Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Οπτική Φασματοσκοπία

Θωμόπουλος Σπύρος
Α.Μ ge19042

20/10/2021

Σκοπός

Ο στόχος της εν λόγω πειραματικής άσκησης είναι η μελέτη του φάσματος εκπομπής του υδρογόνου για την ορατή περιοχή (σειρά Balmer) και η εκτίμηση της σταθεράς Rydberg, με τη χρήση φασματοσκοπίου και λυχνίας ηλεκτρικής εκκένωσης υδρογόνου.

Θεωρητικά Στοιχεία

Από την επίλυση της εξίσωσης Schrodinger για το άτομο του Υδρογόνου θεωρώντας το πρωτόνιο ακίνητο προκύπτουν οι ενεργειακές στάθμες

$$E_n = \frac{m_e e^4 Z^2}{8\epsilon_0 h^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{13.6}{n^2}eV$$

Ακόμη έχουμε

$$\Delta E = hv = h\frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{m_e e^4 Z^2}{8\epsilon_0 h^3 c}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \tag{1}$$

Όπου ο αριθμός $R = \frac{m_e e^4 Z^2}{8\epsilon_0 h^3 c} = 1.097 \times 10^{-7} m^{-1}$ είναι η σταθερά Rydberg.

Ως πηγή εκπομπής του φάσματος θα χρησιμοποιηθεί μία λυχνία ηλεκτρικής εκκένωσης υδρογόνου, η οποία εκπέμπει φως που περιέχει τα μήκη κύματος που αντισοιχούν στις παραπάνω ενεργειακές στάθμες.

Η μελέτη που γίνεται στην άσκηση περιορίζεται στη σειρά Balmer, δηλαδή για αποδιεγέρσεις που καταλήγουν στην ενεργειακή στάθμη $n_1 = 2$ και αντιστοιχούν σε εκπομπή φωτονίων με μήκος κύματος στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος. Εκμεταλλευόμενοι τις κυματικές ιδιότητες περίθλασης και διασποράς του φωτός θα υπολογίσουμε τα εν λόγω μήκη κύματος.

Περιγραφή οργάνων

Θα γίνει χρήση *φασματοσκοπίου*, δηλαδή μίας συσκευής που καθιστά δυνατή την παρατήρηση της γωνιακής εκτροπής της κάθε συχνότητας εκπομπής με το μάτι. Θα χρησιμοποιηθούν δύο μέθοδοι με διαφορετικά φασματόμετρα: [1]

i) *Φράγματος:* Η φωτεινή δέσμη διέρχεται από ένα *φράγμα διάδοσης*, το οποίο στην περίπτωσή μας είναι ένα πλακίδιο από διαφανές υλικό, αποτελούμενο από πολύ κοντινές χαραγές $\sim 300 - 600$ ανά mm.

   Εξαιτίας του φαινομένου της περίθλασης, σε κάθε ένα από τα μήκη κύματος της φωτεινής δέσμης αντιστοιχεί μία διαφορετική γωνία (θ_n) στην οποία συμβάλλει ενισχυτικά και εμφανίζονται μέγιστα σύμφωνα με την σχέση:

$$dsin(\theta_n) = m\lambda \tag{2}$$

   όπου d είναι η απόσταση μετξύ δύο διαδοχικών χαραγών, άρα αν N_0 η συχνότητα χαραγών(χαραγές / μήκος), τότε $N_0 = 1/d$ και m είναι ένας ακέραιος που δηλώνει την τάξη της περίθλασης . Πειραματικά θα μετρήσουμε τις γωνίες θ_n για τις πρώτες 3 τάξεις περίθλασης, $m = 1, 2, 3$.

ii) *Πρίσματος:* Η φωτεινή δέσμη διέρχεται από ένα γυάλινο πρίσμα. Λόγω του φαίνομένου της δισποράς η ταχύτητα της κάθε συχνότητας της δέσμης εντός του πρίσματος είναι διαφορετική και ως εκτουτου (n. Snell) διαθλάται σε διαφορετική γωνία. Άρα κάθε συχνότητα εξέρχεται απ' το πρίσμα σε διαφορετική γωνία,

[1] Φασματόμετρο είναι αντίστοιχη συσκευή με το φασματοσκόπιο που μετρά ποσοτικά την ένταση της εκάστοτε συχνότητας.

δηλαδή το φάσμα αναλύεται στα θεμελιώδη μήκη κύματος, τα οποία δεν αναλύονται περεταίρω.
Ορίζουμε ως *γωνία εκτροπής* της κάθε συχνότητας την γωνία μεταξύ της πορείας της δέσμης αν δεν υπηρχε το πρίσμα και της τελικής πορείας με την παρουσία του πρίσματος.

Η γωνία εκτροπής μεταβάλλεται καθώς αλλάζει η γωνία πρόσπτωσης και λαμβάνει ελάχιστο(D_{min}), το οποίο μετράμε πειραματικά και υπολογίζουμε τον δείκτη διάθλασης:

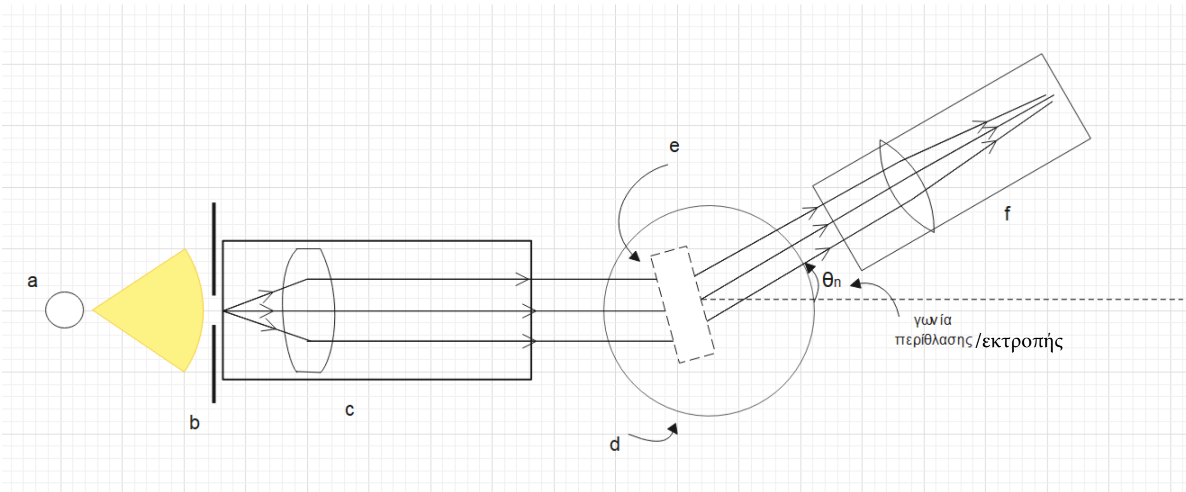
$$n = \frac{sin\left((a + D_{min})/2\right)}{sin(a/2)} \tag{3}$$

με a την γωνία της κορυφής του ισοσκελούς πρίσματος.

Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από:

- Λυχνία Υδρογόνου
- Καταυθυντήρα, που έχει μία σχισμή για την ευθυγράμμιση της δέσμης και έναν φακό για την εστίασή της
- Φράγμα / Πρίσμα
- Γωνιομετρικό κύκλο (με ενσωματωμένο βερνιέρο για τις μετρήσεις των γωνιών)
- Τηλεσκόπιο (με έναν φακό στο μπροστινό μέρος και έναν στο πίσω)



Εικόνα. 1: a)Λάμπα Υδρογόνου, b) Λεπτή σχισμή, c) Κατευθυντήρας, d) Οπτική τράπεζα που περιστρέφεται. Στην βάση της υπάρχει ο γωνιομετρικός κύκλος, e) 1η μέθοδος: Φράγμα, 2η μέθοδος: Πρίσμα, f) τηλεσκόπιο

Πειραματική Διαδικασία - Επεξεργασία Μετρήσεων

**Σε όσους πίνακες χρησιμοποιηθούν, το κόκκινο χρώμα θα δηλώνει τιμές που έχουν μετρηθεί στο εργαστήριο.
*** Οι πειραματικές τιμές του μήκους κύματος που δεν περιέχουν στα όρια του σφάλματός τους την αντίστοιχη θεωρητική τιμή σημειώνονται ως υπογραμμισμένες.

(-) 1η Μέθοδος(Φασματόμετρο Φράγματος)

Αρχικά βιδώνουμε την βάση του φράγματος στην οπτική τράπεζα και στερεώνουμε το φράγμα σε αυτήν με τις εγκοπές κάθετα στην τράπεζα.[2] Έπειτα, ανοίγουμε το τροφοδοτικό, τοποθετούμε την λάμπα υδρογόνου ακριβώς πίσω από την σχισμή του κατευθυντήρα και ρυθμίζουμε τους φακούς του τηλεσκοπίου έτσι ώστε να φαίνεται καθαρά το είδωλο της σχισμής.

Επειδή η γωνία περίθλασης της κάθε τάξης μετράται σε σχέση με την γωνία περίθλάσης μηδενικής τάξης ($m = 0$), μετράμε την αντίστοιχη ένδειξη γι' αυτή τη γωνία:

$$\theta_0 = (340.1 \pm 0.1)^\circ$$

Τώρα μετράμε τις υπόλοιπες φασματικές γραμμές, ξεκινώντας από τα δεξία. Αφού στρέψουμε το τηλεσκόπιο έτσι ώστε να φαίνεται η πρώτη γραμμή (κόκκινη) βιδώνουμε την αριστερή βίδα για να μην περιστρέφεται η οπτική τράπεζα και έπειτα με την δεξιά βίδα κουνάμε τον σταυρό εντός του τηλεσκοπίου μέχρι να ευθυγραμμιστεί με την φασματική γραμμή.
Βλέπουμε εύκολα την ένδειξη του βερνιέρου για τη μονάδα την γωνίας, ενώ το δεκαδικό ψηφίο ταυτίζεται με τον αριθμό της πρώτης γραμμής του βεριέρου που πέφτει ακριβώς πάνω από μία γραμμή του γωνιομέτρου. Επαναλαμβάνουμε τις μετρήσεις για τις φασματικές γραμμές των τριών πρώτων τάξεων περίθλασης. [3]

Συμπληρώνω τον παρακάτω πίνακα με χρήση της εξίσωσης (2) για τον προσδιορισμό του πειραματικού μήκους κύματος, με θ_n να είναι η γωνιακή απόσταση μεταξύ του θ_0 και της εκάστοτε μέτρησης[4] και $d = 1/N_0 = 1/300 \cdot 10^{-3}m = 3333.\bar{3}nm$

Ακόμη τα σφάλματα του κάθε μήκους κύματος όπως και της γωνίας θ_m προκύπτουν από διάδοση

$$\delta\theta_m = \sqrt{\left(\frac{\partial\theta_m}{\partial\theta_0}\delta\theta_0\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta_m}{\partial\theta}\delta\theta\right)^2} = \sqrt{2}\delta\theta_0 = \sqrt{2}0.1 = 0.1414 \simeq 0.1^\circ$$

$$\delta\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_m}\delta\theta_m\right)^2} = \left|\frac{d}{m}cos(\theta_m)\delta\theta_m\right|, \text{(το } \delta\theta_m \text{ είναι σε rad)}$$

Πίνακας. 1

		Δεξιά				Αριστερά			
m	Χρώμα	$\vartheta(\pm0.1^\circ)$	$\theta_n(\pm0.1^\circ)$	$sin(\theta_n)$	$\lambda_{exp} \pm \delta\lambda$ (nm)	$\vartheta(pm0.1^\circ)$	$\theta_n(\pm0.1^\circ)$	$sin(\theta_n)$	$\lambda_{exp} \pm \delta\lambda$ (nm)
1	Μωβ	332.8	7.3	0.127	423.6 ± 8.3	347.5	7.4	0.128	428.9 ± 8.3
	Κυανούν	331.9	8.2	0.142	475.4 ± 8.2	348.2	8.1	0.140	469.7 ± 8.3
	Κόκκινο	329.0	11.1	0.192	641.7 ± 8.2	351.3	11.2	0.194	647.4 ± 8.2
2	Μωβ	325.1	15.0	0.258	431.4 ± 4.0	355.0	14.9	0.257	428.6 ± 4.0
	Κυανούν	323.5	16.6	0.285	476.1 ± 4.0	356.9	16.8	0.289	481.7 ± 4.0
	Κόκκινο	317.2	22.9	0.389	648.5 ± 3.8	2.9	22.8	0.387	645.9 ± 3.8
3	Μωβ	317.6	22.5	0.382	425.2 ± 2.6	2.6	22.5	0.382	425.2 ± 2.6
	Κυανούν	314.8	25.3	0.427	474.8 ± 2.5	5.9	25.8	0.435	483.6 ± 2.5
	Κόκκινο	304.5	35.6	0.582	646.8 ± 2.3	15.8	35.7	0.583	648.4 ± 2.3

Πρέπει να σημειωθεί πως οι φσαματικές γραμμές των διαφόρων τάξεων αλληλεπτικαλύπτονται στα πλαίσια του σφάλματός τους.

[2] Η συχνότητα χαραγών στο φράγμα είναι $N_0 = 300$χαραγές $/mm$

[3] Υπάρχει επικάλυψη των γραμμών των τάξεων, δηλαδη δεν εμφανίζονται πρώτα όλες οι γραμμές της τάξης n και έπειτα της n+1. Συγκεκριμένα για τις 3 πρώτες ισχύει:
Μπλε1→Κυανούν1→Κόκκινο1→Μπλε2→Κυανούν2→Μπλε3 →Κόκκινο2→Κυανούν3→Κυανούν4→Μπλε4→Κόκκινο3

[4] Για εύρεση του θ_m: Αν η μέτρηση δεν ξεπερνάει τις 360^o τότε απλώς αφαιρώ τις δύο γωνίες ενώ αν τις ξεπερνάει $\theta_m = (360 - \theta_0 +$ μετρούμενη γωνία$) = 19.9 +$ μετρούμενη γωνία.

Οι πειραματικές μέσες τιμές για κάθε μήκος κύματος και οι αντίστοιχες θεωρητικές συγκεντρώνονται στον παρακάτω πίνακα:[5]:

Πίνακας. 2

Χρώμα	$\overline{\lambda}_{\pi\epsilon\iota\rho}(nm)$	$\lambda_{\theta\epsilon\omega\rho}(nm)$
Μωβ	427.2 ± 2.7	434.1
Κυανούν	476.8 ± 4.6	486.1
Κόκικινο	646.5 ± 2.3	656.3

Παρατηρώ ότι οι θεωρητικές τιμές δεν ανήκουν στο διάστημα του σφάλματος που βρέθηκε για τις πειραματικές τιμές, παρ'ολο που τα σχετικά σφάλματα είναι μικρότερα από 1%. Αυτό σημαίνει πως έχουμε μικρή ακρίβεια αλλά μεγάλη αξιοπιστία. Ενδεχομένως η απόκλιση αυτή να οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι το φράγμα περίθλασης δεν ήταν ακριβώς κάθετο στην φωτεινή δέσμη. Αυτό αλλάζει την σχέση (2) σε $d(sin(\phi)+sin(\theta_m)) = m\lambda$, όπου ϕ η γωνία πρόσπτωσης.[6] Γίνεται έτσι εμφανής η επίδραση αυτής της παραμέτρου στα αποτελέσματα.
Για τον υπολογισμό της σταθεράς Rydberg από την σχέση (1) έχουμε:

$$R_i = \frac{1}{\lambda_i}\frac{1}{1/4 - 1/n_2^2} \text{ ,i=\{κόκ, κυαν, μωβ\}}^7$$

απ' όπου προκύπτει $R_{\kappa o\kappa} = 1.113$, $R_{\kappa\upsilon\alpha\nu} = 1.118$, $R_{\mu\omega\beta} = 1.115$, με μονάδες $10^{-7}m^{-1}$. Άρα η αντίστοιχη μέση τιμή και το σφάλμα της είναι:

$$\overline{R} = (1.12 \pm 0.01) \times 10^{-7}m^{-1}$$

Παρατηρώ πως η πειραματικλή τιμή δεν περιλαμβάνει στα όρια του σφάλματός της την θεωρητική, παρ'όλο που έινει σχετικά κοντά σε αυτή, απέχει περίπου 2% της τιμής της.

(-) 2η Μέθοδος(Φασματόμετρο Πρίσματος)

Τώρα αφαιρούμε το φράγμα, ξεβιδώνουμε την βάση του, τοποθετούμε το πρίσμα[8]στην οπτικη τράπεζα και παρατηρούμε τις γραμμές του φάσματος με γυμνό μάτι. Τώρα περιστρέφοντας την οπτική τράπεζα (αλλάζοντας δηλαδή την γωνία πρόσπτωσης της δέσμης στο πρίσμα) παρατηρούμε ότι το φάσμα κινείται και καθώς συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία βλέπουμε πως κάποια στιγμή η κατεύθυνση της κίνησης αλλάζει. Αυτό σημαίνει ότι σε εκείνη την περιοχή βρίσκονται οι ελάχιστες γωνίες εκτροπής για το κάθε μήκος κύματος.

Για να προσδιορίσουμε με ακρίβεια αυτή τη γωνία επαναλαμβάνουμε την παρακάτω διαδικασία και για τα τρία χρώματα(κόκκινο, κυανούν, μωβ):

Φέρνουμε διαρκώς το τηλεσκόπιο σε θέση τέτοια ώστε να φαίνεται το υπό μελέτη χρώμα. Περιστρέφουμε την οπτική τράπεζα μέχρι να βρουμε το σημείο στο οποίο αλλάζει η κατεύθυνση της κίνησης του χρώματος όπου και την ακινητοποιούμε. Αφού ευθυγραμμίσουμε τον σταυρό εντός του τηλεσκοπίου με την υπό μελέτη φασματική γραμμή, μετράμε την ένδειξη του βερνιέρου (γωνία ϕ_1) και έπειτα μετράμε την γωνία που θα ακολουθούσε η φωτεινή δέσμη αν δεν υπήρχε το πρίσμα (γωνία ϕ_0, στην οποία φαίνεται το είδωλο της σχισμής).

Η απόσταση των δύο αυτών γωνιών είναι η γωνία ελάχιστης εκτροπής του υπό μελέτη μήκους κύματος.

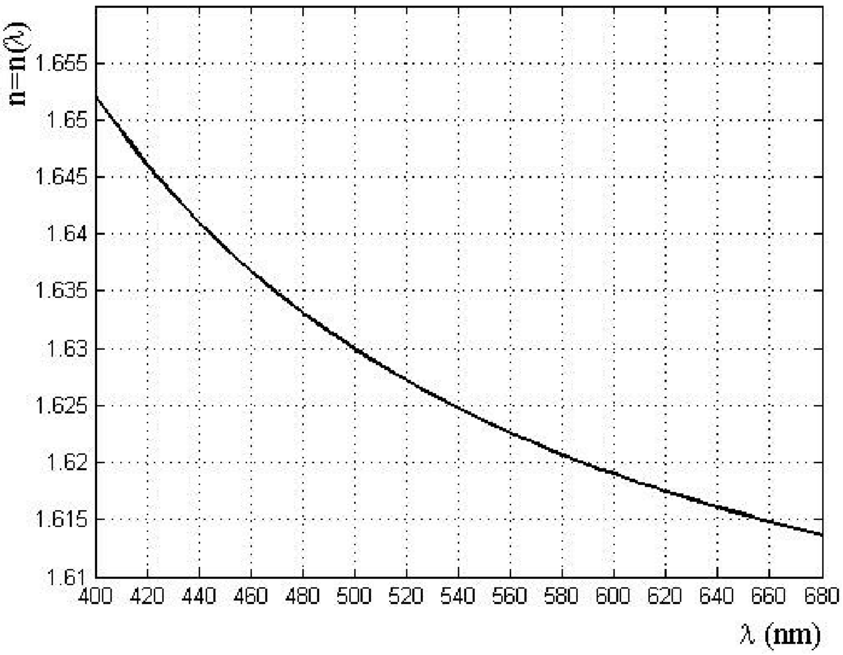
[5]Οι μέσες τιμές και τα αντίστοιχα σφάλματα προκύπτουν από τις σχέσεις: a)$\overline{\lambda} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\lambda_i$ και b) $\delta\lambda = \left(\frac{\sum_{i=1}^{6}(\lambda_i - \overline{\lambda})^2}{6\cdot 5}\right)^{1/2}$

[6]https://opencourses.uoc.gr/courses/course/view.php?id=357

[7]όπου $n_2 = 3, 4, 5$ για κόκκινο, κυανό και μωβ αντίστοιχα

[8]Το πρίσμα είναι ισοσκελές με γωνία κορυφής $a = 60°$.

Εικόνα. 2



Με τον παραπάνω τρόπο, την σχέση (3) για τον υπολογισμό του δείκτη διάθλασης και την καμπύλη (Εικόνα. 2) που δίνει τον δέικτη διάθλασης του γυαλιού συναρτήσει του μήκους κύματος για τον προσδιορισμό του μήκους κύματος, συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας. 3

Χρώμα	$\lambda_{\theta\varepsilon\omega\rho}(nm)$	$\phi_1(\pm 0.1°)$	$\phi_0(\pm 0.1°)$	$D_{min}(\pm 0.1°)$	n	$\lambda_{\pi\varepsilon\iota\rho}(nm)$
Κόκκνο	656.3	28.0	340.2	47.8	1.616 ± 0.106	650 ± 10
Κυανούν	486.1	28.7	339.6	49.1	1.629 ± 0.095	500 ± 10
Μωβ	434.1	29.1	338.8	50.3	1.641 ± 0.085	445 ± 10

Το σφάλμα για την D_{min} και τον δείκτη διάθλασης n προκύπτουν από διάδοση σφαλμάτων ως εξής:

$$\delta D_{min} = \sqrt{\left(\frac{\partial D_{min}}{\partial \phi_0}\delta\phi_0\right)^2 + \left(\frac{\partial D_{min}}{\partial \phi_1}\delta\phi_1\right)^2} = \sqrt{1 \cdot \delta\phi_0^2 + 1 \cdot \delta\phi_1^2} = 0.1\sqrt{2} \simeq 0.1414 \simeq 0.1$$

$$\delta n = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial D_{min}}\delta D_{min}\right)^2} = \left|\frac{1}{2}\frac{cos\left((a + D_{min})/2\right)}{sin(a/2)}\right| = |cos(30 + D_{min}/2)|^{9}$$

Οι θεωρητικές τιμές για τα μήκη κύματος είναι $\lambda_{\varepsilon\rho} = 656.3nm$, $\lambda_{\kappa\upsilon\alpha\nu} = 486.1nm$, $\lambda_{\mu\omega\beta 1} = 434.1nm$, Παρατηρώ ότι 2 από τις 3 τιμές των μηκών κύματος δεν συμπίπτουν με τις θεωρητικές, χωρίς ωστόσο το όριο του σφάλματος να απέχει πολύ από αυτές. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν κάποια σφάλματα που ίσως δεν έχουν συμπεριληφθεί.

Τα εν λόγω σφάλματα σχετίζονται ταυτόχρονα και με τα δύο μέρη της πειραματικής διαδικασίας και ενδεχομένως να επηρέασαν την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Παρατηρήθηκε ότι υπάρχει συστηματικό σφάλμα παράλαξης στο προσοφθάλμιο, δηλαδή η θέση του

[9] $\delta n_{\kappa o\kappa} \simeq 0.106 \simeq 0.1$, $\delta n_{\kappa\upsilon\alpha\nu} \simeq 0.0949 \simeq 0.1$, $\delta n_{\mu\omega\beta} \simeq 0.0845 \simeq 0.1$

σταυρού εντός του τηλεσκοπίου εξαρτάται από την γωνία θέασης μέσω του προσοφθαλμίου. Επιπλέον, ίσως να αλλοιώθηκαν οι μετρήσεις εξαιτίας της ύπαρξης φωτισμού στο εργαστήριο κατά την διάρκεια των μετρήσεων ή/και εξαιτίας της εισχώρησης αέρα εντός της λυχνίας από την πολυκαιρία.

Συμπεράσματα

Συνολικά τα αποτελέσματα ήταν σχετικά κοντά στα θεωρητικώς αναμενόμενα, χωρίς ωστόσο να τα περιέχουν στο διάστημα των σφαλμάτων τους. Οι παράγοντες που είχαν επίδραση κατά σειρά σημαντικότητας, εκτιμώ πως ήταν οι εξής: το σφάλμα παράλλαξης στο προσοφθάλμιο, η μη κάθετη τοποθέτηση του φράγματος στην φωτεινή δέσμη, η ύπαρξη φωτισμού στο εργαστήριο και η πολυκαιρία της λυχνίας.

Για να βελτιώσουμε την ακρίβεια της μέτρησης της 1ης μεθόδου θα μπορούσαμε να αυξήσουμε την διακριτική ικανότητα του περιθλαστικού φράγματος, πράγμα που επιτυγχάνεται με την αντικατάσταση του φράγματος με ένα άλλο, το οποίο να έχει περισσότερες σχισμές $/mm$ και τότε θα διακρίνονται καλύτερα φασματικές γραμμές με γειτονικά μήκη κύματος.

Τέλος, αν τα συστηματικά σφάλματα που έχουν αναφερθεί περιορίζονταν, τότε σίγουρα η πρώτη μέθοδος είναι πιό αποτελεσματική, καθώς έχει μεγαλύτερη αξιοπιστία (precision) από την δεύτερη. Το συμπέρασμα με βάση τις δεδομένες μετρήσεις είναι το ίδιο, καθώς γενικά, δεδομένου ότι οι θεωρητικές τιμές δεν περιέχονται στο όριο του σφάλματος των πειραματικών, η επι τοις εκατό απόκλιση των πειραματικών απ' τις θεωρητικές είναι ελαφρώς μικρότερες με την πρώτη μέθοδο

Χρώμα	$\delta\lambda/\lambda\%$ 1η Μέθοδος	$\delta\lambda/\lambda\%$ 2η Μέθοδος
Κόκκινο	2.1	1.0
Κυανούν	2.0	2.8
Μωβ	1.6	2.5