Классическая и квантовая цепочка Тоды. Интегрируемость.

1 Классическая цепочка Тоды

1.1 Гамильтониан

Замкнутая цепочка из N одинаковых частиц массы $m = 1$ с экспоненциальным взаимодействием с ближайшими соседями:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{p_n^2}{2} + e^{q_n - q_{n+1}} \tag{1}$$

Это так называемая замкнутая цепочка Тоды. Модифицируем это выражение, чтобы описать одновременно случай периодичной, открытой и квазипериодичной цепочки:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{p_n^2}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} e^{q_n - q_{n+1}} + xe^{q_N - q_1}, x > 0. \tag{2}$$

При $x = 0$ - открытая, $x = 1$ - периодичная, $x = \mathrm{const} > 0$ - квазипериодичная.

1.2 Классическая интегрируемость

Перепишем (1) в виде

$$H = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{p_{2n}^2}{2} + e^{q_{2n} - q_{2n+2}} \tag{3}$$

и совершим преобразование $\{p_{2n}, q_{2n}\} \to \{p_{2n+1}, q_{2n+1}\}$ производящей функцией

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n p_n dq_n \tag{4}$$

Решением является, например, функция

$$W(q_n) = \sum_{n=1}^{2N}(-1)^n(e^{q_n - q_{n+1}} + cq_n),\ c = \mathrm{const}. \tag{5}$$

Отсюда можем получить

$$p_n = e^{q_n - q_{n+1}} + e^{q_{n-1} - q_n} + c \tag{6}$$

Покажем, что это выражение не изменяет Гамильтониан, т.е. **НАПИСАТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}p_{2n}^2 + e^{q_{2n} - q_{2n+2}} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}p_{2n-1}^2 + e^{q_{2n-1} - q_{2n+1}} \tag{7}$$

Получаем два связанных решения одной и той же гамильтоновой системы. Из уравнениий движения, приходим к следующему выражению для вспомогательной величины $r_n = q_n - q_{n+1}$:

$$\dot{r} = e^{r_{n-1}} - e^{r_{n+1}} \tag{8}$$

Вводя вспомогательные функции $e^{q_n-\lambda t} = \rho_n\rho_{n-1}$, уравнение (8) переписывается в виде

$$\dot{\rho}_n = \rho_n \frac{\rho_{n-1}}{\rho_{n+1}} \tag{9}$$

ЭТО ДОЛЖНО БЫТЬ В ФАЙЛЕ С ДОКАЗАТЕЛЬСТВАМИ.

$$\begin{aligned} \mu_n &= \rho_{2n}e^{\lambda t} \\ \eta_n &= \rho_{2n+1}^{-1} \end{aligned} \tag{10}$$

(9) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_n &= \lambda\mu_n + e^{q_{2n}}\eta_n \\ \dot{\eta}_n &= -e^{-q_{2n+2}}\mu_n \end{aligned} \tag{11}$$

Вводя $X_n = \begin{pmatrix} \mu_n \\ \eta_n \end{pmatrix}$ и $M_n = \begin{pmatrix} \lambda & e^{q_{2n}} \\ -e^{-q_{2n+2}} & 0 \end{pmatrix}$, получаем

$$\dot{X}_n = M_n X_n \tag{12}$$

Можем также записать матрицу перехода

$$X_{n-1} = R_n X_n, \tag{13}$$

где $R_n = \begin{pmatrix} p_{2n}-\lambda & -e^{q_{2n}} \\ e^{-q_{2n}} & 0 \end{pmatrix}$
Условие совместности (12) и (13)

$$\dot{R}_n = M_{n-1}R_n - R_n M_n \tag{14}$$

Окончательно, можем записать матрицу перехода четной системы $Z = R_1R_2...R_N$, такую что $X_0 = ZX_N$. Полином $tr\ Z(\lambda)$ степени N по λ является интегралом движения при $\lambda = \mathrm{const}$. При таком λ также (9) переходит в уравнения движения. Отсюда следует, что коэффициенты полинома $tr\ Z(\lambda)$ - интегралы движения. Таким образом, цепочка Тоды - интегрируема по Луивиллю.

2 Квантовая цепочка Тоды

2.1 Квантование

Гамильтониан квантовой цепочки Тоды дается выражением (1), но теперь q_{2n}, p_{2n} - канонически сопряженные переменные

$$[p_{2n}, q_{2m}] = -i\delta_{nm} \tag{15}$$

2.2 Интегрируемость

Определим $S(q_n) = \exp(iW(q_n))$. Покажем, что $[S, Z(\lambda)] = 0$. **ЭТО ПОЙДЕТ В ДОКАЗАТЕЛЬСТВА**
Гамильтониан H пропорционален коэффициенту при λ^{N-2} в $Z(\lambda)$ (**ПОЧЕМУ?**).
ДАЛЬШЕ ПОНЯТЬ ЧТО ТУТ ПИСАТЬ.

3 Интегрируемость и уравнение Янга-Бакстера

3.1 Уравнение Янга-Бакстера и RLL-алгебра

Напомним некоторые определения. Пусть A - аглебра Ли группы Ли G и V_j - пространства представлений ρ_j алгебры A. Рассмотрим уравнение Янга-Бакстера в общей форме с аддитивными параметрами

$$R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u) \in End(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3) \tag{16}$$

Общее соотношение (16) задает RLL-соотношение, если в двух из трех пространст $V_1 = V_2 = V_f$ задано фундаментальное представление ρ_f, а $V_3 = V$ - пространство представления ρ алгебры A. В этом случае R-оператор, действующий в пространсте $V_f \otimes V$ называется L-оператором или L-матрицей. Тогда соотношения для RLL-алгебры записываются как

$$R_{12}(u-v)L_1(u)L_2(v) = L_2(v)L_1(u)R_{12}(u-v) \tag{17}$$

3.2 Интегрируемость классической цепочки по новому

Вспомним об имеющейся у нас матрице $R_n(\lambda) = \begin{pmatrix} p_{2n} - \lambda & e^{q_{2n}} \\ e^{-q_{2n}} & 0 \end{pmatrix} = L_n(\lambda)$. Эти матрицы унимодальны и содержутся в фундаментальном представлении $SL(2, \mathbb{C})$. Метод, используемый далее, строится на замечательном факте

$$\{(L_n(u))^{a_1}_{b_1}, (L_m(v))^{a_2}_{b_2}\} = [r(u-v), L_n(u) \otimes L_m(v)]^{a_1 a_2}_{b_1 b_2} \delta_{nm} \tag{18}$$

где

$$r(u-v)^{a_1 a_2}_{b_1 b_2} = -\frac{1}{u-v} \delta^{a_1}_{b_2} \delta^{a_2}_{b_1} \tag{19}$$

введем вспомогательные величины: матрицу монодромии $T_N(u) = L_1(u)...L_{2N}(u) = \begin{pmatrix} A_N(u) & B_N(u) \\ C_N(u) & D_N(u) \end{pmatrix}$ и ее взвешенный след

$$t_N(u,x) = \frac{1}{\sqrt{x}} A_N(u) + \sqrt{x} D_N(u) = tr\ X T_N(u) \tag{20}$$

где $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 \\ 0 & \sqrt{x} \end{pmatrix}$. Заметим, что

$$[r(u-v), X \otimes X] = 0. \tag{21}$$

и т.к. выполнено (18), то

$$\{t_N(u,x), t_N(v,x)\} = 0 \tag{22}$$

ПОЧЕМУ??. Поскольку $t_N(v,x)$ -полином степени N по u:

$$t_N(u,x) = x^{-1/2}(u^N + t_1 u^{N-1} + ... + t_N) \tag{23}$$

, то коэффициенты $t_j, j = 1, ..., N$ находятся в инволюции $\{t_i, t_j\} = 0, i \neq j$. Отсюда следует интегрируемость по Луивиллю классической цепочки Тоды (т.к. H представим через t_j).

3.3 Интегрируемость квантовой цепочки Тоды

Условие (18) заменяется в квантовом случае на условие

$$R(u-v)(L_N(u)\otimes I)(I\otimes L_N(v)) = (I\otimes L_N(v))(L_N(u)\otimes I)R(u-v) \tag{24}$$

где

$$R(u-v) = (u-v)I - i\eta P \tag{25}$$

Почему именно так? Заметим, что $r(u-v)$ из (18) удовлетворяет тождеству

$$[r_{12}(u), r_{13}(u+v)] + [r_{12}(u), r_{23}(v)] + [r_{12}(u+v), r_{23}(v)] = 0 \tag{26}$$

Если положить теперь

$$\begin{array}{l} R_{ab}(u,\eta)|_{\eta=0} = I \\ \frac{\partial}{\partial\eta} R_{ab(u,\eta)}|_{\eta=0} = r_{ab}(u) \end{array} \tag{27}$$

То уравнение (16) будет полуклассическим приближением уравнения (26). Выражение (24) играет в квантовом случае ту же роль, что и (18) в классическом случае, а именно обеспечивает коммутативность

$$[t_N(u,x), t_N(v,x)] = 0 \tag{28}$$

и, как следствие, $\tau_N(u,x) = \ln t_N(u,x)$ - генератор локальных интегралов движения.
И ЧТО? ГДЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ??