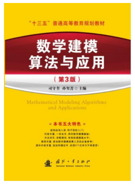
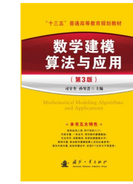



# 数学建模算法与应用

## 第4章

## 4.4最小生成树

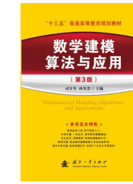
# 数学建模算法与应用




## 目录 CONTENTS

树（tree）是图论中非常重要的一类图，它非常类似于自然界中的树，结构简单、应用广泛，最小生成树问题则是其中的经典问题之一。在实际应用中，许多问题的图论模型都是最小生成树，如通信网络建设、有线电缆铺设、加工设备分组等。






# 01 基本概念和算法

# 1.数值矩阵的建立

**定义 4.12** 连通的无圈图称为树。

例如，图 6.1 给出的$G_1$是树，但$G_2$和$G_3$则不是树。

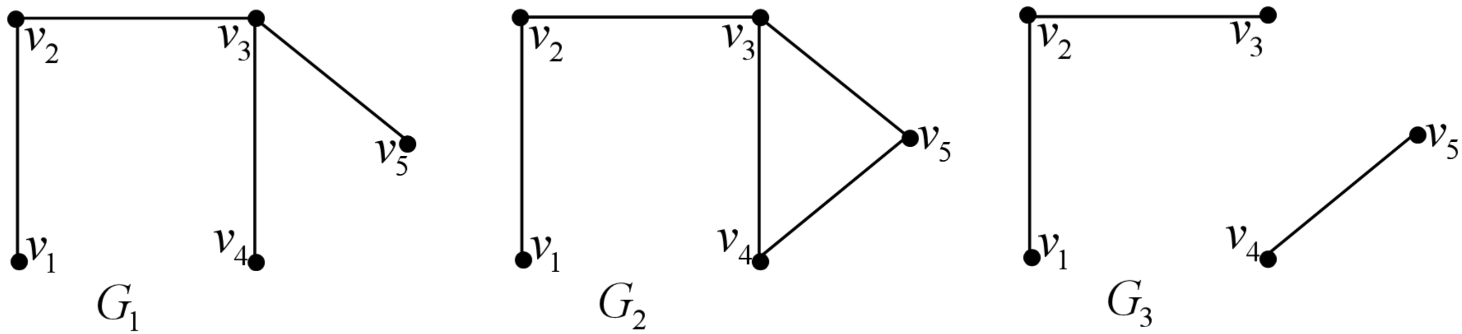



图 4.10 树与非树

**定理 4.2** 设$G$是具有$n$个顶点$m$条边的图，则以下命题等价。

（1）图$G$是树；

（2）图$G$中任意两个不同顶点之间存在唯一的路。

（3）图$G$连通，删除任一条边均不连通；

（4）图$G$连通，且$n=m+1$；

（5）图$G$无圈，添加任一条边可得唯一的圈；

（6）图$G$无圈，且$n=m+1$。

**定义 4.13** 若图$G$的生成子图$H$是树，则称$H$为$G$的生成树或支撑树。

一个图的生成树通常不唯一

**定理 4.3** 连通图的生成树一定存在。 **破圈法**

证明 给定连通图$G$，若$G$无圈，则$G$本身就是自己的生成树。若$G$有圈，则任取$G$中一个圈$C$，记删除$C$中一条边后所得之图为$G'$。显然$G'$中圈$C$已经不存在，但$G'$仍然连通。若$G'$中还有圈，再重复以上过程，直至得到一个无圈的连通图$H$。易知$H$是$G$的生成树

**定义 4.14** 在赋权图$G$中，边权之和最小的生成树称为$G$的最小生成树。

$n$个顶点的完全图，其不同生成树的个数为$n^{n-2}$。

**不能枚举**

对于赋权连通图$G=(V,E,W)$，其中$V$为顶点集合，$E$为边的集合，$W$为邻接矩阵，这里顶点集合$V$中有$n$个顶点，下面构造它的最小生成树——所有生成树中所有边上权重和最小的生成树。

## 2.Kruskal算法

**Kruskal 算法思想**——每次将一条权最小的边加入子图$T$中，并保证不形成圈。

加边避圈——**避圈法**

**Kruskal 算法如下**：

（1）选$e_1 \in E$，使得$e_1$是权值最小的边。

（2）若$e_1, e_2, \cdots, e_i$已选好，则从$E - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$中选取$e_{i+1}$，使得

①$\{e_1, e_2, \cdots, e_i, e_{i+1}\}$中无圈，且

②$e_{i+1}$是$E - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$中权值最小的边。

（3）直到选得$e_{n-1}$为止。

# 3.Prim算法

集合$P$存放$G$的最小生成树中的顶点

集合$Q$存放$G$的最小生成树中的边

令集合$P$的初值为$P=\{v_1\}$(假设构造最小生成树时，从顶点$v_1$出发)，集合$Q$的初值为$Q=\Phi$（空集)。

**Prim 算法的思想**——从所有$p\in P$，$v\in V-P$的边中，选取具有最小权值的边$pv$，将顶点$v$加入集合$P$中，将边$pv$加入集合$Q$中，如此不断重复，直到$P=V$时，最小生成树构造完毕，这时集合$Q$中包含了最小生成树的所有边。

**Prim 算法如下：**

（1） $P=\{v_1\}$， $Q=\Phi$；

（2） while $P \sim= V$

找最小边 $pv$， 其中 $p \in P, v \in V-P$；

$P = P+\{v\}$；

$Q = Q+\{pv\}$；

end

# 4.最小生成树举例

**例 4.12** 一个乡有 9 个自然村，其间道路及各道路长度如图 4.11 所示，各边上的数字表示距离，问架设通信线时，如何拉线才能使用线最短。

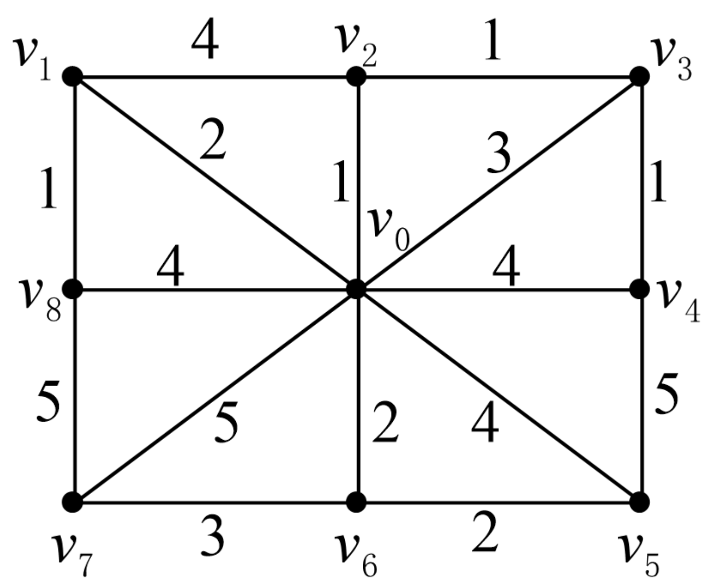



**图 4.11 道路示意图**

解　这就是一个最小生成树问题，用 **Kruskal** 算法求解。先将边按大小顺序由小至大排列：

$(v_0,v_2):1$，$(v_2,v_3):1$，$(v_3,v_4):1$，$(v_1,v_8):1$，

$(v_0,v_1):2$，$(v_0,v_6):2$，$(v_5,v_6):2$，

$(v_0,v_3):3$，$(v_6,v_7):3$，

$(v_0,v_4):4$，$(v_0,v_5):4$，$(v_0,v_8):4$，$(v_1,v_2):4$，

$(v_0,v_7):5$，$(v_7,v_8):5$，$(v_4,v_5):5$.

然后按照边的排列顺序，取定

$e_1=(v_0,v_2)$，$e_2=(v_2,v_3)$，$e_3=(v_3,v_4)$，$e_4=(v_1,v_8)$，

$e_5=(v_0,v_1)$，$e_6=(v_0,v_6)$，$e_7=(v_5,v_6)$.

取边原则——先小后大，避圈

由于下一个未选边中的最小权边$(v_0,v_3)$与已选边$e_1,e_2$构成圈，所以排除，选$e_8=(v_6,v_7)$，得到图 4.12，就是图$G$的一颗最小生成树，它的权是13。

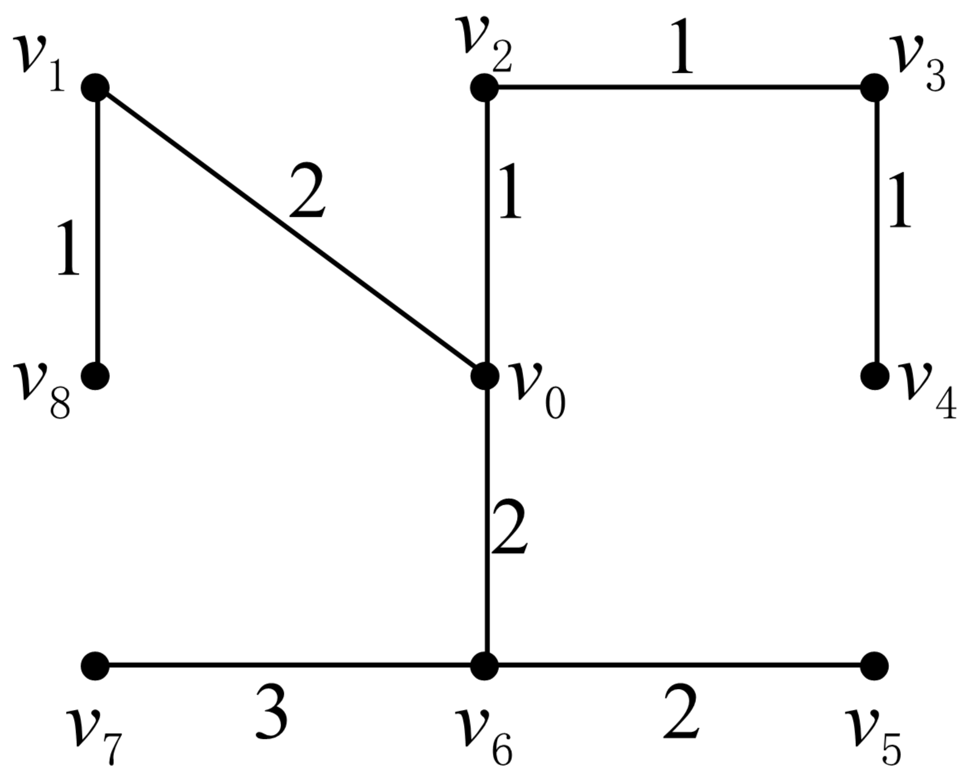



图 4.12　生成的最小生成树

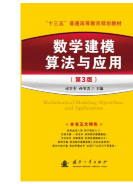
基于邻接矩阵构造图的 MATLAB 程序如下：

```
clc, clear, close all, a=zeros(9);
a(1,[2:9])=[2 1 3 4 4 2 5 4];
a(2,[3 9])=[4 1]; a(3,4)=1; a(4,5)=1;
a(5,6)=5; a(6,7)=2; a(7,8)=3; a(8,9)=5;
s=cellstr(strcat('v',int2str([0:8]')));
G=graph(a,s,'upper');
p=plot(G,'EdgeLabel',G.Edges.Weight);
T=minspantree(G,'Method','sparse') %Kruskal算法
L=sum(T.Edges.Weight), highlight(p,T)
```

基于边的细胞数组构造图的 MATLAB 程序如下

```
clc, clear, close all
nod =cellstr(strcat('v',int2str([0:8]')));
G = graph; G = addnode(G,nod);
ed ={ 'v0','v1',2;'v0','v2',1;'v0','v3',3;'v0','v4',4
   'v0','v5',4;'v0','v6',2;'v0','v7',5;'v0','v8',4
   'v1','v2',4;'v1','v8',1;'v2','v3',1;'v3','v4',1
   'v4','v5',5;'v5','v6',2;'v6','v7',3;'v7','v8',5};
G = addedge(G,ed(:,1),ed(:,2),cell2mat(ed(:,3)));
p=plot(G,'EdgeLabel',G.Edges.Weight);
T=minspantree(G), L=sum(T.Edges.Weight)
highlight(p,T)
```






# 02 最小生成树的数学规划模型

顶点$v_1$表示树根，总共有$n$个顶点。顶点$v_i$到顶点$v_j$边的权重用$w_{ij}$表示，当两个顶点之间没有边时，对应的权重用$M$（充分大的正实数）表示，这里$w_{ii}=M, i=1,2,\cdots,n$。

引入0－1变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当从}v_i\text{到}v_j\text{的边在树中},\\ 0, & \text{当从}v_i\text{到}v_j\text{的边不在树中}.\end{cases}$$

**目标函数**是使得$z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_{ij}$最小化。

**约束条件**分成如下 4 类：

（1）根$v_1$至少有一条边连接到其他的顶点，

$$\sum_{j=1}^{n}x_{1j}\ge 1.$$

（2）除根外，每个顶点只能有一条边进入，

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\quad j=2,\cdots,n.$$

以上两约束条件是必要的但非充分的

**可保证边数为顶点个数−1，但不能保证无圈**

需要增加一组变量$u_j(j=1,2,\cdots,n)$，再附加约束条件：

（3）限制$u_j$的取值范围为：

$$u_1=0,\quad 1\le u_i\le n-1,\quad i=2,3,\cdots,n.$$

（4）各条边不构成子圈，

$$u_i-u_j+nx_{ij}\le n-1,\quad i=1,\cdots,n, j=2,\cdots,n.$$

最小生成树问题的0−1整数规划模型如下：

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_{ij}, \tag{4.3}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{1j} \ge 1, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j=2,\cdots,n, \\ u_1=0, \quad 1\le u_i \le n-1, \quad i=2,3,\cdots,n, \\ u_i-u_j+nx_{ij}\le n-1, \quad i=1,\cdots,n, j=2,\cdots,n, \\ x_{ij}=0\text{或}1, \quad i,j=1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{4.4}$$

**例 4.13** 利用数学规划模型(4.3)-(4.4)求解例 4.12。

一个乡有 9 个自然村，其间道路及各道路长度如图 4.11 所示，各边上的数字表示距离，问架设通信线时，如何拉线才能使用线最短。

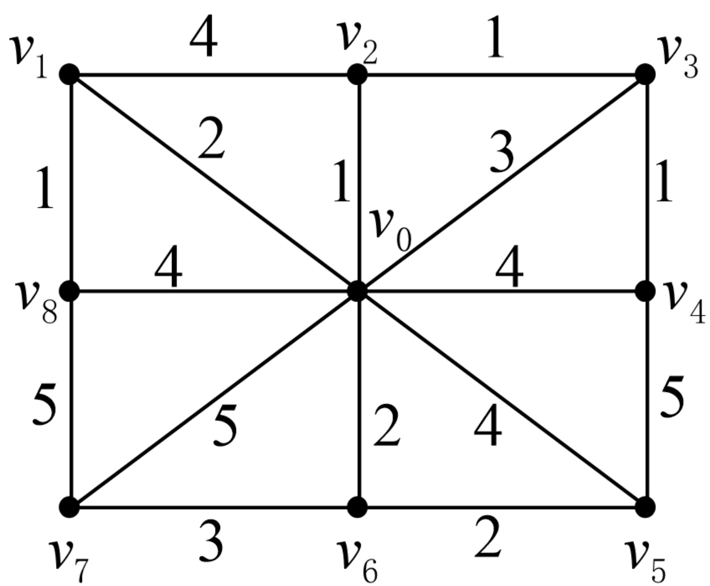



图 4.11 道路示意图

```
clc, clear, close all, n = 9;
nod =cellstr(strcat('v',int2str([0:n-1]')));
G = graph(); G = addnode(G,nod);
ed ={ 'v0','v1',2;'v0','v2',1;'v0','v3',3;'v0','v4',4
   'v0','v5',4;'v0','v6',2;'v0','v7',5;'v0','v8',4
   'v1','v2',4;'v1','v8',1;'v2','v3',1;'v3','v4',1
   'v4','v5',5;'v5','v6',2;'v6','v7',3;'v7','v8',5};
G = addedge(G,ed(:,1),ed(:,2),cell2mat(ed(:,3)));
w = full(adjacency(G,'weighted'));
w(w==0) = 1000000; %这里1000000表示充分大的正实数
prob = optimproblem;
x = optimvar('x',n,n,'Type','integer','LowerBound',0,'UpperBound',1);
u = optimvar('u',n,'LowerBound',0);
prob.Objective = sum(sum(w.*x));
prob.Constraints.con1 = [sum(x(:,[2:end]))'==1; u(1)==0];
con2 = [1<=sum(x(1,:)); 1<=u(2:end); u(2:end)<=n-1];
for i = 1:n
   for j = 2:n
      con2 = [con2; u(i)-u(j)+n*x(i,j)<=n-1];
   end
end
prob.Constraints.con2 = con2;
[sol,fval,flag,out] = solve(prob)
[i,j]=find(sol.x);
ind = [i'; j'] %输出树的顶点编号
```