ΕΘΝΙΚΟ
ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

3η Σειρά Ασκήσεων

Author:
Θωμόπουλος Σπυρίδων, ge19042

Υπολογιστική Ρευστομηχανική

December 5, 2023

Όλοι οι κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση των ασκήσεων βρίσκονται και στην σελίδα `https://github.com/spyrosthomo/Physics/tree/main/Computational_Fluid/Sets/03`

Προσπάθησα να λύσω τα ερωτήματα έτσι ώστε ο κώδικας να έχει την μεγαλύτερη δυνατή ευελιξία που μπορούσα να πετύχω, διότι ενδεχομένως πολλές από τις μεθόδους να χρειαστούν στην συνέχεια του μαθήματος.

Άσκηση. ***1.:***

Θεωρητικά Στοιχεία

Οι εξισώσεις Navier-Stokes για την ορμή, που περιγράφουν την ροή ασυμπίεστου ρευστού σταθερής πυκνότητας είναι

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u} - \frac{\mu}{\rho_0}\nabla^2\boldsymbol{u} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho_0}\right) + \boldsymbol{g} \tag{1}$$

Επίσης, η εξίσωση συνέχειας για ομογενές ρευστό μόνιμης ροής δίνει

$$\begin{aligned}\frac{\cancel{\partial \rho}}{\cancel{\partial t}} + \nabla\left(\rho\boldsymbol{u}\right) =& 0 \xRightarrow{\rho=\rho_0}\\ \nabla\rho_0\boldsymbol{u} + \rho_0\nabla\boldsymbol{u} =& 0 \Rightarrow\\ \nabla\boldsymbol{u} =& 0\end{aligned} \tag{2}$$

Το πρόβλημα που πρέπει να λύσουμε είναι η ροή ενός ρευστού σε κυλινδρικό αγωγό ακτίνας R. Άρα λόγω κυλινδρική συμμετρίας έχουμε ότι $u_r = u_\theta = 0$ και $\partial_\phi u_z = 0$, συνεπώς

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow u_z = u_z(r) \tag{3}$$

Βάσει αυτών οι Navier-Stokes απλοποιούνται. Εκφράζοντας τους τελεστές σε κυλινδρικές συντεταγμένες και θεωρώντας πως η ροή είναι οριζόντια, στρωτή, μόνιμη (χωρίς χρονική εξάρτηση), πλήρως αναπτυγμενη ($\partial_z u_z = 0$) κατά την διεύθυνση $\hat{\boldsymbol{z}}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{\cancel{\partial \boldsymbol{u}}}{\cancel{\partial t}} + (\cancel{u_r}\partial_r + \cancel{u_\phi}\frac{1}{r}\partial_\phi + u_z\cancel{\partial_z})\boldsymbol{u} - \frac{\mu}{\rho_0}\left(\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r\boldsymbol{u}) + \frac{1}{r^2}\cancel{\partial_{\phi\phi}\boldsymbol{u}} + \cancel{\partial_{zz}\boldsymbol{u}}\right) =& -\frac{1}{\rho_0}\left(\partial_r p\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\partial_\phi p\hat{\boldsymbol{\phi}} + \partial_z p\hat{\boldsymbol{z}}\right) \Rightarrow\\ -\frac{\mu}{\rho_0}\frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r\boldsymbol{u}\right) =& -\frac{1}{\rho_0}\left(\partial_r p\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\partial_\phi p\hat{\boldsymbol{\phi}} + \partial_z p\hat{\boldsymbol{z}}\right)\end{aligned}$$

Άρα στις τρεις διευθύνσεις γίνεται

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{r}}: & \frac{\partial p}{\partial z} = 0\\ \hat{\boldsymbol{\phi}}: & \frac{\partial p}{\partial \phi} = 0\\ \hat{\boldsymbol{z}}: & \mu\left(\frac{\partial^2 u_z(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z(r)}{\partial r}\right) - \frac{\partial p}{\partial z} = 0\end{cases} \tag{4}$$

Εν τέλει, πρέπει να λύσουμε μία συνήθη διαφορική εξίσωση

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_z(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z(r)}{\partial r}\right) - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

Με τις μεικτές συνοριακές συνθήκες

$$u_z(r)\big|_{r=R} = 0 \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u_z(r)}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \tag{7}$$

Απομένει ακόμη να αδιαστατοποιήσουμε τις εξισώσεις μας. Θεωρούμε αυθάιρετα ως U μια χαρακτηριστική ταχύτητα της ροής και θέτουμε

$$\begin{aligned}r^* =& r/R\\ u_z^* =& u_z/U\end{aligned}$$

Η εξίσωση με τις συνοριακές, αν επιλέξουμε $U = R^2 \partial_x p/\mu$ γίνονται

$$\frac{1}{r^*}\frac{\partial u_z^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial^2 r^*} = 1 \tag{8}$$

$$u_z^*(r^*)|_{r^*=1} = 0 \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial u_z^*(r^*)}{\partial r^*}\right|_{r^*=0} = 0 \tag{10}$$

Διακριτοποίηση

Εφόσον οι άλλες συνιστώσες δεν παίζουν κάποιον ρόλο, από δω και πέρα για ευκολία θα γράφουμε $u_z^*(r^*) \equiv u$ και $r^* \equiv r$.

Ξεκινάμε με την διακριτοποίηση του $r \in [0,1]$, σε N σημεία με απόσταση $\Delta r = 1/(N-1)$

$$r_i = \frac{i-1}{\Delta r},\ i = 1, \cdots, N \tag{11}$$

έτσι ώστε $r_1 = 0$ και $r_N = 1$. Τώρα διακριτοποιούμε τις παραγώγους χρησιμοποιώντας κεντρικές πεπερασμένες διαφορές, για $i = 2, \cdots, N-1$

$$\frac{\partial u_i}{\partial r} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta r} \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta r^2} \tag{13}$$

*και τώρα αντικαθιστούμε στην (**??**), $i = 2, \cdots, N-1$*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r_i}\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta r} + \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta r^2} = 1 \Rightarrow \\ &\left(2 + \frac{\Delta r}{r_i}\right) u_{i+1} + \left(2 - \frac{\Delta r}{r_i}\right) u_{i-1} - 4u_i = 2\Delta r^2 \end{aligned} \tag{14}$$

και με τις συνοριακές συνθήκες

$$\begin{cases} r{=}1 : u_N = 0 \\ r{=}0 : \partial_r u_1 = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \end{cases}$$

παίρνουμε ένα τριδιαγώνιο σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους. Άρα πλέον μπορούμε να εφαρμόσουμε τις μεθόδους που γνωρίζουμε για την επίλυσή του.

Θεωρητική Λύση

Ένας τρόπος επαλήθευσης των αριθμητικών αποτελεσμάτων είναι η σύκγρισή τους με την θεωρητική λύση, η οποιά είναι

$$u_z(r) = -\frac{R^2}{4\mu}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{15}$$

Προχωρώντας στην αδιαστατοποίησή της για $r^* = r/R$ και $u_z^* = u_z/U$ έχουμε

$$u_z^*(r^*) = \frac{u_z}{U} = -\frac{1}{4}\left(1 - (r^*)^2\right) \tag{16}$$

Η οποία λαμβάνει ακρότατο

$$u_z^*(r^*)|_{r^*=0} = -\frac{1}{4} \Rightarrow u_z(r)|_{r=0} = -\frac{U}{4} \tag{17}$$

και έχει μέση τιμή

$$\begin{aligned} \langle u^* \rangle =& \frac{\int u_z(r^*) dA}{A} \Rightarrow \\ =& \frac{1}{\pi(1)^2}\int_0^1 \frac{1}{4}\left((r^*)^2 - 1\right) 2\pi r^* dr^* \Rightarrow \\ =& -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

και αντίστοιχα $\langle u \rangle = -U/8 = u_{max}/2$

Κώδικες - Αποτελέσματα

Υλοποιούμε τα παραπάνω στον παρακάτω κώδικα MATLAB. Το κυρίως πρόγραμμα που είναι στο αρχείο Ex_NS.m καλεί την συνάρτηση NS_cyl.m η οποία επιλύει τις εξισώσεις Navier-Stokes με τις συνθήκες που απαιτεί η άσκηση.

Listing 1: /ODEs/*Ex_NS.m*

```
clear;format compact

%% Number of points
N       = [5, 10, 50, 100, 10^3];
sols    = length(N);
Nmax    = max(N)
Dr      = 1/(Nmax-1);
r       = ((0:Nmax-1)*Dr)';
%% Analytical Solutions
uAnal   = @(r) (r.^2 -1)/4;

%% Find & plot solutions
figure(1)
ms = 2; lw1 = 1.5; lw2 = 1;
%plot analytical
plot(r, uAnal(r), "r--", "markersize", ms, "linewidth", lw2)
sprintf("---------- Analytical ------------------\n")
sprintf("u*_max = %.8f\n", max(abs(uAnal(r))))
sprintf("<u*>    = %.8f\n", 2*trapz(r, abs(r.*uAnal(r))))

leg = {};%zeros(sols+1);
leg{1} = "Analyical";
hold on
for i = 1:sols
  sprintf(" ---------------- N = %d ----------------\n", N(i))
  Dr = 1/(N(i)-1);
  r  = ((0:N(i)-1)*Dr)';
  % find solutions
  u = NS_cyl(N(i));
  % plot Solution
  plot(r, u, "-", "markersize", ms, "linewidth", lw1)
  hold on
  leg{i+1} = sprintf("N=%d", N(i));
  sprintf("u*_max = %.8f\n", max(abs(u)))
  sprintf("<u*>    = %.8f\n", 2*trapz(r, abs(r.*u)))
endfor
legend(leg, 'location','northwest', "FontSize", 14)
xlabel("r^*=r/R")
ylabel("u_z^*(r^*)=u_z(r)/U")
title("Solution of NS equations with cylindrical symmetry ", 'FontSize', 14)
grid on
saveas(gcf, './plots/NS_solutions.jpg');
hold off

%% plot abs diffs
N     = [50, 100, 1000, 10000];
sols = length(N);
leg2 = {};
figure(2)
hold on
for i = 1:sols
  Dr = 1/(N(i)-1);
```

```
  r  = ((0:N(i)-1)*Dr)';
  % find solutions
  u = NS_cyl(N(i));  % plot Solution
  plot(r, abs(u-uAnal(r)), "-", "markersize", ms, "linewidth", lw1)
  hold on
  leg2{i} = sprintf("N=%d", N(i));
endfor
legend(leg2, 'location','northwest', "FontSize", 14)
xlabel("r^*=r/R")
ylabel("|u_z^*(r^*)-u^*_{analytic}|")
title("Absolute differences ", 'FontSize', 14)
grid on
saveas(gcf, './plots/NS_absDiff.jpg');
hold off
```

Listing 2: /ODEs/*NS_cyl.m*

```
%% Solution of the Navier-Stokes equation in the case of
%          - Cylindrical symmetry
%          - stationary flow
%          - incompressible fluid
%
%---------------------------------------------------------
function u = NS_cyl(N)
  addpath("../../Linear_Systems")
  %% System's parameters

  %% Numerical scheme's parameters
  Dr      = 1/(N-1);
  r(1:N)  = ((0:N-1)*Dr)';
  %% Define the system's matrices A*u = b
  A = zeros(N, N);
  b = zeros(N, 1);
  % boundary conditions: u1+u2 = 0 && uN = 0
  A(1, 2) = 1; A(1, 1) = -1;
  b(1)    = 0;
  A(N, N) = 1;
  b(N)    = 0;
  % inner points
  for i=2:N-1
      A(i, i)   = -4;         % diagonal
      A(i, i+1) = 2 + Dr/r(i); % diagonal+1
      A(i, i-1) = 2 - Dr/r(i); % diagonal-1
      b(i)      = 2*Dr^2;
  endfor

  u = Thomas(A, b);
endfunction
```

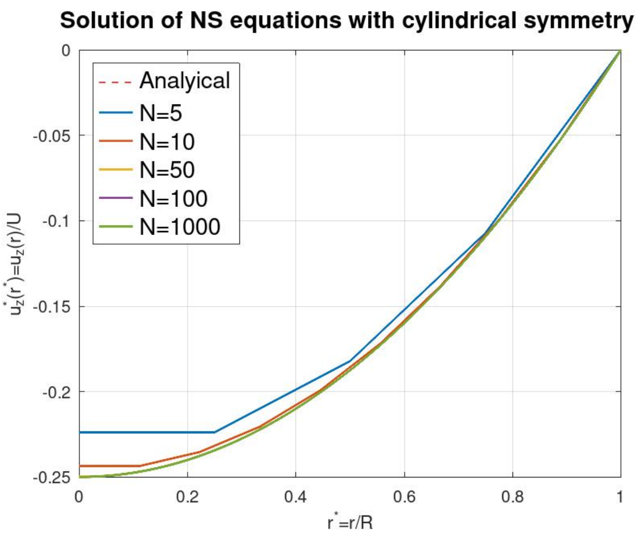
Έχει χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση Thomas.m η οποία είχε υλοποιηθεί σε προηγούμενη σειρά ασκήσεων. Παρατίθεται και αυτή παρακάτω

Listing 3: /ODEs/*Thomas.m*

```
% Thomas alogrithm for solving 3-diagonal systems of equations
function x = Thomas(A, d)
  % dimension of system
  n = size(A,1);

  % obtain the un-primed arrays a, b, c from matrix A
```

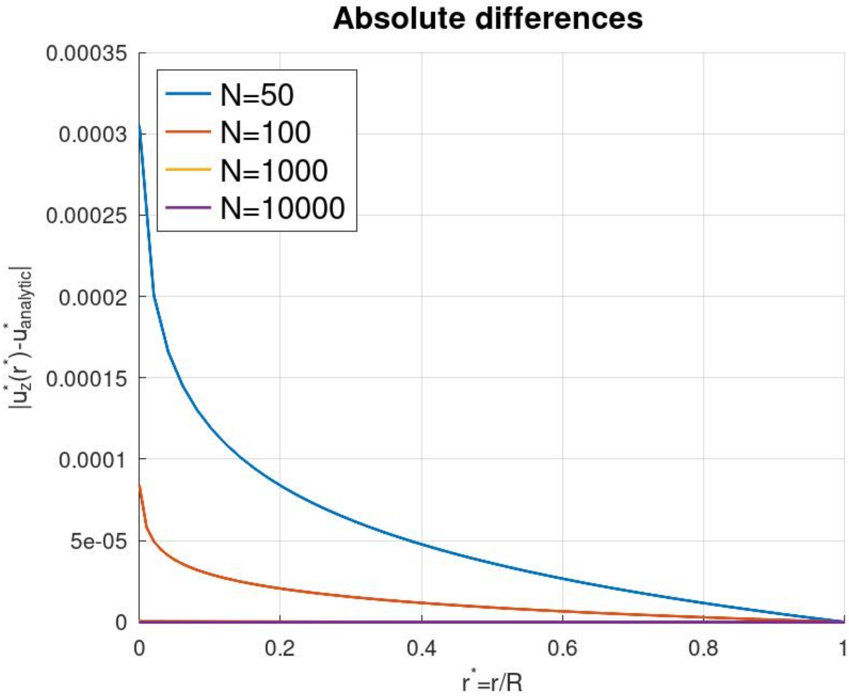
```
    a  = [0, diag(A, -1)']';
    b  = diag(A);              # diagonal
    c  = [diag(A, +1)', 0]';

    %------------------------------------------------------------
    % 1st part: forward
    %------------------------------------------------------------
    % define the primed arrays c', d'
    cp = zeros(n, 1);
    dp = zeros(n, 1);

    % calculate primed arrays
    cp(1, 1) = c(1, 1) / b(1, 1);
    dp(1, 1) = d(1, 1) / b(1, 1);
      % c'
    for i=2:n-1
      cp(i, 1) = c(i, 1) / ( b(i, 1) - a(i, 1)*cp(i-1, 1) );
    endfor
      % d'
    for i=2:n
      dp(i, 1) = (d(i, 1) - a(i, 1)*dp(i-1, 1)) / ( b(i, 1) - a(i, 1)*cp(i-1, 1) );
    endfor

    %------------------------------------------------------------
    %2nd part: backwards
    %    x : contains the solution of the tridiagonal system
    %------------------------------------------------------------
    x        = zeros(n, 1);
    x(n, 1) =    dp(n, 1);

    for i = n-1:-1:1
      x(i, 1) = dp(i, 1) - cp(i, 1) * x(i+1,1);
    endfor
endfunction
```

Ένας τρόπος ελέγχου των αποτελεσμάτων είναι η σύγκρισή τους με την αναλυτική λύση του εν λόγω προβλήματος δεδομένου ότι μας είναι γνωστή και δίνεται από την σχέση (??). Στην Εικόνα (??) φαίνονται οι αριθμητικές λύσεις για διάφορους αριθμούς διαστημάτων N.



Εικόνα. 1: Αριθμητική & Υπολογιστική Λύση για διάφορα N.

Η διαφορά μεταξύ των δύο λύσεων φαίνεται να μικραίνει και η αριθμητική να συγκλίνει στην αναλυτική καθώς αυξάνεται ο αριθμός των βημάτων N. Στην παρακάτω Εικόνα (??) φαίνεται ακριβώς αυτό. Δηλαδή έχουν παρασταθεί οι διαφορές $|u_{num} - u_{anal}| - r$, *για διαφορετικούς αριθμούς βημάτων.*



Εικόνα. 2: $|u_z^* - u_{analytic}^*|$

Τέλος, όπως φαίνεται στον παρακάτω Πίνακα (??), η μέγιστη ταχύτητα καθώς και η μέση τιμή των αριθμητικών αποτελεσμάτων συγκλίνουν προς τα θεωρητικά αναμενόμενα

N	Theory	5	10	100	1000
u_{max}^*	0.25	0.223809	0.243578	0.249916	0.249999
$\langle u^* \rangle$	0.125	0.113690	0.122705	0.124981	124999

Πίνακας. 1: Μέγιστες και μέσες τιμές