμως η συνολική κρουστική απόκριση του συστήματος που είναι $x(t)=g_T(t)*c(t)g_R(t)$ δεν ικανοποιεί πλέον τη συνθήκη για μηδενική ISI και έχουμε διασυμβολική παρεμβολή. Γιαυτό αρχικά θα απλοποιήσουμε το μοντέλο της ISI που θεωρητικά την έχουμε ορίσει ως: $ISI = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq m}}^{\infty} a_n x(m-n)$

Πρακτικά όμως, σε οποιοδήποτε πραγματικό κανάλι, η ISI «εμπλέκει» έναν πεπερασμένο αριθμό συμβόλων. Άρα, το παραπάνω άθροισμα δεν εκτείνεται στο άπειρο, αλλά περιορίζεται σε:
- L1 μελλοντικά σύμβολα
- L2 παρελθόντα σύμβολα
- δηλαδή, x(n)=0 για n<-L1 και n>L2

Στη συνέχεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα γραμμικό φίλτρο για την αντιμετώπισή-υπολογισμό του αθροίσματος. Ο σκοπός του φίλτρου είναι να αναιρέσει την παραμόρφωση του καναλιού. Οι παράμετροί του ορίζονται με βάση του χαρακτηριστικά του καναλιού και το το φίλτρο αυτό ονομάζεται ισοσταθμιστής καναλιού (channel equalizer)

13.8. Να περιγράψετε τη διαδικασία με την οποία αναιρείται η παραμόρφωση του καναλιού.

<u>Απάντηση</u>

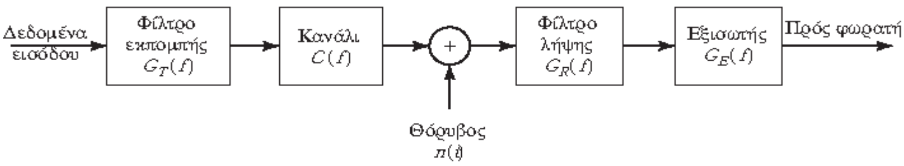
Αν μεταδώσουμε το σήμα σε κανάλι μη ιδανικό θα παρατηρήσουμε ότι τα κανάλια αυτά εισάγουν μια αλληλοπαρεμβολή συμβόλων όταν η περίοδος σηματοδοσίας του συστήματος είναι σημαντικά μικρότερη της χρονικής διασποράς (της διάρκειας της κρουστικής απόκρισης) του μη ιδανικού καναλιού. Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιείται στο δέκτη ένας εξισωτής καναλιού για να αντισταθμίσει την παραμόρφωση καναλιού. Το φίλτρο αυτό που ονομάζεται ισοσταθμιστής καναλιού (channel equalizer) ή εξισωτής καναλιού <u>μπορεί</u> να ρυθμιστεί ώστε: $G_E(f) = \dfrac{1}{C(f)} = \dfrac{1}{|C(f)|} e^{-j\Theta(f)} \quad |f| \leq W$

Άρα, η απόκριση συχνότητας του ισοσταθμιστή είναι το αντίστροφο της απόκρισης συχνότητας του καναλιού Για το όλο σύστημα ισχύει: $X_{rc}(f)=G_T(f)\bullet C(f)\bullet G_R(f)$

13.9. Να περιγράψετε το διάγραμμα βαθμίδων του καναλιού με ισοσταθμιστή και να περιγράψετε τα φίλτρα του ισοσταθμιστή, του πομπού και του δέκτη

<u>Απάντηση</u>

Το διάγραμμα βαθμίδων του καναλιού με εξισωτή είναι το ακόλουθο:



Τα φίλτρα πομπού και δέκτη επιλέχθηκαν ώστε: $|G_T(f)| = |G_R(f)| = \sqrt{|X_{rc}(f)|}$

Ενώ το φίλτρο του ισοσταθμιστή επιλέχθηκε ώστε:

$$\boxed{\begin{aligned} |G_E(f)| &= \frac{1}{|C(f)|} \\ \Theta_E(f) &= -\Theta_c(f) \end{aligned}}$$

13.10. Να προσδιορίστε το είδος του ισοσταθμιστή που θα χρησιμοποιηθεί α)όταν το κανάλι είναι άγνωστο αλλά χρονικά σταθερό β) Όταν το κανάλι είναι χρονικά μεταβαλλόμενο γ)όταν το κανάλι είναι ταυτόχρονα και άγνωστο αλλά χρονικά σταθερό και χρονικά μεταβαλλόμενο

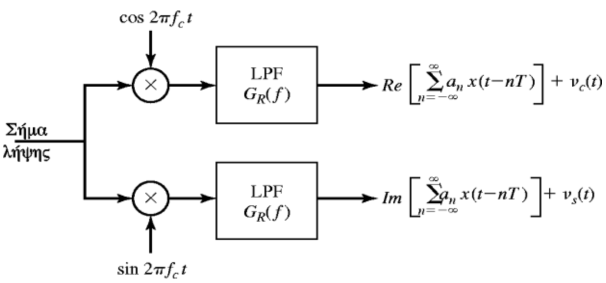
<u>Απάντηση</u>

- **Όταν το κανάλι είναι άγνωστο αλλά χρονικά σταθερό** τότε ο ισοσταθμιστής μπορεί να οριστεί μια φορά στην αρχή και μετά να λειτουργεί χωρίς να αλλάζουν οι παράμετροί του. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούνται Ισοσταθμιστές Προρύθμισης (Preset Equalizers)
- **Όταν το κανάλι είναι χρονικά μεταβαλλόμενο**, τότε ο ισοσταθμιστής θα πρέπει κι αυτός να αλλάζει συνεχώς, ώστε να παρακολουθεί τις αλλαγές του καναλιού. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούνται Προσαρμοστικοί Ισοσταθμιστές (Adaptive Equalizers):
- **Όταν το κανάλι είναι συνδυασμός των παραπάνω** τότε ο ισοσταθμιστής υπολογίζεται κατά διαστήματα σταθερής διάρκειας ή εφόσον ανιχνεύσει αλλαγή του καναλιού

13.11 Να δώσετε το διάγραμμα βαθμίδων του μετατροπέα ενός λαμβανόμενου ζωνοπερατού σήματος σε σήμα βασικής ζώνης και να το σχολιάσετε

<u>Απάντηση</u>

Το διάγραμμα βαθμίδων του μετατροπέα ενός λαμβανόμενου ζωνοπερατού σήματος σε σήμα βασικής ζώνης φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα:



Το Ληφθέν ζωνοπερατό σήμα είναι: $w(t) = \mathrm{Re}[r(t)e^{j2\pi ft}]$ όπου *r(t)* είναι το ισοδύναμο ληφθέν σήμα βασικής ζώνης. $r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(t-nT) + n(t)$

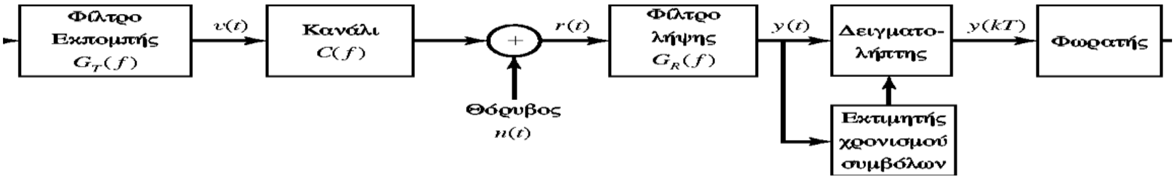
Ο θόρυβος *n(t)* μπορεί να είναι μιγαδικός (δύο συνιστώσες θορύβου στις δύο συνιστώσες του σήματος). Η κρουστική απόκριση h(t) αφορά φίλτρο πομπού και το κανάλι και είναι γενικά μιγαδική, εφόσον η κρουστική απόκριση του καναλιού είναι στην ισοδύναμη αναπαράσταση βασικής ζώνης.

Οι όροι της διπλάσιας συχνότητας που προκύπτουν κατά τη συσχέτιση με *cos* και *sin*, εξαλείφονται από το χαμηλοπερατό φίλτρο *GR(f)*. Το λαμβανόμενο ισοδύναμο μιγαδικό χαμηλοπερατό σήμα προκύπτει από το άθροισμα των εξόδων του παραπάνω σχήματος. Έχει την ίδια μορφή με το πραγματικό σήμα βασικής ζώνης. Συνεπώς το πρόβλημα σχεδιασμού σήματος για ζωνοπερατά σήματα είναι βασικά ίδιο με αυτό που είδαμε για σήματα βασικής ζώνης.

13.12 Να δοθεί το διάγραμμα βαθμίδων ενός δυαδικού συστήματος PAM βασικής ζώνης και να περιγραφούν συνοπτικά τα βασικά στοιχεία του

Απάντηση

Το διάγραμμα βαθμίδων του δυαδικού PAM είναι το ακόλουθο:

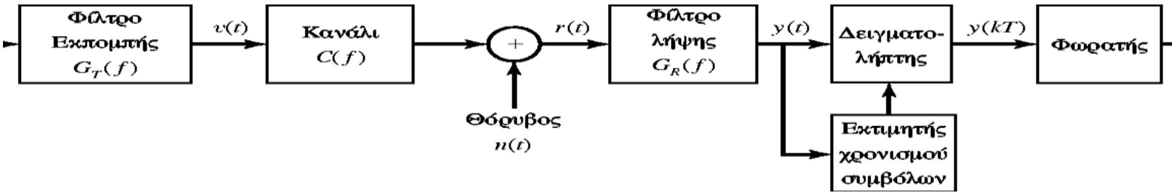


Το σύστημα αποτελείται από ένα φίλτρο εκπομπής με κρουστική απόκριση $g_T(t)$, το κανάλι γραμμικού φίλτρου με το θόρυβο AWGN, το φίλτρο λήψης με κρουστική απόκριση $g_R(t)$, ένα δειγματολήπτη ο οποίος δειγματοληπτεί περιοδικά την έξοδο του λαμβανόμενου φίλτρου και ένα φωρατή συμβόλων. Ο δειγματολήπτης απαιτεί την εξαγωγή του σήματος χρονισμού από το λαμβανόμενο σήμα. Αυτό το σήμα χρονισμού χρησιμεύει ως ρολόι που καθορίζει τις κατάλληλες χρονικές στιγμές δειγματολήπτησης της εξόδου του φίλτρου λήψης.

13.13. Να τροποποιηθεί κατάλληλη το διάγραμμα βαθμίδων του συστήματος μετάδοσης δυαδικών δεδομένων στη βασική ζώνη ώστε να μεταδίδει Μ-αδικά δεδομένα

Απάντηση

Πριν το φίλτρο εκπομπής βρίσκεται ένα υποσύστημα μετατροπής μιας δυαδικής ακολουθίας σε Μιαδική. Το υπόλοιπο διάγραμμα είναι το ακόλουθο:



13.14. Να διατυπωθεί η συνθήκη Nyquist για μηδενική διασυμβολική παρεμβολή. Τι ακριβώς εξασφαλίζει η συνθήκη αυτή; Την αντιμετώπιση του θορύβου, την εξουδετέρωση των συνεπειών του καναλιού ή και τα δύο;

Απάντηση

Η συνθήκη Nyquist για μηδενική διασυμβολική παρεμβολή (ISI) διατυπώνεται ως εξής:

Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει ότι:

$$x(nT) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος *X(f)* να ικανοποιεί τη σχέση $\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f + \frac{m}{T}) = T$

Για να ανακτήσουμε την ακολουθία συμβόλων $\{\alpha_n\}$ που μεταδόθηκαν στο δέκτη δειγματοληπτούμε την έξοδο του φίλτρου λήψης ανά t=mT οπότε σε διακριτό χρόνο προκύπτουν τα δείγματα:

$$y(m) = a_m x(0) + \sum_{m \neq n} a_n x(m-n) + v(m)$$

Η διασυμβολική παρεμβολή οφείλεται στη συνολική κρουστική απόκριση των φίλτρων πομπού, δέκτη και καναλιού δηλαδή: $x(t)=g_T(t)*c(t)*g_R(t)$ ή ισοδύναμα $X(f)=G_T(f)\bullet C(f)\bullet G_R(f)$

Το κανάλι μετάδοσης είναι δεδομένο και δεν αποτελεί σχεδιαστική παράμετρο, όμως τα φίλτρα πομπού και δέκτη μπορούν να σχεδιαστούν ώστε:

$$x(m-n) = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}$$

οπότε τα δείγματα που ανακτώνται είναι: $y(m) = a_m x(0) + \sum_{m \neq n} a_n 0 + v(m) \Rightarrow y(m) = a_m x(0) + v(m)$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το μόνο πρόβλημα που απομένει είναι ο θόρυβος. Άρα η συνθήκη του Nyquist εξασφαλίζει μόνο την εξουδετέρωση των συνεπειών του καναλιού, δεν αντιμετωπίζει το θόρυβο v(m) ο οποίος οφείλεται στο κανάλι και ο οποίος διατηρείται στον τελικό τύπο:

$y(m) = a_m x(0) + v(m)$

13.15 Ποια προβλήματα εισάγει ένα κανάλι μετάδοσης;

<u>Απάντηση</u>

Το κανάλι παρέχει τη σύνδεση μεταξύ πομπού και δέκτη. Τα προβλήματα που εισάγει είναι:

- περιορισμένο εύρος ζώνης
- εξασθένηση
  - παραμόρφωση πλάτους
  - παραμόρφωση φάσης
- εισάγεται θόρυβος
  - θερμικός AWGN
  - κρουστικός θόρυβος
  - παρεμβολή
- πολύδρομη μετάδοση – διαλείψεις (ασύρματο κανάλι)
- χρονική μεταβολή