



ΕΘΝΙΚΟ  
ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

*Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο*

*Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών*

---

## A1 - Παθητικά Φίλτρα

---

*Author:*

Θωμόπουλος Σπυρίδων, ge19042

*Partner:*

Θεοδόσιος Καβαλαγιός

*Εργαστήριο Ηλεκτρονικών II*

November 4, 2023

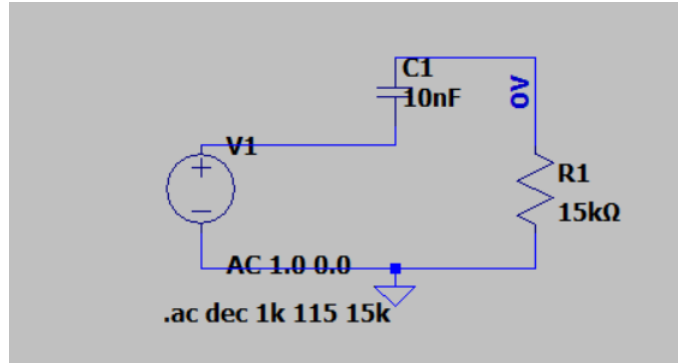
## Σκοπός

Ο σκοπός της εν λόγω εργαστηριακής άσκησης είναι η μελέτη της συμπεριφοράς ορισμένων ηλεκτρονικών συστημάτων σε αρμονικούς παλμούς διέγερσης. Τα κυκλώματα που θα μελετήσουμε είναι τα CR και RC και όπως θα δούμε λειτουργούν σαν παθητικά φίλτρα συχνοτήτων και επίσης μεταβάλλουν και την μορφή του εισερχόμενου σήματος.

## Θεωρητικά Στοιχεία

### Κύκλωμα CR

Το πρώτο κύκλωμα που θα μελετήσουμε είναι το CR.



Εικόνα. 1: Κύκλωμα CR

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Kirchhoff για τα ρεύματα, έχουμε

$$\begin{aligned}
 i_C(t) &= i_R(t) \Rightarrow \\
 C \frac{d(v_i - v_o)}{dt} &= \frac{v_o - 0}{R} \xrightarrow{v_o \ll v_i} \\
 v_o &= RC \frac{dv_i}{dt}
 \end{aligned} \quad (1)$$

Άρα το CR κύκλωμα είναι διαφοριστής. Ωστόσο, χρησιμοποιήσαμε ότι  $u_o \ll u_i$ , συνεπώς θα πρέπει να το δικαιολογήσουμε. Μετασχηματίζοντας το κύκλωμα κατά Fourier και εφαρμόζοντας τον νόμο του Kirchhoff, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 \frac{V_i - V_o}{1/j\omega C} + \frac{0 - V_o}{R} &= 0 \Rightarrow \\
 \frac{V_o}{V_i} &= H(\omega) = \frac{Rj\omega C}{1 + jR\omega C}
 \end{aligned} \quad (2)$$

Άρα έχουμε τα παρακάτω, όπου  $\phi$  η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο παλμών εισόδου-εξόδου

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\phi}, \quad (3)$$

$$\phi = \text{Atan}(\omega CR) \quad (4)$$

$$|H(\omega)| = \frac{\omega CR}{1 + (\omega CR)^2} \quad (5)$$

Παρατηρούμε ότι το κύκλωμα λειτουργεί και ως υπερπαρατό φίλτρο διότι

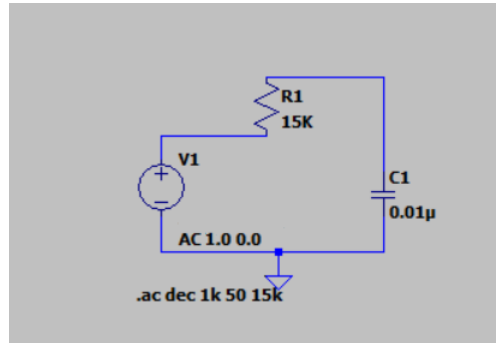
- Για  $\omega \rightarrow 0$ :  $|H(\omega)| \rightarrow 0$
- Για  $\omega \rightarrow \infty$ :  $|H(\omega)| \rightarrow 1$

Άρα η υπόθεση  $u_o \ll u_i$  ισχύει στην περιοχή μικρών συχνοτήτων. Επίσης αν αντιστρέψουμε την (2) παίρνουμε τον λόγο  $u_R/u_i$ :

$$h(t) = \frac{u_R}{u_i} = \delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-t/RC}\theta(t) \quad (6)$$

## Κύκλωμα RC

Τώρα θα εξετάσουμε το κύκλωμα RC. Κάνοντας τα ίδια βήματα με την προηγούμενη περίπτωση, για  $u_o \ll u_i$  παίρνουμε



Εικόνα. 2: Κύκλωμα RC

$$u_o(t) = \frac{1}{RC} \int_0^{t'} v_i(t') dt' \quad (7)$$

Άρα το εν λόγω κύκλωμα είναι ολοκληρωτής του σήματος εισόδου. Μετασχηματίζοντας πάλι κατά Fourier, παίρνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1} = |H(\omega)|e^{j\phi} \quad (8)$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (9)$$

$$\phi = -\text{Arctan}(\omega CR) \quad (10)$$

Παρατηρούμε ότι το κύκλωμα λειτουργεί και ως βαθυπερατό φίλτρο, διότι

- Για  $\omega \rightarrow 0$ :  $|H(\omega)| \rightarrow 1$
- Για  $\omega \rightarrow \infty$ :  $|H(\omega)| \rightarrow 0$

Τέλος, αντιστρέφοντας την (6), βρίσκουμε την σχέση των πλατών των δύο σημάτων:

$$h(t) = \frac{u_C}{u_i} = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \theta(t) \quad (11)$$

## Πειραματικά Δεδομένα & Ανάλυση

### Κύκλωμα CR

Για την πειραματική μελέτη των κυκλωμάτων, θέλουμε να δούμε την απόκριση της εξόδου συναρτήσει της συχνότητας του σήματος εισόδου. Συγκεκριμένα θα εξετάσουμε πως συμπεριφέρονται για μεταβαλλόμενες τιμές της συχνότητας για αρμονικούς παλμούς εισόδου, δηλαδή θα εξετάσουμε την ιδιότητά τους να λειτουργούν ως φίλτρα και επιπλέον βρίσκοντας παλμούς διαφορετικής μορφής θα εξετάσουμε πώς αυτή μεταβάλλεται.

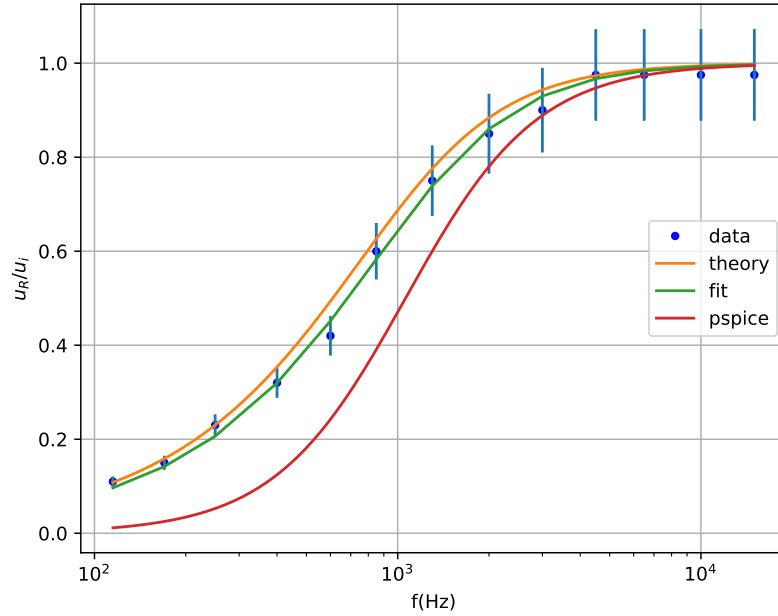
Ξεκινώντας την μελέτη των ιδιοτήτων περί συχνότητας, θα έχουμε ως είσοδο έναν παλμό πλάτους  $u_i = 2V$  και για τιμές συχνότητας στο φάσμα  $f = 115Hz - 15kHz$  θα μετράμε τόσο το πλάτος του σήματος εξόδου όσο και την χρονική διαφορά μεταξύ εισόδου-εξόδου για να μπορέσουμε εν τέλει να βρούμε την διαφορά φάσης τους. Έτσι θα ελέγξουμε πειραματικά τις σχέσεις (4) και (5).

Οι μετρήσεις και άλλα μεγέθη που προκύπτουν από αυτές φαίνονται στον Πίνακα (1).

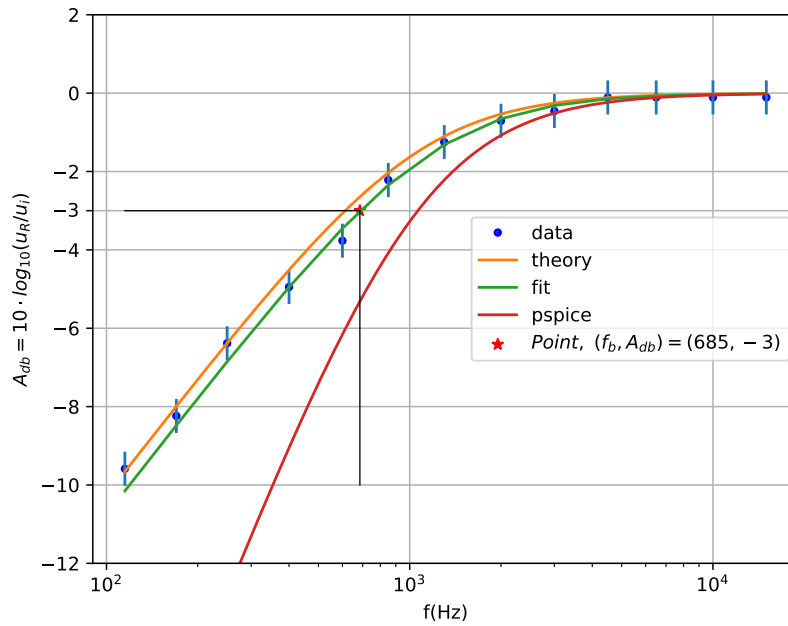
$f(Hz)$	$u_R/u_i(V)$	$\Delta t(\mu s)$	$A_{db}(db)$	$\phi(rad)$
115	$0.11 \pm 0.01$	$1200.00 \pm 20.00$	$-9.59 \pm 0.43$	$0.87 \pm 0.01$
170	$0.15 \pm 0.02$	$1200.00 \pm 20.00$	$-8.24 \pm 0.43$	$1.28 \pm 0.02$
250	$0.23 \pm 0.02$	$800.00 \pm 10.00$	$-6.38 \pm 0.43$	$1.26 \pm 0.02$
400	$0.32 \pm 0.03$	$400.00 \pm 5.00$	$-4.95 \pm 0.43$	$1.01 \pm 0.01$
600	$0.42 \pm 0.04$	$250.00 \pm 5.00$	$-3.77 \pm 0.43$	$0.94 \pm 0.02$
850	$0.60 \pm 0.06$	$180.00 \pm 1.00$	$-2.22 \pm 0.43$	$0.96 \pm 0.01$
1300	$0.75 \pm 0.08$	$90.00 \pm 1.00$	$-1.25 \pm 0.43$	$0.74 \pm 0.01$
2000	$0.85 \pm 0.09$	$30.00 \pm 0.50$	$-0.71 \pm 0.43$	$0.38 \pm 0.01$
3000	$0.90 \pm 0.09$	$20.00 \pm 0.20$	$-0.46 \pm 0.43$	$0.38 \pm 0.00$
4500	$0.97 \pm 0.10$	$10.00 \pm 0.10$	$-0.11 \pm 0.43$	$0.28 \pm 0.00$
6500	$0.97 \pm 0.10$	$6.00 \pm 0.10$	$-0.11 \pm 0.43$	$0.25 \pm 0.00$
10000	$0.97 \pm 0.10$	$3.00 \pm 0.05$	$-0.11 \pm 0.43$	$0.19 \pm 0.00$
15000	$0.97 \pm 0.10$	$1.50 \pm 0.05$	$-0.11 \pm 0.43$	$0.14 \pm 0.00$

Πίνακας. 1: Πειραματικές Μετρήσεις

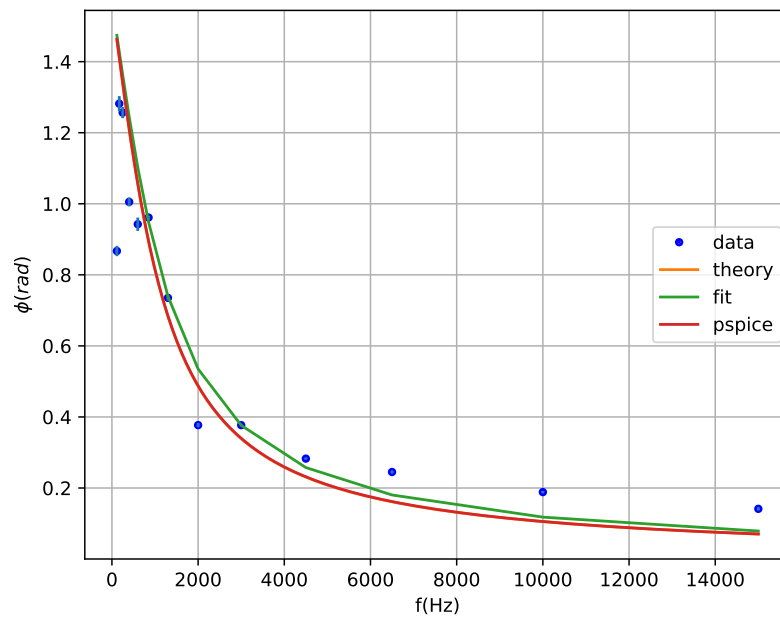
Στις Εικόνες (3), (4), (5), φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις  $u_R/u_i - f$ ,  $A_{db} - f$ ,  $\phi - f$  αντίστοιχα. Σε κάθε μία από αυτές υπάρχουν τα πειραματικά σημεία και οι καμπύλες από την θεωρία, το fitting και την προσομοίωση μέσω LTSpice. Η συχνότητα μισής ισχύος προκύπτει γραφικά από την προσαρμοσμένη καμπύλη στα δεδομένα  $A_{db}$  και είναι ίση με  $f_b = (665 \pm 1)Hz$ .


Εικόνα. 3:  $u_R/u_i - f$ . Η θεωρητική καμπύλη δίνεται από την (5)

Τέλος, βλέπουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του CR κυκλώματος, για  $f \gg f_b = 685$  στην παρακάτω Εικόνα (6). Από γραμμική προσαρμογή προκύπτει η ευθεία  $y = 1.81 \times 10^{-5}x - 0.32$ , η οποία είναι σχεδόν οριζόντια, όπως αναμέναμε.



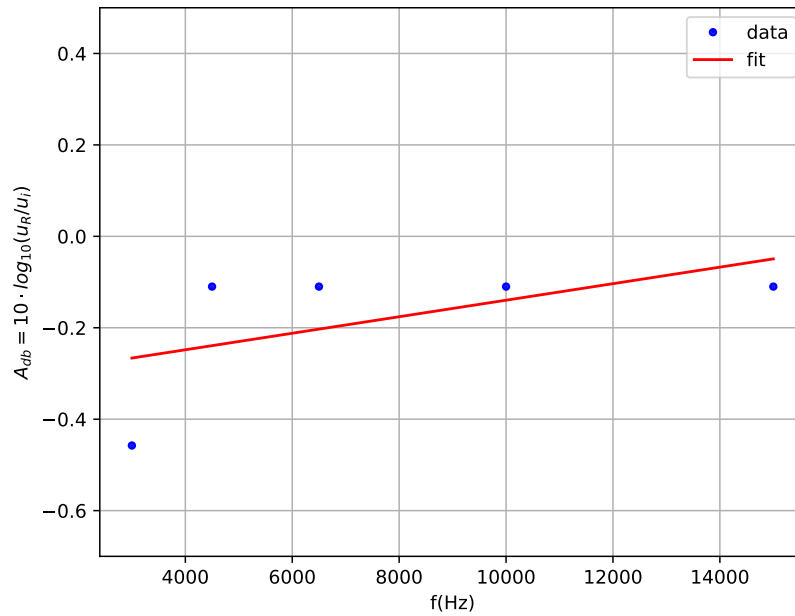
Εικόνα. 4:  $A_{db} - f$ . Φαίνεται και η συχνότητα μισής ισχύος που αντιστοιχεί στα -3db. Η θεωρητική καμπύλη δίνεται από την (5) και συγκεκριμένα είναι  $A_{db} = 10\log(u_R/u_i)$



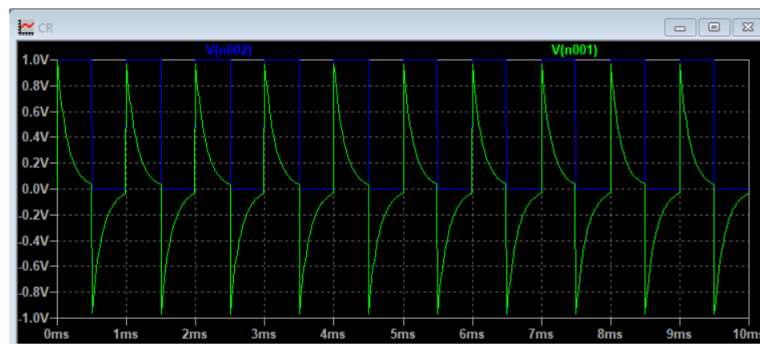
Εικόνα. 5:  $\phi - f$ . Η θεωρητική καμπύλη δίνεται από την (4)

### Μελέτη CR ως διαφοριστή

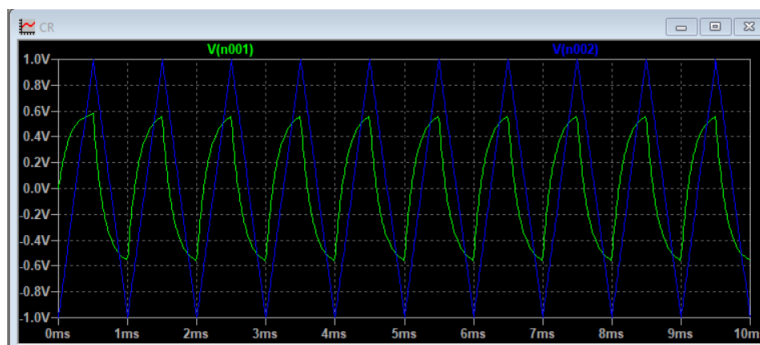
Θα εισάγουμε δύο διαφορετικούς παλμούς, έναν τετραγωνικό και έναν τριγωνικό συχνότητας 1kHz και πλάτους 1V. Η προσομοίωση με το LTSpice φαίνεται στις παρακάτω Εικόνες (7) και (8) και τα ποιοτικά αποτελέσματα είναι ίδια με τα πειραματικά



Εικόνα. 6: Ασυμπτωτική Συμπεριφορά του CR

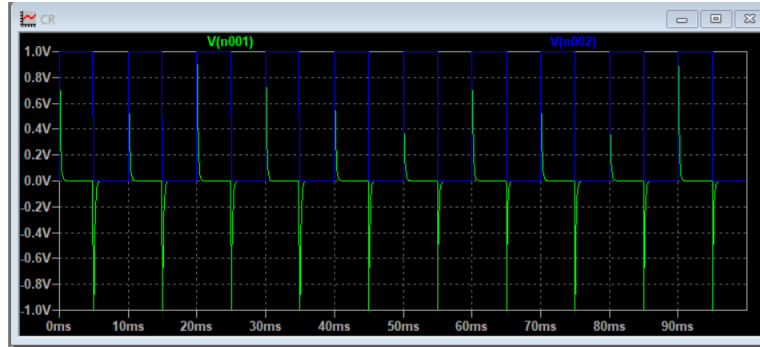


Εικόνα. 7: Εισαγωγή τετραγωνικού παλμού στο CR,  $f = 1kHz$ .

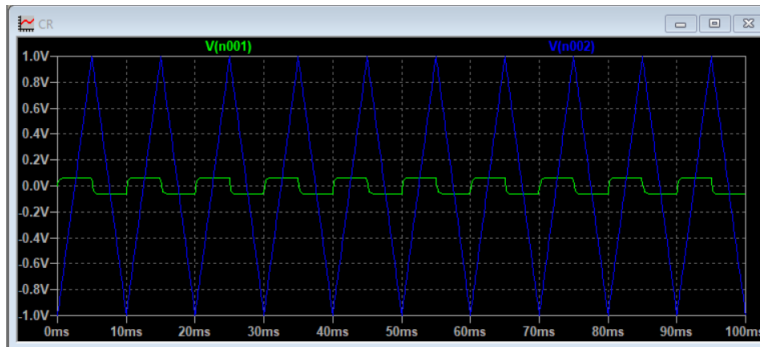


Εικόνα. 8: Εισαγωγή τριγωνικού παλμού στο CR,  $f = 1kHz$ .

Παρατηρούμε πως το σήμα εξόδου δεν είναι ακριβώς η παράγωγος του σήματος εισόδου, διότι η σχέση στην οποία βασιστήκαμε για να πούμε πως το CR είναι διαφοριστής είναι προσεγγιστική. Άρα περιμένουμε αν μειώσουμε την συχνότητα ο χαρακτήρας του κυκλώματος ως διαφοριστή να γίνει εμφανέστερος. Ωστόσο, επειδή το κύκλωμα δρα και ως βαθυπερατό φίλτρο, θα έχουμε πολύ πολύ μικρότερο πλάτος. Όλα αυτά διαπιστώνονται και στις παρακάτω Εικόνες (9) και (10), όπου οι παλμοί είναι συχνότητας 10kHz



Εικόνα. 9: Εισαγωγή τετραγωνικού παλμού στο CR,  $f = 10kHz$ .



Εικόνα. 10: Εισαγωγή τριγωνικού παλμού στο CR,  $f = 10kHz$ .

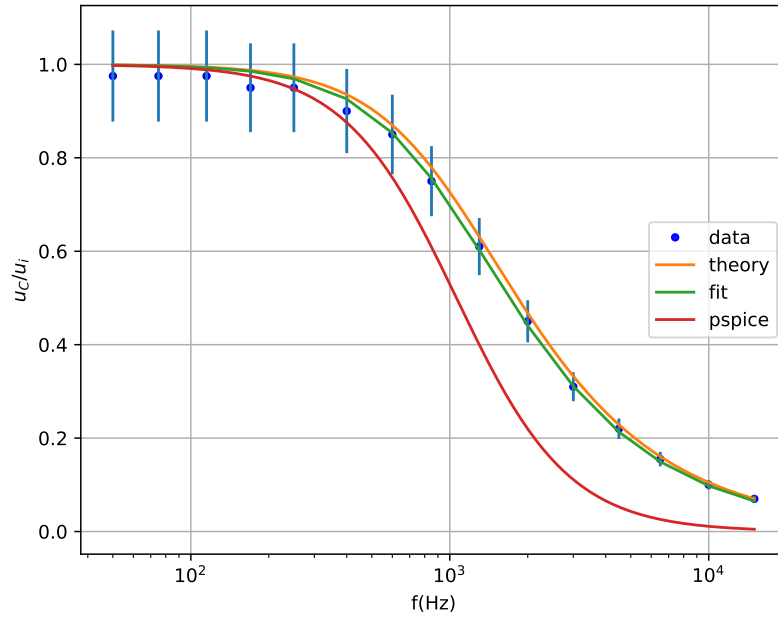
## Κύκλωμα RC

Παρόμοια με πριν θα εξετάσουμε τις περί συχνότητας ιδιότητες του κυκλώματος, θεωρώντας πάλι παλμό  $u_i = 2V$  και τιμές συχνότητας στο φάσμα  $f = 50Hz - 15kHz$ . Θα ελέγξουμε δηλαδή τις σχέσεις (9) και (10) Οι πειραματικές μετρήσεις και κάποια παράγωγα μεγέθη φαίνονται στον Πίνακα (2)

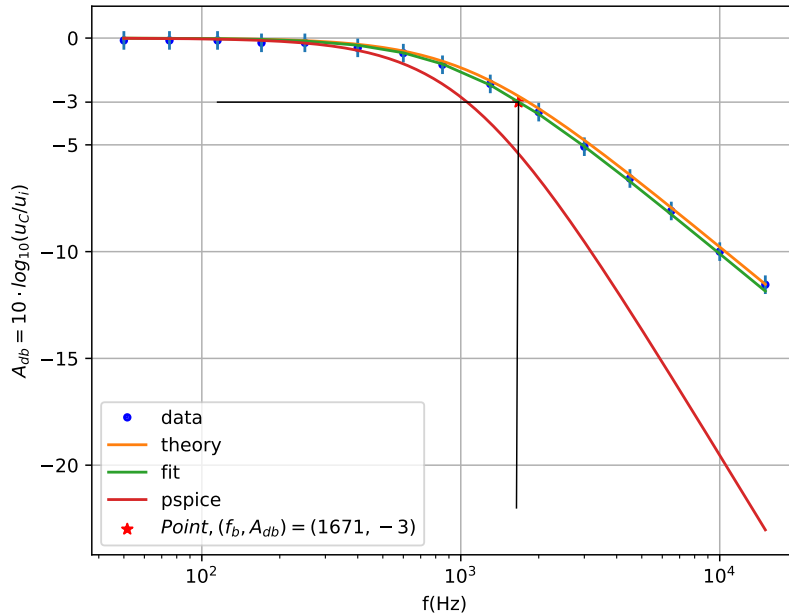
$f(Hz)$	$u_R/u_i(V)$	$\Delta t(\mu s)$	$A_{db}(db)$	$\phi(rad)$
50	$0.97 \pm 0.10$	$700.00 \pm 20.00$	$-0.11 \pm 0.43$	$0.22 \pm 0.01$
75	$0.97 \pm 0.10$	$400.00 \pm 20.00$	$-0.11 \pm 0.43$	$0.19 \pm 0.01$
115	$0.97 \pm 0.10$	$300.00 \pm 10.00$	$-0.11 \pm 0.43$	$0.22 \pm 0.01$
170	$0.95 \pm 0.10$	$200.00 \pm 10.00$	$-0.22 \pm 0.43$	$0.21 \pm 0.01$
250	$0.95 \pm 0.10$	$200.00 \pm 5.00$	$-0.22 \pm 0.43$	$0.31 \pm 0.01$
400	$0.90 \pm 0.09$	$200.00 \pm 5.00$	$-0.46 \pm 0.43$	$0.50 \pm 0.01$
600	$0.85 \pm 0.09$	$160.00 \pm 2.00$	$-0.71 \pm 0.43$	$0.60 \pm 0.01$
850	$0.75 \pm 0.08$	$140.00 \pm 2.00$	$-1.25 \pm 0.43$	$0.75 \pm 0.01$
1300	$0.61 \pm 0.06$	$120.00 \pm 1.00$	$-2.15 \pm 0.43$	$0.98 \pm 0.01$
2000	$0.45 \pm 0.05$	$90.00 \pm 0.50$	$-3.47 \pm 0.43$	$1.13 \pm 0.01$
3000	$0.31 \pm 0.03$	$70.00 \pm 0.50$	$-5.09 \pm 0.43$	$1.32 \pm 0.01$
4500	$0.22 \pm 0.02$	$45.00 \pm 0.50$	$-6.58 \pm 0.43$	$1.27 \pm 0.01$
6500	$0.15 \pm 0.02$	$35.00 \pm 0.50$	$-8.10 \pm 0.43$	$1.43 \pm 0.02$
10000	$0.10 \pm 0.01$	$20.00 \pm 0.20$	$-10.00 \pm 0.43$	$1.26 \pm 0.01$
15000	$0.07 \pm 0.01$	$14.00 \pm 0.10$	$-11.55 \pm 0.44$	$1.32 \pm 0.01$

Πίνακας. 2: Πειραματικές Μετρήσεις

Στις Εικόνες (11), (12), (13), φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις  $u_R/u_i - f$ ,  $A_{db} - f$ ,  $\phi - f$  αντίστοιχα. Σε κάθε μία από αυτές υπάρχουν τα πειραματικά σημεία και οι καμπύλες από την θεωρία, το fitting και την προσομοίωση μέσω LTSpice. Η συχνότητα μισής ισχύος προκύπτει γραφικά από την καμπύλη που έχω κάνει fit στα δεδομένα και είναι ίση με  $f_b = (1671 \pm 5)Hz$ .



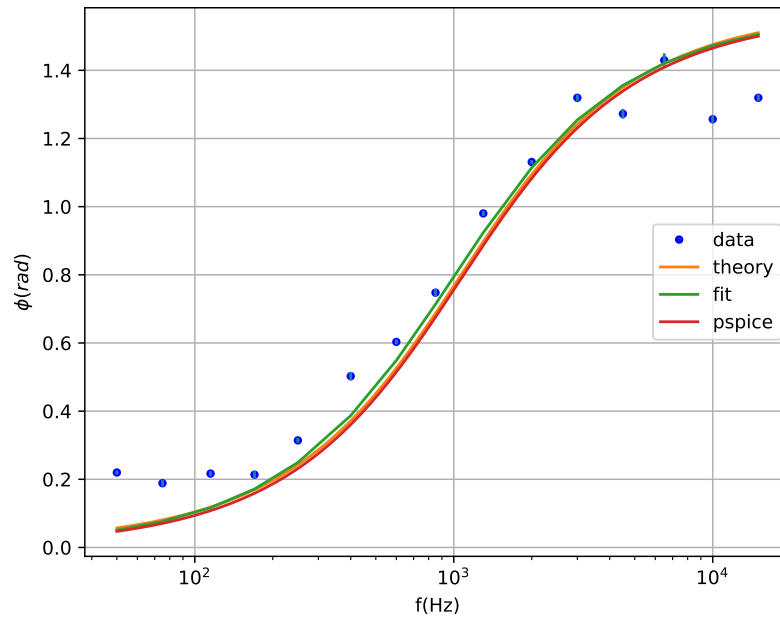
Εικόνα. 11:  $u_R/u_i - f$ . Η θεωρητική καμπύλη δίνεται από την (9)



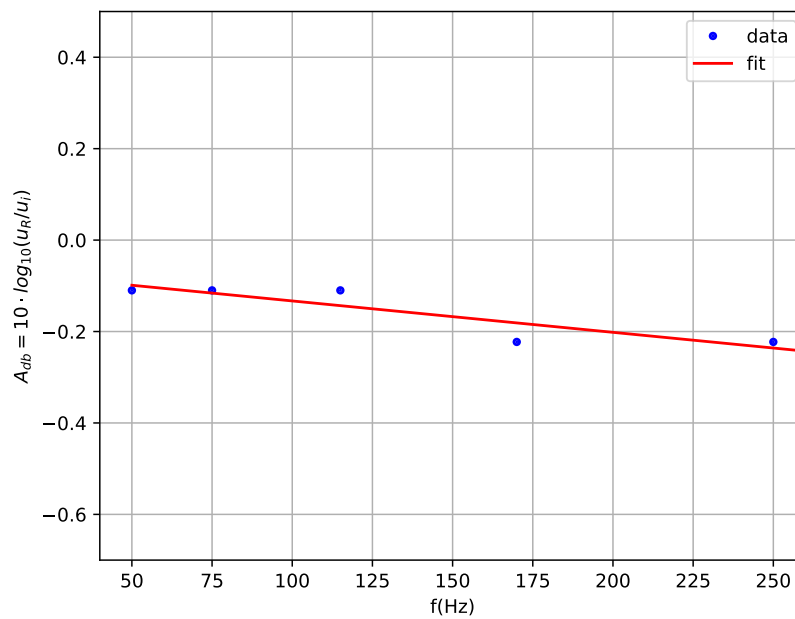
Εικόνα. 12:  $A_{db} - f$ . Φαίνεται και η συχνότητα μισής ισχύος που αντιστοιχεί στα -3db. Η θεωρητική καμπύλη προκύπτει από την (9) και συγκεκριμένα είναι  $A_{db} = 10\log_{10}(u_C/u_i)$ .

Τέλος, βλέπουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του RC κυκλώματος, για  $f \ll f_b = 1671Hz$  στην παρακάτω Εικόνα (14). Από γραμμική προσαρμογή προκύπτει η ευθεία  $y = 6.87 \times 10^{-4}x - 0.06$ , η οποία είναι σχεδόν οριζόντια, όπως αναμέναμε.





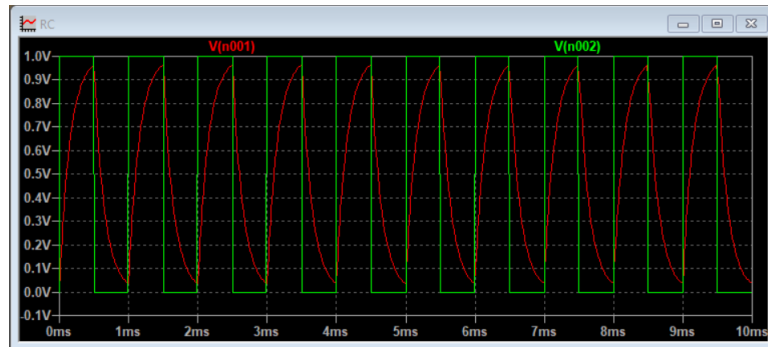
Εικόνα. 13:  $\phi - f$ . Η θεωρητική καμπύλη δίνεται από την (10)



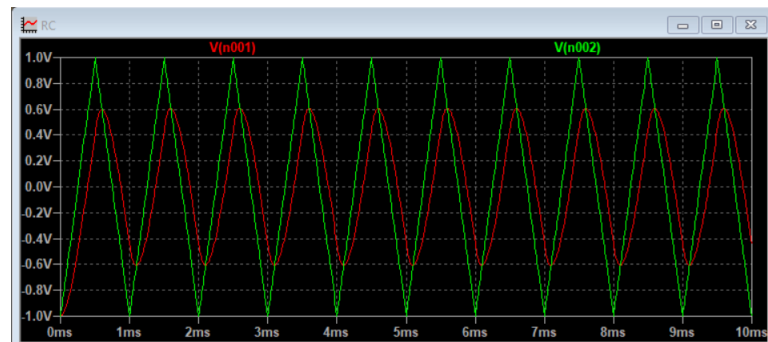
Εικόνα. 14: Ασυμπτωτική Συμπεριφορά του RC, για  $f \ll f_b = 1671\text{Hz}$

### Μελέτη RC ως ολοκληρωτή

Θα εισάγουμε δύο διαφορετικούς παλμούς, έναν τετραγωνικό και έναν τριγωνικό συχνότητας 1kHz και πλάτους 1V. Η προσομοίωση με το LTSpice φαίνεται στις παρακάτω Εικόνες (15) και (16) και τα ποιοτικά αποτελέσματα είναι ίδια με τα πειραματικά



Εικόνα. 15: Εισαγωγή τετραγωνικού παλμού στο RC,  $f = 1kHz$ .



Εικόνα. 16: Εισαγωγή τριγωνικού παλμού στο RC,  $f = 1kHz$ .

## Σύγκριση με Προσομοιώσεις

Παρατηρούμε πως στις προσομοιώσεις οι καμπύλες των φάσεων συμπίπτουν ακριβώς με τις πειραματικές. Ωστόσο οι καμπύλες των πλατών δεν συμπίπτουν. Κατά πάσα πιθανότητα αυτό οφείλεται σε λανθασμένες ρυθμίσεις στο LTspice τις οποίες δεν κατάφερα να βρω και να διορθώσω.

## Συμπεράσματα

Τα πειραματικά με θεωρητικά δεδομένα συμπίπτουν στα όρια του σφάλματος. Η προσομοίωση με το LTSpice δίνει σωστά ποιοτικά αποτελέσματα αλλά ο λόγος των πλατών των σημάτων εισόδου/εξόδου δεν συμπίπτει με τα δεδομένα του πειράματος, λογικά εξαιτίας κάποιων παραμέτρων τις οποίες δεν κατάφερα να βρω.