

Εισαγωγή στις Τηλεπικοινωνίες

1η Εργαστηριακή Άσκηση

Σπυρίδων Παυλάτος 03116113
Ομάδα A2 - Συνεργάτης : Νεοκλής Βαϊνδηρλής
spyrospavlatos4@gmail.com

Σημείωση : Το άθροισμα των 3 τελευταίων ψηφίων του ΑΜ προκύπτει ίσο με 5.

1ο Ερώτημα

α' Δειγματοληπτούμε την τριγωνική περιοδική παλμοσειρά πλάτους $A = 2V$ και συχνότητας $f_m = 5kHz$ με συχνότητες δειγματοληψίας i. $f_{s1} = 20f_m$ και ii. $f_{s2} = 80f_m$.

Η υλοποίηση του παραπάνω σήματος στην *Python* έγινε με χρήση της συνάρτησης *signal.sawtooth* της βιβλιοθήκης *scipy*.

β' Σύμφωνα με το θεώρημα *Nyquist* για να είναι δυνατή η ανακατασκευή ενός σήματος εύρους ζώνης B , το οποίο έχει δειγματοληπτηθεί με συχνότητα f_s , πρέπει να ισχύει

$$f_s \geq 2B$$

δηλαδή, η ελάχιστη συχνότητα για να είναι δυνατή η ανακατασκευή του σήματος είναι $f_{s,min} = 2B$.

Η τριγωνική παλμοσειρά μπορεί ως περιοδική συνάρτηση να αναπτυχθεί σε σειρά *Fourier*. Λόγω άρτιας συμμετρίας μάλιστα μπορεί να αναπτυχθεί μόνο σε σειρά συνημιτόνων. Έτσι, οι συντελεστές *Fourier* προκύπτουν :

$$a_n = \begin{cases} -\frac{8A}{\pi^2 n^2}, & n \text{ odd} \\ 0, & n \text{ even} \end{cases}$$

Συνεπώς, η θεωρητική ανακατασκευή της τριγωνικής παλμοσειράς δεν είναι δυνατή, καθώς έχει φασματικές συνιστώσες στα περιττά πολλαπλάσια της f_m και άρα έχει άπειρο φάσμα. Η περιβάλλουσα αυτών των φασματικών συνιστωσών είναι της μορφής sinc^2 . Παρατηρούμε, όμως, πως για $n = 1$ έχουμε $|a_1| = 0.81A$ και για $n = 3$ έχουμε $|a_3| = 0.09A$, δηλαδή $\frac{a_1}{a_3} = 9 \simeq 9.5dB$, δηλαδή από την τρίτη φασματική συνιστώσα και μετά το πλάτος των φασματικών συνιστωσών είναι πολύ μικρό σε σχέση με το πλάτος της πρώτης φασματικής συνιστώσας. Θα μπορούσαμε, συνεπώς, να αγνοήσουμε αυτές τις αρμονικές και να θεωρήσουμε ότι όλη η φασματική πληροφορία βρίσκεται στην πρώτη φασματική συνιστώσα, δηλαδή έχουμε ένα εύρος ζώνης $B_y = f_m = 5kHz$ και άρα $f_{s,min} = 10kHz$. Σε αυτήν την περίπτωση λαμβάνοντας υπόψη το θεώρημα *Nyquist* προκύπτει ότι για συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s3} = 5f_m = 25kHz$ είναι δυνατή η ανακατασκευή του σήματος, καθώς $f_s = 5f_m = 25kHz > 10kHz = 2f_{s,min}$. Σε περίπτωση που λάβουμε υπόψη οποιαδήποτε περιττή φασματική συνιστώσα ανώτερης τάξης, προκύπτει ότι δεν είναι δυνατή η ανακατασκευή του σήματος για συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s3} = 5f_m = 25kHz$.

γ'.(i) Δειγματοληπτούμε το σήμα $z(t) = A \sin(2\pi f_m t)$ με $A = 1V$ και $f_m = 5kHz$ με συχνότητες δειγματοληψίας i. $f_{s1} = 20f_m$ και ii. $f_{s2} = 80f_m$. Ο μετασχηματισμός *Fourier* του σήματος αυτού είναι :

$$Z(f) = \frac{A(\delta(f - f_m) - \delta(f + f_m))}{2j}$$

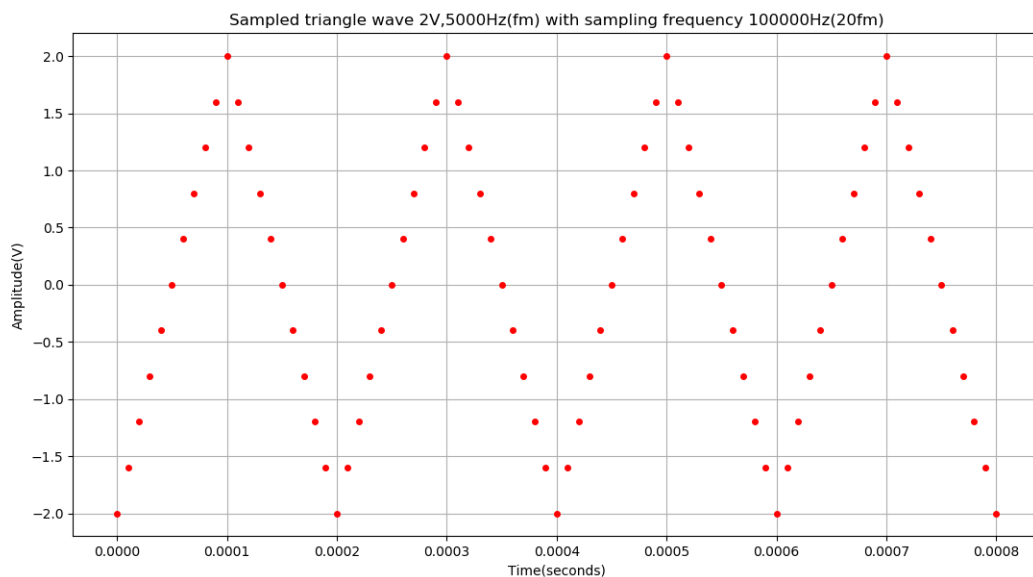
και άρα το εύρος ζώνης του σήματος είναι $B_z = f_m = 5kHz$. Συνεπώς, βάση του θεωρήματος *Nyquist* η ελάχιστη θεωρητική συχνότητα δειγματοληψίας για να μην υπάρχει *aliasing effect* είναι $f_{s,min} = 2B_z = 10kHz$. Άρα, η δειγματοληψία του σήματος με συχνότητα $f_s = 5f_m = 25kHz > 10kHz = f_{s,min}$ δεν θα δημιουργήσει *aliasing effect*.

γ'.(ii) Δειγματοληπτούμε το σήμα $q(t) = z(t) + A \sin(2\pi(f_m + \Lambda)t)$, με $\Lambda = 1kHz$. Το σήμα, δηλαδή, είναι το $q(t) = \sin(2\pi f_m t) + \sin(2\pi(f_m + \Lambda)t)$. Το σήμα αυτό είναι άθροισμα δύο ημιτόνων και είναι περιοδικό με περίοδο $T' = 1/f'$, όπου f' είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των συχνοτήτων $f_m, f_m + \Lambda$ και έχει μετασχηματισμό *Fourier* :

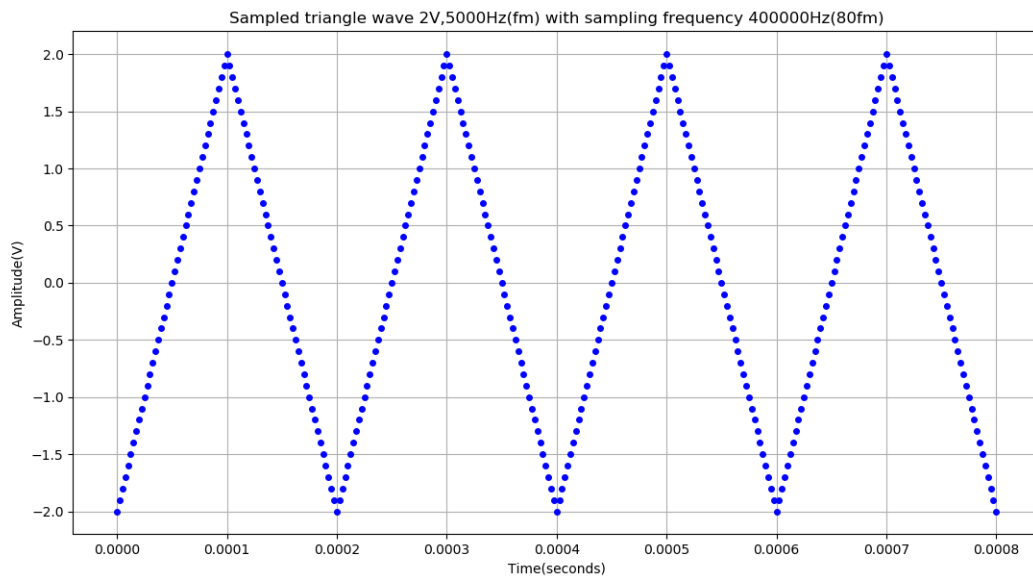
$$Q(f) = \frac{A(\delta(f - f_m) - \delta(f + f_m))}{2j} + \frac{A(\delta(f - f_m - \Lambda) - \delta(f + f_m + \Lambda))}{2j}$$

Το εύρος ζώνης του σήματος είναι $B_q = f_m + \Lambda = 6kHz$. Βάση του θεωρήματος *Nyquist* η ελάχιστη θεωρητική συχνότητα δειγματοληψίας για να μην υπάρχει *aliasing effect* είναι $f_{s,min} = 2B_q = 12kHz$. Άρα, η δειγματοληψία του σήματος με συχνότητα $f_s = 5f_m = 25kHz > 12kHz = f_{s,min}$ δεν θα δημιουργήσει *aliasing effect*.

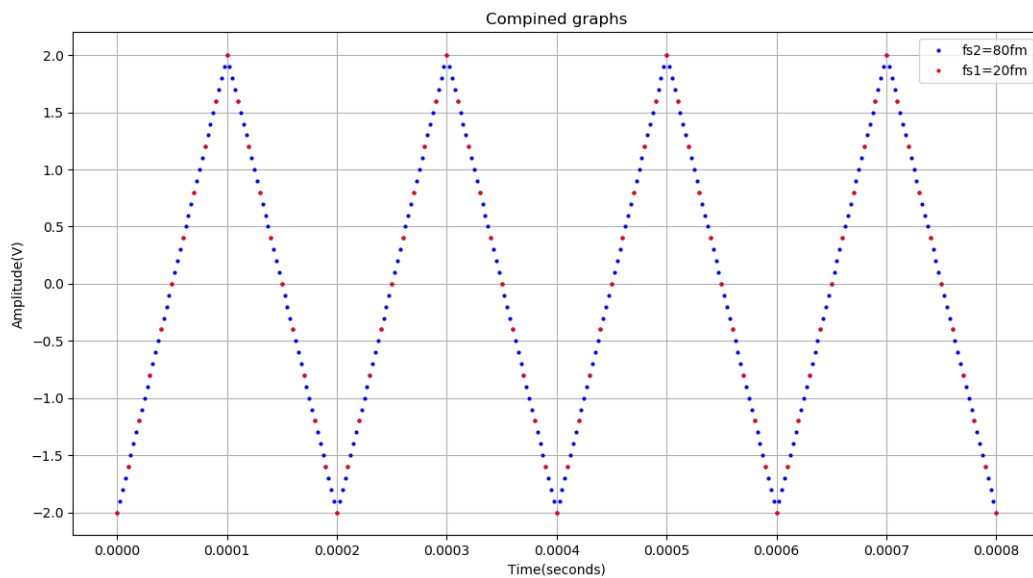
Οι γραφικές παραστάσεις για τις παραπάνω δειγματοληψίες, καθώς και τα κοινά διαγράμματά τους, παρουσιάζονται παρακάτω :



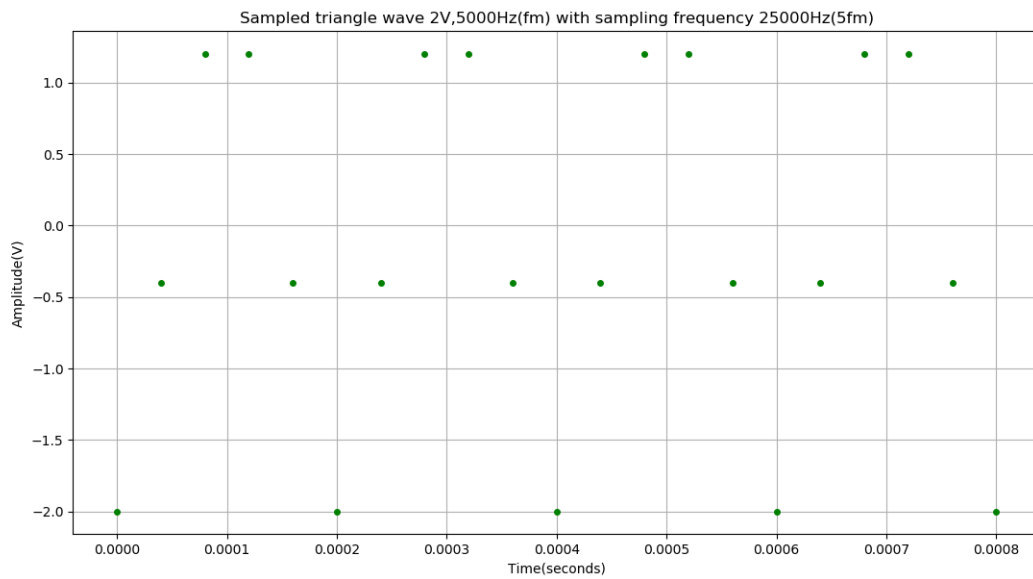
Ερώτημα 1.α.i - Δειγματοληψία του $y(t)$ με $f_{s1} = 20f_m$ για 4 περιόδους του σήματος



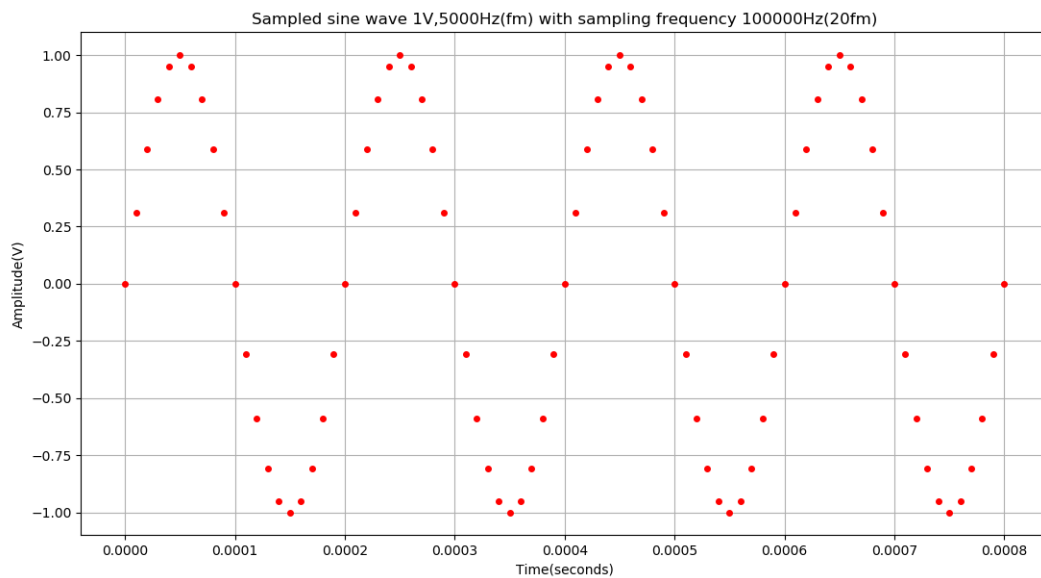
Ερώτημα 1.α.ii - Δειγματοληψία του $y(t)$ με $f_{s2} = 80f_m$ για 4 περιόδους του σήματος



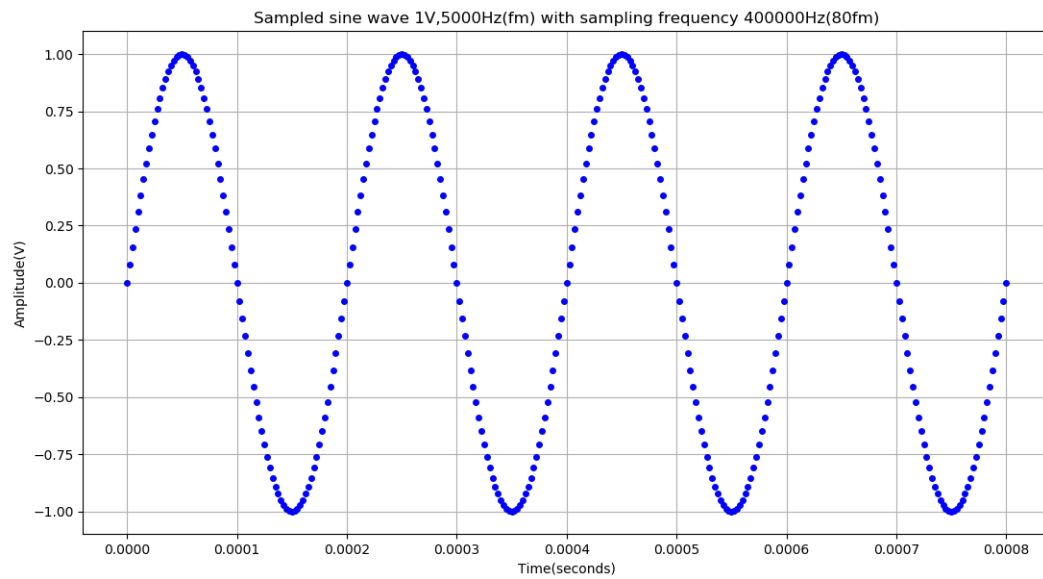
Ερώτημα 1.α.iii - Κοινό διάγραμμα για τις 2 δειγματοληψίες



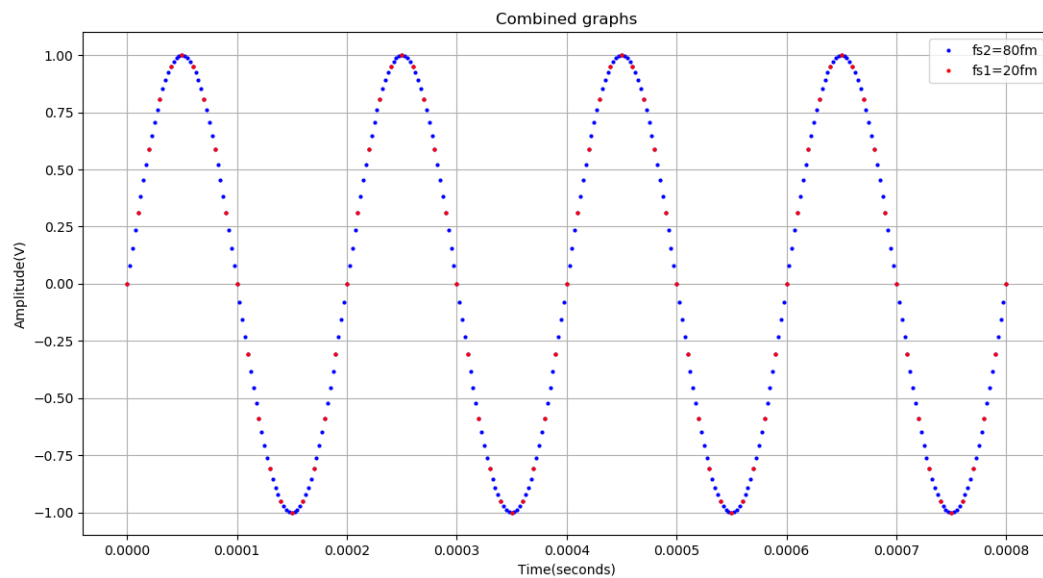
Ερώτημα 1.β - Δειγματοληψία του $y(t)$ με $f_{s3} = 5f_m$ για 4 περιόδους του σήματος



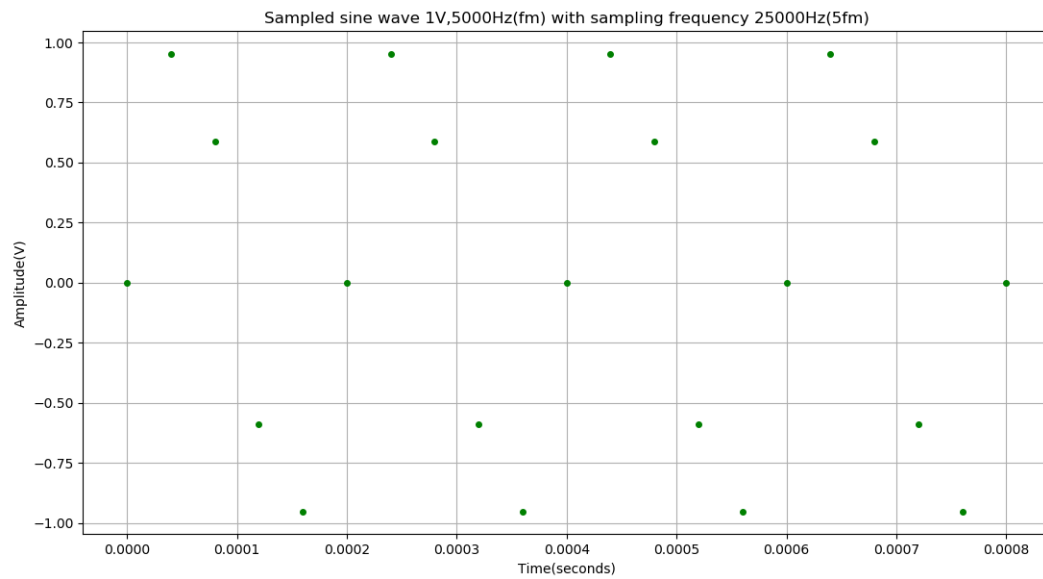
Ερώτημα 1.γ.ι - Δειγματοληψία του $z(t)$ με $f_{s1} = 20f_m$ για 4 περιόδους του σήματος



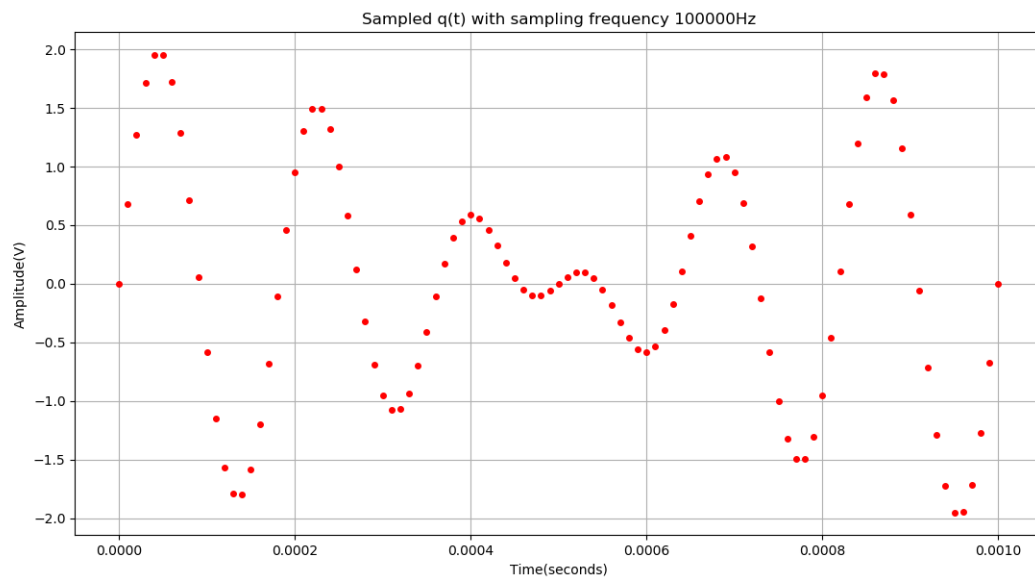
Ερώτημα 1.γ.ι - Δειγματοληψία του $z(t)$ με $f_{s2} = 80f_m$ για 4 περιόδους του σήματος



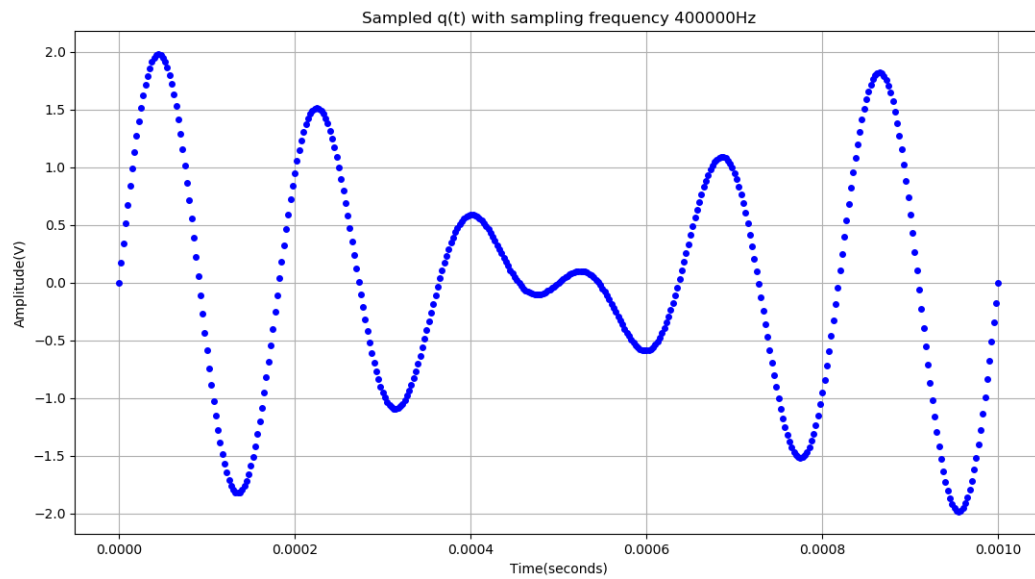
Ερώτημα 1.γ.ι - Κοινό διάγραμμα για τις 2 δειγματοληψίες



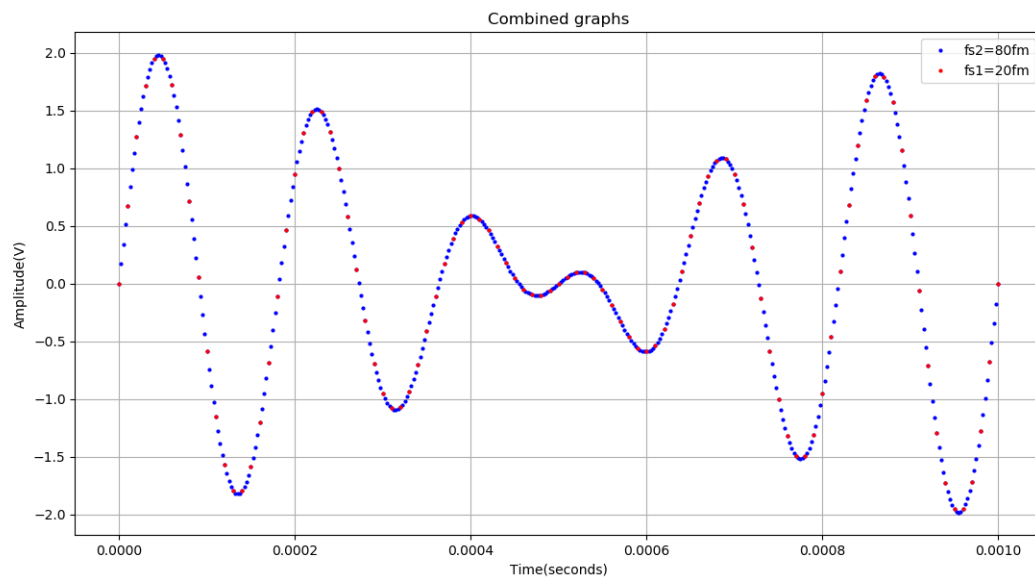
Ερώτημα 1.γ.i - Δειγματοληψία του $z(t)$ με $f_{s3} = 5f_m$ για 4 περιόδους του σήματος



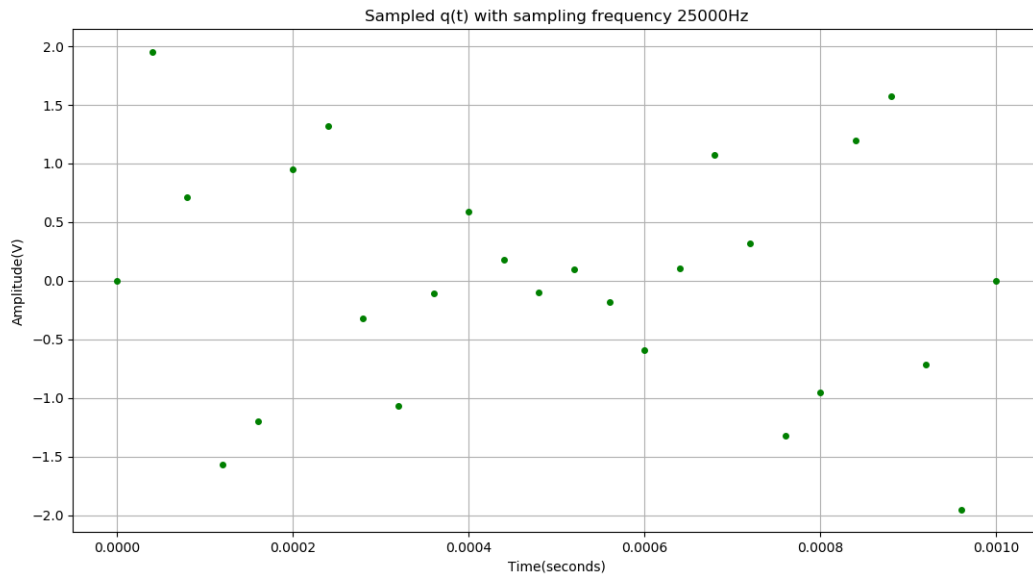
Ερώτημα 1.γ.ii - Δειγματοληψία του $q(t)$ με $f_{s1} = 20f_m$ για 1 περίοδο του σήματος



Ερώτημα 1.γ.ii - Δειγματοληψία του $q(t)$ με $f_{s2} = 80f_m$ για 1 περίοδο του σήματος



Ερώτημα 1.γ.ii - Κοινό διάγραμμα για τις 2 δειγματοληψίες



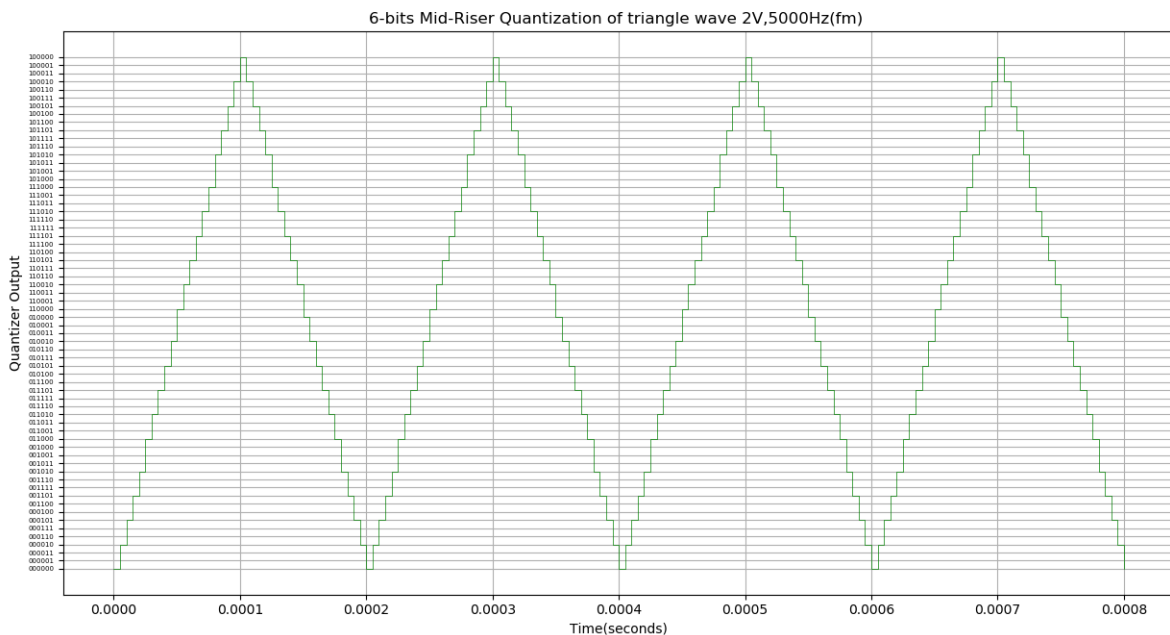
Ερώτημα 1.γ.ii - Δειγματοληψία του $q(t)$ με $f_{s3} = 5f_m$ για 1 περίοδο του σήματος

2ο Ερώτημα

α' Η δειγματοληψία της τριγωνικής παλμοσειράς του ερωτήματος 1 παράγει μία ακολουθία δειγμάτων $y_d[n]$, για την οποία ισχύει $y_d[n] = y(nT_s)$, όπου $T_s = \frac{1}{f_s}$ η περίοδος δειγματοληψίας. Δειγματοληψούμε, λοιπόν, το σήμα $y(t)$ με συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s1} = 40f_m = 200kHz$ και δίνουμε ως είσοδο την ακολουθία που παράγεται σε έναν 6bit Mid Riser κβαντιστή. Η έξοδος του κβαντιστή δίνεται από τη σχέση

$$Q(x) = \Delta \left(\left\lfloor \frac{x}{\Delta} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right)$$

όπου x η τιμή της εισόδου του κβαντιστή και Δ το βήμα κβάντισης, το οποίο δίνεται από τη σχέση $\Delta = \frac{2A}{2^R}$ με R το πλήθος των bits ανά δείγμα. Η ποσότητα $L = 2^R$ δίνει το πλήθος των επιπέδων κβάντισης. Για $R = 6$ bits προκύπτει $\Delta = 0.0625V$ /σύμβολο και $L = 64$ επίπεδα κβάντισης. Το διάγραμμα της εξόδου του κβαντιστή έχοντας πραγματοποιήσει κωδικοποίηση Gray με χρήση της συνάρτησης *GrayCode* της βιβλιοθήκης *sympy* της *Python* είναι το ακόλουθο :



Ερώτημα 2.α Έξοδος του κβαντιστή Mid Riser σε κωδικοποίηση Gray για 4 περιόδους του σήματος

β' Αν η είσοδος στον κβαντιστή είναι ένα δείγμα πλάτους $m(nT_s)$ και η έξοδος του είναι ένα διακριτό πλάτος $v(nT_s)$, τότε μπορούμε να ορίσουμε το σφάλμα κβάντισης ως την τυχαία μεταβλητή Q της τιμής του σφάλματος $q = m - v$. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της T.M. Q αν δεν γνωρίζουμε τη συνάρτηση πυκνότητάς πιθανότητας της μπορούν να υπολογιστούν πειραματικά από τις αμερόληπτες εκτιμήτριες :

$$E[Q] = \bar{Q} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N q[n] \quad \text{και} \quad \sigma_Q^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (q[n] - \bar{Q})^2$$

όπου N το πλήθος των δειγμάτων. Ο πειραματικός υπολογισμός της τυπικής απόκλισης έγινε με χρήση της συνάρτησης *var* της βιβλιοθήκης *numpy* της *Python*, η οποία θέτωντας την παράμετρο *ddof* = 1 χρησιμοποιεί την παραπάνω αμερόληπτη εκτιμήτρια της διασποράς.

Αν θεωρήσουμε ότι η T.M. Q ακολουθεί ομοιομορφη κατανομή στο διάστημα $[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$, έχει δηλαδή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$f_Q(q) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & -\frac{\Delta}{2} < q < \frac{\Delta}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

τότε ισχύουν $E[Q] = 0$ και $\sigma_Q^2 = \frac{\Delta^2}{12} = 0.00032552$.

Το SNR κβάντισης δίνεται από τη σχέση :

$$(SNR)_q = \frac{\bar{P}}{\sigma_Q^2}$$

όπου \bar{P} η μέση ισχύς του σήματος $m(t)$. Για την τριγωνική παλμοσειρά η θεωρητική μέση ισχύς είναι ίση με $\bar{P} = \frac{A^2}{3}$, ενώ μπορεί να υπολογιστεί και πειραματικά από τα δείγματα στην είσοδο του κβαντιστή μέσω της σχέσης

$$\bar{P}_{\text{πειρ}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y_d[n])^2$$

Έτσι, προκύπτουν :

1. Το θεωρητικό SNR κβάντισης βάσει της θεωρητικής τιμής της μέσης ισχύος

$$(SNR)_q = \frac{\bar{P}}{(\sigma_Q)^2} = \frac{\frac{A^2}{3}}{\frac{\Delta^2}{12}} = \frac{4A^2}{\Delta^2} = 2^{2R} = 4096 = 36.12dB$$

2. Το θεωρητικό SNR κβάντισης βάσει της πειραματικής τιμής της μέσης ισχύος για όλα τα δείγματα

$$(SNR)_q = \frac{\bar{P}_{\text{πειρ}}}{(\sigma_Q)^2} = 36.2dB$$

3. Η τυπική απόκλιση του σφάλματος κβάντισης για 10 δείγματα

$$\sigma_Q^2 = 0.00034722$$

και το αντίστοιχο SNR κβάντισης

$$(SNR)_q = \frac{\bar{P}_{\text{πειρ},10}}{(\sigma_Q)^2} = 36.46dB$$

4. Η τυπική απόκλιση του σφάλματος κβάντισης για 20 δείγματα

$$\sigma_Q^2 = 0.00035979$$

και το αντίστοιχο SNR κβάντισης

$$(SNR)_q = \frac{\bar{P}_{\text{πειρ},20}}{(\sigma_Q)^2} = 35.15dB$$

Παρατηρούμε πως οι θεωρητικές τιμές είναι πολύ κοντά σε αυτές που προκύπτουν από την προσομοίωση, ενώ επίσης επιβεβαιώνεται και ο κανόνας των 6dB για κάθε extra bit.

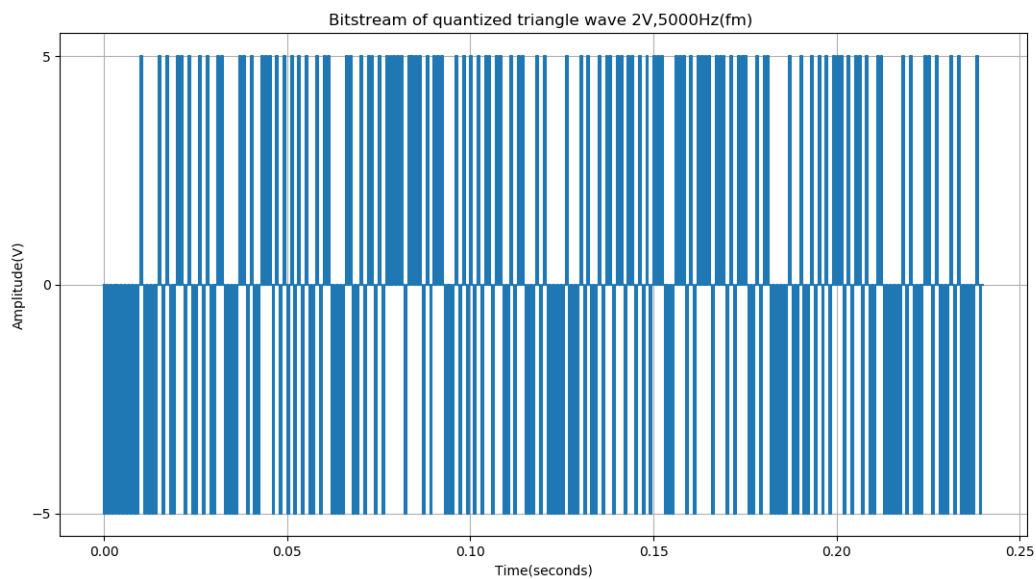
```

spyros@spyros-insplron-5567:~/Desktop/Telecommunications/lab1$ python lab1.py
The quantization error's variance for 10 samples is 0.000347222222222229 and SNRQ is 36.45783703454723dB.
The quantization error's variance for 20 samples is 0.000359786184210527 and SNRQ is 35.151008080294666dB.
The theoretical value of SNRQ is 36.19847969360325dB.

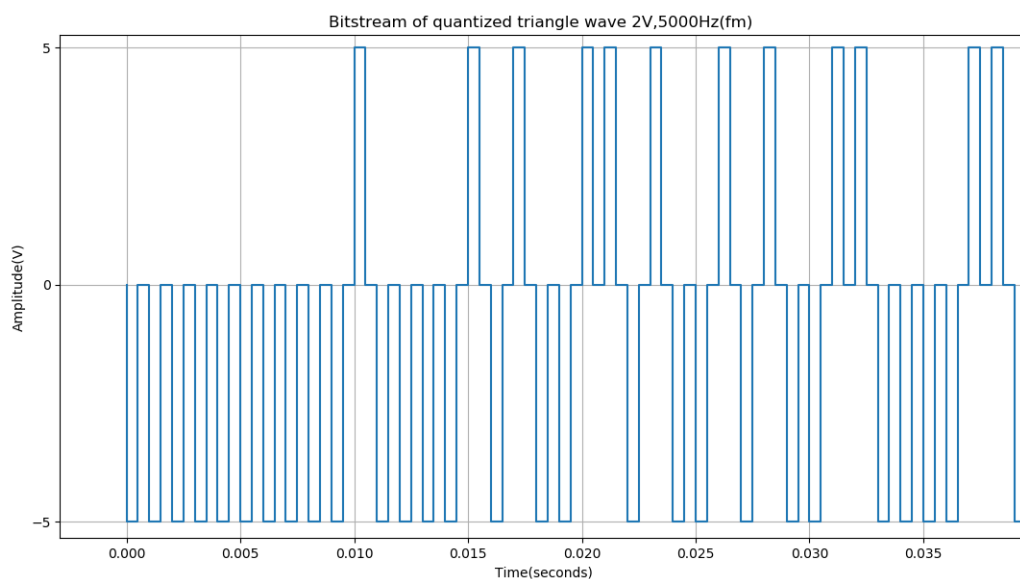
```

Ερώτημα 2.β SNR και τυπική απόκλιση σφάλματος κβάντισης για 10 και 20 δείγματα και θεωρητική τιμή του SNR κβάντισης με χρήση της ισχύος των δειγμάτων στην είσοδο του κβαντιστή

γ' Η κωδικοποίηση γραμμής είναι η διαδικασία μετασχηματισμού μίας σειράς από bits σε μία σειρά από παλμούς τάσης για τη μετάδοση τους στο δίαυλο. Θα χρησιμοποιηθεί κωδικοποίηση Polar RZ, στην οποία το σύμβολο 1 αντιστοιχίζεται σε ένα θετικό ορθογώνιο παλμό διάρκειας μισού συμβόλου και το σύμβολο 0 αντιστοιχίζεται σε έναν αρνητικό ορθογώνιο παλμό διάρκειας μισού συμβόλου. Το πλάτος των παλμών είναι $5V$ και η διάρκεια συμβόλου είναι $1msec$.



Ερώτημα 2.γ Ροή μετάδοσης από bits (*bitstream*) για την έξοδο του κβαντιστή με κωδικοποίηση γραμμής Polar RZ και διάρκεια bit $1msec$ για 1 περίοδο του σήματος



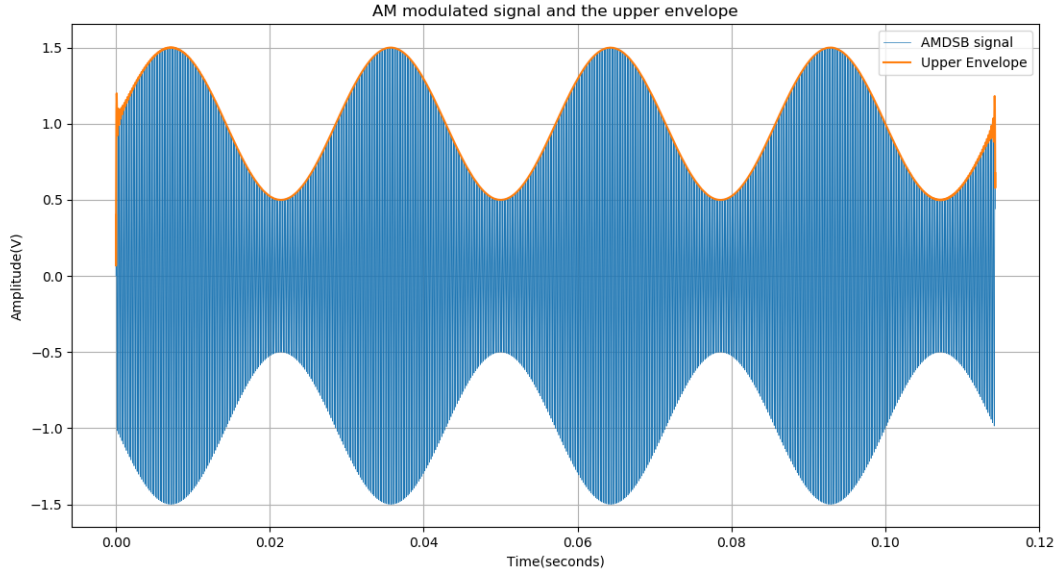
Ερώτημα 2.γ Μεγέθυνση του διαγράμματος της ροής μετάδοσης

3ο Ερώτημα

α' Θεωρώντας ημιτονοειδές φέρον σήμα το σήμα $c(t) = z(t) = A \sin 2\pi f_m t$ με $A = 1V$, δείκτη διαμόρφωσης $k_a = 0.5V^{-1}$ και σήμα πληροφορίας $m(t) = \sin 2\pi 35t$ παίρνουμε το διαμορφωμένο κατά AM (*Amplitude Modulation*) σήμα

$$s(t) = [1 + k_a m(t)]c(t) = [1 + 0.5 \sin 2\pi 35t] \sin 2\pi f_m t$$

Το παραπάνω σήμα δειγματοληπτείται με συχνότητα $f_{s3} = 110f_m = 550kHz$ και προκύπτει το τελικό σήμα.



Ερώτημα 3.α Διαμορφωμένο AMDSB σήμα $s(t)$ για φέρον $z(t)$ και σήμα πληροφορίας $m(t)$ έπειτα απο δειγματοληψία με συχνότητα $f_{s3} = 110f_m$ για 4 περιόδους του σήματος. Διακρίνεται και η άνω περιβάλλουσα του σήματος (πορτοκαλί)

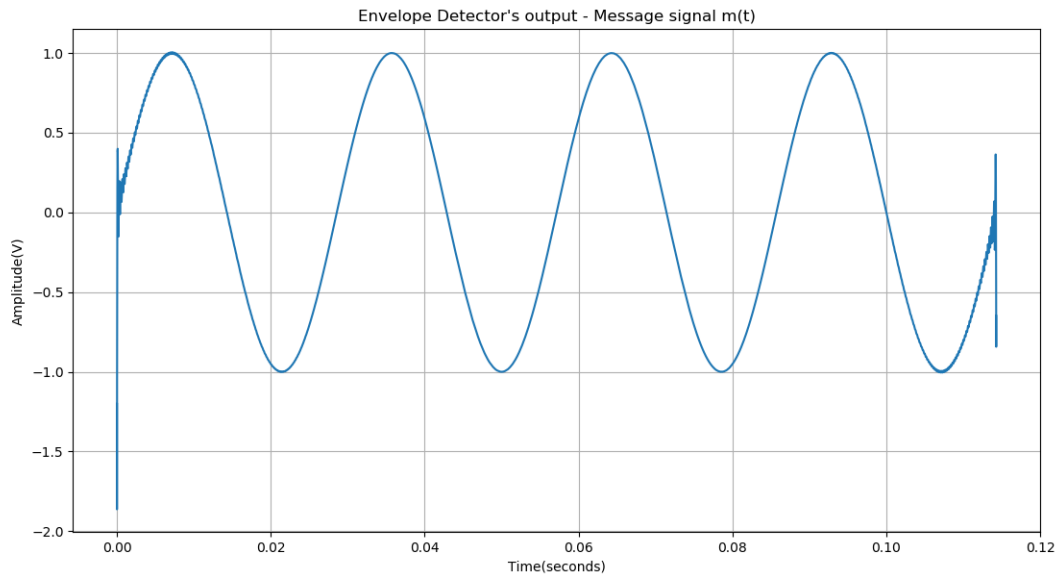
β' Για την ανάκτηση του σήματος πληροφορίας $m(t)$ θα γίνει υλοποίηση φωρατή περιβάλλουσας (*envelope detector*). Η έδοξος του φωρατή είναι η περιβάλλουσα του διαμορφωμένου σήματος $s(t)$. Την περιβάλλουσα μπορούμε να την ανακτήσουμε από το μέτρο της έκφρασης του αναλυτικού σήματος $s_a(t)$, το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$s_a(t) = s(t) + j\hat{s}(t)$$

όπου $\hat{s}(t)$ ο μετασχηματισμός *Hilbert* του $s(t)$, δηλαδή

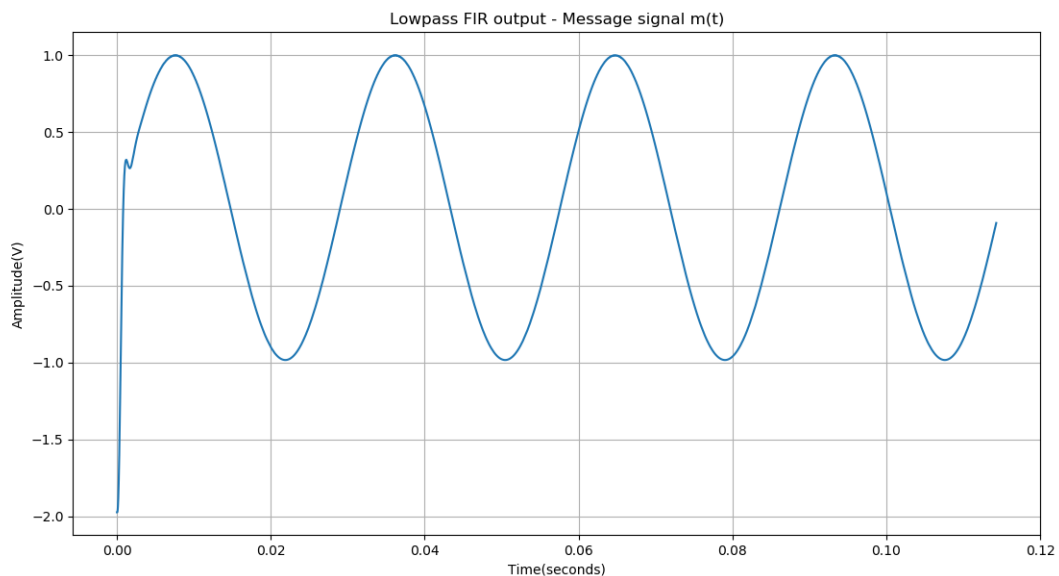
$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `signal.hilbert()` της βιβλιοθήκης `scipy` της `Python`, μπορούμε να λάβουμε το αναλυτικό σήμα για το διαμορφωμένο $s(t)$ και στη συνέχεια με χρήση της συνάρτησης `abs` της βιβλιοθήκης `numpy` λαμβάνουμε το μέτρο του αναλυτικού σήματος, δηλαδή τη ζητούμενη περιβάλλουσα. Παρατηρούμε ότι η περιβάλλουσα έχει μία DC συνιστώσα πλάτους $1V$, ενώ η διακύμανσή της είναι η μισή σε σχέση με το σήμα πληροφορίας. Συνεπώς, πρέπει να αφαιρέσουμε τη DC συνιστώσα (πρακτικά αυτό πραγματοποιείται με ένα highpass φίλτρο) και να πολλαπλασιάσουμε το προκύπτουν σήμα με κατάλληλο κέρδος, το οποίο είναι ίσο με $\text{gain} = \frac{1}{k_a} = 2$. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα :



Ερώτημα 3.β Έξοδος φωρατή περιβάλλουσας - Ανακτημένο σήμα πληροφορίας $m(t)$

Επίσης, έγινε υλοποίηση αποδιαμορφωτή γινομένου με έναν τοπικό ταλαντωτή, που παράγει ένα ακριβές αντίγραφο του φέροντος ημιτόνου, δηλαδή $\sin(2\pi f_m t)$, το οποίο πολλαπλασιάζει το διαμορφωμένο $s(t)$, δίνοντας ένα σήμα $f(t)$. Στη συνέχεια το $f(t)$ περνάει από ένα βαθυπερατό (lowpass) φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $W_m = 35\text{Hz}$, όσο το εύρος ζώνης του σήματος πληροφορίας. Στο τελικό σήμα επέρχεται διορθώση του κέρδους, καθώς και αποκοπή της DC συνιστώσας, όπως πριν. Το FIR Lowpass φίλτρο υλοποιήθηκε με τη συνάρτηση `signal.butter()`, παίρνοντας τάξη φίλτρου ίση με 5 και στη συνέχεια εφαρμόστηκε στο σήμα $f(t)$ με χρήση της συνάρτησης `signal.lfilter()`.



Ερώτημα 3.β Έξοδος FIR Lowpass φίλτρου αποδιαμορφωτή γινομένου - Ανακτημένο σήμα πληροφορίας $m(t)$

Τέλος, παρατηρούμε πως ικανοποιούνται οι δύο συνθήκες για να είναι δυνατή η αποδιαμορφώση του σήματος και οι οποίες είναι :

1. $|k_a m(t)| < 1 \quad \forall t$
2. $f_c \gg W$, δηλαδή η συχνότητα του φέροντος $f_c = f_m = 5\text{kHz}$ είναι πολύ μεγαλύτερη από το εύρος

ζώνης του σήματος πληροφορίας $m(t)$, το οποίο είναι $W = 35Hz$

Βιβλιογραφία

- [1] Κωττής, Π. (2017) *Εισαγωγή στις Τηλεπικοινωνίες*, 1η έκδοση
- [2] Oppenheim, Alan V., and Willsky, Alan S., and Nawad, S.Hamid.(1997) *Signals and Systems*, 2nd ed.
- [3] Haykin, S., and Moher, M.(2010) *Communication Systems*, 5th ed.
- [4] Lathi B.P., and Ding Zhi.(2011) *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 4th ed.