数学建模与数学实验

最短路问题

实验目的

1、了解最短路的算法及其应用

2、会用Matlab软件求最短路

实验内容

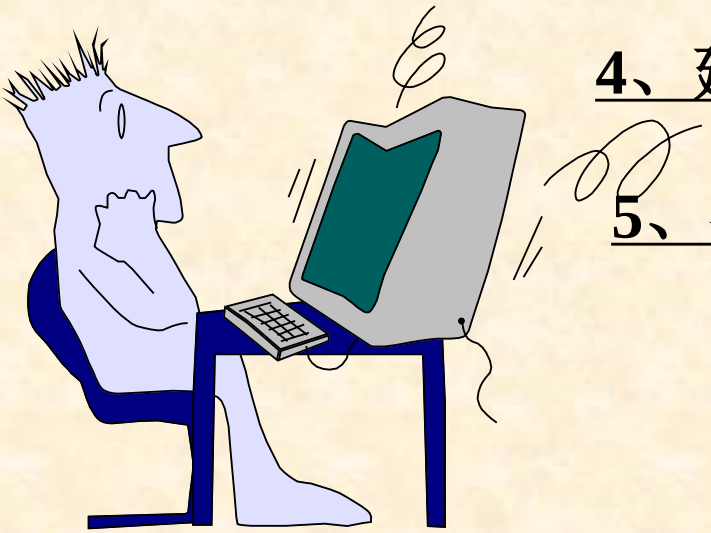
1、图论的基本概念

2、最短路问题及其算法

3、最短路的应用

4、建模案例：最优截断切割问题

5、实验作业



图论的基本概念

一、图的概念

1、图的定义

2、顶点的次数

3、子图

二、图的矩阵表示

1、关联矩阵

2、邻接矩阵

返回

图的定义

定义　有序三元组G=(V,E, Ψ)称为一个**图**.

[1] $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 是有穷非空集，称为**顶点集**，其中的元素叫图 G 的**顶点**.

[2] E 称为**边集**，其中的元素叫图 G 的**边**.

[3] Ψ 是从边集 E 到顶点集 V 中的有序或无序的元素偶对的集合的映射，称为**关联函数**.

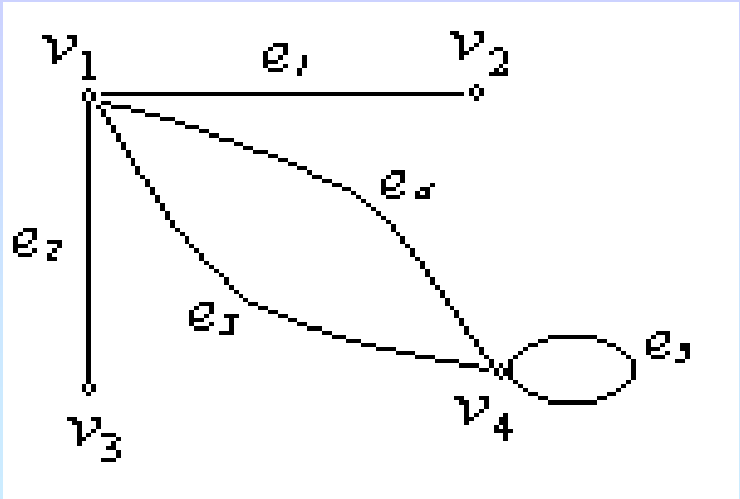
例1　设 G=(V,E, Ψ)，其中

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

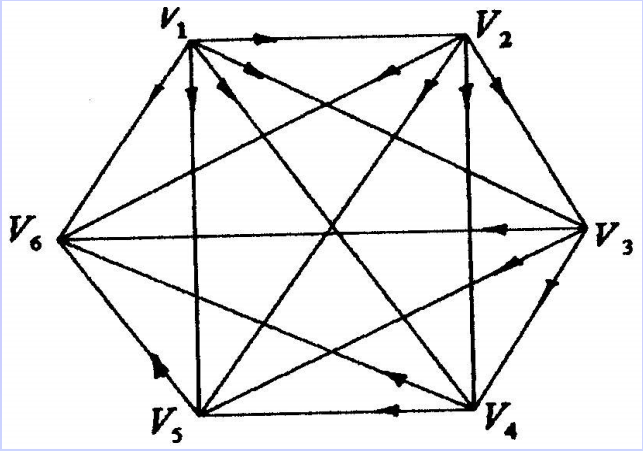
$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$,

$\Psi(e_1)=v_1v_2, \Psi(e_2)=v_1v_3, \Psi(e_3)=v_1v_4, \Psi(e_4)=v_1v_4, \Psi(e_5)=v_3v_3$.

G 的图解如图.

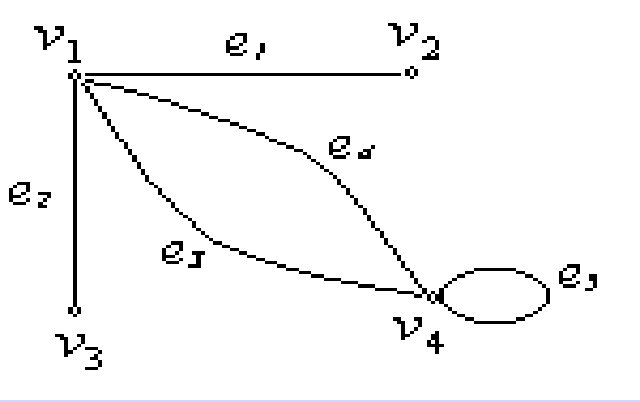


定义 在图 G 中，与 V 中的有序偶(v_i, v_j)对应的边 e，称为图的**有向边**（或弧），而与 V 中顶点的无序偶 v_iv_j 相对应的边 e，称为图的**无向边.**每一条边都是无向边的图，叫**无向图**；每一条边都是有向边的图，称为**有向图**；既有无向边又有有向边的图称为**混合图.**



定义 若将图 G 的每一条边 e 都对应一个实数 w(e)，称 w(e)为边的**权**，并称图 G 为**赋权图.**

规定用记号ν 和ε 分别表示图的顶点数和边数.



常用术语：

（１）端点相同的边称为**环**.

（２）若一对顶点之间有两条以上的边联结，则这些边称为**重边**.

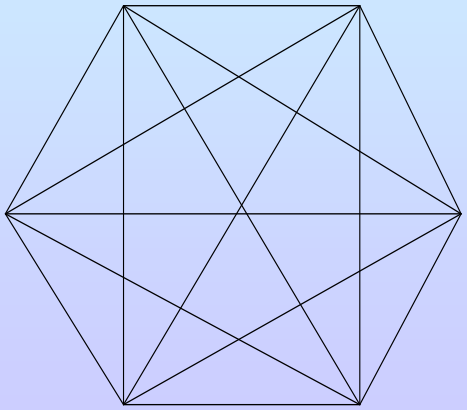
（３）有边联结的两个顶点称为**相邻的顶点**，有一个公共端点的边称为**相邻的边**.

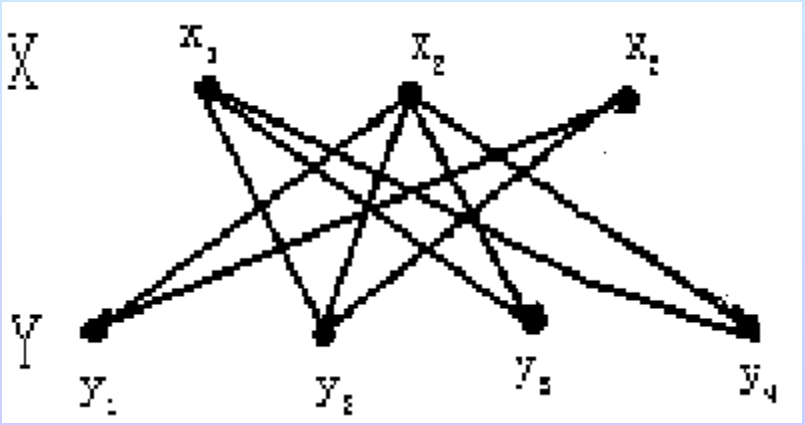
（４）边和它的端点称为互相**关联**的.

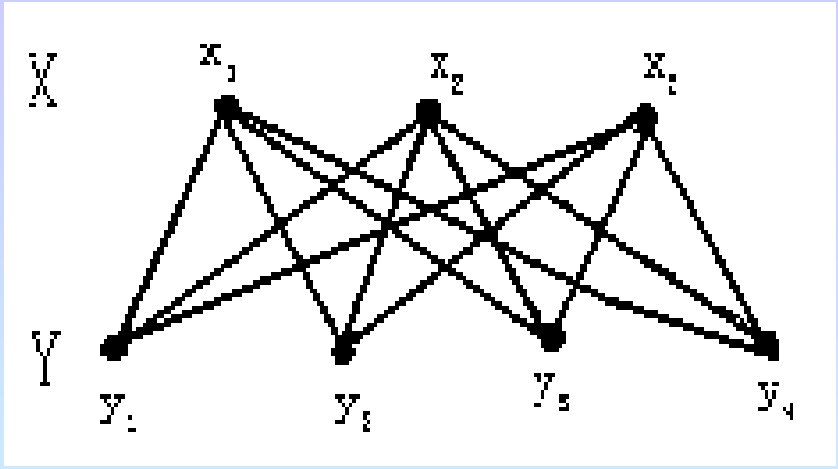
（５）既没有环也没有平行边的图，称为**简单图**.

（６）任意两顶点都相邻的简单图，称为**完备图**，记为 K_n，其中 n 为顶点的数目.

(7)若 $V=X \cup Y$，$X \cap Y=\Phi$ ，X 中任两顶点不相邻，Y 中任两顶点不相邻，称 G 为**二元图**；若 X 中每一顶点皆与 Y 中一切顶点相邻，称为**完备二元图**，记为 $K_{m,n}$，其中 m,n 分别为 X 与 Y 的顶点数目.





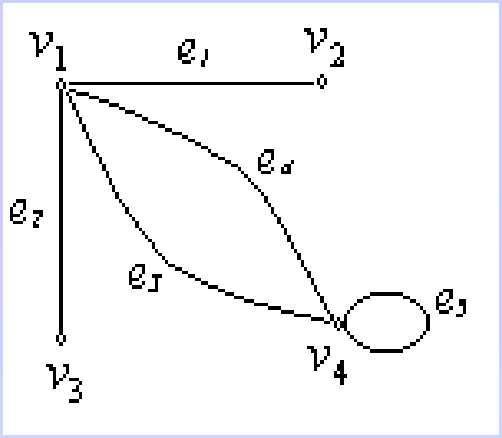


返回

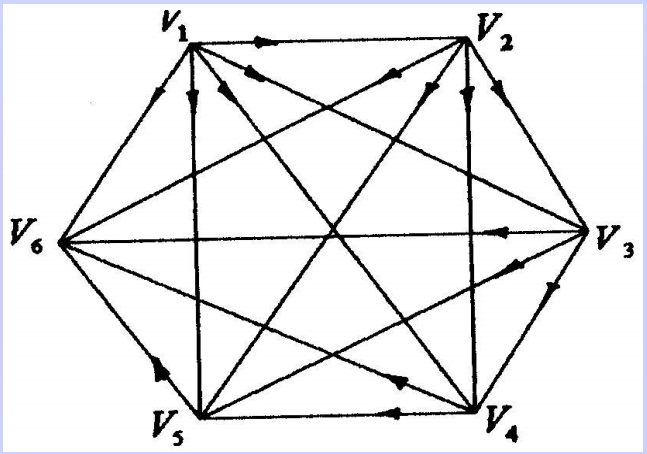
顶点的次数

定义 （1）在无向图中，与顶点 v 关联的边的数目（环算两次）称为 v 的**次数**，记为 d(v).

（2）在有向图中，从顶点 v 引出的边的数目称为 v 的**出度**，记为 $d^+(v)$，从顶点 v 引入的边的数目称为的**入度**，记为 $d^-(v)$，$d(v)=d^+(v)+d^-(v)$称为 v 的次数.



$$d(v_4)=4$$



$$d^+(v_4)=2$$

$$d^-(v_4)=3$$

$$d(v_4)=5$$

定理 1 $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\varepsilon(G)$

推论 1 任何图中奇次顶点的总数必为偶数.

例 在一次聚会中，认识奇数个人的人数一定是偶数。

返回

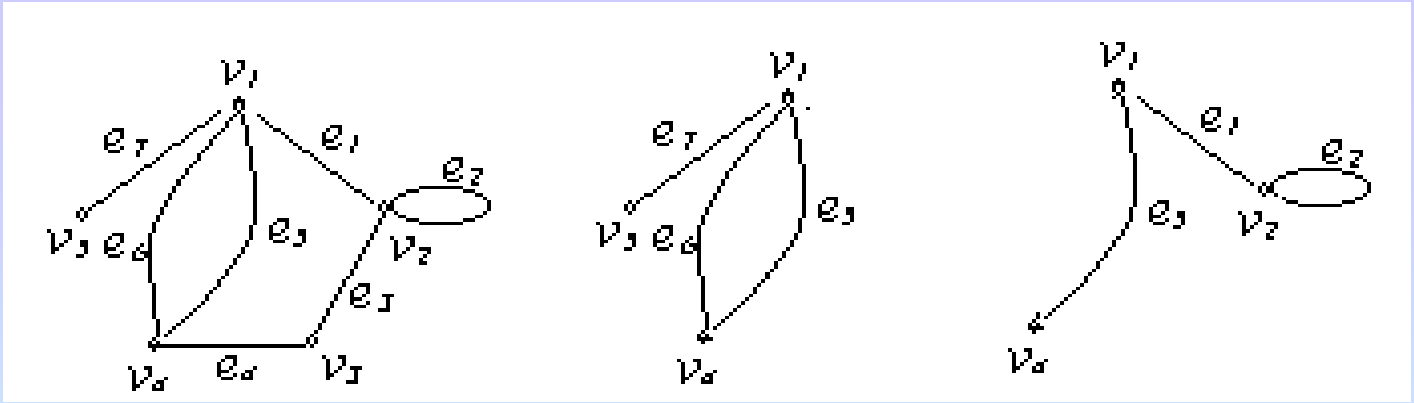
子图

定义 设图 $G=(V,E,\Psi)$, $G_1=(V_1,E_1,\Psi_1)$

(1) 若 $V_1\subseteq V$，$E_1\subseteq E$,且当 $e\in E_1$ 时，$\Psi_1(e)=\Psi(e)$,则称 G_1 是 G 的**子图**. 特别的，若 $V_1=V$，则 G_1 称为 G 的**生成子图**.

(2) 设 $V_1\subseteq V$，且 $V_1\neq\Phi$，以 V_1 为顶点集、两个端点都在 V_1 中的图 G 的边为边集的图 G 的子图，称为 G 的**由 V_1 导出的子图**，记为 $G[V_1]$.

(3)设 $E_1\subseteq E$,且 $E_1\neq\Phi$,以 E_1 为边集,E_1 的端点集为顶点集的图 G 的子图,称为 G 的**由 E_1 导出的子图**,记为 $G[E_1]$.



G　　$G[\{v_1,v_4,v_5\}]$　　$G[\{e_1,e_2,e_3\}]$

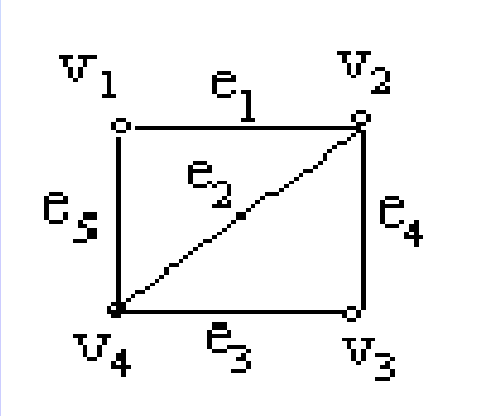
返回

关联矩阵

对无向图G，其关联矩阵M＝$(m_{ij})_{v\times\varepsilon}$，其中：

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若}v_i\text{与}e_j\text{相关联}\\ 0 & \text{若}v_i\text{与}e_j\text{不关联}\end{cases}$$

注：假设图为简单图



$$M=\begin{array}{c}\begin{matrix}e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\1&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&1&1&0&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{matrix}$$

对有向图G，其关联矩阵M＝$(m_{ij})_{v\times\varepsilon}$，其中：

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若}v_i\text{是}e_j\text{的起点}\\ -1 & \text{若}v_i\text{是}e_j\text{的终点}\\ 0 & \text{若}v_i\text{与}e_j\text{不关联}\end{cases}$$

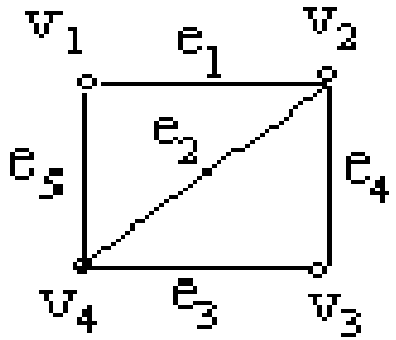
返回

邻接矩阵

对无向图G，其邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{v\times v}$，其中：

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若}v_i\text{与}v_j\text{相邻}\\ 0 & \text{若}v_i\text{与}v_j\text{不相邻}\end{cases}$$

注：假设图为简单图



$$A=\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix}$$

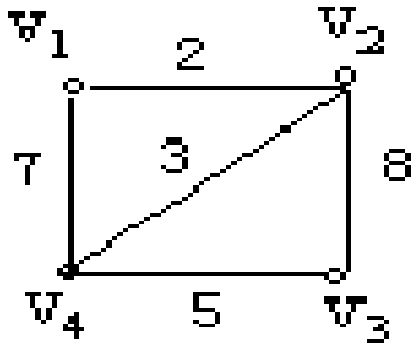
对有向图G＝（V， E），其邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{v\times v}$，其中：

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若}(v_i,\ v_j)\in E\\ 0 & \text{若}(v_i,\ v_j)\notin E\end{cases}$$

对有向赋权图G，其邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{v\times v}$，其中：

$$a_{ij}=\begin{cases} w_{ij} & \text{若}(v_i,v_j)\in E,\text{且}w_{ij}\text{为其权} \\ 0 & \text{若}i=j \\ \infty & \text{若}(v_i,v_j)\notin E \end{cases}$$

无向赋权图的邻接矩阵可类似定义.



$$A=\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & 7 \\ 2 & 0 & 8 & 3 \\ \infty & 8 & 0 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix}$$

返回

最短路问题及其算法

一、基本概念

二、固定起点的最短路

三、每对顶点之间的最短路

返回

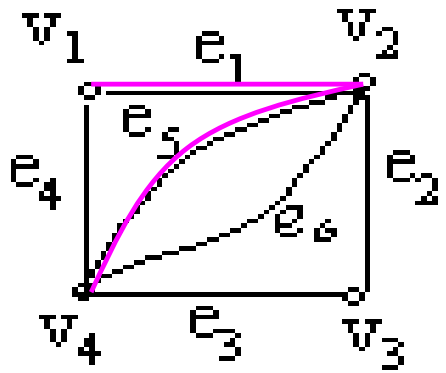
基 本 概 念

定义 1　在无向图 G=(V,E,Ψ)中：

（1）顶点与边相互交错且 $\Psi(e_i)=v_{i-1}v_i$ (i=1,2,…k)的有限非空序列 $w=(v_0e_1v_1e_2\cdots v_{k-1}e_kv_k)$ 称为一条从 v_0 到 v_k 的**通路**，记为$W_{v_0v_k}$

（2）边不重复但顶点可重复的通路称为**道路**，记为$T_{v_0v_k}$

（3）边与顶点均不重复的通路称为**路径**，记为$P_{v_0v_k}$



通路 $W_{v_1v_4}=v_1e_4v_4e_5v_2e_1v_1e_4v_4$

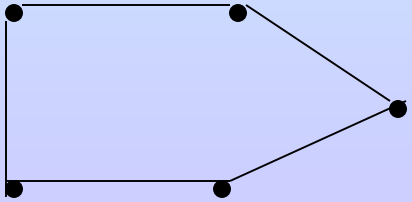
道路 $T_{v_1v_4}=v_1e_1v_2e_5v_4e_6v_2e_2v_3e_3v_4$

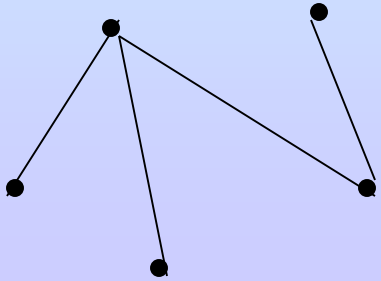
路径 $P_{v_1v_4}=v_1e_1v_2e_5v_4$

定义 2　（1）任意两点均有路径的图称为**连通图**.

（2）起点与终点重合的路径称为**圈**.

（3）连通而无圈的图称为**树**.





定义 3　（1）设 P(u,v)是赋权图 G 中从 u 到 v 的路径，

则称 $w(P)=\sum_{e\in E(P)} w(e)$ 为路径 P 的**权**.

(2)　在赋权图 G 中，从顶点 u 到顶点 v 的具有最小权的路

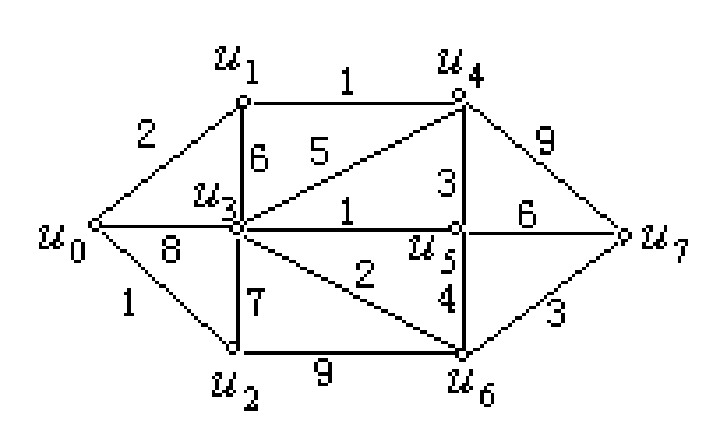
$P^*(u,v)$，称为 u 到 v 的**最短路**.

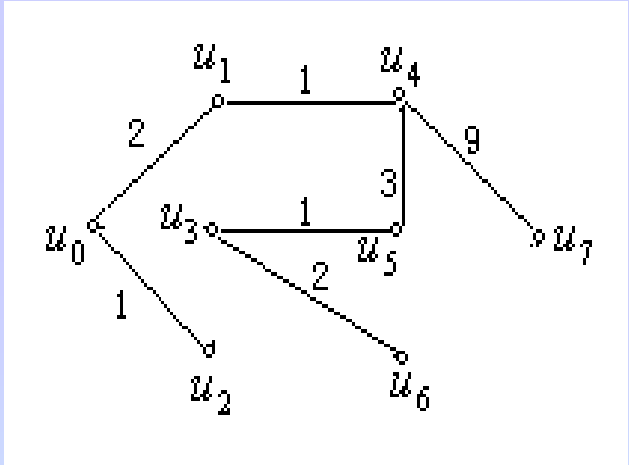
返回

固 定 起 点 的 最 短 路

最短路是一条路径，且最短路的任一段也是最短路.

假设在u0-v0的最短路中只取一条，则从u0到其余顶点的最短路将构成一棵以u0为根的树.





因此，可采用树生长的过程来求指定顶点到其余顶点的最短路.

Dijkstra 算法：求 G 中从顶点 u_0 到其余顶点的最短路

设 G 为赋权有向图或无向图，G 边上的权均非负.

对每个顶点，定义两个标记（$l(v)$，$z(v)$），其中:

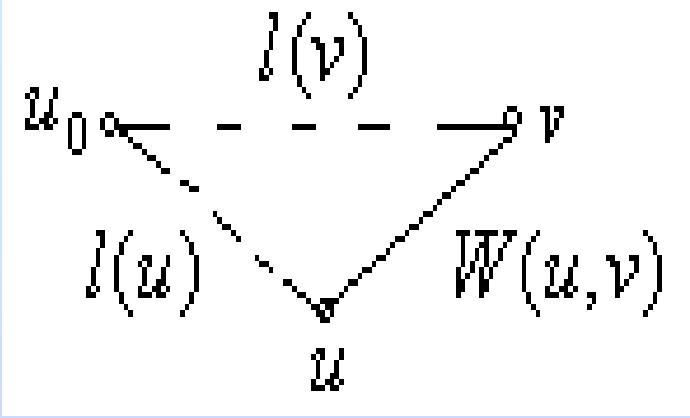
$l(v)$：表从顶点 u_0 到 v 的一条路的权.

$z(v)$：v 的父亲点，用以确定最短路的路线

算法的过程就是在每一步改进这两个标记，使最终$l(v)$ 为从顶点 u_0 到 v 的最短路的权.

S：具有永久标号的顶点集

输入: G 的带权邻接矩阵$w(u,v)$



算法步骤：

（１）赋初值：令 S＝$\{u_0\}$，$l(u_0)=0$

$\forall v \in \bar{S} = V \setminus S$，令$l(v)=W(u_0,v)$，$z(v)=u_0$

$u \leftarrow u_0$

（2）更新$l(v)$、$z(v)$：　$\forall v \in \bar{S} = V \setminus S$，若$l(v) > l(u)+W(u,v)$

则令$l(v)=l(u)+W(u,v)$，$z(v)=u$

（3）　设v^*是使$l(v)$取最小值的$\bar{S}$中的顶点，则令 S=S∪$\{v^*\}$，

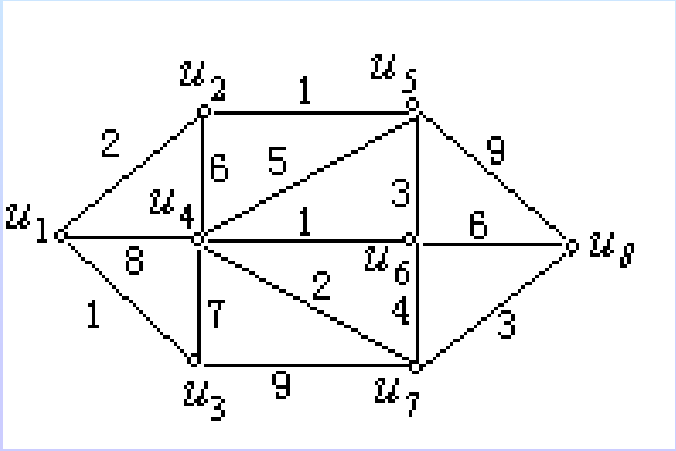
$u \leftarrow v^*$

（4）　若$\bar{S} \neq \Phi$，转 2，否则，停止.

用上述算法求出的$l(v)$就是u_0到v的最短路的权，从v的父亲标记$z(v)$追溯到u_0，就得到u_0到v的最短路的路线.

例 求下图从顶点 u_1 到其余顶点的最短路.

TO MATLAB (road1)



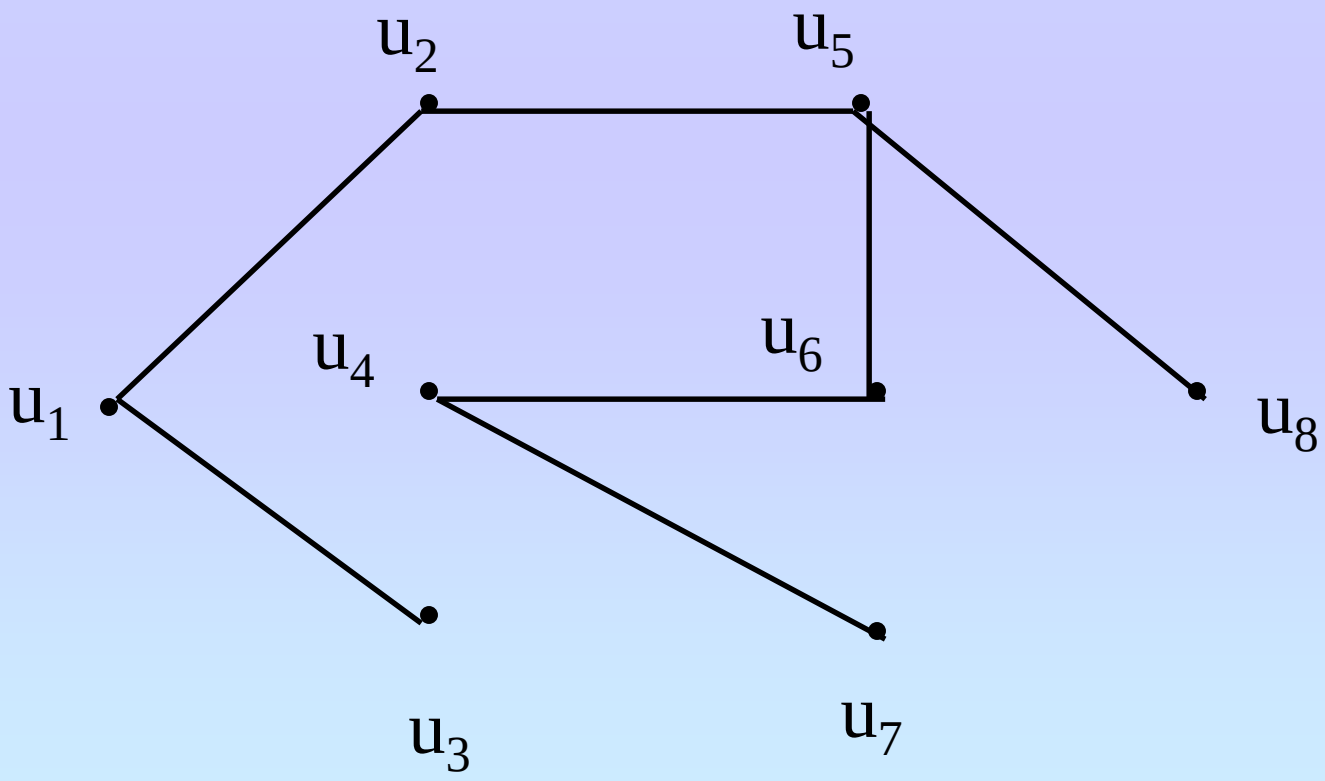
先写出带权邻接矩阵：

$$W=\begin{pmatrix}
0 & 2 & 1 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
 & 0 & \infty & 6 & 1 & \infty & \infty & \infty \\
 & & 0 & 7 & \infty & \infty & 9 & \infty \\
 & & & 0 & 5 & 1 & 2 & \infty \\
 & & & & 0 & 3 & \infty & 9 \\
 & & & & & 0 & 4 & 6 \\
 & & & & & & 0 & 3 \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

因 G 是无向图，故 W 是对称阵.

迭代次数	$l(u_i)$							
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
1	[0]	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	0	2	[1]	8	∞	∞	∞	∞
3		[2]		8	∞	∞	10	∞
4				8	[3]	∞	10	∞
5				8		[6]	10	12
6				[7]			10	12
7							[9]	12
8								[12]
最后标记:								
$l(v)$	0	2	1	7	3	6	9	12
$z(v)$	u_1	u_1	u_1	u_6	u_2	u_5	u_4	u_5

	$l(u_i)$							
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
最后标记:								
$l(v)$	0	2	1	7	3	6	9	12
$z(v)$	u_1	u_1	u_1	u_6	u_2	u_5	u_4	u_5



返回

每 对 顶 点 之 间 的 最 短 路

（一）算法的基本思想

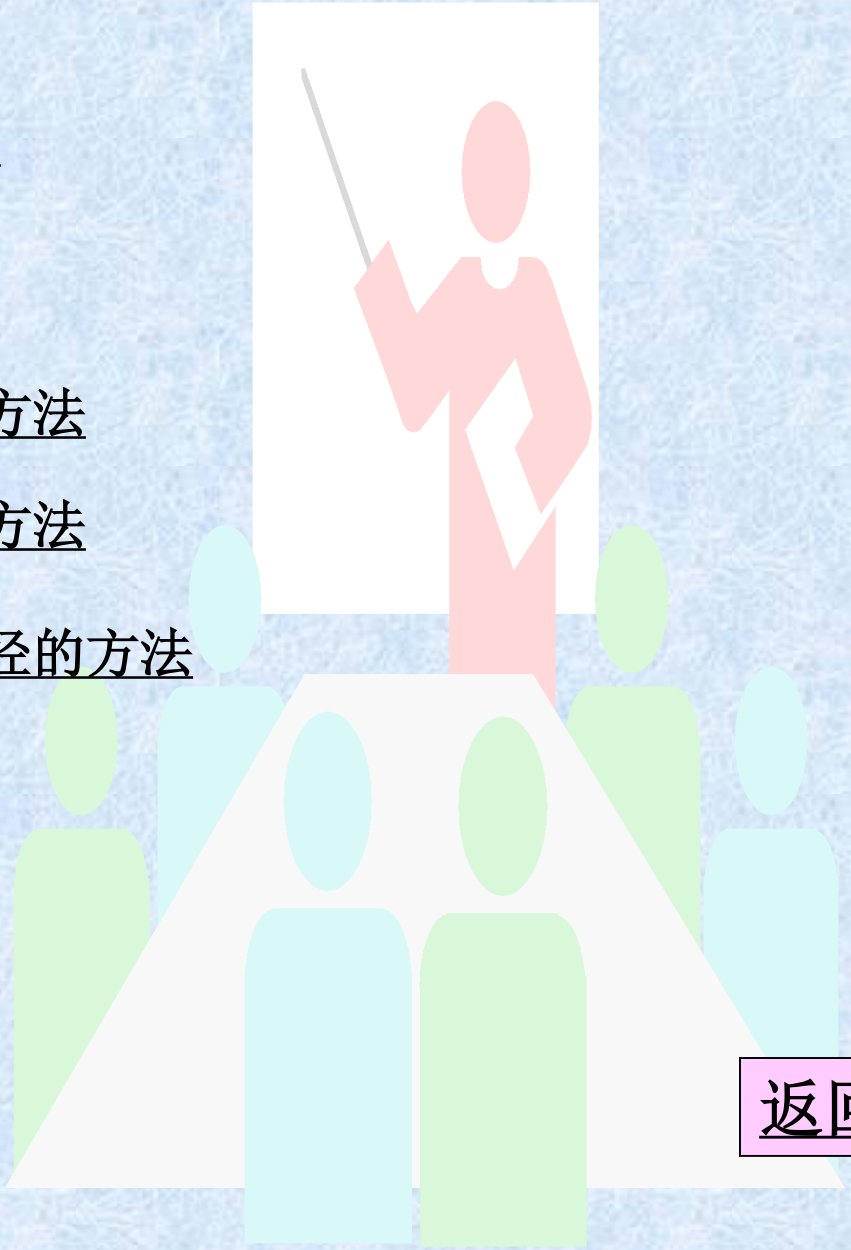
(二)算法原理

1、求距离矩阵的方法

2、求路径矩阵的方法

3、查找最短路路径的方法

（三）算法步骤



返回

算法的基本思想

直接在图的带权邻接矩阵中用插入顶点的方法依次构造出 n 个矩阵 $D^{(1)}$、$D^{(2)}$、…、$D^{(n)}$，使最后得到的矩阵 $D^{(n)}$ 成为图的距离矩阵，同时也求出插入点矩阵以便得到两点间的最短路径.

返回

算法原理—— 求距离矩阵的方法

把带权邻接矩阵 W 作为距离矩阵的初值，即 $D^{(0)}=(d_{ij}^{(0)})_{v\times v}=W$

（1）$D^{(1)}=(d_{ij}^{(1)})_{v\times v}$，其中 $d_{ij}^{(1)}=\min\{d_{ij}^{(0)},d_{i1}^{(0)}+d_{1j}^{(0)}\}$

$d_{ij}^{(1)}$ 是从 v_i 到 v_j 的只允许以 v_1 作为中间点的路径中最短路的长度.

（2）$D^{(2)}=(d_{ij}^{(2)})_{v\times v}$，其中 $d_{ij}^{(2)}=\min\{d_{ij}^{(1)},d_{i2}^{(1)}+d_{2j}^{(1)}\}$

$d_{ij}^{(2)}$ 是从 v_i 到 v_j 的只允许以 v_1 、 v_2 作为中间点的路径中最短路的长度.

…

（v）$D^{(v)}=(d_{ij}^{(v)})_{v\times v}$，其中 $d_{ij}^{(v)}=\min\{d_{ij}^{(v-1)},d_{iv}^{(v-1)}+d_{vj}^{(v-1)}\}$

$d_{ij}^{(v)}$ 是从 v_i 到 v_j 的只允许以 v_1、v_2、…、 v_v 作为中间点的路径中最短路的长度．即是从 v_i 到 v_j 中间可插入任何顶点的路径中最短路的长，因此 $D^{(v)}$ 即是距离矩阵.

返回

算法原理—— 求路径矩阵的方法

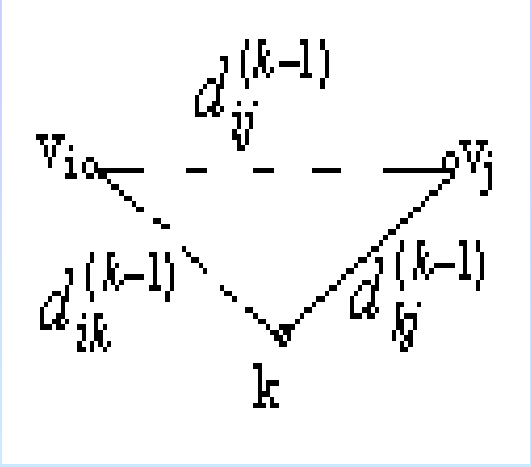
在建立距离矩阵的同时可建立路径矩阵R.

R=$(r_{ij})_{v\times v}$，r_{ij} 的含义是从 v_i 到 v_j 的最短路要经过点号为 r_{ij} 的点.

$$R^{(0)}=(r_{ij}^{(0)})_{v\times v},\quad r_{ij}^{(0)}=j$$

每求得一个 $D^{(k)}$时，按下列方式产生相应的新的 $R^{(k)}$

$$r_{ij}^{(k)}=\begin{cases}k & \text{若} d_{ij}^{(k-1)}>d_{ik}^{(k-1)}+d_{kj}^{(k-1)}\\ r_{ij}^{(k-1)} & \text{否则}\end{cases}$$



即当v_k被插入任何两点间的最短路径时，被记录在$R^{(k)}$中，依次求$D^{(v)}$ 时求得 $R^{(v)}$，可由$R^{(v)}$ 来查找任何点对之间最短路的路径.

返回

算法原理—— 查找最短路路径的方法

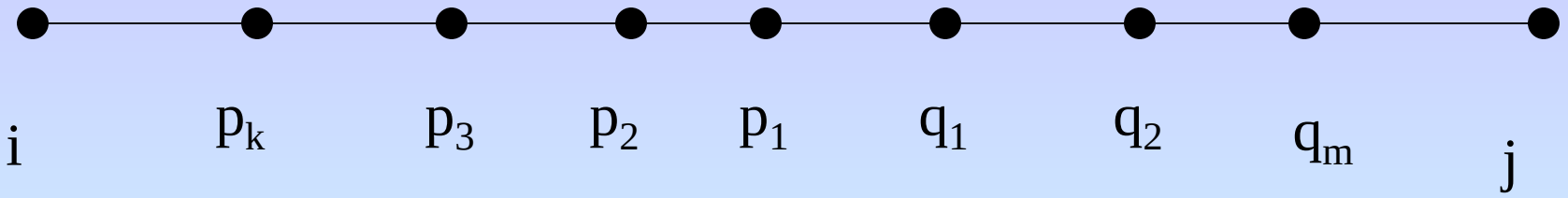
若 $r_{ij}^{(v)} = p_1$，则点 p_1 是点 i 到点 j 的最短路的中间点.

然后用同样的方法再分头查找．若：

（１）向点 i 追朔得：$r_{ip_1}^{(v)} = p_2, r_{ip_2}^{(v)} = p_3, \cdots, r_{ip_k}^{(v)} = p_k$

（２）向点 j 追朔得：$r_{p_1 j}^{(v)} = q_1, r_{q_1 j}^{(v)} = q_2, \cdots, r_{q_m j}^{(v)} = j$

则由点i到j的最短路的路径为：　$i, p_k, \cdots, p_2, p_1, q_1, q_2, \cdots, q_m, j$



返回

算法步骤

Floyd 算法： 求任意两点间的最短路.

$D(i,j)$：i 到 j 的距离.

$R(i,j)$：i 到 j 之间的插入点.

输入：带权邻接矩阵 $w(i,j)$

（1）赋初值：

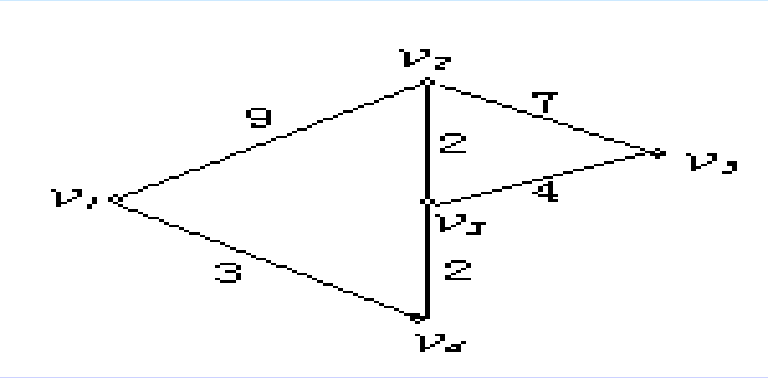
对所有 i,j, $d(i,j) \leftarrow w(i,j)$, $r(i,j) \leftarrow j$, $k \leftarrow 1$

(2) 更新 $d(i,j)$, $r(i,j)$

对所有 i,j，若 $d(i,k)+d(k,j)<d(i,j)$，则 $d(i,j) \leftarrow d(i,k)+d(k,j)$, $r(i,j) \leftarrow k$

(3) 若 $k=v$，停止. 否则 $k \leftarrow k+1$，转（2）.

例 求下图中加权图的任意两点间的距离与路径.



TO MATLAB

(road2(floyd))

$$D=\begin{pmatrix}0&7&5&3&9\\7&0&2&4&6\\5&2&0&2&4\\3&4&2&0&6\\9&6&4&6&0\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}1&4&4&4&4\\3&2&3&3&3\\4&2&3&4&5\\1&3&3&4&3\\4&3&3&3&5\end{pmatrix}$$

$d_{51}=9$，故从 v_5 到 v_1 的最短路为 9 .

$r_{51}=4$. 由 v_4 向 v_5 追朔：$r_{54}=3, r_{53}=3$;

由 v_4 向 v_1 追朔：$r_{41}=1$

所以从 v_5 到 v_1 的最短路径为：$5\to 3\to 4\to 1$.

返回

最 短 路 的 应 用

一、 可化为最短路问题的多阶段决策问题

二、 选 址 问 题

1、 中心问题

2、 重心问题

返回

可化为最短路问题的多阶段决策问题

例 1　设备更新问题：企业使用一台设备，每年年初，企业领导就要确定是购置新的，还是继续使用旧的.若购置新设备，就要支付一定的购置费用；若继续使用，则需支付一定的维修费用.现要制定一个五年之内的设备更新计划，使得五年内总的支付费用最少.

已知该种设备在每年年初的价格为：

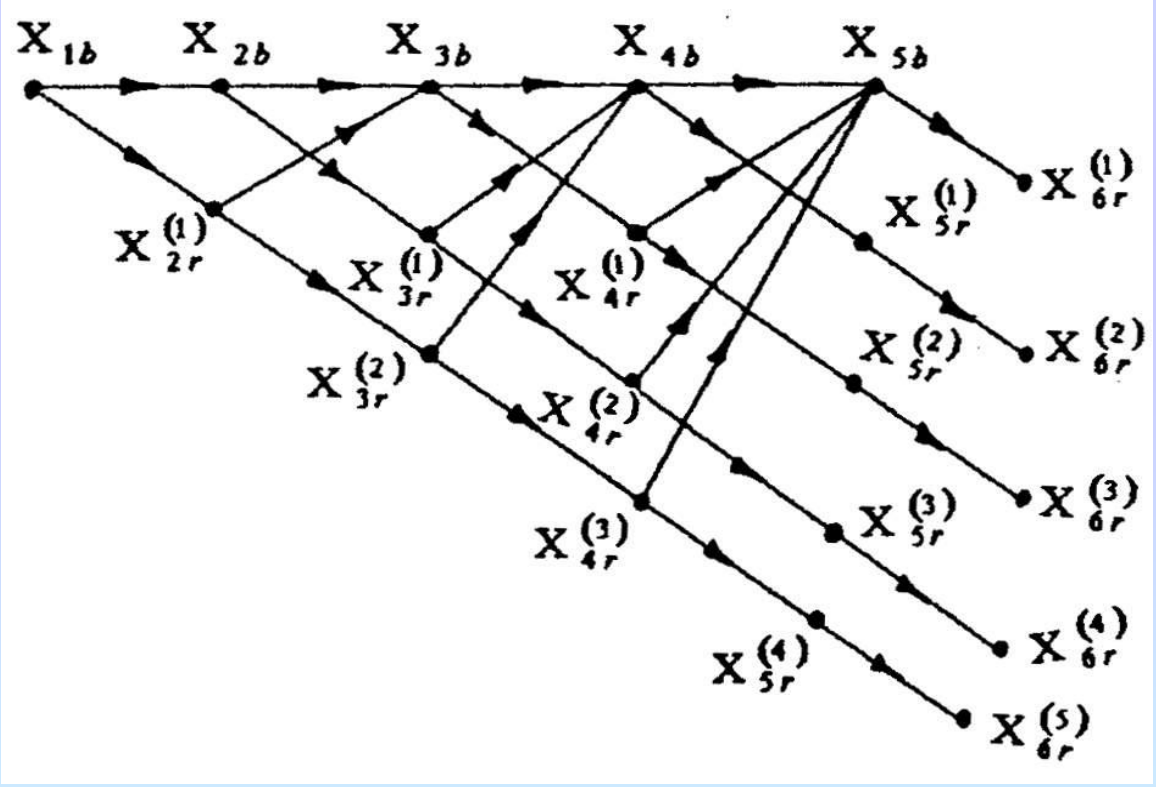
第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
11	11	12	12	13

使用不同时间设备所需维修费为：

使用年限	0－1	1－2	2－3	3－4	4－5
维修费	5	6	8	11	18

构造加权有向图 G1(V,E)

（1）顶点集 V＝{X_{ib} ，i=1,2,3,4,5}∪{$X_{ir}^{(k)}$ ，i=2,3,4,5,6; k=1,2,…,i-1}，每个顶点代表年初的一种决策，其中顶点X_{ib} 代表第 i 年初购置新设备的决策，顶点 $X_{ir}^{(k)}$ 代表第 i 年初修理用过 k 年的旧设备的决策



（2）弧集 E={$(X_{ib}, X_{i+1,b}), (X_{ir}^{(k)}, X_{i+1,b}), i=1,2,3,4;\ k=1,2,\cdots,i\text{-}1$}

∪{$(X_{ib}, X_{i+1,r}^{(1)}), i=1,2,3,4,5$}∪{$(X_{ir}^{(k)}, X_{i+1,r}^{(k+1)}), i=1,2,3,4,5; k=1,2,i\text{-}1$}

若第 i 年初作了决策 X_i 后，第 $i+1$ 年初可以作决策 X_{i+1}，则顶点 X_i 与 X_{i+1} 之间有弧 (X_i, X_{i+1})，其权 $W(X_i, X_{i+1})$ 代表第 i 年初到第 $i+1$ 年初之间的费用.例如，弧 $(X_{3b}, X_{4r}^{(1)})$ 代表第 3 年初买新设备，第四年初决定用第三年买的用过一年的旧设备，其权则为第三年初的购置费与三、四年间的维修费之和，为 12＋5＝17

（3）问题转化为顶点 X_{1b} 到 $X_{6r}^{(k)}$ 的最短路问题.五年的最优购置费为

$$\min_{k=1,2,3,4,5}\{d(X_{1b}, X_{6r}^{(k)})\}$$

其中 $d(X_{1b}, X_{6r}^{(k)})$ 为顶点 X_{1b} 到 $X_{6r}^{(k)}$ 的最短路的权.

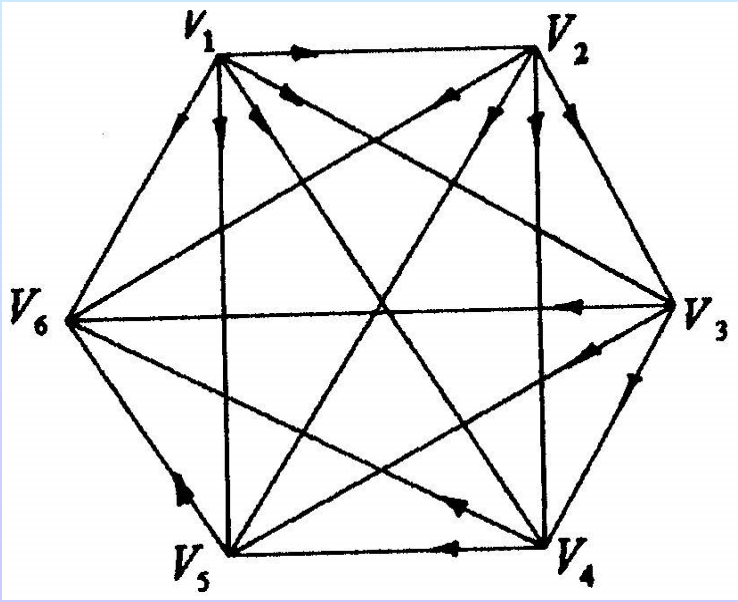
求得最短路的权为 53，而两条最短路分别为

$$X_{1b} - X_{2r}^{(1)} - X_{3r}^{(2)} - X_{4b} - X_{5r}^{(1)} - X_{6r}^{(2)};$$

$$X_{1b} - X_{2r}^{(1)} - X_{3b} - X_{4r}^{(1)} - X_{5r}^{(2)} - X_{6r}^{(3)}$$

因此，计划为第一、三年初购置新设备，或第一、四年初购置新设备，五年费用均最省，为 53.

也可构造加权有向图 G2(V,E).



（1）顶点集 V=$\{V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,V_6\}$，$V_i$ 表第 i 年初购置新设备的决策，V_6 表第五年底.

（2）弧集 E=$\{(V_i,V_j)$，i=1,2,3,4,5; $i<j\leqslant 6\}$，弧(V_i,V_j) 表第 i 年初购进一台设备一直使用到第 j 年初的决策，其权 W(V_i,V_j) 表由这一决策在第 i 年初到第 j 年初的总费用，如 W(V_1,V_4)=11+5+6+8=30.

（3）问题转化为求V_1 到V_6 的最短路问题，求得两条最短路为$V_1-V_4-V_6$，$V_1-V_3-V_6$，权为 53，与图 G1(V,E)的解相同.

返回

选址问题--中心问题

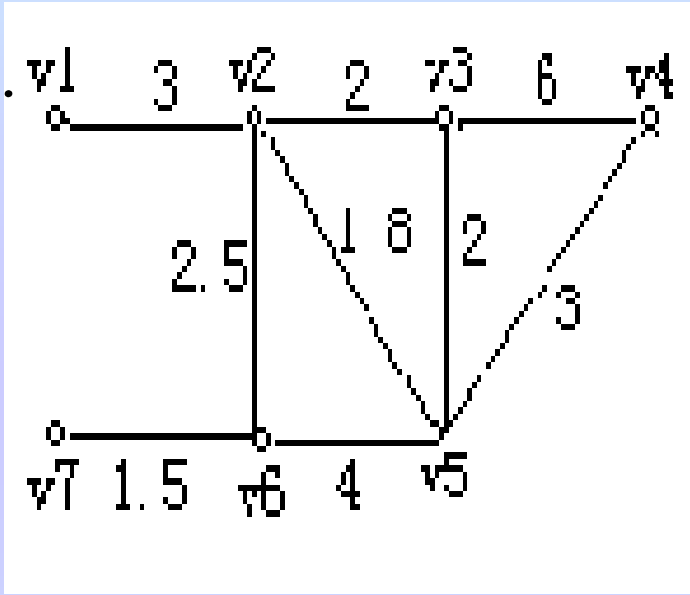
例 2　某城市要建立一个消防站，为该市所属的七个区服务，如图所示．问应设在那个区，才能使它至最远区的路径最短．

（1）用 Floyd 算法求出距离矩阵 $D=(d_{ij})_{v\times v}$．

（2）　计算在各点v_i 设立服务设施的最大服务距离$S(v_i)$ ．

$$S(v_i)=\max_{1\le j\le v}\{d_{ij}\}\qquad i=1,2,\cdots v$$

（3）求出顶点 v_k，使 $S(v_k)=\min_{1\le i\le v}\{S(v_i)\}$



则 v_k 就是要求的建立消防站的地点．此点称为图的**中心点**．

TO　MATLAB

(road3(floyd))

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 10 & 7 & 5.5 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 7 & 4 & 2.5 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 5 & 2 & 4.5 & 6 \\ 10 & 7 & 5 & 0 & 3 & 7 & 8.5 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 0 & 4 & 5.5 \\ 5.5 & 2.5 & 4.5 & 7 & 4 & 0 & 1.5 \\ 7 & 4 & 6 & 8.5 & 5.5 & 1.5 & 0 \end{pmatrix}$$

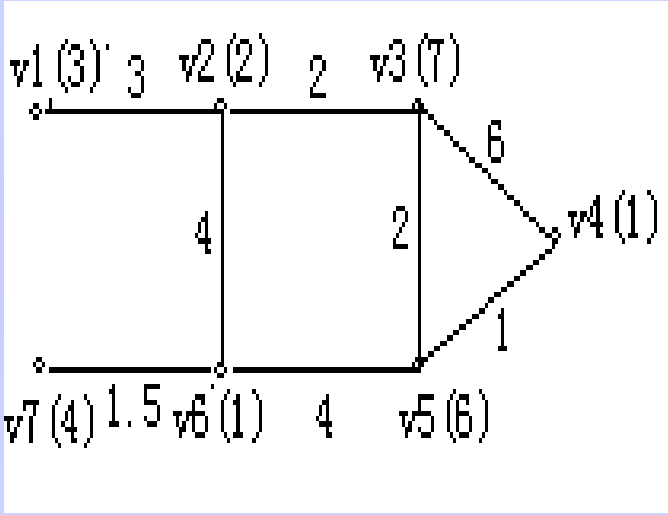
$S(v_1)=10$, $S(v_2)=7$, $S(v_3)=6$, $S(v_4)=8.5$,
$S(v_5)=7$, $S(v_6)=7$, $S(v_7)=8.5$

$S(v_3)=6$,故应将消防站设在v_3处。

返回

选址问题--重心问题

例 3 某矿区有七个矿点，如图所示．已知各矿点每天的产矿量 $q(v_j)$（标在图的各顶点上）. 现要从这七个矿点选一个来建造矿厂. 问应选在哪个矿点，才能使各矿点所产的矿运到选矿厂所在地的总运力（千吨公里）最小.



（1）求距离阵 D=$(d_{ij})_{v\times v}$.

（2） 计算各顶点作为选矿厂的总运力 $m(v_i)$

$$m(v_i)=\sum_{j=1}^{v} q(v_j)\times d_{ij} \qquad i=1,2,\cdots v$$

（3） 求 v_k 使 $m(v_k)=\min\limits_{1\le i\le v}\{m(v_i)\}$，则 v_k 就是选矿厂应设之矿点．此点称为图 G 的**重心**或**中位点**.

返回

实验作业

生产策略问题：现代化生产过程中，生产部门面临的突出问题之一，便是如何选取合理的生产率。生产率过高，导致产品大量积压，使流动资金不能及时回笼；生产率过低，产品不能满足市场需要，使生产部门失去获利的机会。可见，生产部门在生产过程中必须时刻注意市场需求的变化，以便适时调整生产率，获取最大收益。

某生产厂家年初要制定生产策略，已预知其产品在年初的需求量为a=6万单位，并以b=1万单位/月速度递增。若生产产品过剩，则需付单位产品单位时间（月）的库存保管费C_2=0.2元；若产品短缺，则单位产品单位时间的短期损失费C_3=0.4元。假定生产率每调整一次带有固定的调整费C_1=1万元，试问工厂如何制定当年的生产策略，使工厂的总损失最小？

返回