POWERS OF PATHS IN TOURNAMENTS

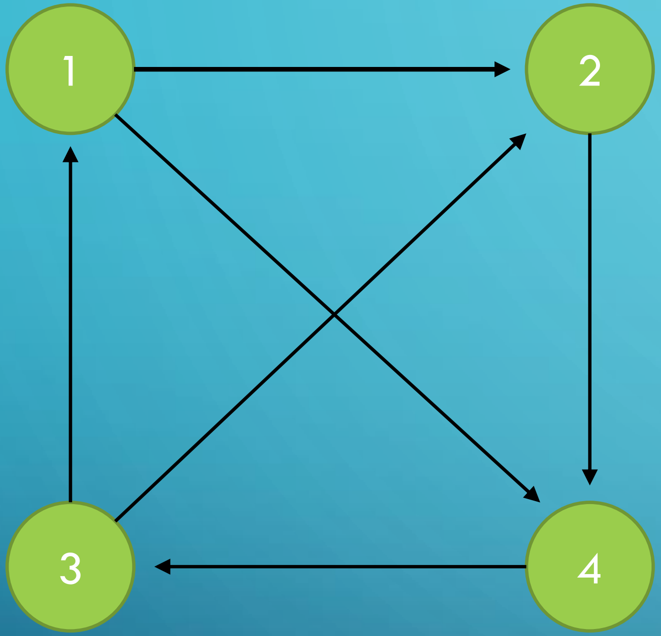
Nemanja Draganić, François Dross, Jacob fox, António Girão, Frédéric Havet, Dániel Korándi, William Lochet, David Munhá Correia, Alex scott, Benny Sudakov

Matan Greenberg

מה אנחנו רוצים להוכיח?

- שכל טורניר מכיל את החזקה ה – k של מסלול מכוון מגודל ליניארי
- פתרון מלא כאשר k=2 – שהוא מסלול מכוון באורך - $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil - 1$

מהו טורניר?

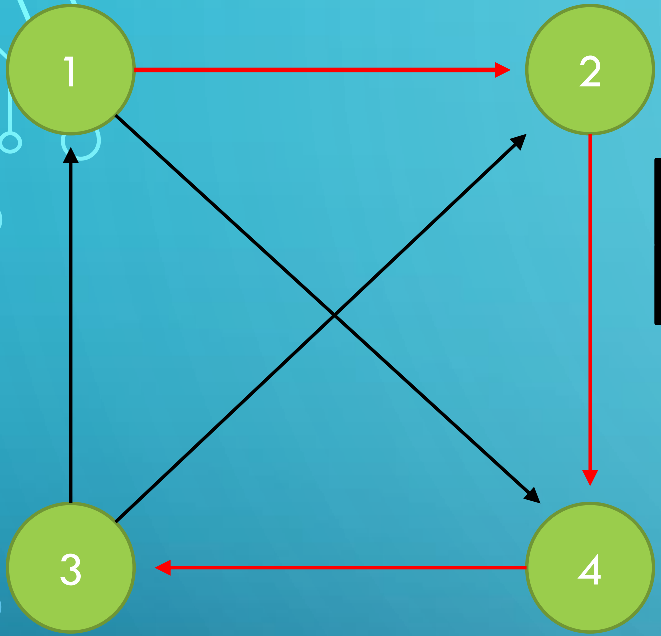


טורניר הוא גרף שלם מכוון.

כלומר בין כל קודקוד לכל קודקוד קיימת צלע והצלעות הן מכוונות.

אם קיימת צלע מכוונת – IJ אז בהכרח הצלע- JI אינה נמצאת, כלומר זהו גרף ללא צלעות כפולות.

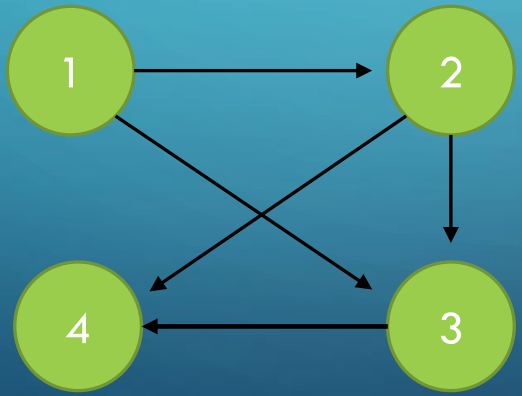
החזקה ה – K של מסלול מכוון



$\vec{P_4}$=1,2,4,3

$k = 2$

$\overrightarrow{P_4^2}$



יהי מסלול - $\vec{P_l} = v_0, v_1 \dots v_l$ החזקה ה – k של המסלול - $\vec{P_l}$

הוא גרף - $\overrightarrow{P_l^k}$ על אותם הקודקודים – $v_0, v_1 \dots v_l$ אשר מכיל

את הצלע המכוונת - $v_i v_j$ אם ורק אם - $i < j \le i + k$

איך מוכיחים?

- כדי להוכיח נראה שני חסמים, חסם תחתון וחסם עליון.
- שני החסמים יהיו לינאריים ב – n ולכן המסלול יהיה באורך לינארי.
- לבסוף נראה את הפתרון השלם עבור – $k = 2$

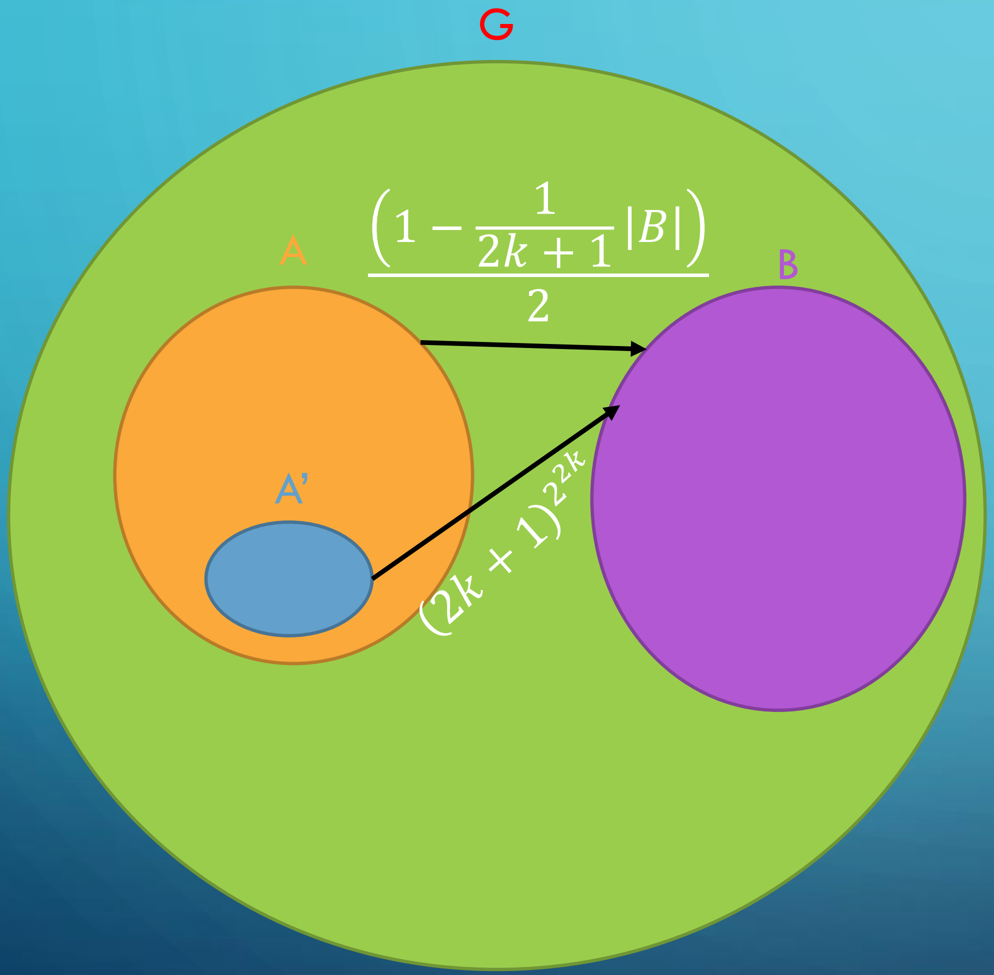
למה 4

חזור

למה 4. יהי G – גרף מכוון עם שתי תתי קבוצות זרות – A,B כאשר - |A|=2k+1, $|B| \ge 2^{4k+4}k$

ולכל קודקוד ב – A יש לפחות - $\frac{\left(1-\frac{1}{2k+1}|B|\right)}{2}$ outneighbours ב – B.

אז – A מכילה תת קבוצה – A' מגודל – k שיש לה לפחות - $(2k+1)2^{2k}$ outneighbours משותפים ב – B.



למה 4 הוכחה

הוכחה: נניח בשלילה שלא קיימת תת קבוצה – A' לכן כל תת קבוצה מגודל – k ב – A מופיעה ב – inneighbourhood של – B בפחות מ - $(2k+1)2^{2k}$.

נגדיר - $d^{-}(v)$ מספר ה – inneighbours של קודקוד - $v \in B$ שיש ב – A.

מזה נובע משוואה – (1) .

$$(1)\ \binom{2k+1}{k} \cdot (2k+1)2^{2k} = \binom{|A|}{k} \cdot (2k+1)2^{2k} > \Sigma_{v \in B}\binom{d^{-}(v)}{k}$$

למה 4 הוכחה

משוואה – (2) נובעת ישירות מבניית הגרף.

$$(2)\ \Sigma_{v\in B} d^-(v) \geq |A| \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)|B|}{2} = \frac{(2k+1)\left(\frac{2k}{2k+1}\right)|B|}{2} = \frac{2k|B|}{2} = k|B|$$

למה 4 הוכחה

ומשוואה – (3) נובעת מאי-שוויון ינסן.

כיוון שמשוואה - (3) סותרת את – (1) הגענו לסתירה מההנחה היחידה שעשינו ש – A’ לא קיימת, ולכן היא בהכרח קיימת.

$$(3)\ \Sigma_{v\in B}\binom{d^-(v)}{k} \geq |B|\cdot\binom{\frac{\Sigma_{v\in B}d^-(v)}{|B|}}{k} = |B| \geq 2^{4k+4}k$$

$$(1)\ \binom{2k+1}{k}\cdot(2k+1)2^{2k} = \binom{|A|}{k}\cdot(2k+1)2^{2k} > \Sigma_{v\in B}\binom{d^-(v)}{k}$$

טענת עזר 1

טענה: כל טורניר על - 2^m קודקודים מכיל תת טורניר טרנזיטיבי בגודל – m+1

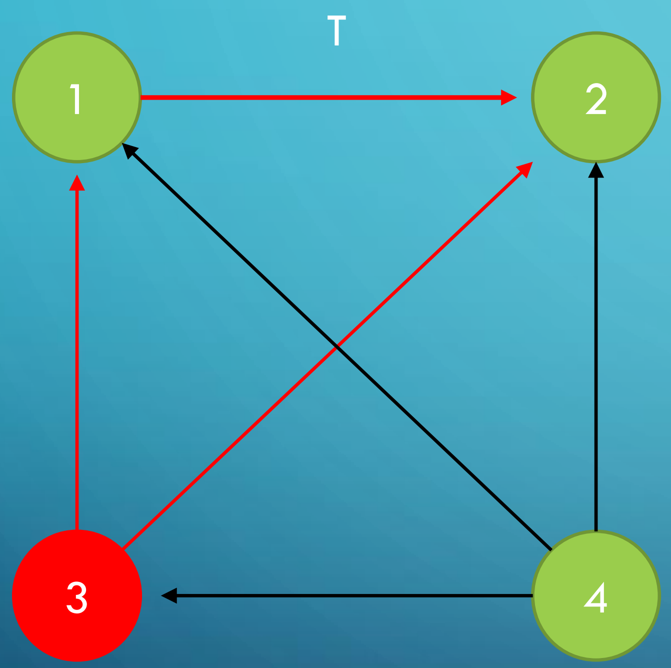
טורניר טרנזיטיבי: טורניר שבו אם – uv,vw הן צלעות אז – uw היא גם צלע.

טענת עזר 1

הדרך למצוא את אותו תת טורניר היא להתחיל
מקודקוד עם דרגה יוצאת של לפחות -
2^{m-1} ולעבור על כל השכנים שלו רקורסיבית.

דרך זו יוצרת לנו טורניר ללא מעגלים ולפי
משפט שטורניר הוא טרנזיטיבי אם ורק אם הוא
חסר מעגלים נובע שהטורניר הוא טרנזיטיבי.

טורניר טרנזיטיבי: טורניר שבו אם – uv,vw הן צלעות אז – uw
היא גם צלע.



T’=v_3v_1, v_3v_2, v_1v_2

חסם תחתון

נסדר את הקודקודים – 0,1,...n-1 כך שיהיו כמה שיותר צלעות מהצורה – IJ כך ש – I<J נקרא לסידור הזה סידור חציון.

ונגדיר – [I,J) סידור של קודקודים מ – {I...J-1}

כאשר - $0 \le i < j \le n$, נמצא את הגרף $\vec{P}_l^k$-

בעזרת טענה 2.

טענה 2

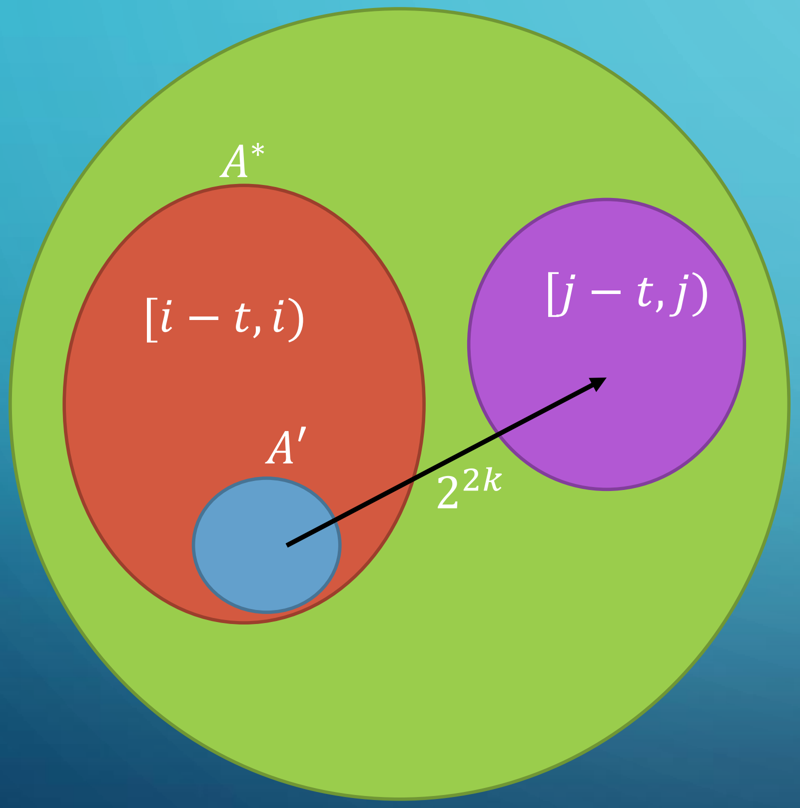
יהי – $t = 2^{4k+4}k$ וגם - $t \leq i \leq n - (2k+1)t$

עבור כל תת קבוצה – $[i-t,i)$ $\mathrm{A}^* \subseteq$ מגודל - 2^{2k} קיים

אינדקס - $i + t \leq j < i + (2k+1)t$ וקבוצה - $A' \subseteq \mathrm{A}^*$

מגודל – k כך ש – A' מהווה טורניר טרנזיטיבי ולקודקודים שלה

יש לפחות - 2^{2k} outneighbours משותפים ב – $[j-t,j)$.



טענה 2 הוכחה

הוכחה: קיימת תת קבוצה - $A \subseteq A^*$ מגודל - $2k+1$
שמהווה טורניר טרנזיטיבי לפי טענת עזר 1.

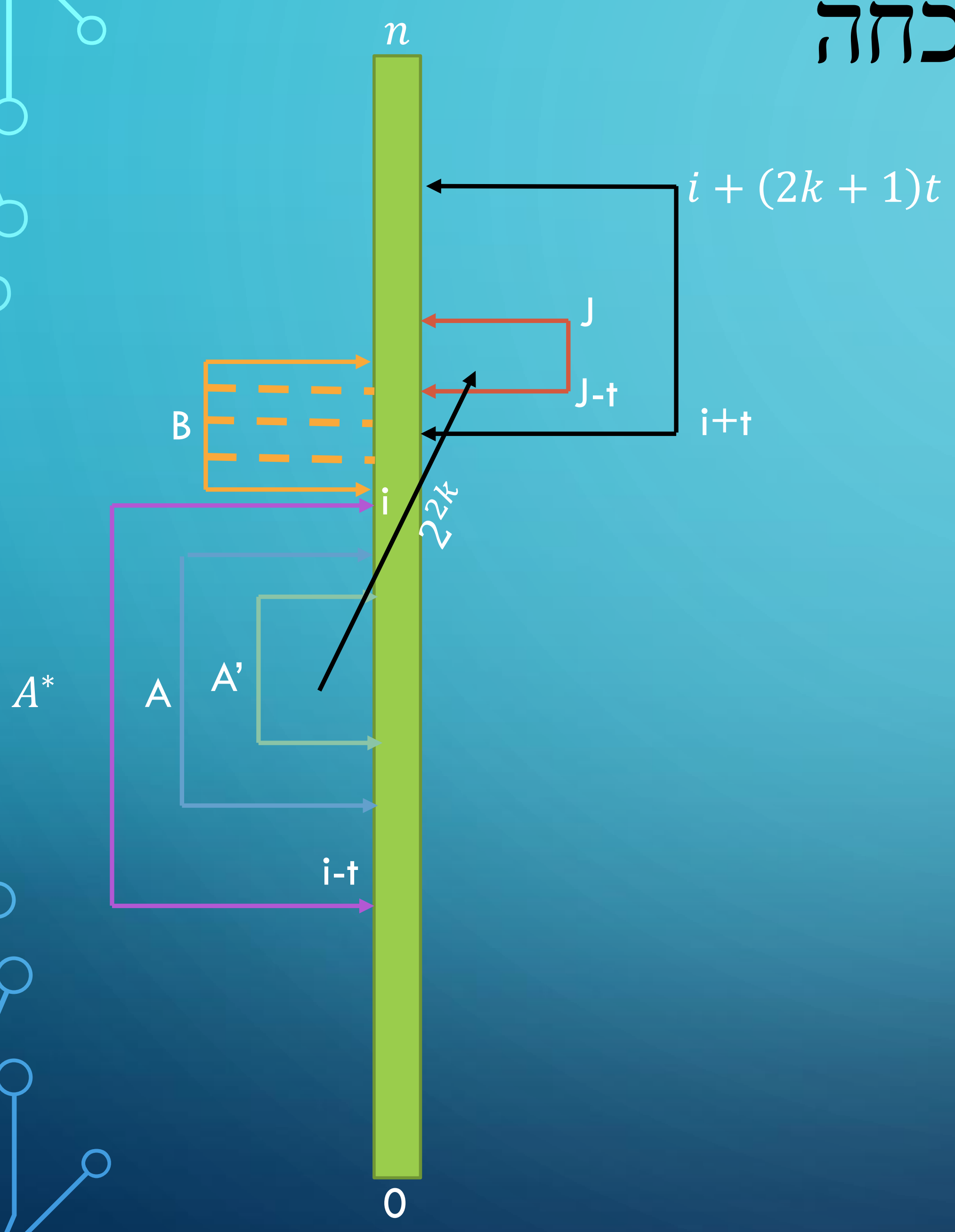
יהי - $B = [i, i + (2k+1)t)$ אז לכל קודקוד - $v \in A$
יש לפחות – $kt = \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)|B|/2$ outneighbours
ב-B

$$(1)\ kt = 2^{4k+4}k^2 = \frac{2k+1}{2k+1} \cdot 2^{4k+4}k^2 = \frac{\frac{(2k+1)\cdot 2\cdot k}{2k+1}\left(2^{4k+4}k\right)}{2}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)|B|/2$$

טענה 2 הוכחה

אחרת ל – v היה יותר מ – $(k+1)t$ inneighbours ב – B
ואז היינו יכולים להזיז את – v להיות האחרון בסדר – $[i,v)$
והיינו מקבלים עוד צלעות מהצורה - ij כך ש – $i<j$
בסתירה לבחירה שלנו שממקסמת את מספר הצלעות
מהצורה הזאת.

טענה 2 הוכחה



כעת נפעיל את למה 4, כלומר קיימת תת קבוצה - $A' \subseteq A$ בגודל – k עם לפחות - $(2k+1)2^{2k}$ outneighbours משותפים ב – B .

כעת נוכל לחלק את – B ל - $2k+1$ חלקים מגודל – t וכך נוכל לבחור את ה - j מהטענה כך שב – A’ יהיו לפחות - 2^{2k} outneighbours משותפים ב – $[j-t, j)$.

חסם תחתון המשך

נניח ש - $n \geq 2^{2k}$ יהי - $i_0 = 2^{2k}, A_0 = [0, 2^{2k})$
כעת נפעיל את טענה 2 עם – $i = i_0, A^* = A_0$

נקבל - $A' \subset \mathrm{A}_0$ מגודל – k כאשר – A’ הוא
טורניר טרנזיטיבי ולכן נקבל את החזקה ה – k
של המסלול - $v_0, v_1 \ldots v_{k-1}$

חסם תחתון המשך

כעת לפי טענה 2 – A’ מכילה לפחות - 2^{2k} outneighbours משותפים ב – $[j-t,j)$ כאשר - $i_0+t \le j \le i_0+(2k+1)t$
כעת נגדיר – $i_1 = j$ ונבחר – A_1 להיות כל ה – 2^{2k} ה – outneighbours המשותפים.

בשלב – s נפעיל את טענה 2 שוב עם – $i = i_s, A^* = A_s$ כדי למצוא את החזקה של המסלול - $v_{sk} \dots v_{(s+1)k-1}$ ב - A_s עם -
2^{2k} outneighbours משותפים ב – $[i_{s+1}-t, i_{s+1})$ כאשר - $i_s+t \le i_{s+1} \le i_s+(2k+1)t$

חסם תחתון המשך

נחזור על התהליך הזה עד שלב L – עם $n-(2k+1)t$ - כעת $i_L >$ - A_L

חייב להכיל טורניר טרנזיטיבי מגודל **2k+1** – מטענת עזר 1

נבחין כי - $n-(2k+1)t < i_L \le 2^{2k} + L(2k+1)t$

לכן - $n \le (L+2)(2k+1)t$ לפי משוואה – (1)

$$(1)\quad n-(2k+1)t \le 2^{2k} + L(2k+1)t$$
$$\rightarrow n \le 2^{2k} + L(2k+1)t + (2k+1)t$$
$$\rightarrow n \le (2k+1)t + L(2k+1)t + (2k+1)t$$
$$= 2(2k+1)t + L(2k+1)t$$
$$= (L+2)(2k+1)t$$

חסם תחתון המשך

המסלול שקיבלנו הוא - $v_{Lk} \dots v_{(L+2)k}$ מאורך - $(L+2)k \ge \frac{kn}{(2k+1)t} \ge \frac{n}{2^{4k+6}k}$

שהחזקה ה – k שלו מוכלת בטורניר.

למעשה הוכחנו גם שהטורניר מכיל את כל הצלעות

מהצורה - $v_a v_b$ כך ש - $a < b$ וגם - $\left\lfloor \frac{a}{k} \right\rfloor + 1 \ge \left\lfloor \frac{b}{k} \right\rfloor$

(1) $n < (L+2)(2k+1)t$

$$\rightarrow (L+2)k > \frac{kn}{(2k+1)t} \ge \frac{kn}{(2k+1)(2^{4k+4}k)}$$

$$\ge \frac{\cancel{k}n}{\cancel{k}(2^{4k+5}k+2^{4k+4})} \ge \frac{n}{2^{4k+6}k}$$

חסם עליון

יהי - $l_k(n)$ המספר הגדול ביותר כך שכל טורניר בעל – n קודקודים מכיל את החזקה של מסלול על – l קודקודים.

כמו כן ניתן להגיד באופן שקול ש –$l_k(n)$ הוא המספר הקטן ביותר כך שקיים טורניר עם – n קודקודים שלא מכיל את - $\overrightarrow{P_l^k}$.

ראשית נראה ש - $l_k(n)$ היא תת אדיטיבית,

כלומר - $l_k(n+m) \leq l_k(n) + l_k(m)$

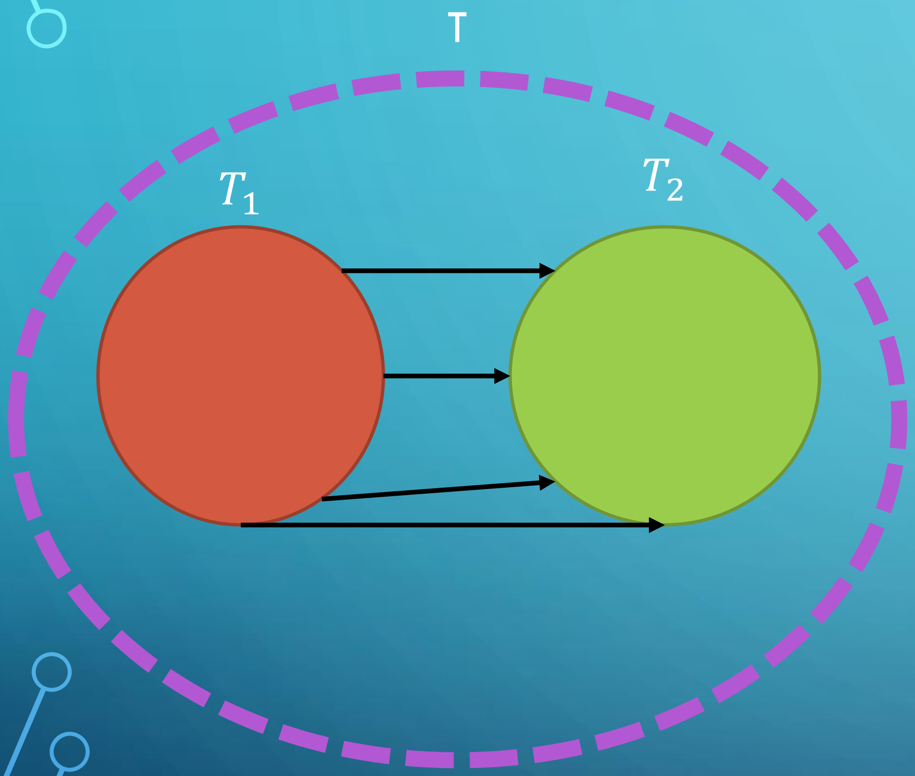
למה 5

נוכיח ש - $l_k(n+m) \le l_k(n) + l_k(m)$ עבור – $k,n,m \ge 1$

הוכחה: יהיו - T_1,T_2 טורנירים על – n,m קודקודים בהתאמה, כך שהם לא מכילים את החזקה ה – k של מסלול באורך - $l_k(n),l_k(m)$ בהתאמה.

יהי – T טורניר עם – n+m קודקודים וחיבור כל הצלעות מ - T_1 ל – T_2 אז כל חזקה – k של מסלול ב – T חייבת להיות חיבור של חזקה – k של מסלול ב - T_1 עם החזקה – k של מסלול מ – T_2 ולכן האורך שלו חייב להיות לכל היותר:

$$(l_k(n) - 1 + l_k(m) - 1) + 1 = l_k(n) + l_k(m) - 1 \le l_k(n) + l_k(m)$$



למה 6

לכל - $k \geq 5$ אז - $l_k(2^{k-1}) < \frac{k(k+1)}{2}$

הוכחה: יהי - $l = \frac{k(k+1)}{2}, n = 2^{k-1}$ נשים לב של - $\overrightarrow{P_{l-1}^k}$ יש - $kl - l$ צלעות.

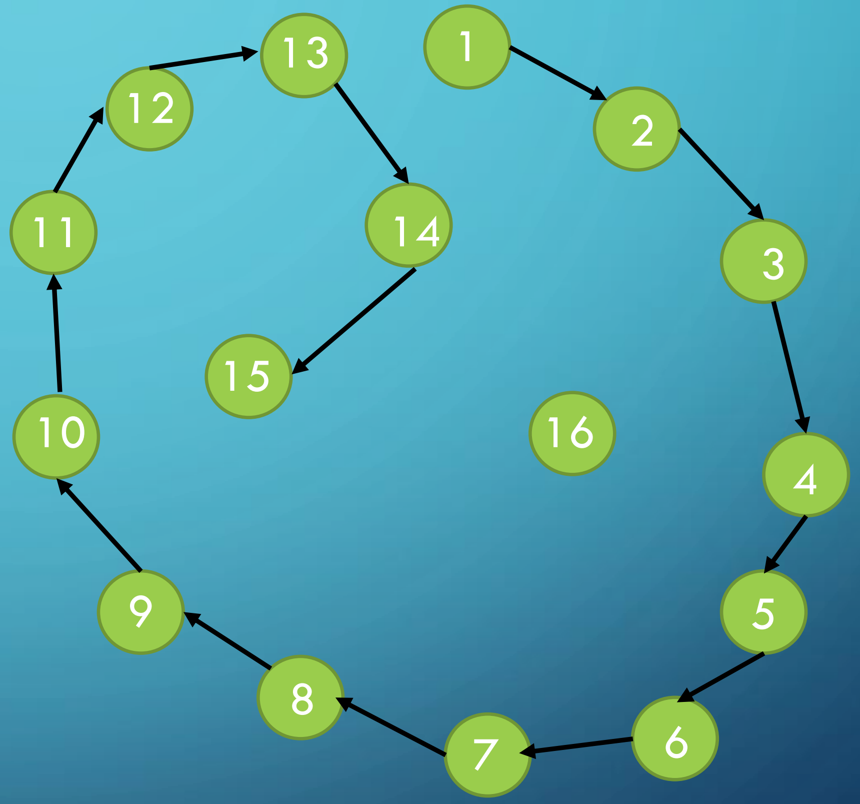
יהי – T טורניר רנדומלי עם – n צלעות כך שהצלעות שלו מכוונות לכיוון מסוים בהסתברות אחידה.

ההסתברות שיהיו - l קודקודים - $v_0 \dots v_{l-1}$ שמייצרים את - $\overrightarrow{P_l^k}$ היא – $\left(\frac{1}{2}\right)^{kl-l}$

למה 6 המשך

$$k = 5, l = 15, n = 16$$
$$lk - l = 15 \cdot 5 - 15 = 60$$

$$(l-1-k)k + \sum_{i=1}^{k} i = lk - k^2 - k + \frac{k(k+1)}{2}$$
$$= \frac{2lk - 2k^2 - 2k + k^2 + k}{2} = \frac{2lk - k^2 - k}{2}$$
$$= \frac{2lk}{2} - \frac{k(k+1)}{2} = lk - l$$



למה 6 המשך

יש – $\binom{n}{l}\cdot l!$ אפשרויות לבחור קבוצת קודקודים מגודל l - אז ההסתברות ש – T מכיל את החזקה ה – k של מסלול מאורך $l-1$ - היא לכל היותר –

$$\binom{n}{l}\cdot l!\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{kl-l} < n^{l}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{kl-l} = 1$$

לכן בהסתברות חיובית – T לא מכיל את - $\overrightarrow{P_{l-1}^{k}}$

ולכן - $l_k(2k-1) \le l-1 < \frac{k(k+1)}{2}$

(1) $$n^{l}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{kl-l} = \left(2^{k-1}\right)^{\frac{k(k+1)}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)-\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)} = 2^{(k-1)\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)}\cdot 2^{-(k-1)\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)} = 2^{0} = 1$$

חסם תחתון המשך

נשים לב כי - $l_k(n)$ היא פונקציה מונוטונית עולה.

כעת מלמה 5 ולמה 6 נסיק כי - $l_k(n) \leq \left\lceil \frac{n}{2^{k-1}} \right\rceil \cdot l_k(2^{k-1}) \leq \left(\frac{n}{2^{k-1}} + 1 \right) \left(\frac{k(k+1)}{2} - 1 \right) \leq \frac{k(k+1)n}{2^k}$

עבור – $n \geq k(k+1)2^k$

THE SQUARE OF PATH

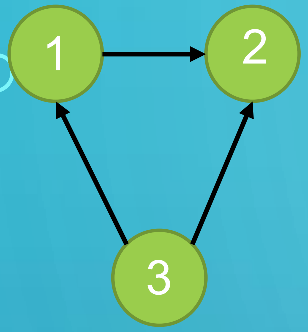
כעת נוכיח שכל טורניר מכיל את החזקה ה – 2 של מסלול מאורך - $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil - 1$

או במילים אחרות - $l_2(n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$

ראשית נשים לב ש - $l_2(1) = 1, l_2(2) = l_2(3) = 2$

ונוכיח באינדוקציה ש - $l_2(n) \leq \lceil 2n/3 \rceil$

THE SQUARE OF PATH



בסיס האינדוקציה - $l_2(3) = 2 \leq 3$

כעת נניח שהטענה נכונה עד - $n-1$ ונוכיח עבור – n

$$l_2(n) = l_2(n-3+3) \leq l_2(n-3) + l_2(3) \leq \left\lceil \frac{2(n-3)}{3} \right\rceil + 2 \leq \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$$

למה 5

הנחת האינדוקציה

זה מוכיח את החסם העליון

THE SQUARE OF PATH

בשביל להראות ש - $l_2(n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$ נראה שהחסם התחתון גם הוא שווה ל - $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$

בעזרת טענה 3.

טענה 3

לכל סידור חציון של טורניר מתקיימות התכונות הבאות:

(a) כל הצלעות מהצורה - $x_i x_{i+1}$ נמצאות בטורניר.

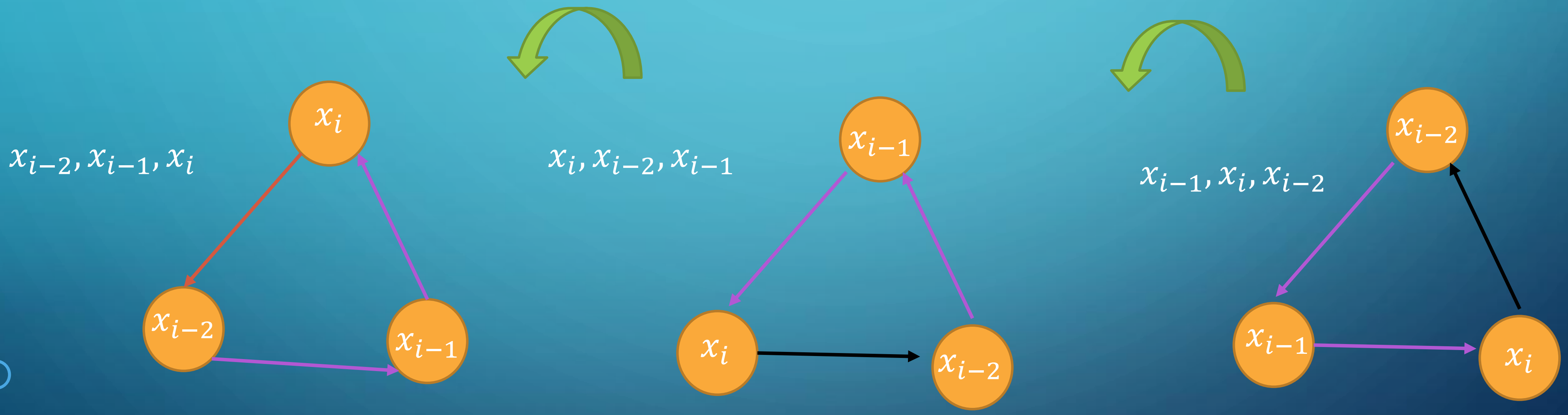
(b) אם - $x_i x_{i-2}$ היא צלע בטורניר אז "סיבוב" המשולש - $x_{i-2} x_{i-1} x_i$ נותן את סידורי החציון הבאים
$x_1, \ldots, x_{i-3}, x_{i-1}, x_i, x_{i-2}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ וגם - $x_1, \ldots, x_{i-3}, x_i, x_{i-2}, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$

(c) אם - $x_i x_{i-2}$ היא צלע בטורניר אז כל אחד מהקודקודים - x_{i-2}, x_{i-1}, x_i הוא – inneighbour של - x_{i+1}
ולכל היותר אחד מהם הוא outneighbour של - x_{i+2}

טענה 3 הוכחה

תכונה – (a) מתקיימת כי אחרת היינו יכולים להחליף בין - x_i ל - x_{i+1} כדי למקסם את ה – forward edges בסתירה לסידור שלנו.

תכונה – (b) מתקיימת כי "סיבוב" המשולש - x_{i-2}, x_{i-1}, x_i לא משפיעים על מספר ה – forward edges תמיד יהיו שני – forward edges



טענה 3 הוכחה

תכונות – (a),(b) נותנות לנו ש - x_{i-2},x_{i-1},x_i הן inneighbours של - x_{i+1} אחרת הייתה לנו סתירה ל – (a)

כעת נניח בשלילה ששתיים מהקודקודים -x_i,x_{i-2},x_{i-1} הם outneighbours של - x_{i+2}

אז אם נסובב את - x_i,x_{i+1},x_{i+2} נוכל לקבל - x_{i-2},x_{i-1},x_{i+2},x_{i},x_{i+1} וזה סותר את – (a). ולכן חייב להיות לכל היותר קודקוד אחד מ - x_{i-2},x_{i-1},x_i שהוא outneighbour של - x_{i+2}.

$x_i, x_{i-2}, x_{i-1}, \mathrm{x}_{\mathrm{i+1}}$

$x_{i-1}, x_i, x_{i-2}, \mathrm{x}_{\mathrm{i+1}}$

$x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, \mathrm{x}_{\mathrm{i+1}}$

THE SQUARE OF PATH

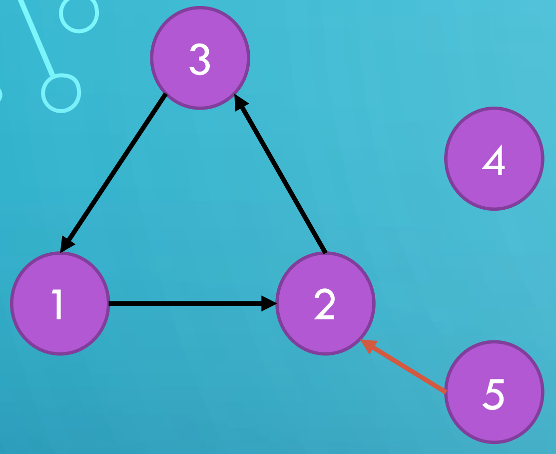
נגדיר ש – i הוא אינדקס רע בסידור חציון - $x_1, \dots x_n$ אם - $x_i x_{i-2}$ היא צלע וגם לפחות אחת מ - $x_{i+2} x_i$ $x_{i+2} x_{i-1}$ היא גם צלע.

נשתמש בלמה 7 כדי להוכיח את הטענה המרכזית.

למה 7

- לכל טורניר יש סידור חציון ללא אינדקס רע.

למה 7 הוכחה

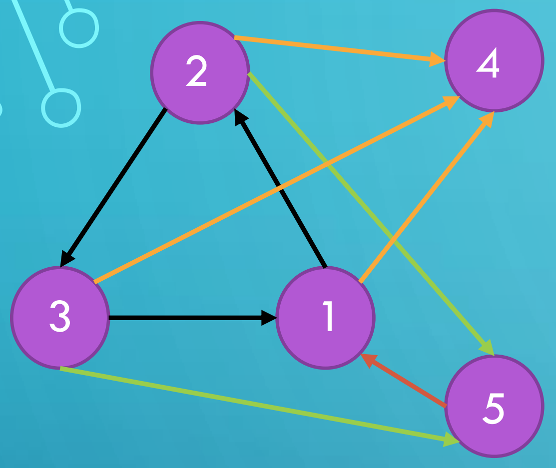


נניח שקיים טורניר עם סידור חציון - $x_1, \dots x_n$ שיש בו – אינדקס רע - i שהוא הכי גדול.

בגלל ש – i הוא אינדקס רע אז - $x_i x_{i-2}$ היא צלע וגם - $x_{i+2} x_i$ או - $x_{i+2} x_{i-1}$ היא צלע.

אז לפי – (b) נוכל לסובב את - $x_{i-2} x_{i-1} x_i$ ל - $x_i x_{i-2} x_{i-1}$ או ל - $x_{i-1} x_i x_{i-2}$ ולקבל את הצלע - $x_{i+2} x'_{i-2}$ בסידור חציון החדש - $x_1, \dots, x_{i-3}, x'_{i-2}, x'_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n$

למה 7 הוכחה



מתכונה – (c) אנחנו יודעים שרק אחת מ - x'_{i-2},x'_{i-1},x'_i היא outneighbour של - x_{i+2} וכיוון שיש לנו את הצלע - $x_{i+2}x'_{i-2}$ אז - x'_{i-1},x'_i הן לא – outneighbours של - x_{i+2}

כמו כן מ – (c) אנחנו גם יודעים שכל אחד מ -x'_{i-2},x'_{i-1},x'_i הוא inneighbour של - x_{i+1}

לכן גם - x_{i+1} וגם - x_{i+2} הם outneighbours של x'_{i-1},x'_i

ולכן אף אחד מ – i,i+1,i+2 הוא לא אינדקס רע בסידור החדש ולכן האינדקס הרע קטן יותר מ – i בסתירה להנחה.

THE SQUARE OF PATH

כעת נוכיח שאכן - $l_2(n) \ge \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$

ניקח טורניר בעל n – קודקודים וסידור חציון - $x_1, \dots ,x_n$ ללא אינדקסים רעים

ויהי - $I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$ להיות קבוצה של אינדקסים – i כך ש - $x_i x_{i-2}$ היא לא צלע

אז נראה ש - $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ הוא מסלול מכוון על - $k \ge \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$ קודקודים שהחזקה ה – 2 שלו מוכלת בטורניר.

THE SQUARE OF PATH

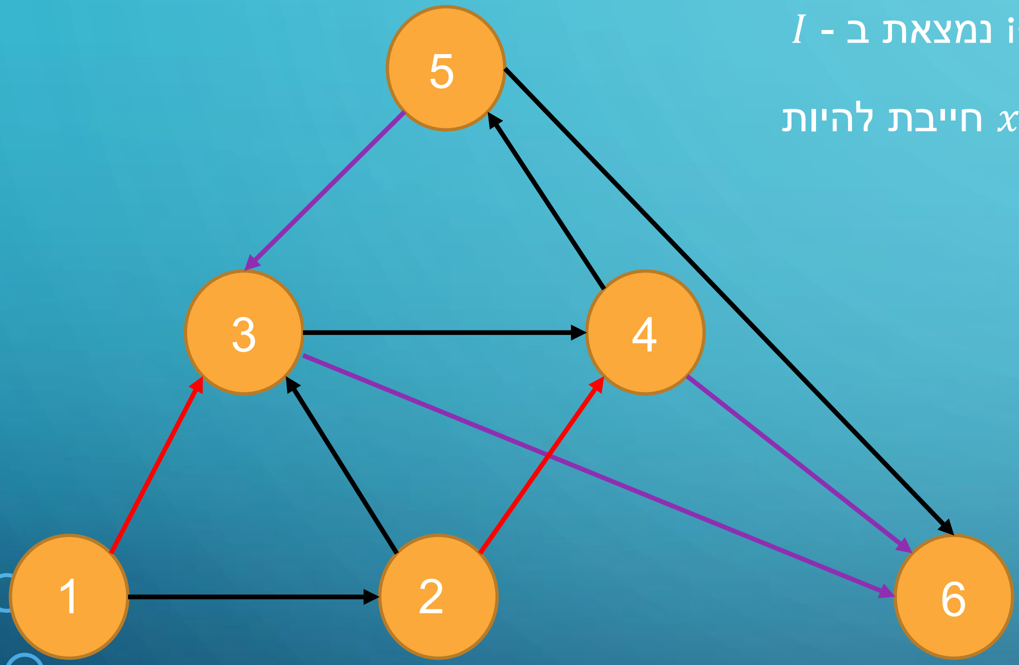
ראשית נראה שאם – i+2 לא נמצא ב – I אז – i,i+1 כן נמצאים ב - I

אם – i+2 לא ב - I אז - $x_{i+2}x_i$ היא צלע ואז נוכל "לסובב" את -x_i,x_{i+1},x_{i+2} להיות - $x_{i+1},x_{i+2}x_i$ לפי – (b) ואז לפי – (a) - $x_{i-1}x_{i+1}$ חייבת להיות צלע ולכן – i+1 נמצאת ב - I

ומכיוון שאין אינדקסים רעים אז – i הוא גם לא אינדקס רע ולכן הצלע - $x_{i-2}x_i$ חייבת להיות אחרת – i היה אינדקס רע כי - $x_{i+2}x_i$ נמצאת.

ולכן גם – i נמצאת ב - I

מכל האמור לעיל אנחנו כבר רואים שאורך המסלול הוא לכל הפחות - $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$



THE SQUARE OF PATH

כעת רק נותר לבדוק האם - $x_{i_{j-2}}x_{i_j}$,$x_{i_{j-1}}x_{i_j}$ הן צלעות בטורניר.

לפי מה שאמרנו קודם אנחנו יודעים ש - $i_j - 3 \leq i_{j-2} < i_{j-1} < i_j$

$x_{i_{j-1}}x_{i_j}$ היא צלע מ – (a) ו - $x_{i_{j-2}}x_{i_j}$ היא צלע מההגדרה של - I

אז כל מה שנותר להראות הוא ש - $x_{i_{j-2}}x_{i_j}$ היא צלע כאשר - $i_{j-2} = i_j - 3$

במקרה זה קיים אינדקס - i כך ש - $i_j - 3 < i < i_j$ שהוא לא ב - I כלומר הצלע - $x_i x_{i-2}$ היא צלע בטורניר.

$$\{i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3, i_4 = 4, i_5 = 5, i_6 = 7, i_7 = 8, \dots, i_k\}$$

$$\{\dots\ i_5 = 5, i_6 = 6, i_7 = 8, \dots, i_k\}$$

THE SQUARE OF PATH

אז נחלק לשני מקרים אפשריים:

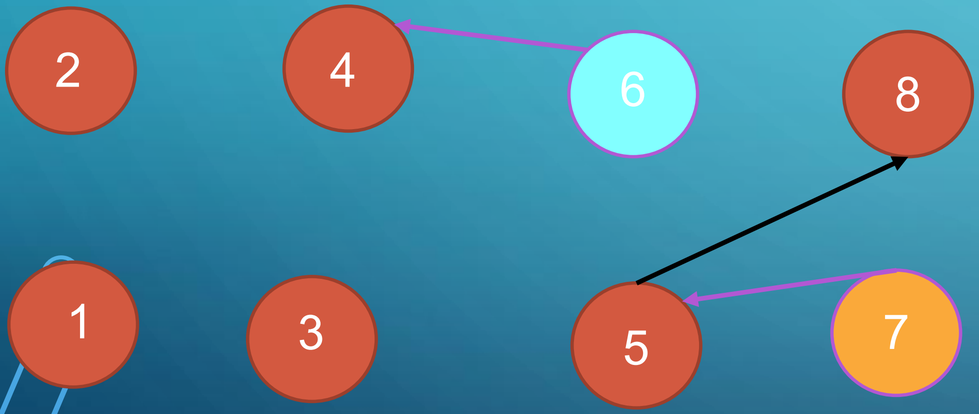
אם - $i = i_j - 1$ אז - $x_{i_{j-2}} x_{i_j}$ היא צלע מתכונה – (c)

ואם - $i = i_j - 2$ אז – $x_{i_{j-2}} x_{i_j}$ היא צלע כי - i הוא לא אינדקס רע

מהבנייה שלנו ולכן אסור שהצלע - $x_{i_j} x_{i_{j-2}}$ תהיה.

$$\{i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3, i_4 = 4, i_5 = 5, i_6 = 7, i_7 = 8, \dots, i_k\}$$

$$\{\dots\ i_5 = 5, i_6 = 6, i_7 = 8, \dots, i_k\}$$



סיכום

הוכחנו ש - $\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil \le l_2(n) \le \left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil$ ולכן בסך הכל - $l_2(n) = \left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil$

כלומר שבכל טורניר בעל n – קודקודים מוכל החזקה ה -2 של מסלול מאורך - $\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil - 1$

כמו כן הראנו חסמים ליניאריים למקרה הכללי.

תודה רבה למי שהקשיב!