

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Νόμος των Wiedemann-Franz

Θωμόπουλος Σπύρος
spyros.thomop@gmail.com/ ge19042@mail.ntua.gr

Ημερομηνία Παράδοσης 05/04/2022

Σκοπός

Ο στόχος της εν λόγω εργαστηριακής άσκησης είναι ο προσδιορισμός της σταθεράς Lorentz (L) χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικά μέταλλα, Χαλκό και Νικέλιο.

Θεωρητικά Στοιχεία

Κατά τον νόμο Wiedemann-Franz, σε θερμοκρασίες μεγαλύτερες της θερμοκρασίας Debye ισχύει ότι ο λόγος θερμικής προς ηλεκτρικής αγωγιμότητας των μετάλλων είναι σταθερός και συγκεκριμένα:

$$\frac{\lambda}{\sigma} = LT, \quad \text{για } T > T_{Debye} \quad (1)$$

όπου λ είναι η σταθερά του Lorentz, η οποία προκύπτει τόσο κλασικά, όσο και κβαντομηχανικά.

Κλασικά

Θεωρούμε πως τα ελεύθερα ηλεκτρόνια ενός μετάλλου απαρτίζουν ένα αέριο και ως αποτέλεσμα της τυχαίας τους κίνησης έχουν μέση ταχύτητα 0 και είναι αυτά που ευθύνονται για τις θερμικές και ηλεκτρικές ιδιότητές του. Αν εφαρμόσουμε ένα ηλεκτρικό πεδίο στο μέταλλο, τότε η κίνηση των ηλεκτρονίων γίνεται κατά την φορά του πεδίου \vec{E} και έτσι έχουμε ηλεκτρικό ρεύμα με

$$\vec{J} = n_0 e \bar{u} \quad (2)$$

Η δύναμη που ασκείται στα ηλεκτρόνια μέσω του πεδίου προκαλεί μία επιτάχυνση. Ωστόσο η μέση ταχύτητα δεν λαμβάνει αυθαίρετα μεγάλες τιμές καθώς περιορίζεται από τις συγκρούσεις με τα ιόντα του κρυσταλλικού πλέγματος. Εν τέλει προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \vec{J} = n_0 e^2 \frac{\tau}{2m} \vec{E} &\stackrel{\text{Ohm}}{=} \sigma \vec{E} \Rightarrow \\ \sigma &= n_0 e^2 \frac{\tau}{2m} \end{aligned} \quad (3)$$

όπου τ είναι ο μέσος χρόνος μεταξύ των συγκρούσεων των ηλεκτρονίων με τα ιόντα.

Αντίστοιχα, η θερμική αγωγιμότητα για την κλασική προσέγγιση είναι

$$\lambda = \frac{n_0 C_e \bar{l} \bar{u}}{3} \quad (4)$$

όπου \bar{u} η μέση ταχύτητα των e , \bar{l} η μέση ελεύθερη διαδρομή τους και $C_e = 3\kappa/2$ η θερμοχωρητικότητά τους. Έτσι, προκύπτει η σταθερά Lorentz

$$L = \frac{8}{\pi} \frac{k^2}{e^2} \simeq 1.9 \times 10^{-8} W \Omega K^{-2} \quad (5)$$

Κβαντομηχανικά

Ομοίως με πριν, θεωρούμε ότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια απαρτίζουν ένα αέριο αλλά πλέον έχει συμπεριληφθεί η στατιστική Fermi-Dirac και η απαγορευτική αρχή του Pauli που ισχύουν για τα ηλεκτρόνια εφόσον είναι φερμιόνια και οι οποίες έχουν ως συνέπεια την εμφάνιση ενός κατώτατου ορίου για την ενέργεια που μπορεί να έχει ένα ηλεκτρόνιο, την ενέργεια Fermi, E_f . Εδώ το μόνο που αλλάζει είναι οι τιμές των μεγεθών \bar{u} , \bar{l} , τ και C_e .

Το τελικό αποτέλεσμα της σταθεράς Lorentz προκύπτει κοντά σε αυτό της κλασικής προσέγγισης αλλά είναι πιο κοντά στο αποδεκτό:

$$L = \frac{\pi^2}{3} \frac{k^2}{e^2} = 2.45 \times 10^{-8} W \Omega K^{-2} \quad (6)$$

Μέθοδος που χρησιμοποιείται

Θα μετρήσουμε τον λόγο σ/λ με ένα πείραμα. Κρατάμε την θερμοκρασία της ράβδου στα άκρα της σταθερή, φέρνοντας την σε επαφή με σώμα μεγάλης θερμοχωρητικότητας και διοχετεύουμε σε αυτήν ρεύμα I_0 το οποίο προκαλεί έκλυση θερμότητας εντός της ράβδου με ρυθμό $f(x)$ ανά μονάδα όγκου. Αν θεωρήσουμε ότι δεν εκλύεται θερμότητα από την πλευρική επιφάνεια της ράβδου και επίσης Q_1 την

θερμότητα που εισέρχεται σε ένα στοιχειώδες κομμάτι της ράβδου $(x, x+dx)$, Q_2 την θερμότητα που εκλύεται εντός του όγκου, Q_3 την θερμότητα που εξέρχεται και Q_4 την θερμότητα που απορροφάται, τότε από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας έχουμε:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 \quad \begin{matrix} Q_2 = f(x)sdxdt, Q_4 = C\rho sdx \frac{\partial T}{\partial t} dt \\ Q_1, Q_3 \nu. \alpha\gamma\omega\gamma\eta\varsigma\theta\epsilon\rho\mu. \end{matrix}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\rho C}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{f}{\lambda} \quad (7)$$

Για την μόνιμη κατάσταση έχουμε $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ και θεωρούμε σταθερές τις ιδιότητες της ράβδου καθώς το κέντρο θα είναι θερμότερο μόνο κατά $2^\circ C$ απ' τα άκρα, άρα

$$f = \frac{W}{V} = \frac{I_0^2 R}{sl} = \frac{V^2}{Rsl} \quad (8)$$

Εν τέλει, έπειτα από 2 ολοκληρώσεις και εφαρμόζοντας την συνθήκη μεγίστου της θερμοκρασίας για το κέντρο της ράβδου, παίρνουμε την λύση

$$T(x) = \frac{f}{2\lambda} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right) + T_0 \quad (9)$$

Για $x = 0$ παίρνουμε:

$$V^2 = \frac{8\lambda}{\sigma} \Delta T, \quad \text{για } \Delta T = T(0) - T_0 \quad (10)$$

Συνεπώς με μία μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων μπορούμε να υπολογίσουμε τον λόγο λ/σ και κατ' επέκταση της σταθερά Lorentz

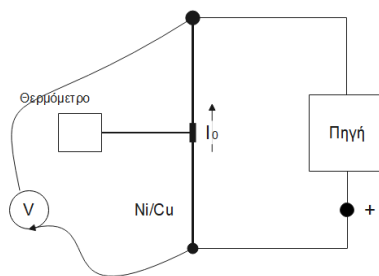
$$L = \frac{\lambda}{\sigma T} \quad (11)$$

Πειραματική Διάταξη

Η διάταξη αποτελείται από:

- . Πηγή ρεύματος $0 - 20A$
- . Σύρμα χαλκού (καλός αγωγός) και νικελίου (κακός αγωγός) με διάμετρο 2mm και μήκος 80mm
- . Δύο βάσεις μεγάλης θερμοχωρητικότητας όπου στερεώνουμε τις άκρες των συρμάτων
- . Ένα θερμόμετρο
- . Ένα βολτόμετρο

Φαίνεται στην Εικόνα (1)



Εικόνα. 1

Πειραματική Διαδικασία - Επεξεργασία Μετρήσεων

Για το Ni

Ανοίγουμε το τροφοδοτικό και αφηύ περιμένουμε προκειμένου να σταθεροποιηθεί, καταγράφουμε την θερμοκρασία στο κέντρο της ράβδου η οποία θα ταυτίζεται με αυτή των άκρων καθώς η ράβδος βρίσκεται σε θερμική ισορροπία, $T_0 = 15.2^\circ C$. Αυξάνοντας το ρεύμα παρατηρούμε πτώση τάσης στα άκρα της ράβδου. Έτσι, αυξάνουμε το ρεύμα για τάσεις $v = 1 - 12mV$ και με βήμα $1mV$ και σε κάθε βήμα αφού περιμένουμε λίγο καταγράφουμε την θερμοκρασία στο κέντρο της ράβδου. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα (1)

V(mV)	$V^2(\mu V^2)$	$T(0)(\pm 0.1^\circ C)$	$\Delta T(\pm 0.1^\circ C) = \Delta T(\pm 0.1K)$
0	0	15.2	0
1	1	15.3	0.1
2	4	15.4	0.2
3	9	15.5	0.3
4	16	15.7	0.5
5	25	15.9	0.7
6	36	16.1	0.9
7	49	16.4	1.2
8	64	16.7	1.5
9	81	17.1	1.9
10	100	17.5	2.3
11	121	17.9	2.7
12	144	18.3	3.1

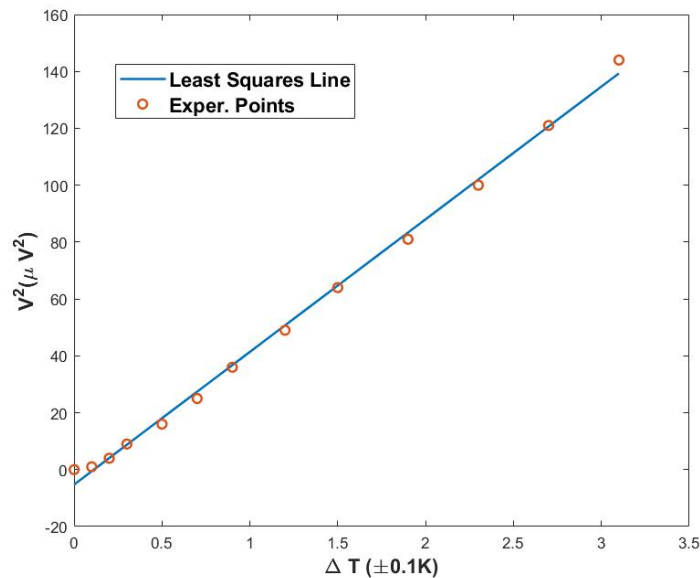
Πίνακας. 1: Μετρήσεις για το Ni

Αν θέσουμε $Y = V^2$, $X = \Delta T$, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε ελάχιστα τετράγωνα για την σχέση (10) έτσι ώστε $Y = AX + B$, όπου η κλίση θα είναι ίση με $A = 8\lambda/\sigma$. Παρακλύουν τα παρακάτω

$$A_{Ni} = 8 \left(\frac{\lambda}{\sigma} \right)_{Ni} = (46.63 \pm 0.73)[10^{-6} W \Omega K^{-1}] \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\lambda}{\sigma} \right)_{Ni} = (5.83 \pm 0.09)[10^{-6} W \Omega K^{-1}] \quad (12)$$

Η Γραφική παράσταση φαίνεται στην Εικόνα (2)



Εικόνα. 2

Για να βρούμε την σταθερά Lorentz πρέπει να διαιρέσουμε την σχέση (12) με την μέση θερμοκρασία της ράβδου. Επειδή η συνολική μεταβολή της κατά την διάρκεια του πειράματος είναι σχετικά μικρή $\sim 3^\circ C$, θα βρω την μέση τιμή της ως εξής

$$\bar{T}_{Ni} = \frac{T_{final} + T_0}{2} = 16.8^\circ C = (16.8 + 273.2)K \Rightarrow \bar{T}_{Ni} = (290.0 \pm 0.1)K$$

Άρα η σταθερά Lorentz υπολογισμένη από το Ni προκύπτει

$$L = \left(\frac{1}{\bar{T}_{Ni}} \left(\frac{\lambda}{\sigma} \right)_{Ni} \pm \delta L \right) \Rightarrow L = (2.01 \pm 0.03) \times 10^{-8} W\Omega K^{-21}$$

Η διαφορά από την σταθερά που δίνεται στον Πίνακα ($2.14 \times 10^{-8} W\Omega K^{-2}$) είναι της τάξης του $\sim 6\%$. Η απόκλιση αρχικά ίσως οφείλεται στο θεωρητικό μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε το οποίο για παράδειγμα δεν περιέχει τις απώλειες θερμότητας από τις πλαϊνές επιφάνειες της ράβδου. Ακόμη, ίσως οφείλεται στο γεγονός ότι η θερμοκρασία της ράβδου στα άκρα δεν είναι ακριβώς σταθερή αλλά θα μεταβάλλεται κατά την διάρκεια του πειράματος. Ίσως να έπρεπε να υπάρχει μεγαλύτερος χρόνος μεταξύ των διαδοχικών μετρήσεων ώστε να υπήρχε ο απαραίτητος χρόνος ώστε να επιτευχθεί η θερμική ισορροπία της ράβδου.

Για τον Cu

Εδώ επαναλαμβάνονται ακριβώς τα ίδια βήματα με πριν. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων βρίσκονται στον Πίνακα (2) και η γραφική παράσταση που προκύπτει από την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων φαίνεται στην Εικόνα (3).

V(mV)	$V^2(\mu V^2)$	$T(0)(\pm 0.1^\circ C)$	$\Delta T(\pm 0.1^\circ C) = \Delta T(\pm 0.1K)$
0	0	15.7	0
1	1	15.8	0.1
2	4	15.9	0.2
3	9	16	0.3
4	16	16.2	0.5
5	25	16.4	0.7
6	36	16.7	1.0
7	49	17.1	1.4

Πίνακας. 2: Μετρήσεις για τον Cu

Εδώ προκύπτει ότι

$$A_{Cu} = 8 \left(\frac{\lambda}{\sigma} \right)_{Cu} = (36.82 \pm 0.98)[10^{-6} W\Omega K^{-2}] \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\lambda}{\sigma} \right)_{Cu} = (4.60 \pm 0.12)[10^{-6} W\Omega K^{-2}]$$

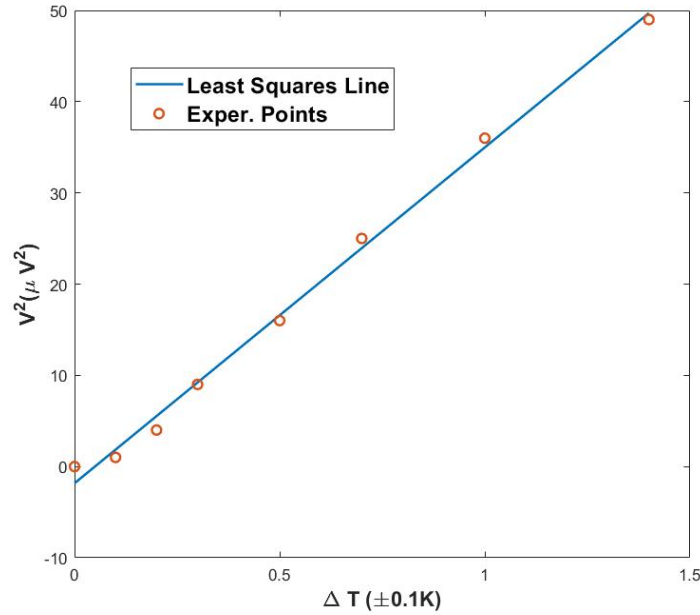
και επίσης $\bar{T}_{Cu} = (289.6 \pm 0.1)K$.

Άρα η σταθερά Lorentz είναι

$$L = \left(\frac{1}{\bar{T}_{Ni}} \left(\frac{\lambda}{\sigma} \right)_{Ni} \pm \delta L \right) \Rightarrow L = (1.59 \pm 0.04) \times 10^{-8} W\Omega K^{-22}$$

¹Το σφάλμα προκύπτει από διάδοση $\delta L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial \bar{T}} \delta \bar{T} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda/\sigma} \delta(\lambda/\sigma) \right)^2} = \frac{1}{\bar{T}} \sqrt{\frac{1}{\bar{T}^2} (\delta T)^2 (\lambda/\sigma)^2 + (\delta(\lambda/\sigma))^2}$

²Το σφάλμα προκύπτει όπως και πριν από διάδοση $\delta L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial \bar{T}} \delta \bar{T} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda/\sigma} \delta(\lambda/\sigma) \right)^2} = \frac{1}{\bar{T}} \sqrt{\frac{1}{\bar{T}^2} (\delta T)^2 (\lambda/\sigma)^2 + (\delta(\lambda/\sigma))^2}$



Εικόνα. 3

Εδώ παρατηρούμε ότι το σχετικό σφάλμα από την τιμή που δίνεται στον Πίνακα ($2.27 \times 10^{-8} \Omega K^{-2}$) είναι $\sim 30\%$. Η απόκλιση αυτή οφείλεται σε όλους τους λόγους που έχουν αναφερθεί παραπάνω για την απόκλιση του Ni.

Συμπεράσματα

Τελικά, παρατηρούμε πως εφαρμόζοντας την παραπάνω πειραματική διαδικασία φαίνεται εκ πρώτης όψεως πως το αποτέλεσμα για την σταθερά Lorentz όπως προκύπτει από το Ni, που είναι ο κακός αγωγός, είναι καλύτερο από το αποτέλεσμα που δίνει ο Cu, που είναι ο καλός αγωγός, καθώς δίνουν σχετικό σφάλμα $\sim 6\%$ και $\sim 30\%$ αντίστοιχα από τις αναμενόμενες τιμές. Κάτι τέτοιο πηγαίνει κάπως αντίθετα από την διαίσθησή μας καθώς θα περιμέναμε ότι ο καλός αγωγός θα δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

Παρ' ολ' αυτά ίσως να μην είναι και τόσο σωστό να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τόσο διαφορετικό αριθμό μετρήσεων. Συγκεκριμένα, για το Νικέλιο είχαμε 13 ενώ για τον Χαλκό 8 μετρήσεις, δηλαδή περίπου 40% λιγότερες. Έτσι, μιας και αυτή είναι η μόνη παράμετρος που μπορεί να ελεγχθεί σε αυτό το σημείο, θα υπολογίσω την σταθερά Lorentz μόνο με τις 8 πρώτες μετρήσεις για το Νικέλιο. Με τις ίδιες μεθόδους προκύπτει ίση με $L_{Ni,0-7} = (1.83 \pm 0.07) \times 10^{-8} W \Omega K^{-2}$. Εδώ, το σχετικό σφάλμα από την αναμενόμενη ($2.14 \times 10^{-8} W \Omega K^{-2}$) είναι $\sim 15\%$. Άρα πράγματι φαίνεται ότι το Νικέλιο να δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

Επομένως, η απόκλιση αυτή από τις αναμενόμενες τιμές οφείλεται σε κάποιο εγγενές χαρακτηριστικό της διάταξης. Ένα από αυτά θα μπορούσε να είναι το γεγονός ότι παρατηρούμε πως τα χάλκινα καλώδια από τα οποία αποτελείται το κύκλωμα έχουν μεγαλύτερη θερμοκρασία στο μέρος που μελετάμε την χάλκινη ράβδο, που σημαίνει ότι έχει αυξηθεί η αντίστασή τους, άρα ίσως επηρεάζονται τα αποτελέσματα.