数学建模与数学实验

计算机模拟

实验目的

学习计算机模拟的基本过程与方法。

实验内容

1、模拟的概念。

2、产生随机数的计算机命令。

3、计算机模拟实例。

4、实验作业。

计算机模拟实例

离散系统模拟实例：**排队问题**

连续系统模拟实例：**追逐问题**

用蒙特卡洛法解非线性规划问题

返回

模拟的概念

模拟就是利用物理的、数学的模型来类比、模仿现实系统及其演变过程，以寻求过程规律的一种方法。

模拟的基本思想是建立一个试验模型，这个模型包含所研究系统的主要特点．通过对这个实验模型的运行，获得所要研究系统的必要信息

模拟的方法

1、物理模拟：

对实际系统及其过程用功能相似的实物系统去模仿。例如，军事演习、船艇实验、沙盘作业等。

物理模拟通常花费较大、周期较长，且在物理模型上改变系统结构和系数都较困难。而且，许多系统无法进行物理模拟，如社会经济系统、生态系统等。

2、数学模拟

在一定的假设条件下，运用数学运算模拟系统的运行，称为数学模拟。现代的数学模拟都是在计算机上进行的，称为计算机模拟。

计算机模拟可以反复进行，改变系统的结构和系数都比较容易。

在实际问题中，面对一些带随机因素的复杂系统，用分析方法建模常常需要作许多简化假设，与面临的实际问题可能相差甚远，以致解答根本无法应用。这时，计算机模拟几乎成为唯一的选择。

蒙特卡洛（Monte Carlo）方法是一种应用随机数来进行计算机模拟的方法．此方法对研究的系统进行随机观察抽样，通过对样本值的观察统计，求得所研究系统的某些参数．

例1　在我方某前沿防守地域，敌人以一个炮排（含两门火炮）为单位对我方进行干扰和破坏．为躲避我方打击，敌方对其阵地进行了伪装并经常变换射击地点．

经过长期观察发现，我方指挥所对敌方目标的指示有50%是准确的，而我方火力单位，在指示正确时，有1/3的射击效果能毁伤敌人一门火炮，有1/6的射击效果能全部消灭敌人．

现在希望能用某种方式把我方将要对敌人实施的20次打击结果显现出来，确定有效射击的比率及毁伤敌方火炮的平均值。

分析：　这是一个概率问题，可以通过理论计算得到相应的概率和期望值. 但这样只能给出作战行动的最终静态结果，而显示不出作战行动的动态过程.

为了能显示我方20次射击的过程，现采用模拟的方式。

1. 问题分析

需要模拟出以下两件事：

[1] 观察所对目标的指示正确与否

模拟试验有两种结果，每一种结果出现的概率都是1/2.

因此，**可用投掷一枚硬币的方式予以确定**，当硬币出现正面时为指示正确，反之为不正确.

[2] 当指示正确时，我方火力单位的射击结果情况

模拟试验有三种结果：毁伤一门火炮的可能性为1/3(即2/6)，毁伤两门的可能性为1/6，没能毁伤敌火炮的可能性为1/2(即3/6).

这时**可用投掷骰子的方法来确定**：
如果出现的是 1 、 2 、 3 三个点：则认为没能击中敌人；
如果出现的是 4 、 5 点：则认为毁伤敌人一门火炮；
若出现的是 6 点：则认为毁伤敌人两门火炮.

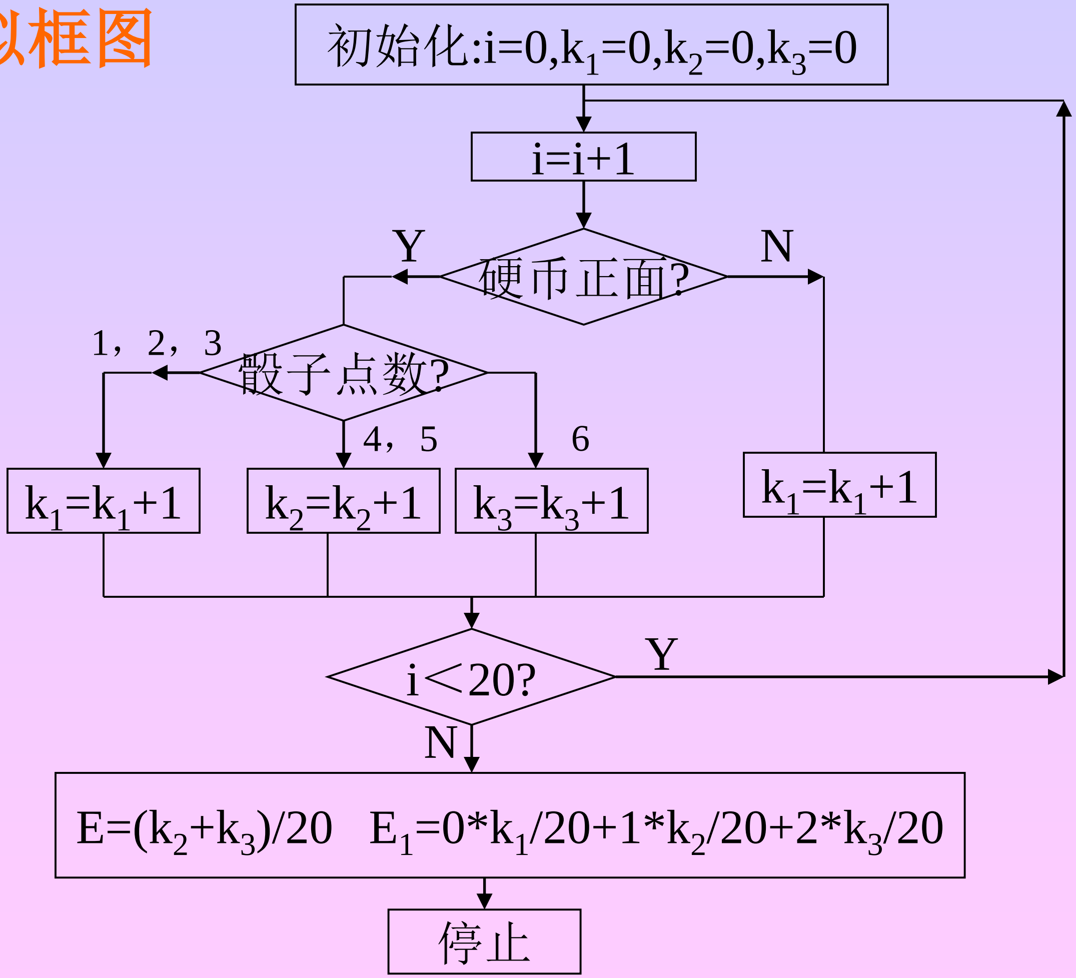
2. 符号假设

i：要模拟的打击次数；　　k_1：没击中敌人火炮的射击总数；

k_2：击中敌人一门火炮的射击总数；　　k_3：击中敌人两门火炮的射击总数.

E：有效射击比率；　　E_1：20次射击平均每次毁伤敌人的火炮数.

3. 模拟框图



4. 模拟结果

试验序号	投硬币结　果	指示正确	指　示不正确	掷骰子结　果	消灭敌人火炮数		
					０	１	２
1	正	∨		4		∨	
2	正	∨		4		∨	
3	反		∨		∨		
4	正	∨		1	∨		
5	正	∨		2	∨		
6	反		∨		∨		
7	正	∨		3	∨		
8	正	∨		6			∨
9	反		∨		∨		
1 0	反		∨		∨		

试验序号	投硬币结　果	指示正确	指　示不正确	掷骰子结　果	消灭敌人火炮数		
					0	1	2
1 1	正	∨		2	∨		
1 2	反		∨		∨		
1 3	正	∨		3	∨		
1 4	反		∨		∨		
1 5	正	∨		6			∨
1 6	正	∨		4		∨	
1 7	正	∨		2	∨		
1 8	正	∨		4		∨	
1 9	反		∨		∨		
2 0	正	∨		6			∨

从以上模拟结果可计算出：　E=7/20=0.35　$E_1 = 0\times\frac{13}{20} + 1\times\frac{4}{20} + 2\times\frac{3}{20}$ =0.5

5. 理论计算

设： $j=\begin{cases}0 & \text{观察所对目标指示不正 确}\\ 1 & \text{观察所对目标指示正确}\end{cases}$

A_0：射中敌方火炮的事件；A_1：射中敌方一门火炮的事件；

A_2：射中敌方两门火炮的事件.

则由全概率公式：

$E = P(A_0) = P(j=0)P(A_0 \mid j=0) + P(j=1)P(A_0 \mid j=1)$

$$= \frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=0.25$$

$P(A_1) = P(j=0)P(A_1 \mid j=0) + P(j=1)P(A_1 \mid j=1)$

$$= \frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$P(A_2) = P(j=0)P(A_2 \mid j=0) + P(j=1)P(A_2 \mid j=1)$

$$= \frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

$$E_1 = 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{12}\approx 0.33$$

6. 结果比较

理论计算和模拟结果的比较

分类 项目	无效射击	有效射击	平均值
模　　拟	0．65	0．35	0．5
理　　论	0．75	0．25	0．33

虽然模拟结果与理论计算不完全一致，但它却能更加真实地表达实际战斗动态过程．

用蒙特卡洛方法进行计算机模拟的步骤：

[1] 设计一个逻辑框图，即模拟模型．这个框图要正确反映系统各部分运行时的逻辑关系。

[2] 模拟随机现象．可通过具有各种概率分布的模拟随机数来模拟随机现象．

返回

产生模拟随机数的计算机命令

在Matlab软件中，可以直接产生满足各种分布的随机数，命令如下：

1．产生m n阶［a，b］均匀分布U（a，b）的随机数矩阵：

unifrnd（a,b,m, n）

产生一个［a，b］均匀分布的随机数：**unifrnd（a,b）**

当只知道一个随机变量取值在（a，b）内，但不知道(也没理由假设）它在何处取值的概率大，在何处取值的概率小，就只好用U（a，b）来模拟它。

2．产生m n阶［0，1］均匀分布的随机数矩阵：**rand（m, n）**

产生一个［0，1］均匀分布的随机数：**rand**

例 1的计算机模拟

3. 产生 m×n 阶均值为μ，方差为σ 的正态分布的随机数矩阵：

normrnd（μ , σ , m, n）

产生一个均值为μ，方差为σ 的正态分布的随机数：normrnd（μ , σ ）

• 当研究对象视为大量相互独立的随机变量之和，且其中每一种变量对总和的影响都很小时，可以认为该对象服从正态分布。

• 机械加工得到的零件尺寸的偏差、射击命中点与目标的偏差、各种测量误差、人的身高、体重等，都可近似看成服从正态分布。

To Matlab（rnd）

4．产生 m×n 阶期望值为μ 的指数分布的随机数矩阵：exprnd（μ ，m， n ）

•若连续型随机变量X的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

其中 $\lambda>0$为常数，则称X服从参数为 λ的**指数分布**。

•指数分布的期望值为 $\frac{1}{\lambda}$

•排队服务系统中顾客到达率为常数时的到达间隔、故障率为常数时零件的寿命都服从指数分布。

•指数分布在排队论、可靠性分析中有广泛应用。

•**注意：**Matlab中，产生参数为λ 的指数分布的命令为exprnd($\frac{1}{\lambda}$)

例 顾客到达某商店的间隔时间服从参数为0.1的指数分布

指数分布的均值为1/0.1=10。

指两个顾客到达商店的平均间隔时间是10个单位时间.即平均10个单位时间到达1个顾客. 顾客到达的间隔时间可用exprnd(10)模拟。

5．产生 m×n 阶参数为λ 的帕松分布的随机数矩阵：**poissrnd**（λ，m，n）

•设离散型随机变量X的所有可能取值为0,1,2,…,且取各个值的概率为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,\cdots,$$

其中λ>0为常数，则称X服从参数为λ的**帕松分布。**

•帕松分布的期望值为 λ

•帕松分布在排队系统、产品检验、天文、物理等领域有广泛应用。

指数分布与帕松分布的关系：

- 如相继两个事件出现的间隔时间服从参数为 λ 的指数分布，则在单位时间间隔内事件出现的次数服从参数为 λ 的泊松分布．即单位时间内该事件出现 k 次的概率为：

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,\cdots,$$

反之亦然。

例 (1)顾客到达某商店的间隔时间服从参数为0.1的指数分布 $\Leftrightarrow$

(2)该商店在单位时间内到达的顾客数服从参数为0.1的帕松分布

(1)指两个顾客到达商店的平均间隔时间是10个单位时间.即平均10个单位时间到达1个顾客.

(2)指一个单位时间内平均到达0.1个顾客

例2 敌坦克分队对我方阵地实施突袭，其到达规律服从泊松分布，平均每分钟到达 4 辆．（1）模拟敌坦克在 3 分钟内到达目标区的数量，以及在第 1 、 2 、 3 分钟内各到达几辆坦克．（2）模拟在3分钟内每辆敌坦克的到达时刻。

（1）用poissrnd(4)进行模拟。

To Matlab（poiss）

（2）坦克到达的间隔时间应服从参数为4的指数分布，用exprnd（1/4）模拟。

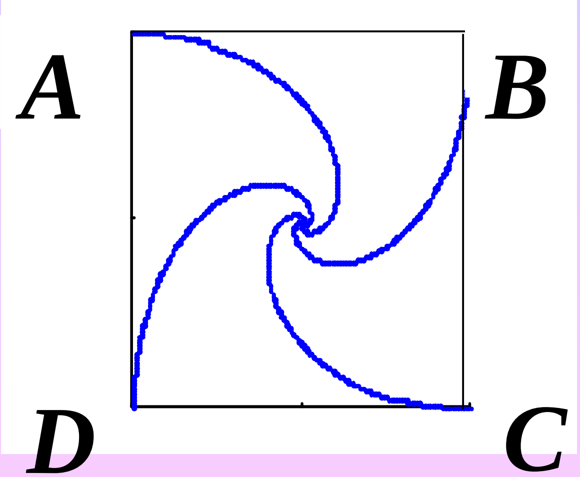
To Matlab（time）

返回

连续系统模拟实例: **追逐问题**

状态随时间连续变化的系统称为**连续系统**。对连续系统的计算机模拟只能是近似的，只要这种近似达到一定的精度，也就可以满足要求。

例 **追逐问题:** 如图,正方形ABCD的四个顶点各有一人.在某一时刻,四人同时出发以匀速v=1米/秒按顺时针方向追逐下一人,如果他们始终保持对准目标,则最终按螺旋状曲线于中心点O.试求出这种情况下每个人的行进轨迹.



求解过程:

1. 建立平面直角坐标系:$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, $D(x_4,y_4)$.

2. 取时间间隔为Δt, 计算每一点在各个时刻的坐标.

设某点在 t 时刻的坐标为:(x_i, y_i)

则在 $t+\Delta t$ 时刻的坐标为: $(x_i + v\Delta t\cos\alpha, y_i + v\Delta t\sin\alpha)$

其中 $\cos\alpha = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{d}$ $\sin\alpha = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{d}$

$$d = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

3. 取足够小的ε, $d < \varepsilon$ 时结束算法.

4. 对每一个点，连接它在各时刻的位置,即得所求运动轨迹.

To Matlab(chase) 返回

计算程序:

```
v=1;
dt=0.05;
x=[0 0 10 10];
y=[0 10 10 0];

for i=1:4
   plot(x(i),y(i),'.'),hold on
end

d=20;
while(d>0.1)
   x(5)=x(1);y(5)=y(1);
   for i=1:4
      d=sqrt((x(i+1)-x(i))^2+(y(i+1)-y(i))^2);
      x(i)=x(i)+v*dt*(x(i+1)-x(i))/d;
      y(i)=y(i)+v*dt*(y(i+1)-y(i))/d;
      plot(x(i),y(i),'.'),hold on
   end
 end
```

To Matlab(chase)

返回

离散系统模拟实例: 排队问题

排队论主要研究随机服务系统的工作过程。

在排队系统中，服务对象的到达时间和服务时间都是随机的。排队论通过对每个个别的随机服务现象的统计研究，找出反映这些随机现象平均特性的规律，从而为设计新的服务系统和改进现有服务系统的工作提供依据。

对于排队服务系统, 顾客常常注意排队的人是否太多, 等候的时间是否长, 而服务员则关心他空闲的时间是否太短. 于是人们常用排队的长度、等待的时间及服务利用率等指标来衡量系统的性能.

单服务员的排队模型：在某商店有一个售货员，顾客陆续来到，售货员逐个地接待顾客．当到来的顾客较多时，一部分顾客便须排队等待，被接待后的顾客便离开商店．设：

1．顾客到来间隔时间服从参数为0.1的指数分布．

2．对顾客的服务时间服从［4，１5］上的均匀分布．

3．排队按先到先服务规则，队长无限制．

假定一个工作日为8小时，时间以分钟为单位。

[1]模拟一个工作日内完成服务的个数及顾客平均等待时间t.

[2]模拟100个工作日，求出平均每日完成服务的个数及每日顾客的平均等待时间。

[1] 系统的假设:

（1） 顾客源是无穷的；

（2） 排队的长度没有限制；

（3） 到达系统的顾客按先后顺序依次进入服务， 即“先到先服务”。

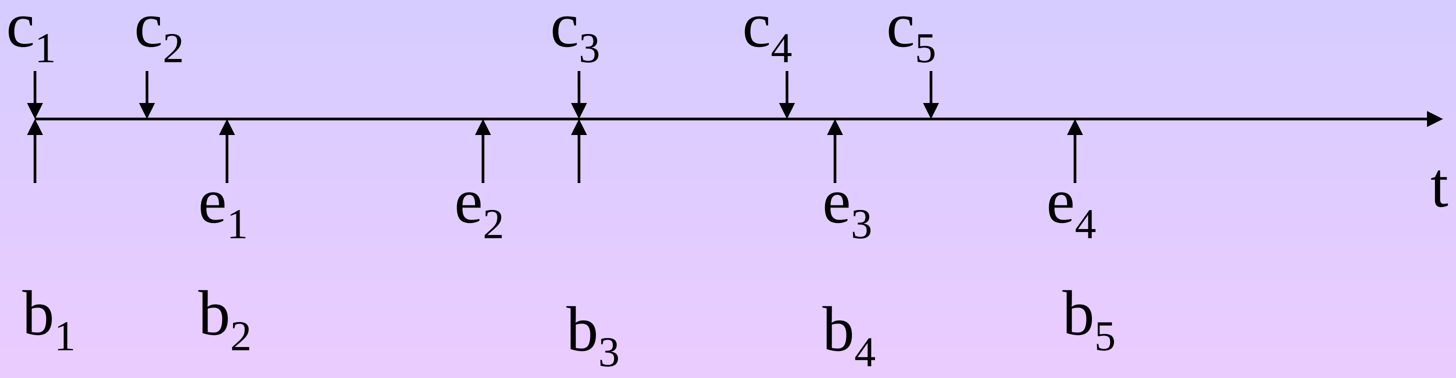
[2] 符号说明

w：总等待时间；c_i：第i个顾客的到达时刻；

b_i：第i个顾客开始服务时刻； e_i：第i个顾客服务结束时刻.

x_i：第i-1个顾客与第i个顾客之间到达的间隔时间

y_i：对第i个顾客的服务时间

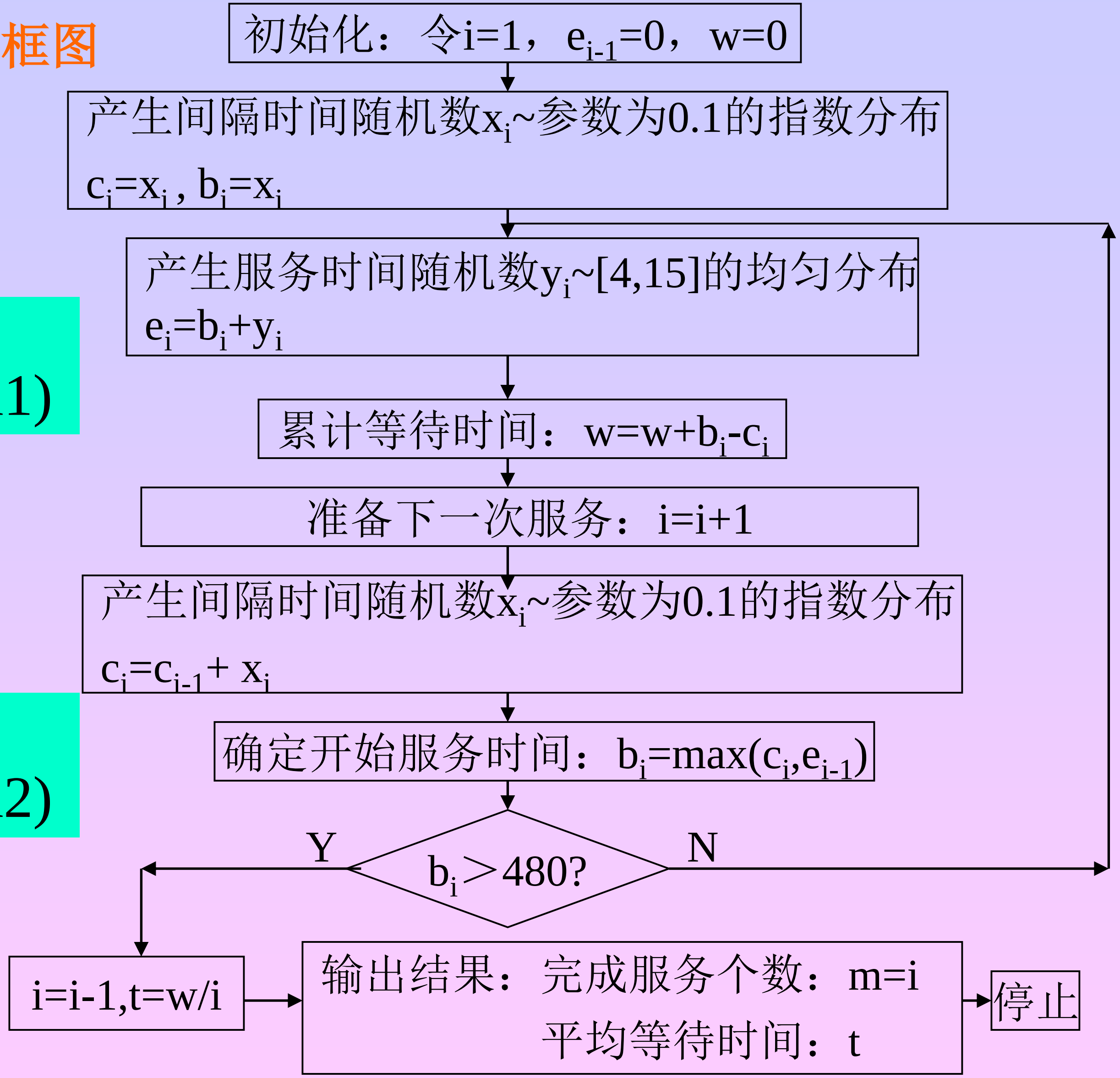


$$c_i=c_{i-1}+x_i$$

$$e_i=b_i+y_i$$

$$b_i=\max(c_i,e_{i-1})$$

[3] 模拟框图



[1]模拟一日
To Matlab(simu1)

[2]模拟100日
To Matlab(simu2)

返回

用蒙特卡洛法解非线性规划问题

对于**非线性规划问题**：

$$\min f(X) \quad X \in E^n$$

$$\text{s.t.} \quad g_i(X) \ge 0 \quad i=1,2,\cdots,m$$

$$a_j \le x_j \le b_j \quad j=1,2,\cdots,n$$

用蒙特卡洛法**求解的基本思想**是：在估计的区域

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_j \in [a_j, b_j], j=1,2,\cdots,n\}$$

内随机取若干实验点，然后从试验点中找出可行点，再从可行点中选择最小点.

基本假设　　试验点的第j个分量x_j服从$[a_j, b_j]$内的均匀分布.

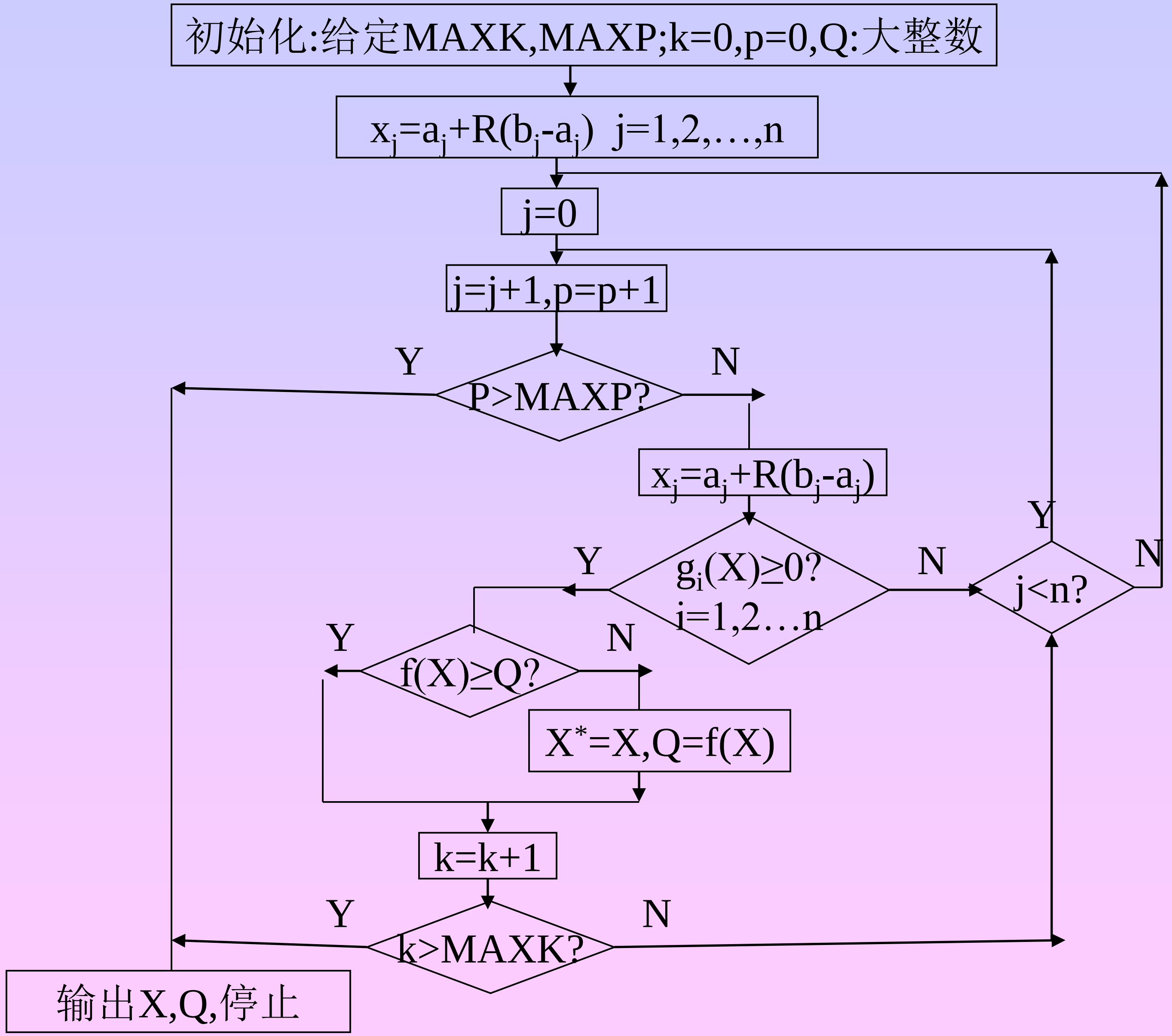
符号假设

P：试验点总数；　　MAXP：最大试验点总数；
K：可行点总数；　　MAXK：最大可行点数；
X*：迭代产生的最优点；
Q：迭代产生的最小值 f(X*)，其初始值为计算机所能表示的最大数.

求解过程

先产生一个随机数作为初始试验点,以后则将上一个试验点的第j个分量随机产生，其它分量不变而产生一新的试验点．这样，每产生一个新试验点只需一个新的随机数分量．当K>MAXK或P>MAXP时停止迭代.

框 图



初始化:给定MAXK,MAXP;k=0,p=0,Q:大整数
x_j=a_j+R(b_j-a_j) j=1,2,…,n
j=0
j=j+1,p=p+1
Y
P>MAXP?
N
x_j=a_j+R(b_j-a_j)
Y
g_i(X)≥0?
i=1,2…n
N
Y
j<n?
N
Y
f(X)≥Q?
N
X*=X,Q=f(X)
k=k+1
Y
k>MAXK?
N
输出X,Q,停止

例 max $z=-2x_1^2-x_2^2+x_1x_2+8x_1+3x_2$

s.t $3x_1+x_2=10$

$x_1>0$

$x_2>0$

在Matlab软件包中编程，共需三个M－文件:randlp.m, mylp.m, lpconst.m.主程序为randlp.m.

```
% mylp.m
function z=mylp(x)                                    %目标函数
z=2*x(1)^2+x(2)^2-x(1)*x(2)-8*x(1)-3*x(2);   %转化为求最小值问题

% lpconst.m
function lpc=lpconst(x)                              %约束条件
if 3*x(1)+x(2)-10<=0.5 & 3*x(1)+x(2)-10>=-0.5    %约束条件的误差为±0.5
   lpc=1;
else
   lpc=0;
end
```

```
% randlp.m
function [sol,r1,r2]=randlp(a,b,n)        %随机模拟解非线性规划
debug=1;
a=0;                                      %试验点下界
b=10;                                     %试验点上界
n=1000;                                   %试验点个数
r1=unifrnd(a,b,n,1);                      %n  1阶的[a,b]均匀分布随机数矩阵
r2=unifrnd(a,b,n,1);
sol=[r1(1) r2(1)];
z0=inf;
for i=1:n
   x1=r1(i);
   x2=r2(i);
   lpc=lpconst([x1 x2]);
   if lpc==1
      z=mylp([x1 x2]);
      if z<z0
         z0=z;
         sol=[x1 x2];
      end
   end
end
```

To Matlab(randlp)

返回

实验作业

1、编一个福利彩票电脑选号的程序。

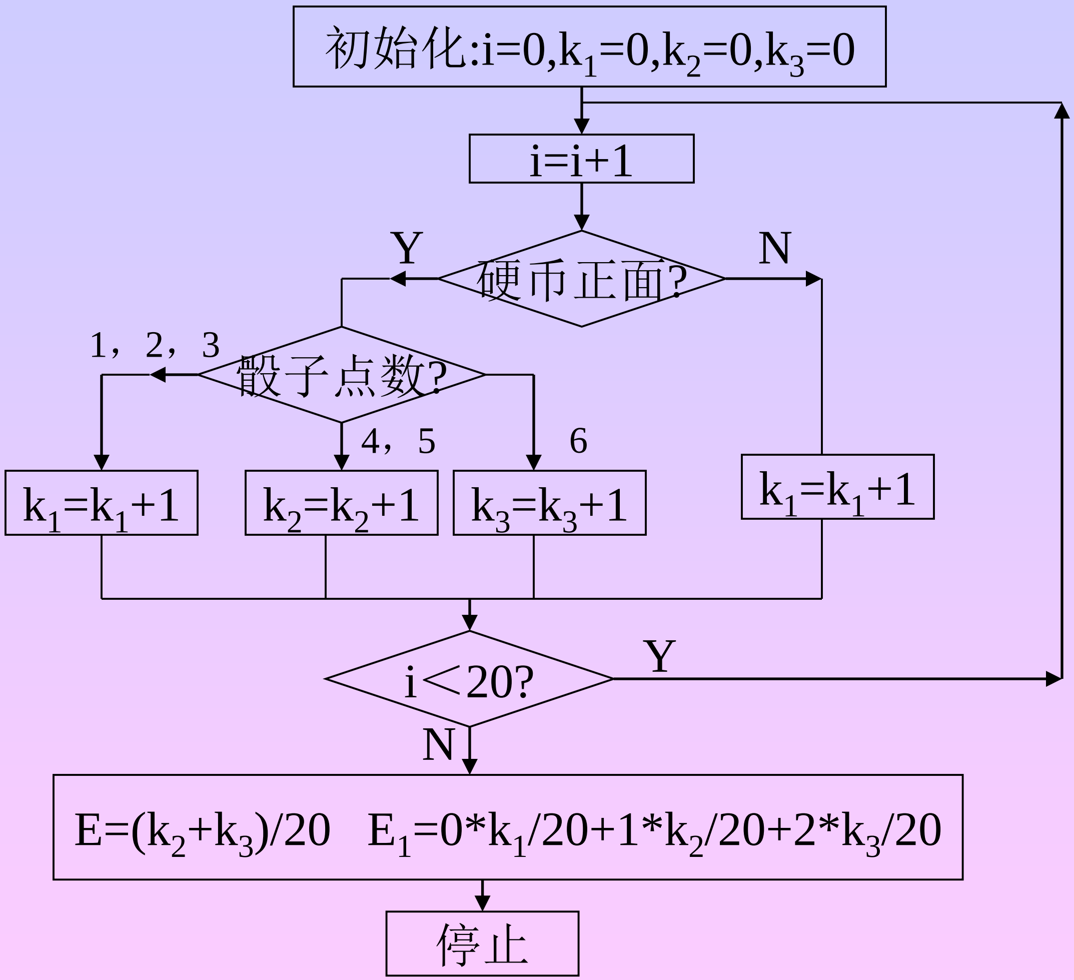
2. 某报童以每份 0.03 元的价格买进报纸, 以 0.05 元的价格出售. 根据长期统计, 报纸每天的销售量及百分率为

销售量	200	210	220	230	240	250
百分率	0.10	0.20	0.40	0.15	0.10	0.05

已知当天销售不出去的报纸，将以每份 0.02 元的价格退还报社. 试用模拟方法确定报童每天买进报纸数量, 使报童的平均总收入为最大?

4. 某设备上安装有四只型号规格完全相同的电子管，已知电子管寿命为1000--2000小时之间的均匀分布。当电子管损坏时有两种维修方案，一是每次更换损坏的那一只；二是当其中一只损坏时四只同时更换。已知更换时间为换一只时需1小时，4只同时换为2小时。更换时机器因停止运转每小时的损失为20元，又每只电子管价格10元，试用模拟方法决定哪一个方案经济合理？

5. **导弹追踪问题：**设位于坐标原点的甲舰向位于x轴上点A(1, 0)处的乙舰发射导弹，导弹头始终对准乙舰.如果乙舰以最大的速度(是常数)沿平行于y轴的直线行驶，导弹的速度是5，模拟导弹运行的轨迹.又乙舰行驶多远时，导弹将它击中？



初始化:i=0,k1=0,k2=0,k3=0
i=i+1
硬币正面?
Y
N
骰子点数?
1，2，3
4，5
6
k1=k1+1
k2=k2+1
k3=k3+1
k1=k1+1
i＜20?
Y
N
E=(k2+k3)/20   E1=0*k1/20+1*k2/20+2*k3/20
停止

投掷硬币的计算机模拟

1、产生服从U（0，1）的随机数R_1

2、将区间[0，1]两等分：

若 $0 \le R_1 \le 0.5$，则对应硬币正面

若 $0.5 < R_1 \le 1$，则对应硬币反面

掷骰子的计算机模拟

1、产生服从U（0，1）的随机数R_2

2、将区间[0，1]六等份：

若 $0 \le R_2 < \frac{1}{6}$，则对应骰子点数为1

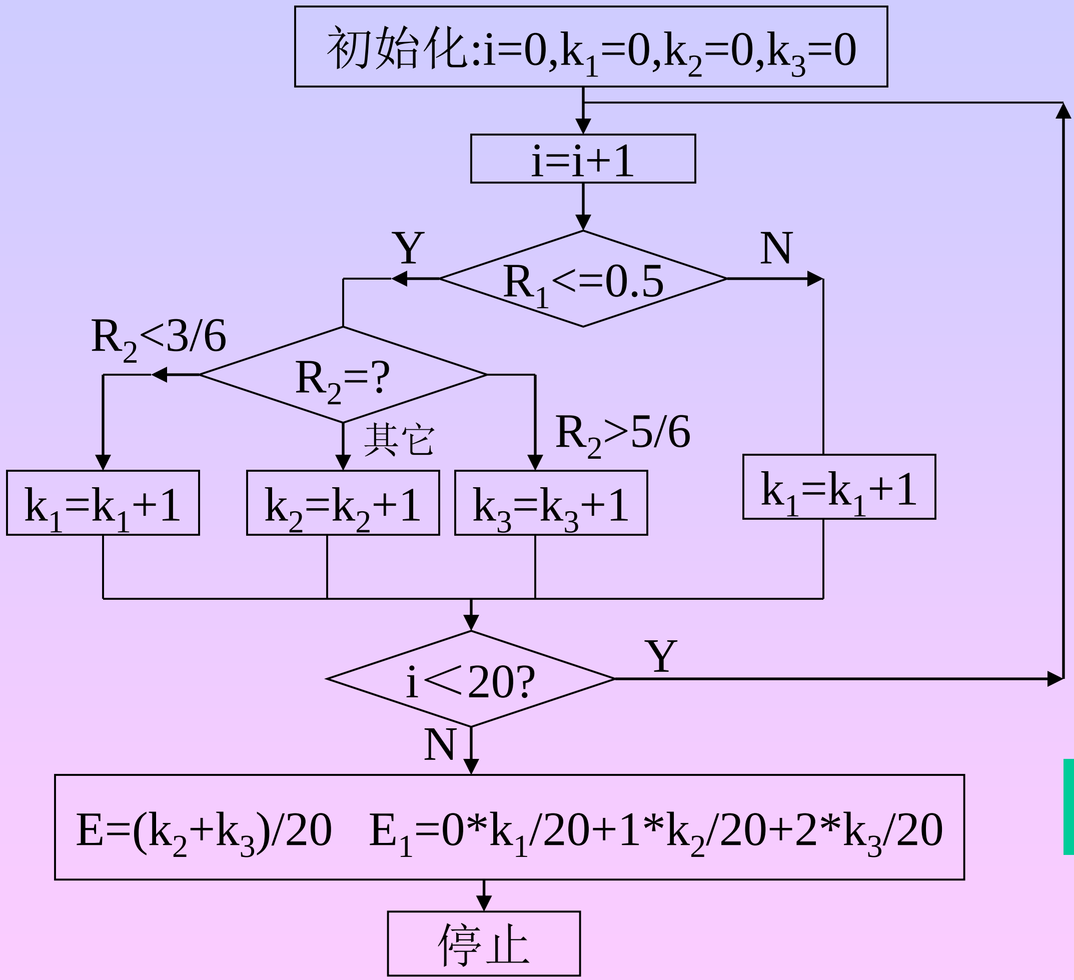
若$\frac{1}{6} \le R_2 < \frac{2}{6}$，则对应骰子点数为2

若 $\frac{2}{6} \le R_2 < \frac{3}{6}$，则对应骰子点数为3

若$\frac{3}{6} \le R_2 < \frac{4}{6}$，则对应骰子点数为4

若 $\frac{4}{6} \le R_2 < \frac{5}{6}$，则对应骰子点数为5

若 $\frac{5}{6} \le R_2 \le 1$，则对应骰子点数为6



To Matlab(liti1)