ΕΘΝΙΚΟ
ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Η μέθοδος Monte Carlo ή μέθοδος των τυχαίων αριθμών

Author:
Θωμόπουλος Σπυρίδων, ge19042

Εργαστήριο Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων

November 19, 2022

Ερώτημα 1.

- **Ομοιόμορφη Κατανομή**

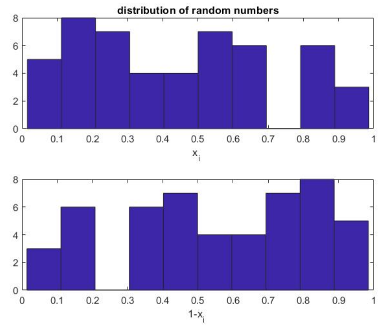
Αρχικά θα δούμε το πως αλλάζει η ομοιόμορφη κατανομή, που προέρχεται από την "γεννήτρια τυχαίων αριθμών"

$$n_{i+1} = \alpha n_i mod(m) \tag{1}$$

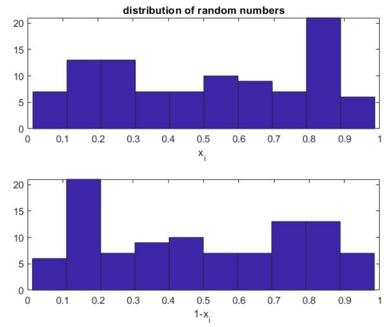
για seed $n_0 = 13$, καθώς μεταβάλλεται ο αριθμός των "τυχαίων αριθμών" που επιλέγουμε (δηλαδή το μέγιστο i της ακολουθίας) και ο αριθμός των bins (δηλαδή το εύρος των διαστημάτων σε ένα ιστόγραμμα).

Θέλουμε να δούμε το πως αλλάζει η κατανομή τυχαίων αριθμών που προέρχονται από μία κανονική κατανομή

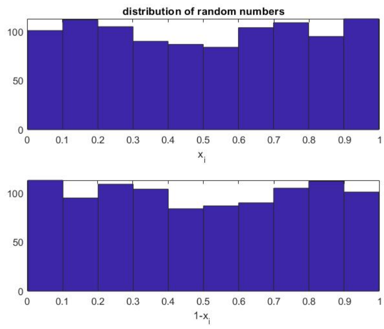
Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα "example1.m" σταθεροποιούμε τον αριθμό των $bins = 10$ και μεταβάλλουμε τον αριθμό των τυχαίων αριθμών $Nrand = \{50, 100, 1000, 10000, 100000\}$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στις Εικόνες (1a-e) Ομοίως, σταθεροποιούμε τον αρθιθμό των $bins = 100$



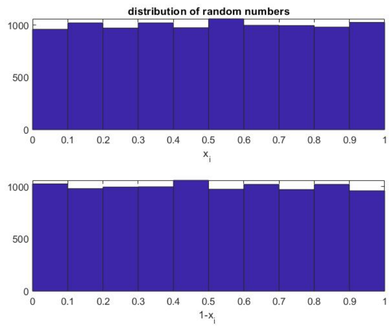
(a) Nrand=50



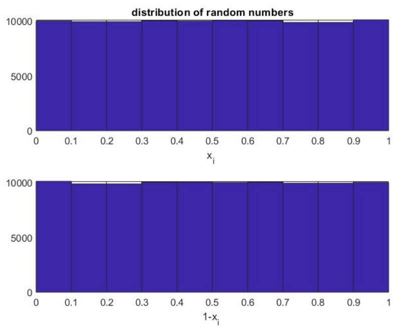
(b) Nrand=100



(c) Nrand=1000



(d) Nrand=10000

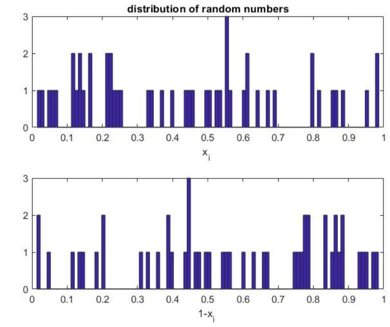


(e) Nrand=100000

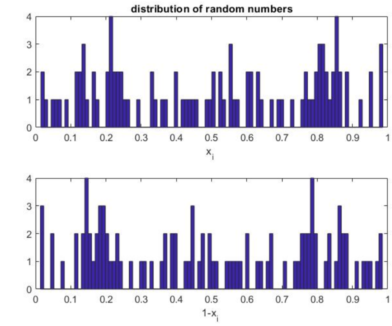
Εικόνα. 1: bins=10

και μεταβάλλουμε τον αριθμό των τυχαίων αριθμών $Nrand = \{50, 100, 1000, 10000, 100000, 100000\}$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στις Εικόνες (2a-f)

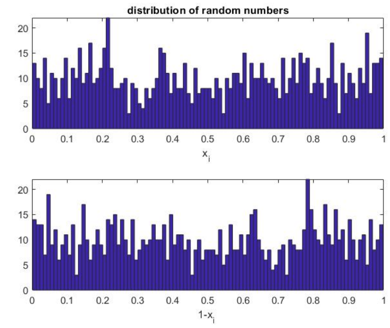
Στις δύο περιπτώσεις για $bins = 10, 100$ παρατηρούμε πως όταν το πλήθος των τυχαίων αριθμών αυξάνεται τότε η κατανομή τους συγκλίνει προς την ομοιόμορφη. Στην πρώτη περίπτωση αυτό φαίνεται από $Nrand = 1000$ ενώ στην δεύτερη από $Nrand = 10000$. Συνεπώς, μπορούμε να συμπεράνουμε πως όσο αυξάνουμε το binning χρειαζόμαστε όλο και μεγαλύτερο πλήθος τυχαίων



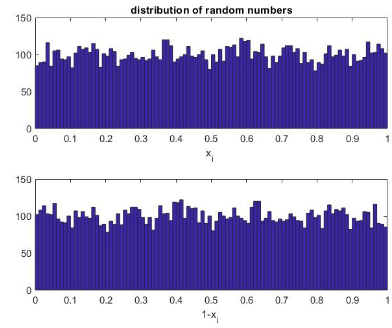
(a) Nrand=50



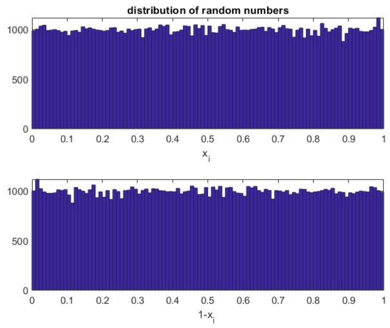
(b) Nrand=100



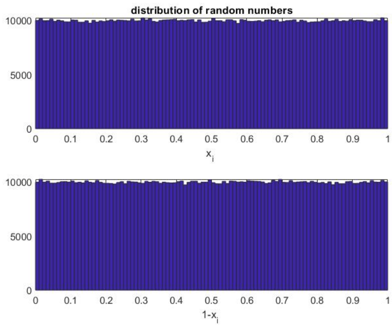
(c) Nrand=1000



(d) Nrand=10000



(e) Nrand=100000



(f) Nrand=100000

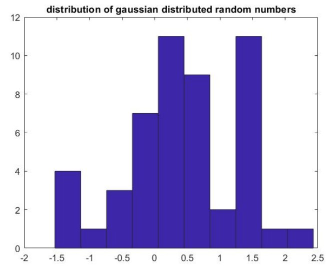
Εικόνα. 2: bins=100

αριθμών προκειμένου να προσεγγίσουμε την ομοιόμορφη κατανομή. Ο μετασχηματισμός $x_i \rightarrow 1-x_i$ συμπεριφέρεται όπως και το x_i.

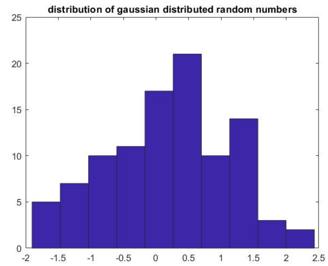
- **Gaussian Κατανομή** Τώρα θέλουμε να κάνουμε το ίδιο με πριν, μόνο που οι τυχαίοι αριθμοί θα προέρχονται από μία Gaussian κατανομή. Επιλέγουμε seed, $n_0 = 13$ και επαναλαμβάνουμε τα ίδια βήματα με πριν χρησιμοποιώντας τώρα το αρχείο "example2.m". Τα αποτελέσματα φαίνονται στις Εικόνες (3a-e) για $bins = 10$ και στις Εικόνες (4a-e) για $bins = 100$

  Ομοίως με πριν, παρατηρούμε πως στις δύο περιπτώσεις $bins = 10, 100$ η κατανομή αρχίζει να γίνεται ξεκάθαρη από διαφορετικά πλήθη τυχαίων αριθμών, $Nrand = 1000$ στην πρώτη περίπτωση και $Nrand = 10000$ στην δεύτερη. Άρα πάλι μπορούμε να συμπεράνουμε πως αυξάνοντας το binning αυξάνεται και το πλήθος τυχαίων αριθμών που απαιτούνται για να πάρουμε την Gaussian κατανομή.

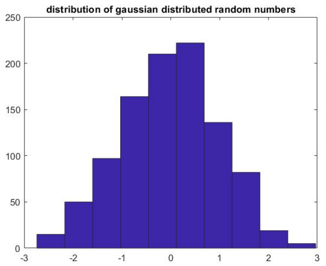
Ερώτημα 2. Τώρα. χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα $pi1.m$ θα υπολογίσουμε την τιμή του $\pi/4$. Αρχικά, παράγουμε δύο ακολουθίες από ομοιόμορφα κατανεμημένα τυχαίους αριθμούς (x_{i1}, x_{i2}) με βάση την σχέση (1) οι οποίες θα έχουν διαφορετικά seeds, $seed_1 = 11$, $seed_2 = 7$. Άρα θα έχουμε Nrad ζευγάρια τυχαίων αριθμών εντός ενός τετραγώνου πλευράς 1. Εντός αυτού του τετραγώνου υπάρχει το ένα τεταρτοκύκλιο του μοναδιαίου κύκλου το οποίο έχει εμβαδό $\pi/4$. Άρα περιμένουμε πως ο λόγος N_{in}/N_{total}, του πλήθους των ζευγαριών που πέφτουν εντός του τεταρτοκυκλίου (δηλδή που έχουν $x_{i1}^2 + x_{i2}^2 < 1$) προς το συνολικό



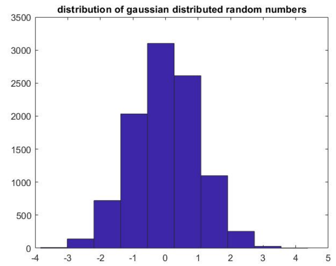
(a) Nrand=50



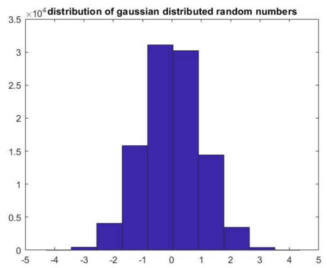
(b) Nrand=100



(c) Nrand=1000



(d) Nrand=10000



(e) Nrand=100000

Εικόνα. 3: bins=10

πλήθος των ζευγαριών θα τείνει στο $\pi/4$ όταν πάρουμε μεγάλο αριθμό σημείων:

$$\langle \pi/4 \rangle = \frac{N_{in}}{N_{total}} \tag{2}$$

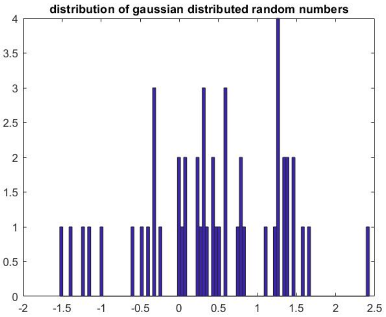
$$\delta(\pi/4) = \frac{1}{N_{total}} \sqrt{\frac{N_{in}(N_{total} - N_{in})}{N_{total} - 1}} \tag{3}$$

Τρέχουμε το πρόγραμμα για διάφορες τιμές του Nrand. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω Πίνακα (1)

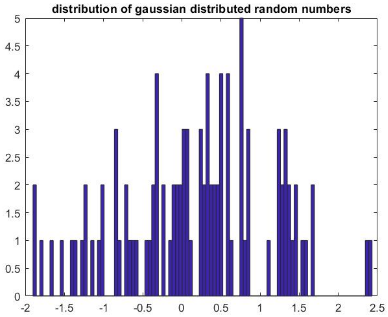
$seed_1$	$seed_2$	Nrand	$\langle \pi/4 \rangle$	$\delta(\pi/4)$
11	7	10^1	0.80000	0.07746
11	7	10^2	0.740000	0.04271
11	7	10^3	0.786000	0.01293
11	7	10^4	0.787000	0.00409
11	7	10^5	0.785510	0.00130
11	7	10^6	0.784228	0.00041
11	7	10^7	0.784447	0.00013

Πίνακας. 1: Τιμές του $\pi/4$ για διάφορα πλήθη Nrand τυχαίων ζευγαριών

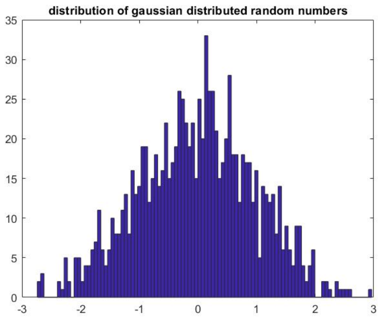
Δεδομένου ότι η πραγματική τιμή είναι $\pi/4 = 0.785398$, παρατηρούμε πως πράγματι για αυξανόμενο αριθμό σημείων ο λόγος τείνει στο $\pi/4$ και το σφάλμα γίνεται όλο και μικρότερο.



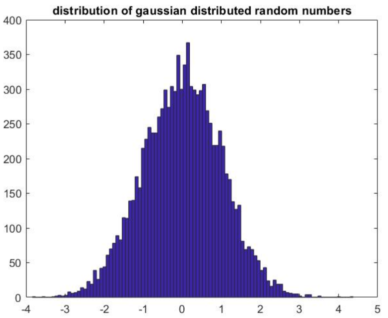
(a) Nrand=50



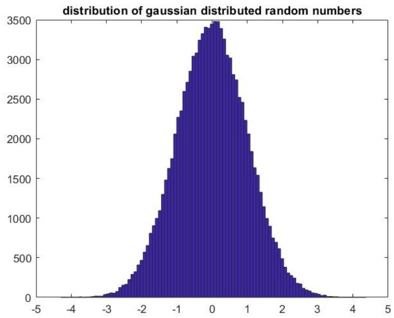
(b) Nrand=100



(c) Nrand=1000



(d) Nrand=10000



(e) Nrand=100000

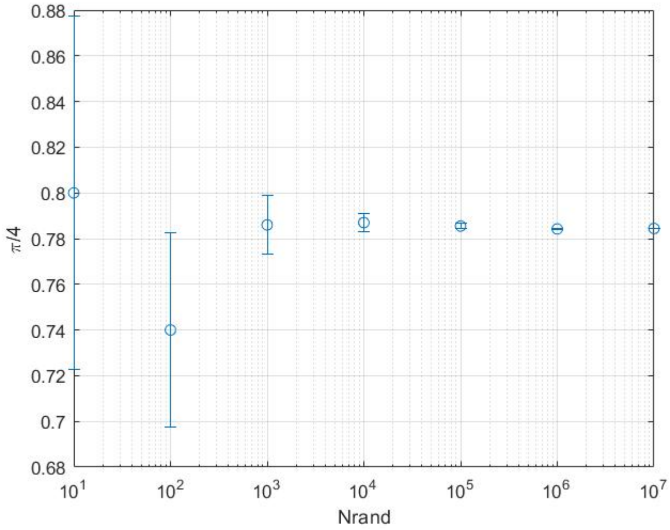
Εικόνα. 4: bins=100

Η παραπάνω μέθοδος έχει το πλεονέκτημα ότι είναι πολύ απλή στην κατανόηση και την υλοποίησή της και γρήγορη για μικρές τιμές του Nrand. Ωστόσο, παρ'ολο που φαίνεται να συγκλίνει στο π/4 η σύγκλιση θα είναι τόσο αργή ώστε όταν αυξήσουμε περεταίρω το πλήθος των τυχαίων αριθμών που παίρνουμε θα φτάσουμε τον υπολογιστή στα όριά του. Άρα, αν θέλουμε μία πρόχειρη εκτίμηση του π/4 θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι σχετικά καλή ενώ αν θέλαμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια πολλά σημαντικά σημεία του η μέθοδος δεν είναι και τόσο αξιόπιστη. Η γραφική παράσταση $Nrand - \pi/4$ φαίνεται στην Εικόνα (5)

Ερώτημα 3. Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω μέθοδο για να προσομοιώσουμε τον νόμο των ραδιενεργών διασπάσεων

$$N = N_0 e^{-t/\tau} \tag{4}$$

όπου N ο αριθμός αδιάσπαστων πυρήνων, N_0 ο αρχικός αριθμός πυρήνων, t ο χρόνος και τ ο μέσος χρόνος ζωής του πυρνήνα που μελετάμε. Συγκεκριμένα θα ξεκινήσουμε με $seed = 17$ και με $N_0 = 10^3$ ενώ θα μεταβάλλουμε το πλήθος των τυχαίων αριθμών που παίρνουμε από $Nrand = \{50, 10^3, 10^6\}$. Επίσης, θα πάρουμε τελικό χρόνο $t_f = 2700sec$ και κάθε $\Delta t = 100sec$ θα αποθηκεύουμε τον αριθμό αδιάσπαστων πυρήνων που έχουν απομείνει στο σύστημά μας, σαν να επρόκειτο για πειραματικές μετρήσεις, ώστε εν τέλει να κάνουμε μία γραφική παράσταση $t - N(t)$. Οι μικροαλλαγές στον κώδικα φαίνονται παρακάτω (τις έχω σημειώσει με ****) και επίσης στο αρχείο "radiodec2_Q3_modified.m" και στον Πίνακα (2)



Εικόνα. 5: Γραφική παράσταση Nrand-$\pi/4$ με λογαριθμικό άξονα x

φαίνονται οι τιμές των πυρήνων συναρτήσει του χρόνου για τα $Nrand = \{50, 10^3, 10^6\}$. Ακόμη, στον Πίνακα (3) φαίνονται οι τιμές της παραμέτρου $-1/\tau$ με τα σφάλματά τους και επίσης το τ.

```
% neutron decay part2

N0=input         ('Number of neutrons at t=0                : ');
Iseed = input    ('Random number seed                       : ');
end_time = input('Enter time t                              : ');
Nrand = input    ('Number of random numbers to be generated : ');

%Nrand = N0;
rand('seed',Iseed);
Irand = rand(1,Nrand);

Nund = 0;
Nd = 0;
tend = end_time;
Probt = 1 - exp(-(tend/886.7));  % prob  decay
disp('---------------------------------')
disp('----#of undec nuceus 0:100:tend----')
disp('---------------------------------')
Nucl_undec = [];                              %****** contains the tnumber of undecayed at every 100sec
for t = 0:100:tend   % ************** loop that runs over all t from 0 to tend
    Nund = 0; Nd = 0;
    prob = 1 - exp(-(t/886.7));   % prob  decay

    for k = 1:Nrand
     if prob <= Irand(k)
       Nund = Nund + 1;
     else
     Nd = Nd + 1;
     end
    end
    i  = round(t/100);                          % ****
    Nucl_undec(i+1) = round(Nund*N0/Nrand);     % ****array which contains the undec. nucl. for every Dt=100 from 0 to tend
    fprintf('%i ', round(Nund*N0/Nrand));
end
Nundec = round(Nund*N0/Nrand);

fprintf('\n---------------------------\nNumber of undecayed neutrons after %i seconds: %i \n',end_time,Nundec);
tt = 0:100:2700;
%% FITTING SECTION
[xData, yData]    = prepareCurveData( tt, Nucl_undec );
ft                = fittype('exp1');
opts              = fitoptions( 'Method', 'NonlinearLeastSquares' );
```

```
%opts.Display      = 'off';
opts.StartPoint = [1000.0 0.0];
[fitresult, gof] = fit( xData, yData, ft, opts );
fitresult

figure( 'Name', 't - N(t)' );
h1 = plot( fitresult);%, xData, yData );
% Label axes
xlabel( 't', 'Interpreter', 'none' );
ylabel( 'N(t)', 'Interpreter', 'none' );
grid on;
hold on
h2 = plot(tt,Nucl_undec,'o');
legend([h1,h2], 'N(t) vs. t','Monte Carlo Data',  'Location', 'NorthEast', '
    Interpreter', 'tex');

```

Nrand	t	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300
50	$N_{50}(t)$	1000	882	805	701	612	540	478	434	398	356	321	290	265	237
10^3	$N_{10^3}(t)$	1000	882	805	701	612	540	478	434	398	356	321	290	265	237
10^6	$N_{10^6}(t)$	1000	893	798	713	637	569	508	454	406	363	324	290	259	231

Nrand	t	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700
50	$N_{50}(t)$	206	183	164	149	132	117	101	93	86	82	72	67	59	53
10^3	$N_{10^3}(t)$	206	183	164	149	132	117	101	93	86	82	72	67	59	53
10^6	$N_{10^6}(t)$	207	185	165	147	132	118	105	94	84	75	67	60	54	48

Πίνακας. 2: Δεδομένα $N = N(t)$ για $Nrand = \{50, 10^3, 10^6\}$

$Nrand$	$\beta = -1/\tau$	$\delta(-1/\tau)$	τ
50	-0.000876	0.000052	1141.6
10^3	-0.001130	0.000022	885.0
10^6	-0.001126	0.000001	888.1

Πίνακας. 3: $-a/\tau$ για κάθε Nrand

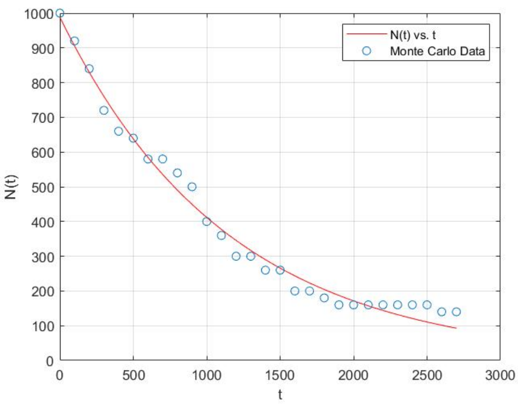
Παρατηρούμε πως για αυξανόμενο αριθμό Nrand πλησιάζουμε την θεωρητική τιμή του τ που είναι 886.7sec. Στις Εικόνες (6a-c) φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις που έχουν προκύψει από το fit στα διεδομένα της μεθόδου και εκεί βλέπουμε πως για μικρό Nrand τα σημεία δεν προσεγγίζονται τόσο καλά από μία εκθετική συνάρτηση όπως θα περιμέναμε.

Ερώτημα 4. Τώρα τροποποιούμε τον κώδικα για τον υπολογισμό του $\pi/4$ ώστε να το υπολογίζει μέσω του ολοκληρώματος

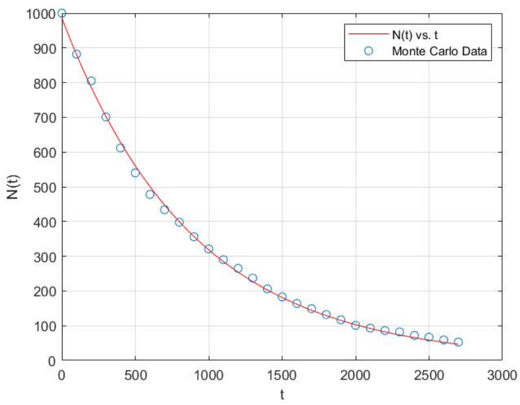
$$\begin{aligned} \pi/4 &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \Rightarrow \\ \langle \pi/4 \rangle &= \frac{1}{N} \sum \frac{1}{1+x^2} \end{aligned} \tag{5}$$

Ο εν λόγω κώδικας υπάρχει τόσο στο αρχείο "pi2.m" όσο και παρακάτω

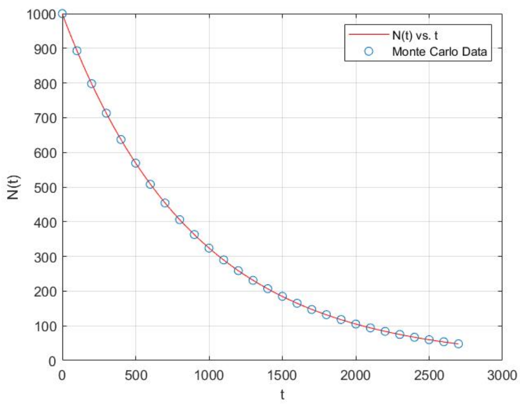
```
    % find value of pi
%
Iseed1 = input('Enter random number seed: ');

Nrand = input('Enter number of random numbers to be generated: ');
%
rand('seed',Iseed1);
l1 = rand(1,Nrand);
n1 = 0;n2 = 0;f1 = 0 ;f2 = 0 ;
for k = 1:Nrand
   f1 = 1/((l1(k)).^2+1);
   f2 = f1*f1;
   n1 = n1 + f1;
   n2 = n2 + f2 ;
end
```



(a) Nrand=50



(b) $Nrand = 10^3$



(c) $Nrand = 10^6$

Εικόνα. 6: Fit στα δεδομένα της μεθόδου για $Nrand = \{50, 10^3, 10^6\}$

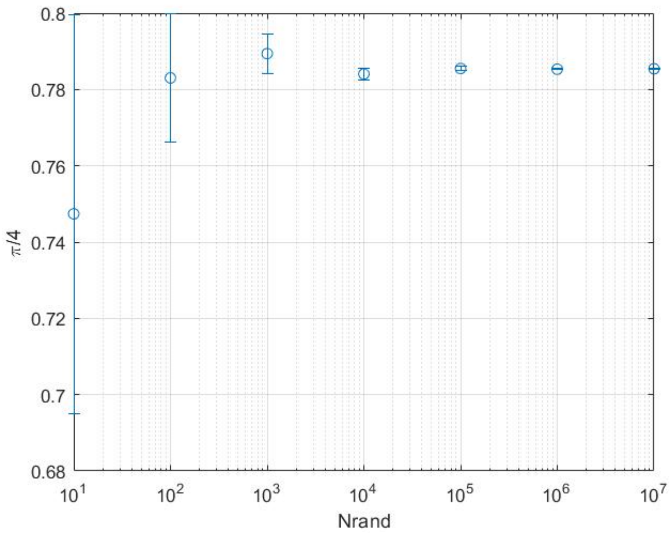
```
pi4   = n1/Nrand;
pi4_2 = n2/Nrand ;
erpi4 = sqrt((pi4_2-pi4.^2)/Nrand) ;
fprintf('<pi/4> = %f \n',pi4);
fprintf('delta<pi/4> = %f \n', erpi4);

```

Έτσι, επαναλαμβάνοντας τα βήματα του Ερωτήματος 2, δηλαδή τρέχοντας τον κώδικα για $seed = 17$ και για $Nrand = \{10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6\}$ θα δούμε την συμπεριφορά της σύγκλισης του αλογρίθμου μέσω της γραφικής παράστασης $\langle(\pi/4)\rangle - Nrand$.

$seed$	Nrand	$\langle\pi/4\rangle$	$\delta(\pi/4)$
17	10^1	0.747412	0.052303
17	10^2	0.783036	0.016838
17	10^3	0.789399	0.005132
17	10^4	0.784063	0.001620
17	10^5	0.785493	0.000508
17	10^6	0.785319	0.000161
17	10^7	0.785429	0.000051

Πίνακας. 4: Τιμές του π/4 για διάφορα πλήθη Nrand τυχαίων ζευγαριών με την μέθοδο του "p2.m"

Όσο αυξάνει το Nrand παρατηρούμε σύγκλιση στην πραγματική τιμή 0.785398 και όλοένα μειούμενο σφάλμα. Σε σύγκριση με την προηγούμενη μέθοδο του Ερωτήματος 2, αυτή ίσως είναι λίγο καλύτερη καθώς για 10^5 αριθμούς έχουμε ήδη ακρίβεια στα 3 δεκαδικά ψηφία, ενώ με την πρώτη μέθοδο δεν είχαμε φτάσει καθόλου σε αυτή την ακρίβεια. Αυτό απεικονίζεται γραφικά και στην Εικόνα (7)



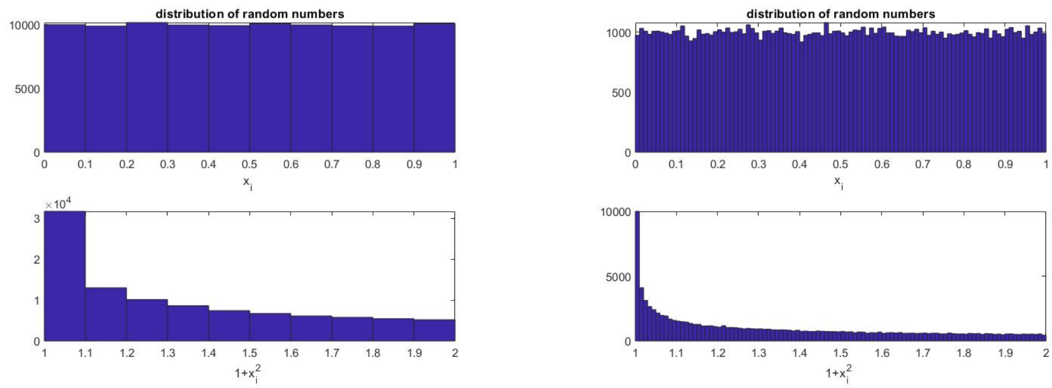
Εικόνα. 7: Γραφική παράσταση Nrand-$\langle \pi/4 \rangle$ με την δεύτερη μέθοδο

Ερώτημα 5. Ο τροποποιημένος κώδικας που περιέχει τον μετασχηματισμό $1 + x_i^2$ φαίνεται παρακάτω και βρίσκεται επίσης στο αρχείο "example1_mod.m". Στην ουσία έχει αλλαχθεί μόνο μία γραμμή, αυτή που σημειώνεται με **.

```
% this is an example meant only for illustration
% uniformly distributed random numbers between 0 and 1
%
Iseed1 = input('Enter random number seed                          : ');
Nrand = input ('Enter number of random numbers to be generated : ');
Nbins = input ('Enter number of bins for the histo                 : ');
%
rand('seed',Iseed1);
l1 = rand(1,Nrand);
%
if Nbins < 10
   Nbins = 10;
end
%
subplot(2,1,1),hist(l1,Nbins),title('distribution of random numbers'),...
    xlabel('x_i '),...
subplot(2,1,2),hist((1-l1.^2),Nbins),xlabel( '1+x_i^2 ','interpreter','tex')%*************
%
    mo1 = mean(l1);
    sd1 = std(l1);
    var1 = var(l1);
    s12 = 0;
    s22 = 0;
    s23 = 0;
    for j=1:Nbins
        athr1(j) = 0;
    end
    for k=1:Nrand
        s12 = s12 + (((l1(k))-mo1)^2) ;
        ibin1 = (round(l1(k) * Nbins)) ;
        ibin2 = (round((l1(k)+(0.5/Nbins)) * Nbins)) ;
        if ibin1 >= ibin2;
            ibin = ibin1;
        else
            ibin = ibin2;
        end
        athr1(ibin) = athr1(ibin) + 1;
    end
    s1 = s12/(Nrand -1) ;
subplot;
for j=1:Nbins
    s22 = s22 + athr1(j);
```

```
end
s2 = s22/Nbins;
for j=1:Nbins
    s23 = s23 + (((athr1(j))-s2)^2) ;
end
s3 = sqrt(s23)/(Nbins -1) ;
vary = std(athr1);
sigy = s3;
sigpery = s3/s2;
fprintf('meany = %f \n', s2);
fprintf('sigy = %f \n', s3);
fprintf('percent = %f \n', sigpery);


```

Τώρα παίρνουμε seed=17, $Nrand = 10^5$ και $bins = \{10, 100\}$ και τα αποτελέσματα φαίνονται στην παρακάτω Εικόνα (8a-b).



(a) bins=10 (b) bins=100

Εικόνα. 8: Nrand=10^5 για την $1 + x^2$

Και στις δύο περιπτώσεις επειδή έχουμε πάρει $0 < x_i < 1$ ισχύει ότι $0 < x_i^2 < 1 \Rightarrow 0 < x_1^2 + 1 < 1$. Παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι αριθμοί συγκεντώνονται κοντά στο 1. Έχουμε ότι $sqrt(0.1) \simeq 0.31$. Αυτό σημαίνει πως περίπου το 30% των συνολικών αριθμών, δηλαδή περίπου $0.3 \cdot 10^5 = 0.3 \cdot 10^4$, είναι συγκεντρωμένοι μεταξύ 1 και 1.1. Αυτό είναι πιό εμφανές στην Εικόνα (8a) όπου έχουμε λιγότερα bins και βλέπουμε πως όντως περίπου 3×10^4 αριθμοί βρίσκονται εως το 1.1. Καθώς αυξάνονται τα bins οι αριθμοί μαζεύκονται όλο και πιό κοντά στο 1.

Ερώτημα 6. Εδώ θα υπολογίσουμε πάλι το π/4 με μία άλλη μέθοδο που μοιάζει με εκείνη του Ερωτήματος 4 αλλά περιλαμβάνει μία συνάρτηση βάρους w(x) η οποία βελτιώνει την σύγκλιση. Δηλαδή θέλουμε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$I = \int_{x_-}^{x_+} f(x)dx = \int_{x_-}^{x_+} w(x)\frac{f(x)}{w(x)}dx \tag{6}$$

Η συνάρτηση βάρους πρέπει να έχει κάποιες ιδιότητες όπως να είναι θετική, να είναι κανονικοποιημένη στην μονάδα και χρησιμοποιείται όταν η αρχική f(x) παίνει μεγάλες τιμές για ένα μικρό διάστημα του πεδίου ορισμού της γύρω από ένα x_0 και πανού αλλού είναι 0. Τότε, οι τυχαίοι αριθμοί που προέρχονται π.χ. από μία ομοιόμορφη κατανομή θα έχουν ίδια πιθανότητα να είναι σε όλο το διάστημα ενδιαφέροντός μας, άρα οι περισσότεροι θα βρίσκονται εκτός της κορυφής, με αποτέλεσμα τον αναποτελεσματικό υπολογισμό του I. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε την συνάρτηση βάρους w(x) η οποία εξομαλύνει την αρχική f(x).

Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε την

$$w(x) = \frac{4 - 2x}{3} \tag{7}$$

Τώρα στο ολοκλήρωμα (6) κάνουμε την παρακάτω αλλαγή μεταβλητών

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} =& w(x) \\ y(x_-) =& 0 \\ y(x_+) =& 1\end{aligned} \tag{8}$$

Άρα από τις (6)&(8) έχουμε

$$\begin{aligned}I =& \int_{y(x_-)}^{y(x_+)} \frac{f(x(y))}{w(x(y))} w(x) dx \Rightarrow \\ =& \int_0^1 \frac{f(x(y))}{w(x(y))} dy \Rightarrow\end{aligned} \tag{9}$$

$$I \simeq \frac{1}{N} \sum_i \frac{f(x(y_i))}{w(x(y_i))} \pm \sqrt{\frac{(\langle f/w \rangle)^2 - \langle f/w \rangle^2}{N}} \tag{10}$$

Απομένει δηλαδή να βρούμε την συνάρτηση x(y). Από την σχέση (8) έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} =& w(x) \Rightarrow \\ y(x) =& \int w(x) dx = \int \frac{4-2x}{3} dx \Rightarrow \\ y(x) =& \frac{x(4-x)}{3} \Rightarrow \\ x^2 -& 4x + 3y = 0 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = \; 2 + \sqrt{4-3y} \Rightarrow x_1(0) = 4, x_1(1) = 3 \text{ , άρα απορρίπτεται} \\ x_2 = \; 2 - \sqrt{4-3y} \Rightarrow x_2(0) = 0, x_2(1) = 1 \text{ , άρα το κρατάμε} \end{cases} \tag{11}$$

Άρα η προσέγγιση του ολοκληρώματος (9) από την σχέση (10) γίνεται

$$I \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(2-\sqrt{4-3y_i})}{w(2-\sqrt{4-3y_i})} \pm \sqrt{\frac{\langle (f/w)^2 \rangle - \langle f/w \rangle^2}{N}} \tag{12}$$

Αν η υπο ολοκλήρωση συνάρτηση είναι η $f(x) = 1/(x^2+1)$ και η συνάρτηση βάρους η $w(x) = (4-2x)/3$ τότε ο λόγος τους συναρτήσει του y είναι

$$\phi(y) = \frac{f(x(y))}{w(x(y))} = \frac{f(2-\sqrt{4-3y})}{w(2-\sqrt{4-3y})} \tag{13}$$

Έτσι αλλάζουμε τον κώδικα του "pi2.m" ώστε να υπολογίζει το ολοκλήρωμα της $\phi(y)$. Ο κώδικας φάινεται παρακάτω καθώς και στο αρχείο "pi3.m"

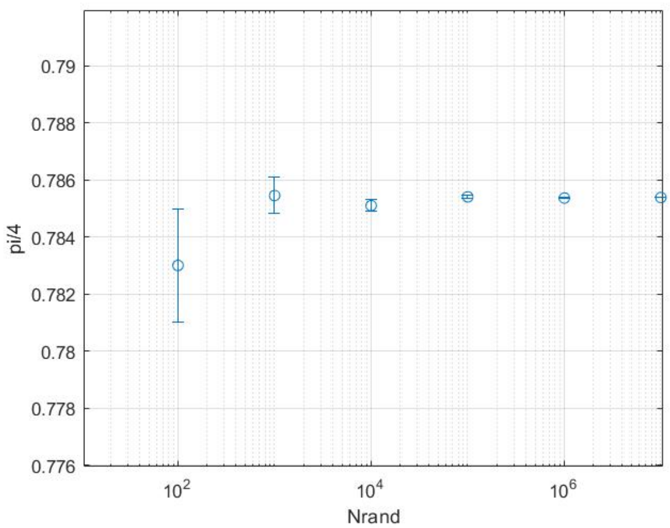
```
 % find value of pi
Iseed1 = input('Enter random number seed                       : ');
Nrand = input('Enter number of random numbers to be generated: ');

rand('seed',Iseed1);
l1 = rand(1,Nrand);

n1 = 0;n2 = 0;f1 = 0 ;f2 = 0 ;
for k = 1:Nrand
%     f1 = 1/((l1(k)).^2+1);
%     f2 = f1*f1;
%     n1 = n1 + f1;
%     n2 = n2 + f2 ;

   xofy  = 2 - sqrt(4-3*l1(k));
   f     = 1/(1+xofy^2)       ;
   w     = (4 - 2*xofy)/3       ;
   f1    = f./w               ;
```

```
  f2    = f1*f1               ;
  n1    = n1+f1;
  n2    = n2+f2;

end
pi4   = n1/Nrand;
pi4_2 = n2/Nrand ;
erpi4 = sqrt((pi4_2-pi4.^2)/Nrand) ;

%erpi4 = (1/Nrand)*(sqrt((coun1*(Nrand-coun1)/Nrand)));
fprintf('<pi/4> = %f \n',pi4);
fprintf('delta<pi/4> = %f \n', erpi4);

%fprintf('|pi/4 - pi/4_estimated |= %f\n', abs(pi/4-pi4))

```

Τρέχουμε το πρόγραμμα "pi4.m" για διάφορες τιμές του $Nrand = \{10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7\}$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα (5). Επίσης, στην Εικόνα (9) φαίνεται η γραφική παράσταση Nrand-$\langle\pi/4\rangle$.

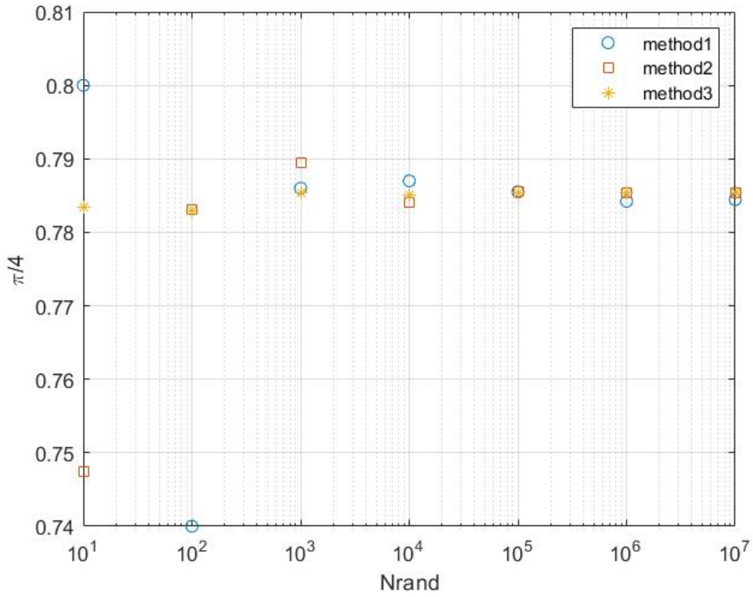
seed	Nrand	$\langle\pi/4\rangle$	$\delta(\pi/4)$
17	10^1	0.783348	0.007015
17	10^2	0.783014	0.001976
17	10^3	0.785463	0.000639
17	10^4	0.785109	0.000201
17	10^5	0.785416	0.000063
17	10^6	0.785376	0.000020
17	10^7	0.785395	0.000006

Πίνακας. 5: Τιμές του π/4=0.785398 για διάφορα πλήθη Nrand τυχαίων ζευγαριών με την μέθοδο του "p3.m"

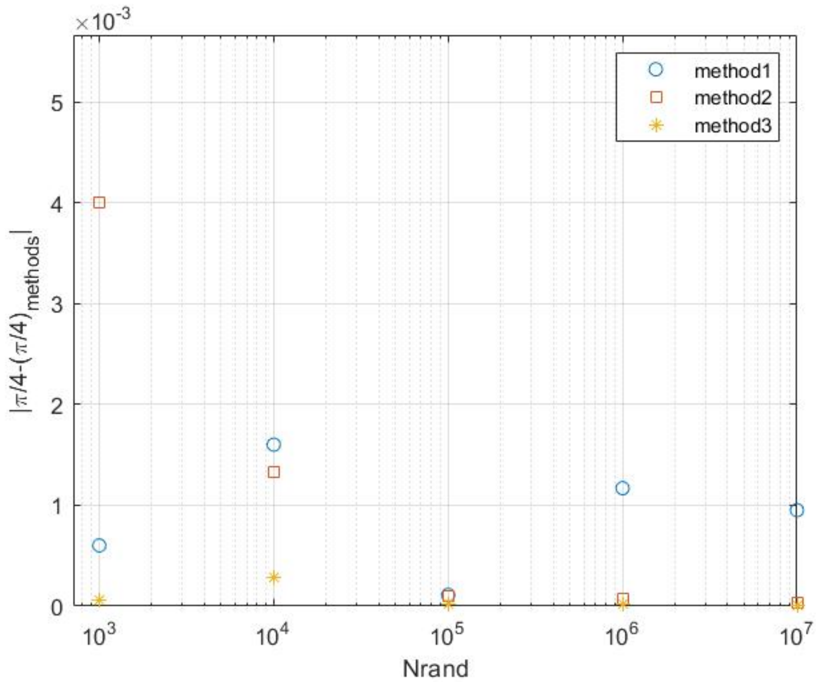


Εικόνα. 9: Γραφική Παράσταση Nrand-$\langle\pi/4\rangle$ με την τρίτη μέθοδο

Τώρα θα προχωρήσουμε σε μία στοιχειώδη σύγκριση των τριών παραπάνω μεθόδων. Αρχικά, παρατηρούμε αμέσως πως η τρίτη έχει δώσει τον π/4 με την μεγαλύτερη ακρίβεια από όλες. Ακόμη, όπως βλέπουμε στην Εικόνα (10) η πρώτη μέθοδος είναι η χειρότερη τόσο από ακρίβεια όσο και από πλευράς ταχύτητας σύγκλισης που πλησιάζει το π/4. Ακόμη, από την Εικόνα (11) φαίνεται ότι οι μέθοδοι 2,3 έχουν ίδια ταχύτητα σύγκλισης και ακρίβεια, ωστόσο από τους αντίστοιχους Πίνακες (4) & (5) βλέπουμε πως η μέθοδος 3 είναι πιό αποτελεσματική καθώς δίνει το π/4 με μεγαλύτερη ακρίβεια.



Εικόνα. 10: Φαίνονται οι γραφικές $\langle\pi/4\rangle - Nrand$ για τις τρεις μεθόδους.



Εικόνα. 11: Φαίνονται οι γραφικές $|\langle\pi/4\rangle - \pi/4| - Nrand$ για τις τρεις μεθόδους για μεγάλα Ntrans.