



ΕΘΝΙΚΟ  
ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

*Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο*

*Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών*

---

## 2η Σειρά Ασκήσεων

---

*Author:*

Θωμόπουλος Σπυρίδων, ge19042

*Υπολογιστική Ρευστομηχανική*

December 5, 2023

Όλοι οι κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση των ασκήσεων βρίσκονται και στην σελίδα [https://github.com/spyrosthomo/Physics/tree/main/Computational\\_Fluid](https://github.com/spyrosthomo/Physics/tree/main/Computational_Fluid)

Προσπάθησα να λύσω τα ερωτήματα έτσι ώστε ο κώδικας να έχει την μεγαλύτερη δυνατή ευελιξία που μπορούσα να πετύχω, διότι ενδεχομένως πολλές από τις μεθόδους να χρειαστούν στην συνέχεια του μαθήματος.

Άσκηση. 1.:

## Θεωρητικά Στοιχεία

Οι εξισώσεις Navier-Stokes για την ορμή, που περιγράφουν την ροή ασυμπίεστου ρευστού σταθερής πυκνότητας είναι

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho_0} \right) + \mathbf{g} \quad (1)$$

Επίσης, η εξίσωση συνέχειας για ομογενές ρευστό μόνιμης ροής δίνει

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \xrightarrow{\rho=\rho_0} \\ \nabla \cdot \rho_0 \mathbf{u} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \Rightarrow \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Το πρόβλημα που πρέπει να λύσουμε είναι η ροή ενός ρευστού σε κυλινδρικό αγωγό ακτίνας  $R$ . Άρα λόγω κυλινδρική συμμετρίας έχουμε ότι  $u_r = u_\theta = 0$  και  $\partial_\phi u_z = 0$ , συνεπώς

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow u_z = u_z(r) \quad (3)$$

Βάσει αυτών οι Navier-Stokes απλοποιούνται. Εκφράζοντας τους τελεστές σε κυλινδρικές συντεταγμένες και θεωρώντας πως η ροή είναι οριζόντια, στρωτή, μόνιμη (χωρίς χρονική εξάρτηση), πλήρως αναπτυγμένη ( $\partial_z u_z = 0$ ) κατά την διεύθυνση  $\hat{z}$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} \cancel{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{\mu}{\rho_0} \left( \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \mathbf{u}) + \frac{1}{r^2} \cancel{\partial_\phi \partial_\phi \mathbf{u}} + \cancel{\partial_{zz} \mathbf{u}} \right) &= -\frac{1}{\rho_0} \left( \partial_r p \hat{r} + \frac{1}{r} \partial_\phi p \hat{\phi} + \partial_z p \hat{z} \right) \Rightarrow \\ -\frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \mathbf{u}) &= -\frac{1}{\rho_0} \left( \partial_r p \hat{r} + \frac{1}{r} \partial_\phi p \hat{\phi} + \partial_z p \hat{z} \right) \end{aligned}$$

Άρα στις τρεις διευθύνσεις γίνεται

$$\begin{cases} \hat{r} : \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \\ \hat{\phi} : \frac{\partial p}{\partial \phi} = 0 \\ \hat{z} : \mu \left( \frac{\partial^2 u_z(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z(r)}{\partial r} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Εν τέλει, πρέπει να λύσουμε μία συνήθη διαφορική εξίσωση

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u_z(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z(r)}{\partial r} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Με τις μεικτές συνοριακές συνθήκες

$$u_z(r)|_{r=R} = 0 \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial u_z(r)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (7)$$

Απομένει ακόμη να αδιαστατοποιήσουμε τις εξισώσεις μας. Θεωρούμε αυθαίρετα ως  $U$  μια χαρακτηριστική ταχύτητα της ροής και θέτουμε

$$\begin{aligned} r^* &= r/R \\ u_z^* &= u_z/U \end{aligned}$$

Η εξίσωση με τις συνοριακές, αν επιλέξουμε  $U = R^2 \partial_x p / \mu$  γίνονται

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial u_z^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial r^{*2}} = 1 \quad (8)$$

$$u_z^*(r^*)|_{r^*=1} = 0 \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial u_z^*(r^*)}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0 \quad (10)$$

## Διακριτοποίηση

Εφόσον οι άλλες συνιστώσες δεν παίζουν κάποιον ρόλο, από δω και πέρα για ευκολία θα γράφουμε  $u_z^*(r^*) \equiv u$  και  $r^* \equiv r$ .

Ξεκινάμε με την διακριτοποίηση του  $r \in [0, 1]$ , σε  $N$  σημεία με απόσταση  $\Delta r = 1/(N-1)$

$$r_i = \frac{i-1}{\Delta r}, \quad i = 1, \dots, N \quad (11)$$

έτσι ώστε  $r_1 = 0$  και  $r_N = 1$ . Τώρα διακριτοποιούμε τις παραγώγους χρησιμοποιώντας κεντρικές πεπερασμένες διαφορές, για  $i = 2, \dots, N-1$

$$\frac{\partial u_i}{\partial r} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta r} \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta r^2} \quad (13)$$

και τώρα αντικαθιστούμε στην (8),  $i = 2, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta r} + \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta r^2} &= 1 \Rightarrow \\ \left(2 + \frac{\Delta r}{r_i}\right) u_{i+1} + \left(2 - \frac{\Delta r}{r_i}\right) u_{i-1} - 4u_i &= 2\Delta r^2 \end{aligned} \quad (14)$$

και με τις συνοριακές συνθήκες

$$\begin{cases} r=1 : u_N = 0 \\ r=0 : \partial_r u_1 = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \end{cases}$$

παίρνουμε ένα τριδιαγώνιο σύστημα  $N$  εξισώσεων με  $N$  αγνώστους. Άρα πλέον μπορούμε να εφαρμόσουμε τις μεθόδους που γνωρίζουμε για την επίλυσή του.

## Θεωρητική Λύση

Ένας τρόπος επαλήθευσης των αριθμητικών αποτελεσμάτων είναι η σύγκρισή τους με την θεωρητική λύση, η οποία είναι

$$u_z(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{dp}{dx} \quad (15)$$

Προχωρώντας στην αδιαστατοποίησή της για  $r^* = r/R$  και  $u_z^* = u_z/U$  έχουμε

$$u_z^*(r^*) = \frac{u_z}{U} = -\frac{1}{4} (1 - (r^*)^2) \quad (16)$$

Η οποία λαμβάνει ακρότατο

$$u_z^*(r^*)|_{r^*=0} = -\frac{1}{4} \Rightarrow u_z(r)|_{r=0} = -\frac{U}{4} \quad (17)$$

και έχει μέση τιμή

$$\begin{aligned} \langle u^* \rangle &= \frac{\int u_z(r^*) dA}{A} \Rightarrow \\ &= \frac{1}{\pi(1)^2} \int_0^1 \frac{1}{4} ((r^*)^2 - 1) 2\pi r^* dr^* \Rightarrow \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

και αντίστοιχα  $\langle u \rangle = -U/8 = u_{max}/2$

## Κώδικες - Αποτελέσματα

Υλοποιούμε τα παραπάνω στον παρακάτω κώδικα MATLAB. Το κυρίως πρόγραμμα που είναι στο αρχείο *Ex\_NS.m* καλεί την συνάρτηση *NS\_cyl.m* η οποία επιλύει τις εξισώσεις Navier-Stokes με τις συνθήκες που απαιτεί η άσκηση.

Listing 1: /ODEs/Ex\_NS.m

```

1 clear;format compact
2
3 %% Number of points
4 N      = [5, 10, 50, 100, 10^3];
5 sols   = length(N);
6 Nmax   = max(N)
7 Dr     = 1/(Nmax-1);
8 r       = ((0:Nmax-1)*Dr)';
9 %% Analytical Solutions
10 uAnal  = @(r) (r.^2 -1)/4;
11
12 %% Find & plot solutions
13 figure(1)
14 ms = 2; lw1 = 1.5; lw2 = 1;
15 %plot analytical
16 plot(r, uAnal(r), "r--", "markersize", ms, "linewidth", lw2)
17 sprintf("----- Analytical -----\n")
18 sprintf("u*_max = %.8f\n", max(abs(uAnal(r))))
19 sprintf("<u*> = %.8f\n", 2*trapz(r, abs(r.*uAnal(r))))
20
21 leg = {};%zeros(sols+1);
22 leg{1} = "Analytical";
23 hold on
24 for i = 1:sols
25     sprintf("----- N = %d -----\n", N(i))
26     Dr = 1/(N(i)-1);
27     r = ((0:N(i)-1)*Dr)';
28     % find solutions
29     u = NS_cyl(N(i));
30     % plot Solution
31     plot(r, u, "-", "markersize", ms, "linewidth", lw1)
32     hold on
33     leg{i+1} = sprintf("N=%d", N(i));
34     sprintf("u*_max = %.8f\n", max(abs(u)))
35     sprintf("<u*> = %.8f\n", 2*trapz(r, abs(r.*u)))
36 endfor
37 legend(leg, 'location','northwest', 'FontSize', 14)
38 xlabel("r^*=r/R")
39 ylabel("u_z^*(r^*)=u_z(r)/U")
40 title("Solution of NS equations with cylindrical symmetry ", 'FontSize', 14)
41 grid on
42 saveas(gcf, './plots/NS_solutions.pdf');
43 hold off
44
45 %% plot abs diffs
46 N      = [50, 100, 1000, 10000];
47 sols   = length(N);
48 leg2 = {};
49 figure(2)
50 hold on
51 for i = 1:sols
52     Dr = 1/(N(i)-1);

```

```

53  r = ((0:N(i)-1)*Dr)';
54  % find solutions
55  u = NS_cyl(N(i)); % plot Solution
56  plot(r, abs(u-uAnal(r)), "-", "markersize", ms, "linewidth", lw1)
57  hold on
58  leg2{i} = sprintf("N=%d", N(i));
59  endfor
60  legend(leg2, 'location','northwest', "FontSize", 14)
61  xlabel("r^*=r/R")
62  ylabel("/u_z^*(r^*)-u^*_{analytic}/")
63  title("Absolute differences ", 'FontSize', 14)
64  grid on
65  saveas(gcf, './plots/NS_absDiff.pdf');
66  hold off

```

Listing 2: /ODEs/NS\_cyl.m

```

1  %% Solution of the Navier-Stokes equation in the case of
2  %      - Cylindrical symmetry
3  %      - stationary flow
4  %      - incompressible fluid
5  %
6  %-----
7  function u = NS_cyl(N)
8      addpath("../Linear_Systems")
9      %% System's parameters
10
11     %% Numerical scheme's parameters
12     Dr = 1/(N-1);
13     r(1:N) = ((0:N-1)*Dr)';
14     %% Define the system's matrices A*u = b
15     A = zeros(N, N);
16     b = zeros(N, 1);
17     % boundary conditions: u1+u2 = 0 && uN = 0
18     A(1, 2) = 1; A(1, 1) = -1;
19     b(1) = 0;
20     A(N, N) = 1;
21     b(N) = 0;
22     % inner points
23     for i=2:N-1
24         A(i, i) = -4; % diagonal
25         A(i, i+1) = 2 + Dr/r(i); % diagonal+1
26         A(i, i-1) = 2 - Dr/r(i); % diagonal-1
27         b(i) = 2*Dr^2;
28     endfor
29
30     u = Thomas(A, b);
31 endfunction

```

Έχει χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση *Thomas.m* η οποία είχε υλοποιηθεί σε προηγούμενη σειρά ασκήσεων. Παράτιθεται και αυτή παρακάτω

Listing 3: /ODEs/Thomas.m

```

1  % Thomas alogrithm for solving 3-diagonal systems of equations
2  function x = Thomas(A, d)
3      % dimension of system
4      n = size(A,1);
5
6      % obtain the un-primed arrays a, b, c from matrix A

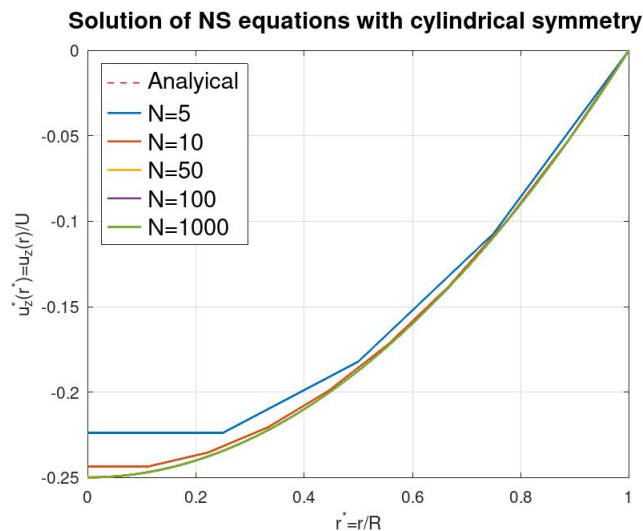
```

```

7  a = [0, diag(A, -1)']';
8  b = diag(A);           # diagonal
9  c = [diag(A, +1)', 0]';
10
11  %-----
12  % 1st part: forward
13  %-----
14  % define the primed arrays c', d'
15  cp = zeros(n, 1);
16  dp = zeros(n, 1);
17
18  % calculate primed arrays
19  cp(1, 1) = c(1, 1) / b(1, 1);
20  dp(1, 1) = d(1, 1) / b(1, 1);
21  % c'
22  for i=2:n-1
23      cp(i, 1) = c(i, 1) / ( b(i, 1) - a(i, 1)*cp(i-1, 1) );
24  endfor
25  % d'
26  for i=2:n
27      dp(i, 1) = (d(i, 1) - a(i, 1)*dp(i-1, 1)) / ( b(i, 1) - a(i, 1)*cp(i-1, 1) );
28  endfor
29
30  %-----
31  %2nd part: backwards
32  % x : contains the solution of the tridiagonal system
33  %-----
34  x = zeros(n, 1);
35  x(n, 1) = dp(n, 1);
36
37  for i = n-1:-1:1
38      x(i, 1) = dp(i, 1) - cp(i, 1) * x(i+1, 1);
39  endfor
40 endfunction

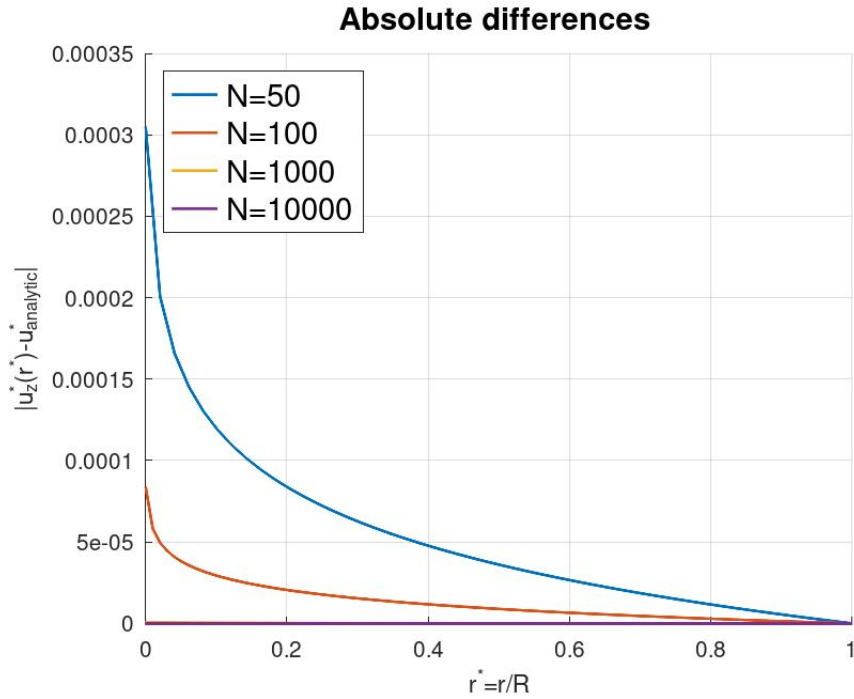
```

Ένας τρόπος ελέγχου των αποτελεσμάτων είναι η σύγκρισή τους με την αναλυτική λύση του εν λόγω προβλήματος δεδομένου ότι μας είναι γνωστή και δίνεται από την σχέση (16). Στην Εικόνα (1) φαίνονται οι αριθμητικές λύσεις για διάφορους αριθμούς διαστημάτων  $N$ .



Εικόνα. 1: Αριθμητική & Υπολογιστική Λύση για διάφορα  $N$ .

Η διαφορά μεταξύ των δύο λύσεων φαίνεται να μικραίνει και η αριθμητική να συγκλίνει στην αναλυτική καθώς αυξάνεται ο αριθμός των βημάτων  $N$ . Στην παρακάτω Εικόνα (2) φαίνεται ακριβώς αυτό. Δηλαδή έχουν παρασταθεί οι διαφορές  $|u_{num} - u_{anal}| - r$ , για διαφορετικούς αριθμούς βημάτων.



Εικόνα. 2:  $|u_z^* - u_{analytic}^*|$

Τέλος, όπως φαίνεται στον παρακάτω Πίνακα (1), η μέγιστη ταχύτητα καθώς και η μέση τιμή των αριθμητικών αποτελεσμάτων συγκλίνουν προς τα θεωρητικά αναμενόμενα

N	Theory	5	10	100	1000
$u_{max}^*$	0.25	0.223809	0.243578	0.249916	0.249999
$\langle u^* \rangle$	0.125	0.113690	0.122705	0.124981	0.124999

Πίνακας. 1: Μέγιστες και μέσες τιμές