

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit ohne Hilfe Dritter und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus den Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht worden. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Freiberg, den _____._____.20____

(Vorname Name)



TECHNISCHE UNIVERSITÄT
BERGAKADEMIE FREIBERG

Die Ressourcenuniversität. Seit 1765.

Fakultät für Maschinenbau, Verfahrens- und Energietechnik
Institut für Mechanik und Flüssigtechnik
Lehrstuhl für Dynamik

Ausschreibung einer Masterarbeit vom 13. Juni 2020

Experimentelle und simulative Modalanalyse eines Werkzeugschaftes beim HSC-Fräsen unter Einfluss eines Exzentrizitätsfehlers

Aufgabenstellung: Im Rahmen der ausgeschriebenen Arbeit ist das dynamische Verhalten eines Werkzeugschaftes beim HSC-Fräsen zu untersuchen. Der Einfluss einer Unwucht (Exzentrizität) soll dabei im Vordergrund stehen. Neben der Simulation soll auch eine experimentelle Untersuchung erfolgen.

Teilaufgaben:

1. Einarbeitung in das Thema simulative und experimentelle Modalanalyse
2. Erstellung eines Programmes oder einer Berechnungsvorschrift zur simulativen Modalanalyse
3. Durchführung der experimentellen Modalanalyse
4. Schriftliche Dokumentation der Arbeit



Abb. 1: Beschädigter Schaft eines HSC-Fräisers infolge einer Resonanzkatastrophe.¹

Kontakt: Prof. Dr.-Ing. A. Ams (WEI 129, Tel. 39-3109), R. Schmidt (WEI 214, Tel. 39-4141,
Rico.Schmidt@imfd.tu-freiberg.de)

¹Schultz, M.: Limits for the application of long protruding tools regarding the process stability and safety. Proceedings of the Second International Seminar on Improving Machine Tool Performance, La Baule, France. 2000.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Theoretische Grundlagen	3
2.1 Grundlagen der Finite-Elemente-Methode	3
2.1.1 Nichtlineare Finite-Element-Berechnungen	3
2.1.2 Geometrische Nichtlinearität	4
2.2 Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme	5
2.3 Prinzip von Hamilton	7
3 Berechnungsmodell	9
3.1 Potentielle und kinetische Energie eines Balkens	9
3.2 Das dreidimensionale zweiknotige Balkenelement	10
3.3 Variationsformulierung	11
3.4 Diskretisierung	12
3.5 Zustandsraumdarstellung	15
4 Experimentelle Untersuchungen	17
4.1 Versuchsziel und -planung	17
4.2 Versuchsaufbau	18
4.2.1 Versuchsobjekt	18
4.2.2 Aufbau des Versuchsstandes	20
4.2.3 Messsoftware	21
4.3 Experimentelle Modalanalyse	23
5 Ergebnisse	25
5.1 Probe Nr. 1 (Schaft 10×8)	25
5.2 Probe Nr. 2 (Schaft 10×9)	31
6 Zusammenfassung und Ausblick	39
7 Verzeichnis	41
7.1 Quellenverzeichnis	41
7.2 Symbol- und Abkürzungsverzeichnis	42
7.3 Abbildungsverzeichnis	44
7.4 Tabellenverzeichnis	46
Anhang A: Programme	A-1
Anhang B: Zeichnungen der Bauteile	B-1

1 Einleitung

Eine wichtige Fertigungstechnologie in der Metallverarbeitung ist das Hochgeschwindigkeitszerspanen (englisch *High Speed Cutting*, HSC). Dabei handelt es sich um ein fortschrittliches Zerspanungsverfahren, welches hohe Effizienz, Qualität und geringen Verbrauch kombiniert. Eine Reihe von Problemen, die bei herkömmlichen Zerspanungsverfahren auftreten, wurden durch die Anwendung von HSC reduziert. Im Vergleich zum herkömmlichen Zerspanen werden die Schnittgeschwindigkeit und die Vorschubgeschwindigkeit um mehrere Stufen erhöht.

Mit zunehmender Schnittgeschwindigkeit nimmt die Abtragsrate pro Zeiteinheit zu, die Schnittzeit nimmt ab und die Verarbeitungseffizienz steigt. Dadurch wird der Herstellungszyklus des Produkts verkürzt und die Wettbewerbsfähigkeit auf dem Markt verbessert. Gleichzeitig verringert eine geringe Schnittmenge mit schneller Bewegungen den Werkzeugverschleiß. Gleichzeitig werden die Schnittkraft und die thermische Spannungsverformung des Werkstücks verringert. Das führt auf bessere Verarbeitungsmöglichkeiten von Teilen und Materialien mit geringer Steifigkeit sowie dünnwandige Teile. Aufgrund der Verringerung der Schnittkraft und der Erhöhung der Drehzahl ist die Arbeitsfrequenz des Schneidsystems weit von der Eigenfrequenz niedriger Ordnung der Werkzeugmaschine entfernt, wodurch die Oberflächenrauheit verringert wird. Die Oberflächenrauheit des Werkstücks ist am empfindlichsten gegenüber der Frequenz niedriger Ordnung. Die HSC-Technologie kann in Anwendungsgebieten eingesetzt werden, die eine hohe Anforderungen an Zerspanleistung und eine hohe Oberflächenqualität erfordern, also insbesondere in der Werkzeugbearbeitung und der Formenbearbeitung. Zum Beispiel gibt es komplexe dreidimensionale Formen, welche höchste Maßgenauigkeit und Oberflächengenauigkeit aufweisen müssen [HH15].

Wegen der Frequenzempfindlichkeit des Zerspanungsverfahrens sind die Eigenfrequenzen des Werkzeugs wichtige Parameter. Deshalb wird die Modalanalyse verwendet, um die dynamischen Eigenschaften von Systemen im Frequenzbereich zu untersuchen. Die Eigenfrequenzen sind im konstruktiven Ingenieurbau sehr wichtig, da es unerlässlich ist, dass diese nicht mit den erwarteten Erregungsfrequenzen übereinstimmen (Resonanz). Falls es trotzdem zur Resonanz kommt, kann das Objekts strukturellen Schaden erleiden. Aus methodologischer Sicht ist die Modalanalyse in numerische und experimentelle Modalanalyse zu unterteilen. In dieser Arbeit wird die numerische Modalanalyse mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) und die experimentelle Modalanalyse mit Experimenten betrachtet.

Es soll die Auswirkung von Exzentrizitätsfehlern auf die Eigenfrequenzen des Werkzeugschaftes beim HSC-Fräsen durch simulative und experimentelle Modalanalyse analysiert werden. Aufgrund der hohen Geschwindigkeiten des Werkzeughalters wird eine nichtlineare Finite-Elemente-Methode, in Kombination mit dem Prinzip von Hamilton, für die Simulation verwendet. Anschließend wird die FE Simulation mit MATLAB® durchgeführt. Im experimentellen Teil wird die sogenannte Anregungshammermethode für die experimentellen Modalanalyse benutzt. Außerdem wird das CAD Programm SOLIDWORKS® zur Darstellung der Bauteilen benutzt, die im Experiment angewendet werden. Schließlich werden die Ergebnisse von Simulation und Experiment verglichen und analysiert.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Grundlagen der Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist eine zuverlässige und weitverbreitete numerische Analysemethode. Dabei wird hauptsächlich die lineare Finite-Elemente-Methode verwendet, aufgrund ihrer einfachen Anwendung in vielen Bereichen.

Die Grundidee der Finite-Elemente-Methode besteht darin, den kontinuierlichen Lösungsbereich in eine Gruppe von finiten Einheiten zu diskretisieren, die auf bestimmte Weise miteinander verbunden sind. Die Unterteilung der ganzen Lösungsbereich in einfachere Teile hat mehrere Vorteile:

- Darstellung von komplexen Geometrien,
- Einbeziehung unterschiedlicher Materialeigenschaften,
- Einfache Darstellung der Gesamtlösung,
- Erfassung von lokalen Auswirkungen.

Da die Elemente verschieden kombiniert und selbst unterschiedliche Formen haben können, ist es möglich, eine Lösungsdomäne mit komplexen geometrischen Formen zu modellieren. Ein weiteres wichtiges Merkmal der Finite-Elemente-Methode ist die Verwendung von angenommenen Näherungsfunktionen, um die unbekannte Feldfunktion darzustellen, die in der vollständigen Lösungsdomäne gesucht wird. Die Näherungsfunktion im Element wird normalerweise durch den Wert der unbekannten Feldfunktion oder ihre Ableitung an jedem Knoten des Elements und ihre Interpolationsfunktion ausgedrückt. Auf diese Weise wird der Wert der unbekannten Feldfunktion oder ihrer Ableitung an jedem Knoten zur Unbekannten (d.h. zum Freiheitsgrad). Damit wird ein kontinuierliches Problem mit unendlich vielen Freiheitsgraden zu einem diskreten Problem mit endlich vielen Freiheitsgraden umgesetzt [Sch91].

Sobald die Unbekannten bestimmt sind, kann der Näherungswert der Feldfunktion in jedem Element durch die Interpolationsfunktion berechnet werden, um die Näherungslösung in der gesamten Lösungsdomäne zu erhalten. Offensichtlich nimmt die Genauigkeit der Lösung weiter zu, wenn die Anzahl der Elemente zunimmt oder wenn die Freiheitsgrade je Element zunehmen. Wenn das Element die Konvergenzanforderungen erfüllt, konvergiert die Näherungslösung schließlich zur exakten Lösung [Kat10].

2.1.1 Nichtlineare Finite-Element-Berechnungen

Im Wesentlichen sind alle Probleme der Festkörpermechanik nichtlinear, und es gibt nur wenige analytische Lösungen. Probleme der linearen elastischen Mechanik sind nur eine vereinfachte Annahme der praktischen Probleme. Bei der Finite-Elemente-Analyse umfassen die Annahmen der Linearisierung normalerweise Folgendes:

1. die Knotenverschiebung ist ein kleiner Betrag;
2. das Material ist linear elastisch;

3. die Eigenschaften der Randbedingungen sind unverändert während der Bewegung oder Verformung des Körpers.

Wenn eine der oben genannten drei Annahmen nicht erfüllt ist, handelt es sich um ein nichtlineares Problem. In Anbetracht dessen werden nichtlineare Probleme in der Festkörpermechanik im Allgemeinen in drei Kategorien unterteilt, nämlich Materialnichtlinearität, geometrische Nichtlinearität und Nichtlinearität der Randbedingungen.

2.1.2 Geometrische Nichtlinearität

Geometrisch nichtlineare Probleme beziehen sich häufig auf große Verschiebungen oder große Dehnungen innerhalb der Struktur. Ein Sonderproblem stellen große Verschiebung (wie Translation oder Rotation) mit gleichzeitig kleinen Dehnung dar [Rus11]. In dieser Arbeit dreht der Werkzeugschaft mit hoher Rotationsgeschwindigkeit und Exzentrizität, wodurch nichtlineare Verzerrungen (nach Green-Lagrange) berücksichtigt werden. Das Materialverhalten soll jedoch als linear elastisch angenommen werden

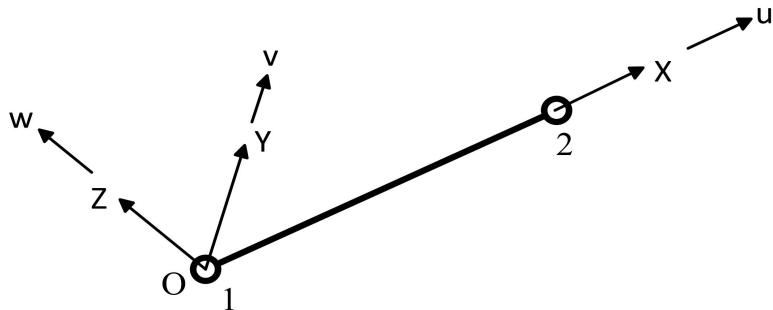


Abbildung 2.1: Zweiknotiges Balkenelement mit Koordinaten und Verschiebungen.

In Abbildung 2.1 ist ein zweiknotiges Balkenelement dargestellt. Weiterhin sind die Verschiebungen u , v und w eingetragen. Dabei ist u die Längsverschiebung und v sowie w die Durchbiegungen. Die Green-Lagrange-Dehnungen basieren auf der Änderung des Abstands zwischen zwei benachbarten Punkten. Die genannte Veränderung des Balkens (verformte Länge l , unverformte Länge l_0) kann mit

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} = \frac{(l_0 + u)^2 + v^2 + w^2 - l_0^2}{l_0^2} = \frac{l_0^2 + 2l_0u + u^2 + v^2 + w^2 - l_0^2}{l_0^2} \\ &= 2\frac{u}{l_0} + \left(\frac{u}{l_0}\right)^2 + \left(\frac{v}{l_0}\right)^2 + \left(\frac{w}{l_0}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

beschrieben werden. Beim Übertragung zum finiten Element ergibt sich

$$\frac{u}{l_0} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = u_x \quad ; \quad \frac{v}{l_0} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = v_x \quad ; \quad \frac{w}{l_0} \rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = w_x \quad (2.2)$$

und deshalb

$$\Delta = 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (2.3)$$

Für kleine Verformungen ist das Quadrat vernachlässigbar, sodass nur der erste Term erhalten bleibt, der doppelt so hoch ist wie die lineare oder mechanische Dehnung. Deswegen wird die Green-Lagrange-Dehnung in X-Richtung durch die Hälfte der Quadrate gegeben:

$$\varepsilon_{GL} = \frac{\Delta}{2} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = u_x + \frac{1}{2} u_x^2 + \frac{1}{2} v_x^2 + \frac{1}{2} w_x^2. \quad (2.4)$$

2.2 Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

Für die Finite-Elemente-Methode werden die Knotenverschiebungen als unbekannt Grundparameter verwendet. Das mechanische Modell wird im Allgemeinen nach der Finite-Elemente-Diskretisierung, Elementanalyse, Systemgruppierung und Einführung von Randbedingungen in der Form

$$\mathbf{M} \ddot{\vec{x}} + \mathbf{D} \dot{\vec{x}} + \mathbf{K} \vec{x} = \vec{f}, \quad (2.5)$$

dargestellt. Dabei ist \vec{x} der unbekannte Knotenverschiebungsvektor und \vec{f} der äquivalenter Knotenkraftvektor. Sowohl \vec{x} und \vec{f} besitzen die Ordnung n . \mathbf{M} , \mathbf{D} und \mathbf{K} sind die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix des Systems. Die Steifigkeitsmatrix ist im Allgemeinen eine positiv definite Matrix.

Für statische Probleme kann die Gleichung (2.5) wie folgt

$$\mathbf{K} \vec{x} = \vec{f} \quad (2.6)$$

vereinfacht werden. Bei dynamischen Problemen müssen zusätzlich die Anfangsbedingungen

$$\vec{x}|_{t=0} = \vec{x}_0 \quad \dot{\vec{x}}|_{t=0} = \dot{\vec{x}}_0 \quad (2.7)$$

für Gleichung (2.5) beachtet werden.

Wenn \mathbf{K} oder \vec{f} eine Funktion von \vec{x} und (oder) dessen Zeitableitung ist, dann wird das Problem nichtlinear. Normalerweise können die nichtlineare Gleichungen nicht direkt gelöst werden. Sie können durch eine Reihe linearer algebraischer Gleichungen angenähert werden, sodass das Lösungsverfahren komplizierter und zeitaufwendiger ist. Es gibt viele Linearisierungsmethoden, z.B. NEWTON-RAPHSON-Verfahren [Rus11], Quasi-NEWTON-Verfahren [LY⁺84], Modifiziert-NEWTON-Verfahren, das BFGS-Verfahren und das DFP-Verfahren [MS79]. In dieser Arbeit wird NEWTON-RAPHSON-Verfahren benutzt.

Das NEWTON-RAPHSON-Verfahren wird mechanisch als Tangentensteifigkeitsmethode bezeichnet und ist eine der bekanntesten Methoden zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen. Zur Vereinfachung der Beschreibung kann die Gleichung (2.6) wie folgt umgeschrieben werden:

$$\vec{\Psi}(\vec{x}) = \mathbf{K}(\vec{x}) \cdot \vec{x} - \vec{f} = \vec{0}. \quad (2.8)$$

Dabei ist $\vec{\Psi}$ eine stetige ableitbare Funktion mit dem Näherungsanfangsvektor $\vec{x}^{(0)}$ und dem Näherungsvektor nach der n -ten Iteration ist $\vec{x}^{(n)}$. Nach der Taylorreihenentwicklung von $\vec{\Psi}$ werden die linearen Terme beibehalten und die Terme höheren Ordnung ignoriert, sodass sich

$$\vec{\Psi}(\vec{x}^{(n)}) = \mathbf{K}_T^{(n)}(\vec{x} - \vec{x}^{(n)}) \approx 0 \quad (2.9)$$

ergibt. Mit der Lösung aus Gleichung (2.9) kann ein neuer Näherungsvektor mit

$$\vec{x}^{(n+1)} = \vec{x}^{(n)} - \left(\mathbf{K}_T^{(n)} \right)^{-1} \cdot \vec{\Psi}(\vec{x}^{(n)}). \quad (2.10)$$

berechnet werden. Die Tangentensteifigkeitsmatrix der Struktur

$$\mathbf{K}_T^{(n)} = \left. \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=\vec{x}^{(n)}} \quad (2.11)$$

besteht aus einem Zusammenbau der Tangentensteifigkeitsmatrizen der entsprechenden Elemente. Durch Vergleichen des relativen Fehlers mit dem Ergebnis des vorherigen Iterationsschritts kann der Konvergenzprozess gesteuert werden.

Deshalb kann der Lösungsmethode von NEWTON-RAPHSON-Verfahren bei Programmierung mit folgender Schritte beschreiben:

1. Anfangswert $x^{(0)}$ und $n = 0$ einstellen,
2. Tangentensteifigkeitsmatrizen $\mathbf{K}_T^{(n)}$ berechnen:

$$\mathbf{K}_T^{(n)} = \left. \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=\vec{x}^{(n)}}, \quad (2.12)$$

3. $\vec{\Psi}^{(n)}$ berechnen:

$$\vec{\Psi}^{(n)} = \vec{\Psi}(\vec{x}^{(n)}) = \mathbf{K}(\vec{x}^{(n)})\vec{x}^{(n)} - \vec{f}, \quad (2.13)$$

4. Funktion $\mathbf{K}_T^{(n)}\Delta\vec{x}^{(n)} = -\vec{\Psi}^{(n)}$ lösen und bekommen:

$$\Delta\vec{x}^{(n)} = -(\mathbf{K}_T^{(n)})^{-1}\vec{\Psi}^{(n)}, \quad (2.14)$$

5. neuer Näherungsvektor berechnen:

$$\vec{x}^{(n+1)} = \vec{x}^{(n)} + \Delta\vec{x}^{(n)}, \quad (2.15)$$

6. Wenn es konvergiert, endet die Iteration; andernfalls lassen $n = n + 1$ und noch mit Schritt 2 fortfahren.

2.3 Prinzip von Hamilton

In der Physik ist das Prinzip von HAMILTON der Ausdruck des 1833 vom irischen Physiker WILLIAM HAMILTON veröffentlichten Prinzips. Das Prinzip von HAMILTON besagt, dass die Dynamik eines physikalischen Systems mittels Variationsrechnung einer einzigen Funktion, der LAGRANGE-Funktion welche alle physikalischen Informationen über das System und die darauf einwirkenden Kräfte enthält, bestimmt wird.

Für ein System mit potentieller und kinetischer Energie lautet die LAGRANGE-Funktion nach [GHSW04]

$$L = E_{kin} - E_{pot}. \quad (2.16)$$

Das Hamilton-Prinzip bietet die Möglichkeit, die Bewegung physikalischer Systeme auszudrücken. Anders als die Differentialgleichungsmethode des NEWTON'schen Bewegungsgesetzes verwendet diese Methode ein Funktional in Form eines Zeitintegrals.

Das Prinzip von HAMILTON ist auch ein wichtiges Variationsprinzip in der Elastodynamik. Im Gegensatz zu einem System, das aus starren Körper besteht, haben verformbare Körper unendlich viele Freiheitsgrade. Der Zustand des Systems wird daher durch kontinuierliche Funktionen von Raum und Zeit beschrieben. Das erweiterte Prinzip von HAMILTON für solche Körper wird durch

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin} - E_{pot}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (2.17)$$

gegeben. Nacheinander sind also die kinetische Energie E_{kin} und die potenzielle Energie E_{pot} des Systems sowie die virtuelle Arbeit δW aller angreifenden potentiallosen Kräfte zu bestimmen [Wau14].

3 Berechnungsmodell

3.1 Potentielle und kinetische Energie eines Balkens

In dieser Arbeit wird der Frässchaft als ein einseitig eingespannter und ungedämpfter Balken mit Exzentrizitätsfehler modelliert. Die potentielle Energie in Abhängigkeit der Green-Lagrange-Dehnung ε_{GL} , der Durchbiegungen v und w sowie die Verdrehung ϕ lautet nach [GHSW04]

$$E_{pot} = \frac{EA}{2} \int_{(L)} \varepsilon_{GL}^2 dx + \frac{EI}{2} \int_{(L)} w_{xx}^2 dx + \frac{EI}{2} \int_{(L)} w_{xx}^2 dx + \frac{GI_t}{2} \int_{(L)} \phi_{xx}^2 dx. \quad (3.1)$$

Die kinetische Energie wird durch den Exzentrizitätsfehler e und die Winkelgeschwindigkeit Ω beeinflusst. Wie Abbildung 3.1 zeigt, lautet der Ortsvektor eines beliebigen Punkts des Balkens im $X_1Y_1Z_1$ -Koordinatensystem nach [Wau14]

$$(1)\vec{r}_p = \begin{bmatrix} X + u - Yv_x - Zw_x \\ Y + v - Z\phi \\ Z + w + Y\phi \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

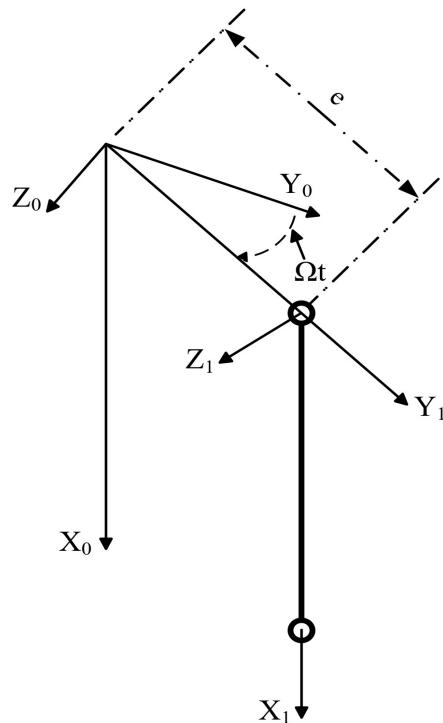


Abbildung 3.1: Balken mit Rotation und Exzentrizitätsfehler.

Mit der Rotationsmatrix ${}^{01}\mathbf{R}$ und dem Translationsvektor $(0)\vec{r}_{12}$ wird der Ortsvektor eines beliebigen Punktes des Balkens im Koordinate $X_0Y_0Z_0$ -Koordinatensystem mit [HGP15] :

$${}_{(0)}\vec{r}_p = {}_{(0)}\vec{r}_{12} + {}^{01}\mathbf{R} \cdot {}_{(1)}\vec{r}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ e \cdot \cos \Omega t \\ e \cdot \sin \Omega t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega t & -\sin \Omega t \\ 0 & \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X + u - Yv_x - Zw_x \\ Y + v - Z\phi \\ Z + w + Y\phi \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

angegeben. Damit ergibt sich die kinetische Energie des Balkens nach [GHSW04] zu

$$E_{kin} = \frac{\rho}{2} \int_V \left(\frac{\partial {}_{(0)}\vec{r}_p}{\partial t} \right)^2 dV = \frac{\rho}{2} \int_{(L)(A)} \left({}_{(0)}\vec{v}_p \right)^2 dA dx. \quad (3.4)$$

Mit den folgenden Integralen

$$\begin{aligned} \int_A 1 dA &= A & \int_A Y dA &= \int_A Z dA = 0 \\ \int_A YZ dA &= 0 & \int_A Y^2 dA &= \int_A Z^2 dA = I \end{aligned} \quad (3.5)$$

lautet die modifizierte kinetische Energie

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{\rho A}{2} \int_L u_t^2 + e^2 \Omega^2 + v^2 \Omega^2 + v_t^2 + w^2 \Omega^2 + w_t^2 + 2ev\Omega^2 + 2ew_t\Omega + 2vw_t\Omega - 2v_tw\Omega dA dx \\ &\quad + \frac{\rho I}{2} \int_L v_{xt}^2 + w_{xt}^2 + 2\Omega^2 + 2\phi^2 \Omega^2 + 2\phi_t^2 + 4\phi_t\Omega dA dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Für die Lösung des Eigenwertproblems des drehenden nichtlinearen Balkens mit Exzentrizitätsfehler wird ein dreidimensionales finites Balkenelement verwendet, wie Bild 2.1 gezeigt. Für die Integration und Differentiation der Elemente wird die lokale Koordinate ξ von -1 bis +1 definiert. Die globale Länge eines Elements ist mit l_e gegeben. Der Zusammenhang zwischen lokaler und globaler Koordinate lautet

$$\left. \begin{array}{l} \xi(x) = a_0 + a_1 x \\ \xi(x=0) \stackrel{!}{=} -1 \\ \xi(x=l_e) \stackrel{!}{=} 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \xi = -1 + \frac{2}{l_e} x \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{l_e}. \quad (3.7)$$

3.2 Das dreidimensionale zweiknotige Balkenelement

Bei diesem Element werden die Längsverschiebung u , die Durchbiegungen v und w sowie die Verdrehung ϕ durch lineare oder kubische Ansatzfunktionen beschrieben. Für die Längsverschiebung $u(\xi)$ eines Elements soll der lineare Ansatz

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \xi ; u(-1) \stackrel{!}{=} u_1 ; u(1) \stackrel{!}{=} u_2 \quad (3.8)$$

verwendet werden. Damit ergibt sich die Längsverschiebung in Vektor-Matrix Schreibweise zu

$$u(\xi, t) = \vec{N}_u(\xi) \vec{u}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\xi}{2} & \frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Für die Verdrehung ϕ wird auch ein linearer Ansatz analog zur Längsverschiebung verwendet. Deshalb ist die Vektor-Matrix Schreibweise auch identisch. Im Gegensatz dazu wird ein kubischer Ansatz für die Durchbiegung w mit

$$\begin{aligned} w(\xi) &= a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 \\ w(-1) &\stackrel{!}{=} w_1 ; w_{,\xi}(-1) \stackrel{!}{=} \varphi_1 ; w(+1) \stackrel{!}{=} w_2 ; w_{,\xi}(+1) \stackrel{!}{=} \varphi_2 . \end{aligned} \quad (3.10)$$

definiert. Damit kann die Durchbiegung in Vektor-Matrix-Schreibweise mit

$$w(\xi, t) = \vec{N}_w(\xi) \vec{w}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} + \frac{\xi}{16} + \frac{9\xi^2}{16} - \frac{9\xi^3}{16} \\ \frac{9}{16} - \frac{27\xi}{16} - \frac{9\xi^2}{16} + \frac{27\xi^3}{16} \\ \frac{9}{16} + \frac{27\xi}{16} - \frac{9\xi^2}{16} - \frac{27\xi^3}{16} \\ -\frac{1}{16} - \frac{\xi}{16} + \frac{9\xi^2}{16} + \frac{9\xi^3}{16} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

angegeben werden. Darin kennzeichnen φ_i die Biegewinkel der Knoten. Für die Durchbiegung v und dem dazugehörigen Biegewinkel ψ wird ein identischer Ansatz zu w und φ benutzt. Durch die oben genannten Ansätze lautet der Vektor der Knotenvariablen \vec{x}

$$\vec{x} = [u_1 \mid w_1 \mid \varphi_1 \mid v_1 \mid \psi_1 \mid \phi_1 \mid u_2 \mid w_2 \mid \varphi_2 \mid v_2 \mid \psi_2 \mid \phi_2]^T. \quad (3.12)$$

Die Verschiebungen im Element werden durch den Vektor $\vec{x}_e = [u \mid w \mid v \mid \phi]$ beschrieben und ergeben sich nach [Ste15] zu

$$\begin{aligned} \vec{x}_e &= \vec{N} \vec{x} = \left[\vec{N}^u \mid \vec{N}^w \mid \vec{N}^v \mid \vec{N}^\phi \right]^T \vec{x} \\ &= \begin{bmatrix} N_{u1} & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{u2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{w1} & N_{w2} & 0 & 0 & 0 & N_{w3} & N_{w4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{v1} & N_{v2} & 0 & 0 & 0 & N_{v3} & N_{v4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\phi 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\phi 1} \end{bmatrix} \vec{x}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die Ableitung der Formfunktionen \vec{N}_x nach der globalen Variable x kann durch den Zusammenhang (3.7)

$$\vec{N}_x(\xi) = \frac{\partial \vec{N}(\xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \vec{N}(\xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{2}{l_e} \quad (3.14)$$

mit berechnet werden

3.3 Variationsformulierung

In Kapitel (3.1) wurden die kinetische und potenzielle Energie (Gleichungen 3.6 und 3.1) schon berechnet. Damit lässt sich das Prinzip von Hamilton (Gleichung 2.17) auswerten. Mit der Annahme, dass für die virtuelle Arbeit der potentiallosen Kräfte $\delta W = 0$ gilt, vereinfacht sich Gleichung (2.17) zu

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E_{kin} dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta E_{pot} dt = 0. \quad (3.15)$$

Nach der Variation sowie partiellen Integration ergibt sich die kinetische Energie zu

$$\begin{aligned} \delta E_{kin} = & \rho A \int_{t_1}^{t_2} \int_{(L)} -u_{tt} \delta u - v_{tt} \delta v - w_{tt} \delta w - 2v_t \Omega \delta w + 2w_t \Omega \delta v + v \Omega^2 \delta v + w \Omega^2 \delta w \, dx \, dt \\ & + \rho I \int_{t_1}^{t_2} \int_{(L)} -v_{xxt} \delta v_x - w_{xxt} \delta w_x - 2\phi_{tt} \delta \phi \, dx \, dt + 2\phi \Omega^2 \delta \phi \\ & + \rho A \int_{t_1}^{t_2} \int_{(L)} e \Omega^2 \delta v \, dx \, dt \end{aligned} \quad (3.16)$$

und die potenzielle Energie zu

$$\begin{aligned} \delta E_{pot} = & \frac{EA}{2} \int_{(L)} [(2u_x + 3u_x^2 + v_x^2 + w_x^2 + u_x^3 + u_x v_x^2 + u_x w_x^2) \delta u_x \\ & + (2v_x u_x + v_x u_x^2 + v_x^3 + v_x w_x^2) \delta v_x + (2w_x u_x + w_x u_x^2 + w_x v_x^2 + w_x^2) \delta w_x] \, dx \\ & + EI \int_{(L)} v_{xx} \delta v_{xx} + w_{xx} \delta w_{xx} \, dx + EI_t \int_{(L)} \phi_x \delta \phi_x \, dx. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Wegen der Nichtlinearität wird die variierte potenzielle Energie durch eine Taylorreihe linearisiert. Die linearisierte potenzielle Energie lautet

$$\begin{aligned} \Delta \delta E_{pot} = & \frac{\partial \delta E_{pot}}{\partial u_x} \Delta u_x + \frac{\partial \delta E_{pot}}{\partial v_x} \Delta v_x + \frac{\partial \delta E_{pot}}{\partial w_x} \Delta w_x + \frac{\partial \delta E_{pot}}{\partial v_{xx}} \Delta v_{xx} + \frac{\partial \delta E_{pot}}{\partial w_{xx}} \Delta w_{xx} + \frac{\partial \delta E_{pot}}{\partial \phi_x} \Delta \phi_x \\ = & EA \int_{(L)} \left[\left(1 + 3u_x + \frac{3}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}v_x^2 + \frac{1}{2}w_x^2 \right) \Delta u_x + (v_x + v_x u_x) \Delta v_x + (w_x + w_x u_x) \Delta w_x \right] \delta u_x \, dx \\ & + EA \int_{(L)} \left[(v_x + v_x u_x) \Delta u_x + \left(u_x + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{3}{2}v_x^2 + \frac{1}{2}w_x^2 \right) \Delta v_x + (v_x w_x) \Delta w_x \right] \delta v_x \, dx \\ & + EA \int_{(L)} \left[(w_x + w_x u_x) \Delta u_x + (v_x w_x) \Delta v_x + \left(u_x + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}v_x^2 + \frac{3}{2}w_x^2 \right) \Delta w_x \right] \delta w_x \, dx. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die linearisierte potenzielle Energie wird in Gleichung (3.15) eingesetzt, wodurch

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E_{kin} \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \Delta \delta E_{pot} \, dt = 0 \quad (3.19)$$

gilt.

3.4 Diskretisierung

Die linearisierte Variationsformulierung aus dem vorherigen Abschnitt wird mit dem FE-Ansatz aus Gleichung (3.13) diskretisiert. Damit kann die diskretisierte schwache Formulierung der Bewegungsdifferentialgleichung mit

$$\begin{aligned}
0 = & \rho A \int_{t_1}^{t_2} \int_{(L)} [\vec{N}^u]^T \vec{N}^u \vec{u}_{tt} \delta \vec{u} + [\vec{N}^v]^T \vec{N}^v \vec{v}_{tt} \delta \vec{v} + [\vec{N}^w]^T \vec{N}^w \vec{w}_{tt} \delta \vec{w} + 2\Omega [\vec{N}^v]^T \vec{N}^w \vec{v}_t \delta \vec{w} \\
& - 2\Omega [\vec{N}^w]^T \vec{N}^v \vec{w}_t \delta \vec{v} - \Omega^2 [\vec{N}^v]^T \vec{N}^v \vec{v} \delta \vec{v} - \Omega^2 [\vec{N}^w]^T \vec{N}^w \vec{w} \delta \vec{w} dx dt \\
& + \rho I \int_{t_1}^{t_2} \int_{(L)} [\vec{N}_x^v]^T \vec{N}_x^v \vec{v}_{tt} \delta \vec{v} + [\vec{N}_x^w]^T \vec{N}_x^w \vec{w}_{tt} \delta \vec{w} - 2\Omega [\vec{N}^\phi]^T \vec{N}^\phi \vec{\phi} \delta \vec{\phi} \\
& + 2\Omega [\vec{N}^\phi]^T \vec{N}^\phi \vec{\phi}_t \delta \vec{\phi} dx dt + \rho A \int_{t_1}^{t_2} \int_{(L)} -e\Omega^2 [\vec{N}^v]^T \delta \vec{v} dx dt \\
& + EA \int_{t_1}^{t_2} \int_{(L)} \left[(1 + 3u_x + \frac{3}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}v_x^2 + \frac{1}{2}w_x^2) \vec{N}_x^u \Delta u + (v_x + v_x u_x) \vec{N}_x^v \Delta v \right. \\
& \left. + (w_x + w_x u_x) \vec{N}_x^w \Delta w \right]^T \vec{N}_x^u \delta u dx dt + EA \int_{t_1}^{t_2} \int_{(L)} \left[(u_x + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{3}{2}v_x^2 + \frac{1}{2}w_x^2) \vec{N}_x^v \Delta v \right. \\
& \left. + (v_x + v_x u_x) \vec{N}_x^u \Delta u + (v_x w_x) \vec{N}_x^w \Delta w \right]^T \vec{N}_x^v \delta v dx dt + EA \int_{t_1}^{t_2} \int_{(L)} \left[(w_x + w_x u_x) \vec{N}_x^u \Delta u \right. \\
& \left. + (v_x w_x) \vec{N}_x^v \Delta v + (u_x + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}v_x^2 + \frac{3}{2}w_x^2) \vec{N}_x^w \Delta w \right]^T \vec{N}_x^w \delta w dx dt. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

angegeben werden. Die Massenmatrix eines Elements lautet

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_e = & \int_{-1}^{+1} \rho A \left([\vec{N}^u]^T \vec{N}^u + [\vec{N}^v]^T \vec{N}^v + [\vec{N}^w]^T \vec{N}^w \right. \\
& \left. + \rho I \left([\vec{N}_x^v]^T \vec{N}_x^v + [\vec{N}_x^w]^T \vec{N}_x^w + 2\Omega [\vec{N}^\phi]^T \vec{N}^\phi \right) d\xi \right), \tag{3.21}
\end{aligned}$$

die gyroskopische Matrix

$$\mathbf{D}_e = \rho A \int_{-1}^{+1} 2\Omega [\vec{N}^v]^T \vec{N}^w - 2\Omega [\vec{N}^w]^T \vec{N}^v d\xi \tag{3.22}$$

und Fliehkraftbelastung

$$\vec{f}_e = \rho A \int_{-1}^{+1} -e\Omega^2 [\vec{N}^v]^T d\xi. \tag{3.23}$$

Zur Angabe der Steifigkeitsmatrix werden die Ableitungen nach dx in $d\xi$ umgeschrieben mittels

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l_e} \Rightarrow dx = \frac{l_e}{2} d\xi. \tag{3.24}$$

Damit lautet die Elementsteifigkeitsmatrix

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_e = & \frac{l_e}{2} \int_{-1}^{+1} \rho A \left(-\Omega^2 [\vec{N}^v]^T \vec{N}^v - \Omega^2 [\vec{N}^w]^T \vec{N}^w \right) + \rho I \left(-2\Omega [\vec{N}^\phi]^T \vec{N}^\phi \right) \\
& + EA \left\{ \left[(1 + 3u_x + \frac{3}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}v_x^2 + \frac{1}{2}w_x^2) \vec{N}_x^u + (v_x + v_x u_x) \vec{N}_x^v + (w_x + w_x u_x) \vec{N}_x^w \right]^T \vec{N}_x^u \right. \\
& \left. + \left[(u_x + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{3}{2}v_x^2 + \frac{1}{2}w_x^2) \vec{N}_x^v + (v_x + v_x u_x) \vec{N}_x^u + (v_x w_x) \vec{N}_x^w \right]^T \vec{N}_x^v \right. \\
& \left. + \left[(w_x + w_x u_x) \vec{N}_x^u + (v_x w_x) \vec{N}_x^v + (u_x + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}v_x^2 + \frac{3}{2}w_x^2) \vec{N}_x^w \right]^T \vec{N}_x^w \right\} d\xi. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Die Größe einer Elementmatrix ist 12×12 . Für die Elementmassenmatrix werden die Einträge folgendermaßen angegeben

$$\mathbf{M}_{ei} = \begin{bmatrix} M_{ei;1,1} & M_{ei;1,2} & \cdots & M_{ei;1,12} \\ M_{ei;2,1} & M_{ei;2,2} & \cdots & M_{ei;2,12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{ei;12,1} & M_{ei;12,2} & \cdots & M_{ei;12,12} \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

Damit kann die Gesamtmaschenmatrix nach

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{e1;1,1} & \cdots & M_{e1;1,6} & M_{e1;1,7} & \cdots & M_{e1;1,12} & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots \\ M_{e1;6,1} & \cdots & M_{e1;6,6} & M_{e1;6,7} & \cdots & M_{e1;6,12} & 0 & \cdots \\ M_{e1;7,1} & \cdots & M_{e1;7,6} & M_{e1;7,7} + M_{e2;1,1} & \cdots & M_{e1;7,12} + M_{e2;1,6} & M_{e2;1,7} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots \\ M_{e1;12,1} & \cdots & M_{e1;12,6} & M_{e1;12,7} + M_{e2;6,1} & \cdots & M_{e1;12,12} + M_{e2;6,6} & M_{e2;6,7} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & M_{e2;7,1} & \cdots & M_{e2;7,6} & \ddots & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

zusammengebaut werden. Nach gleicher Regel werden auch die Steifigkeitsmatrix und die gyroskopische Matrix des gesamten Systems zusammengebaut. Der gesamte Fliehkraftvektor wird nach

$$\vec{f} = [f_{e1;1} \ \cdots \ f_{e1;6} \ f_{e1;7} + f_{e2;1} \ \cdots \ f_{e1;12} + f_{e2;6} \ f_{e2;7} + f_{e3;1} \ \cdots]^T \tag{3.28}$$

zusammengebaut. Mit den bereits definierten FE-Ansätzen ergibt sich für statische Probleme nach Gleichung 2.6

$$\mathbf{K} \vec{x} = \vec{f}. \tag{3.29}$$

und für dynamische Systeme nach Gleichung 2.5

$$\mathbf{M} \ddot{\vec{x}} + \mathbf{D} \dot{\vec{x}} + \mathbf{K} \vec{x} = \vec{f}. \tag{3.30}$$

3.5 Zustandsraumdarstellung

Durch die Definition der Zustandsgrößen

$$\left. \begin{array}{l} \vec{z}_1 = \vec{x} \\ \vec{z}_2 = \dot{\vec{x}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{\vec{z}}_1 = \vec{z}_2 \\ \dot{\vec{z}}_2 = \ddot{\vec{x}} = -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \vec{z}_1 - \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{z}_2 \end{array} \right. \quad (3.31)$$

kann die Gleichung (3.30) im Zustandsraum

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{z}}_1 \\ \dot{\vec{z}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

angegeben werden. Es kennzeichnet **0** die Nullmatrix und **E** die Einheitsmatrix. Die Eigenfrequenzen der Struktur können durch die Eigenwerte der Systemmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

bestimmt werden.

4 Experimentelle Untersuchungen

4.1 Versuchsziel und -planung

Der Hauptzweck dieses Experiments besteht darin, die Modalanalyse der HSC-Werkzeugschäfte unter Rotation und Exzentrizität durchzuführen. Dafür wurden folgende Teilaufgaben bearbeitet:

1. Äquivalente Realisierung der Rotation mit Exzentrizität bei HSC-Schäften.
2. Festlegung geeigneter Versuchsobjekte (Abmessungen der Probekörper).
3. Aufbau des Versuchsstands und Durchführung der Messungen.

Die Messdaten sollen zum Validieren des theoretisch Modells eines rotierenden Schafts mit Exzentrizität dienen. Die Planung kann unterteilt werden in den allgemeinen Messaufbau und die Wahl der Probekörper.

Für die Modalanalyse wird zur Erregung ein Impulshammer verwendet. Anschließend wird mit einem Beschleunigungssensor die Antwort gemessen und die Übertragungsfunktion ermittelt. Die Übertragungsfunktion ist mit

$$H(\omega) \equiv \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (4.1)$$

gegeben und repräsentiert das komplexe Verhältnis zwischen Ausgang $Y(\omega)$ und Eingang $X(\omega)$ als Funktion der (Kreis-) Frequenz ω . Die Übertragungsfunktion beschreibt die dynamischen Verhältnisse eines Systems unabhängig von der zur Messung benutzten Signalart [Døs89].

Die Übertragungsfunktion wird dabei für verschiedene Anregungspunkte bestimmt. Diese Versuchsmethode erlaubt es nicht, die experimentelle Modalanalyse unter Rotation durchzuführen, da der Beschleunigungssensor kabelgebunden ist. Aus diesem Grund wird am oberen Ende des Werkzeugschafts eine Radialkraft angebracht. Damit wird die Wirkung der Fliehkraft infolge der Rotation sowie Exzentrizität äquivalent berücksichtigt. Durch die Formänderungsenergie kann der Zusammenhang zwischen Radialkraft F und Schwerpunktgeschwindigkeit ($e\Omega$) bestimmt werden. Nach [GHSW17] lautet die Formänderungsenergie für einen Biegebalken

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_b^2(x)}{EI} dx. \quad (4.2)$$

Wie die Abbildung 4.1 gezeigt, für einen Balken mit Rotation und Exzentrizität ergibt sich das Schnittmoment zu

$$M_{b1}(x) = - \int_x^L \rho A e \Omega^2 (\xi - x) d\xi = \rho A e \Omega^2 \left[-\frac{L^2}{2} + Lx - \frac{x^2}{2} \right], \quad (4.3)$$

womit die Formänderungsenergie wie folgt

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_{b1}^2(x)}{EI} dx = \frac{\rho^2 A^2 e^2 \Omega^4 L^5}{40 EI} \quad (4.4)$$

lautet. Beim Balken mit Radialkraft ergibt sich das Schnittmoment zu

$$M_{b2}(x) = F \cdot (x - L) \quad (4.5)$$

und damit die Formänderungsenergie zu

$$W_2 = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_{b2}^2(x)}{EI} dx = \frac{F^2 L^3}{6EI}. \quad (4.6)$$

Das Verhältnis zwischen Radialkraft F und Schwerpunktgeschwindigkeit ($e\Omega$) folgt aus

$$W_1 \stackrel{!}{=} W_2 \Rightarrow F = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5}} \rho A L e \Omega^2. \quad (4.7)$$

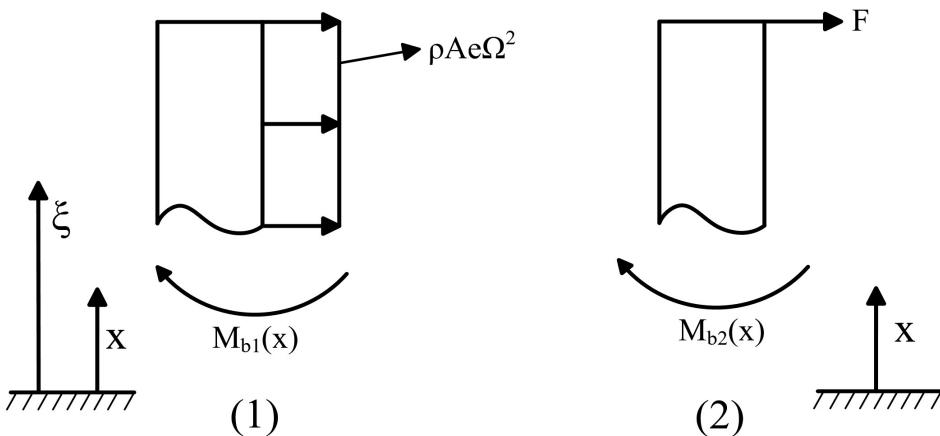


Abbildung 4.1: Schnittmoment für (1) einen Balken mit Rotation und Exzentrizität und (2) einen Balken mit Radialkraft.

Durch Änderung der Radialkraft können unterschiedliche Werte der Schwerpunktgeschwindigkeit ($e\Omega$) nach Gleichung 4.7 simuliert werden. Die Radialkraft soll dabei mit einer Feder aufgebracht werden, welche die Gesamtsteifigkeit möglichst wenig beeinflusst. Auf die Lagerung des Schaftes und die Verbindung mit der Feder wird später eingegangen [Kok09].

4.2 Versuchsaufbau

4.2.1 Versuchsobjekt

Bei den Versuchen werden HSC-Hohlschäfte mit unterschiedlicher Wandstärke verwendet. Die dazugehörigen Parameter sind in der folgenden Tabelle 4.2.1 zusammengestellt.

Nr.	Bezeichnung	Werkstoff	Aussen-durchmesser [mm]	Wandstärke [mm]	L/D-Verhältnis	Masse [g]
1	Schaft-10 × 8	S235J0	10	1	33	72,77
2	Schaft-10 × 9	S235J0	10	0,5	33	38,41

Tabelle 4.1: Parameter der verwendeten Versuchsschäfte.

Für die Lagerung und Einbringung der Vorspannkraft ist es jedoch notwendig, weitere Bauteilen an den jeweiligen Schaft anzubringen. In Abbildung 4.2 ist zunächst die Geometrie der Probe Nr.1 dargestellt.

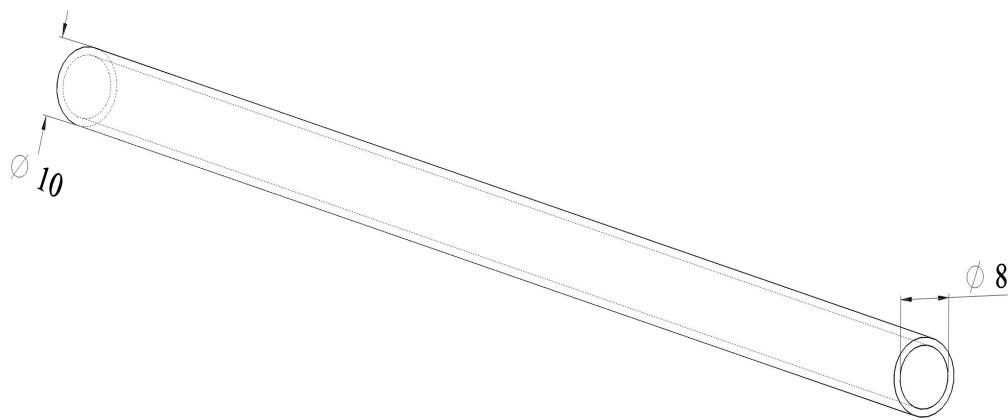


Abbildung 4.2: 3D-Modell von Probekörper Nr.1 (Schaft- 10×8).

Dazu wird das untere Ende des Schafes auf einen Stopfen aufgeschrumpft. Analog dazu wird das obere Ende des Schafes auf einen Stopfen für die Einbringung der Federkraft aufgeschrumpft. Die beiden Bauteile sind in Abbildung 4.3 dargestellt.

Der Stopfen für die Krafteinbringung weist einen Würfeln am freien Ende auf. Dieser dient dazu, den Beschleunigungssensor magnetisch anzuheften. Weiterhin ist eine Gewindebohrung eingebracht, um eine Ringschraube einschrauben zu können. Über diese wird dann die Vorspannkraft mittels Feder eingeleitet.

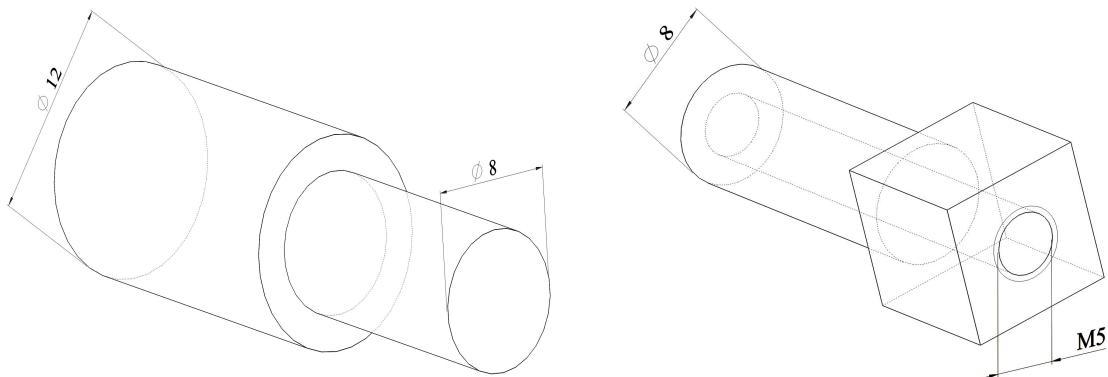


Abbildung 4.3: 3D-Modelle der Stopfen für den Schaft- 10×8 für die Lagerung (links) und Einbringung der Vorspannkraft (rechts).

In Abbildung 4.4 ist nochmals der Zusammenbau der einzelnen Teile zu einer Baugruppe zu sehen. Darin ist auch eine Ringschraube enthalten, über welche die Feder zur Vorspannung eingehängt wird. Die komplette Bauteile (z.B. Aufnahmehaltung und -platte, Gegenkrafthalterung) sind durch die Zeichnungen im Anhang dargestellt.

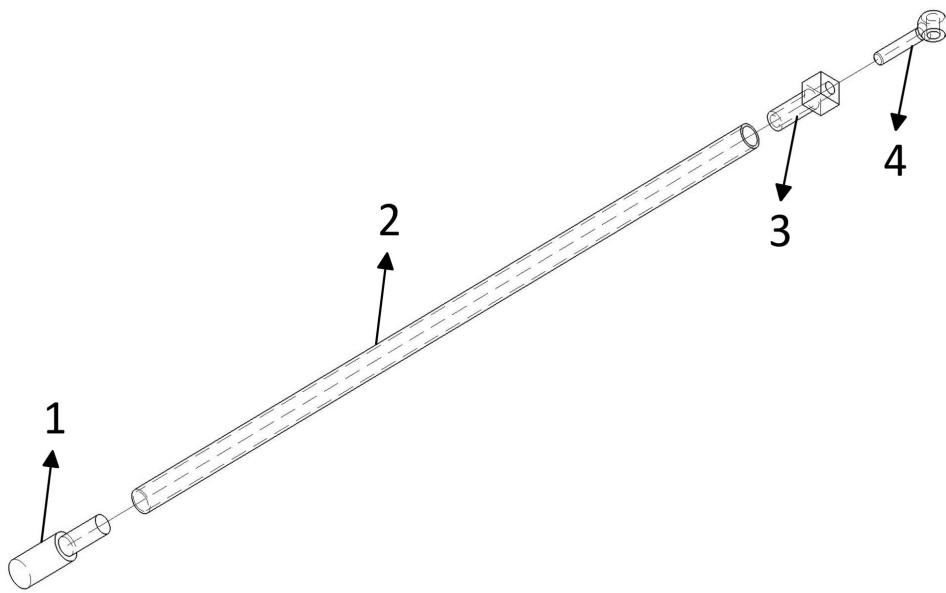


Abbildung 4.4: 3D-Modell der Baugruppe des Schaftes- 10×8 (1: Stopfen Lagerung, 2: Schaft, 3: Stopfen Vorspannkraft, 4: Ringschraube).

4.2.2 Aufbau des Versuchsstandes

Die Abbildung 4.5 zeigt die grundsätzlichen Komponenten des Versuchsaufbaus in der Prüfumgebung. Es handelt sich dabei um die folgende Objekte:

- Objekt 1: PC-Monitor mit der Bedienoberfläche von PULSE LABSHOP, um den Versuchstatus zu überprüfen.
- Objekt 2: Impulshammer, welcher durch Anschlagen der Versuchsprobe die Anregung erzeugt.
- Objekt 3: Versuchskörper, wie er bereits in Abbildung 4.4 gezeigt wurde.
- Objekt 4: Beschleunigungssensor zur Messung Systemantwort.
- Objekt 5: Haltevorrichtung zur Befestigung der Feder.
- Objekt 6: Kraftsensor zur Messung der aufgebrachten Vorspannkraft.
- Objekt 7: Analog-Digital-Wandler, welcher die aktuelle Vorspannkraft anzeigt.

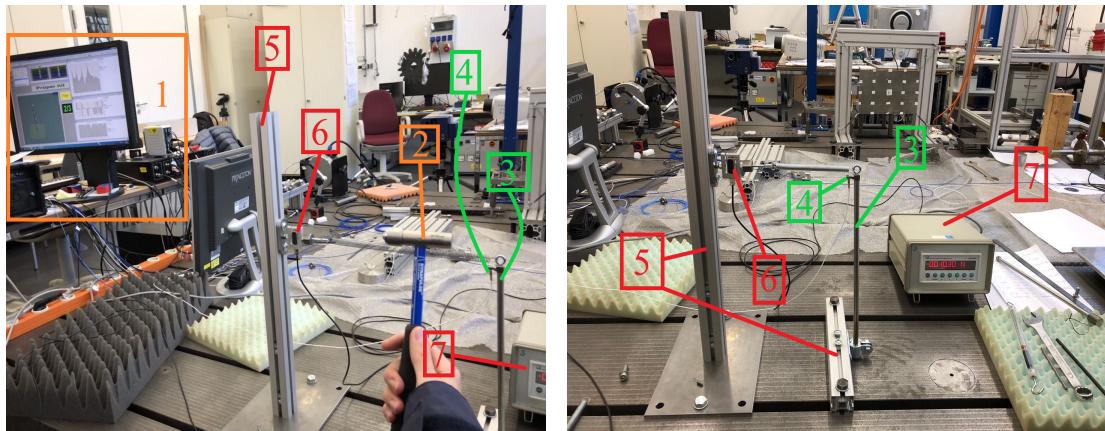


Abbildung 4.5: Versuchsaufbau mit einzelnen Objekten.

4.2.3 Messsoftware

In Bezug auf die Messsoftware werden in dieser Arbeit zwei Softwarepakete verwendet. Bei dem ersten handelt es sich um PULSE LABSHOP von der Firma BRÜEL & KJÆR. Damit werden die Sensorsignale analysiert und für mehrere Messwiederholungen gemittelt. Die für dieses Experiment verwendete Bedienoberfläche von PULSE LABSHOP ist im Wesentlichen in Abbildung 4.6 dargestellt.

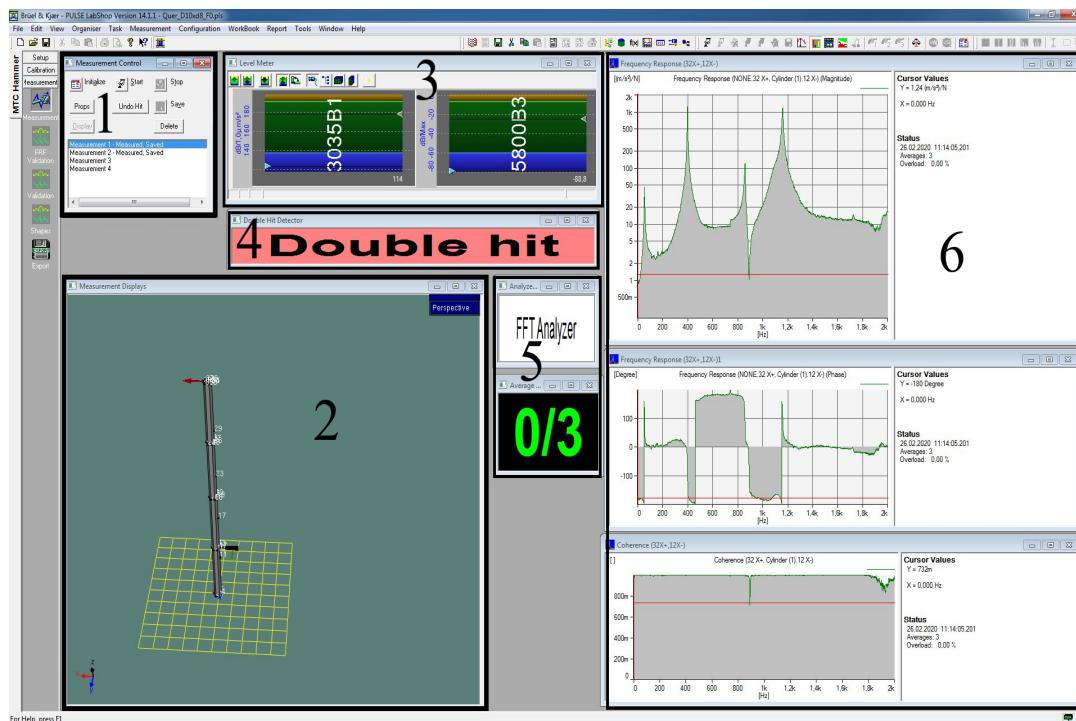


Abbildung 4.6: Userinterface für PULSE LABSHOP Version 14.1.1 von BRÜEL & KJÆR.

Die einzelnen Bildbereiche besitzen dabei folgende Bedeutung:

Q.Sun, Experimentelle und simulative Modalanalyse eines Werkzeugschaftes beim HSC-Fräsen unter Einfluss eines Exzentrizitätsfehlers

- Bereich 1: Steuerung der experimentelle Aktionen, einschließlich Initialisierung, Start, Stopp und Auswahl von Messpunkten. Für jeden Messpunkt werden die Ergebnisse von drei Messungen gemittelt.
- Bereich 2: Visualisierung eines dreidimensionales Modells der des Probenkörpers. Angezeigt werden die Punkte der Anregung (schwarzer Pfeil) und der Punkt der Beschleunigungsmessung (roter Pfeil). und der Anzeige von Messpunkten.
- Bereich 3: Anzeige des aktuellen Messpegels für den Kraft und Beschleunigungssensor.
- Bereich 4: Mit diesem Erkennungsmodul werden eventuelle Doppelschläge angezeigt.
- Bereich 5: Anzeige der erfolgreich durchgeföhrten Messungen pro Messpunkt.
- Bereich 6: Anzeige der gemessenen Übertragungsfunktion für den aktuellen Messpunkt (oben), Phasenwinkel (mitte) und Kohärenzfunktion (unten).

Es werden die Übertragungsfunktionen für vier Messpunkte am Schaft ermittelt. Mit den drei Wiederholungen je Messpunkt ergeben sich 12 Messungen pro Schaft. Die Weiterverarbeitung der Übertragungsfunktionen erfolgt mit der zweiten Software ME'SCOPEVES von VIBRANT TECHNOLOGY INC. Damit können die Modalparameter und auch die Modeformen ermittelt werden. Abschließend zeigt Abbildung 4.7 das dazugehörige Userinterface.

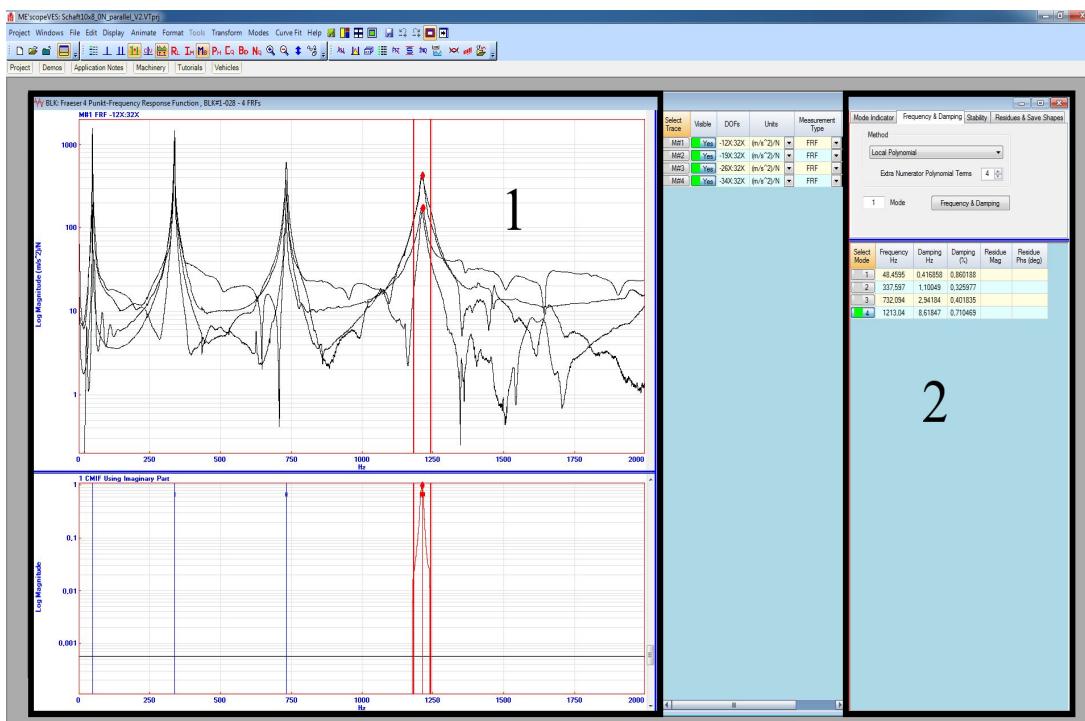


Abbildung 4.7: Userinterface der Software ME'SCOPEVES von VIBRANT TECHNOLOGY INC.

Der Bereich 1 zeigt die vier Übertragungsfunktionen in einem Diagramm. Gut zu erkennen sind die einzelnen Peaks, welche die Eigenfrequenzen darstellen. Im Bereich 2 sind die ermittelten Modalparameter (Frequenz und Dämpfung) für die ersten vier Biegemode dargestellt.

4.3 Experimentelle Modalanalyse

Wie im Versuchsplan angegeben ist zuerst die experimentelle Identifikation der Modalparameter der Struktur durchzuführen. Die Eigenfrequenzen des Probekörper werden als wichtiger Kennwert durch die experimentelle Modalanalyse bestimmt.

Die Messung der Eigenfrequenz erfolgt nach der sogenannten Impulshammermethode. Der einseitige eingespannte HSC-Schaft wird hierfür an vier Punkten nacheinander angeregt. Beim Anschlagen mit dem Impulshammer (Typ 5800B3 von DYTRAN INSTRUMENTS) wird das entstehende Kraftsignal aufgezeichnet. Zeitgleich erfolgt die Messung der Antwort mittels des Beschleunigungssensors (Typ 3035B3 von DYTRAN INSTRUMENTS), welcher magnetisch mit dem Versuchskörper verbunden ist.

Die vom Beschleunigungsmesser und Impulshammer erhaltenen Signale werden von Messsoftware PULSE LABSHOP verarbeitet und durch die Übertragungsfunktion dargestellt [Døs89]. Durch das Exportieren der Messergebnisse in die Software Modalanalyse-Software ME'SCOPEVES können die Modalparameter berechnet werden. Im nächsten Kapitel werden die simulierten Eigenfrequenzen und die experimentellen Ergebnisse ausführlich analysiert und verglichen.

5 Ergebnisse

5.1 Probe Nr. 1 (Schaft 10×8)

Für die Simulationen wird das im Kapitel 3 beschriebene Modell verwendet. Die experimentellen Ergebnisse wurden mit dem in Kapitel 4 beschriebenen Aufbau ermittelt. Die Versuchsschäfte sind aus Stahl und besitzen folgende Materialdaten: $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ und $\nu = 0,28$. In den Abbildungen 5.1 und 5.2 ist die Abhängigkeit der Eigenfrequenzen von der Winkelgeschwindigkeit für $e = 0$ dargestellt. In den Abbildungen 5.3 und 5.4 werden die Ergebnisse im ruhenden Inertialsystem angegeben, d.h. Drehzahl [$1/\text{s}$] des Schafes zum steigenden Ast subtrahieren und zum fallenden Ast addieren.

Wie allen Abbildungen zeigen, splitten sich die Eigenfrequenzen auf. Der steigende Ast wird als rückwärtiger Mode und der fallende Ast als vorwärtiger bezeichnet. Beide Äste fallen oder steigen linear. Eine Abhängigkeit der Eigenfrequenzen vom Exzentrizitätsfehler e konnte bei den Simulationen nicht festgestellt werden.

Abbildung 5.5 zeigt die Durchbiegung des Schafes in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit Ω bei einem festen Exzentrizitätsfehler $e = 0,001 \text{ m}$. Es ist ersichtlich, dass mit steigender Winkelgeschwindigkeit die Durchbiegung zunimmt. Der Zusammenhang zwischen Durchbiegung und Ω ist dabei quadratisch.

Abbildung 5.6 zeigt die niedrigste Biegeeigenfrequenz abhängig von der Winkelgeschwindigkeit Ω und der Zugkraft F_x , die am Ende des Schafes wirkt. Für den Exzentrizitätsfehler gilt erneut $e = 0$. Es lässt sich beobachten, dass die Eigenfrequenzen mit steigender Zugkraft zunehmen. Grund hierfür ist der Spannungsversteifende Einfluss der Zugkraft.

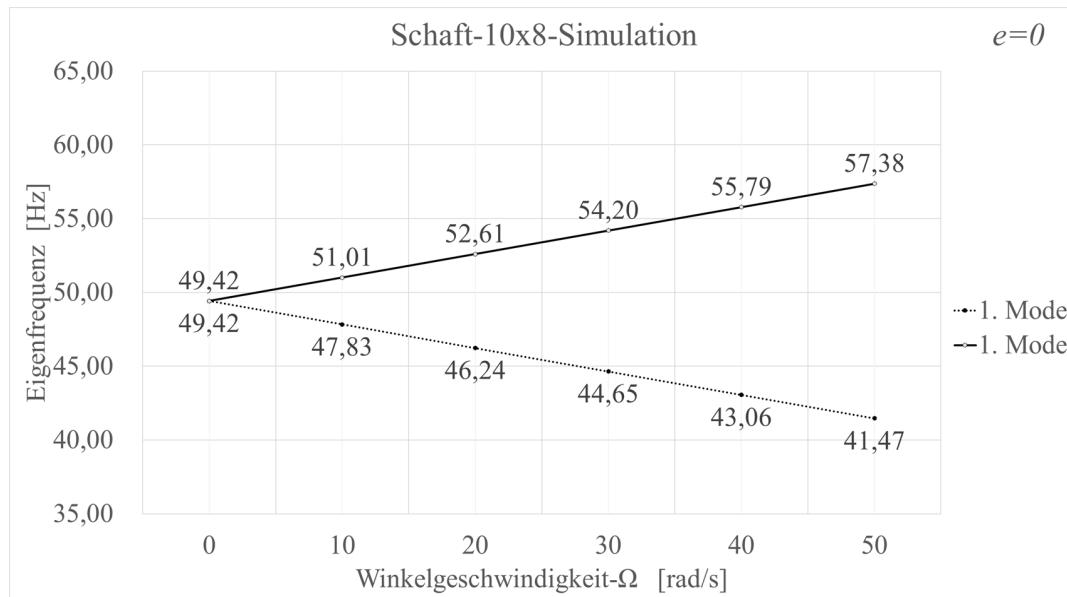


Abbildung 5.1: Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0$. Berechnungsparameter: Schaft 10×8 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\nu = 0,28$.

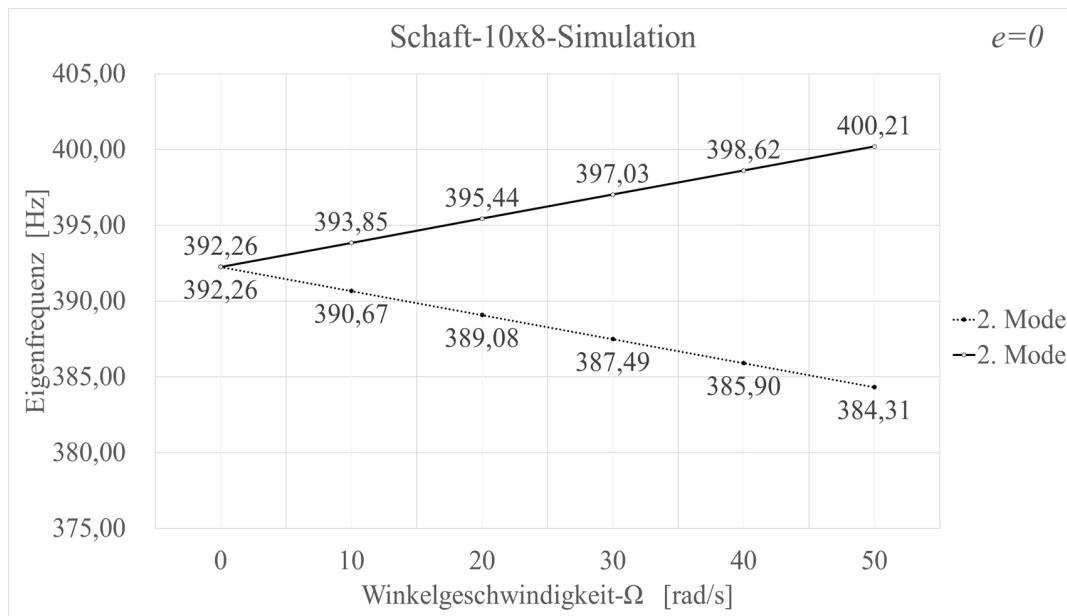


Abbildung 5.2: Eigenfrequenzen vom 2. Biegemode in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0$. Berechnungsparameter: Schaft 10×8 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$.

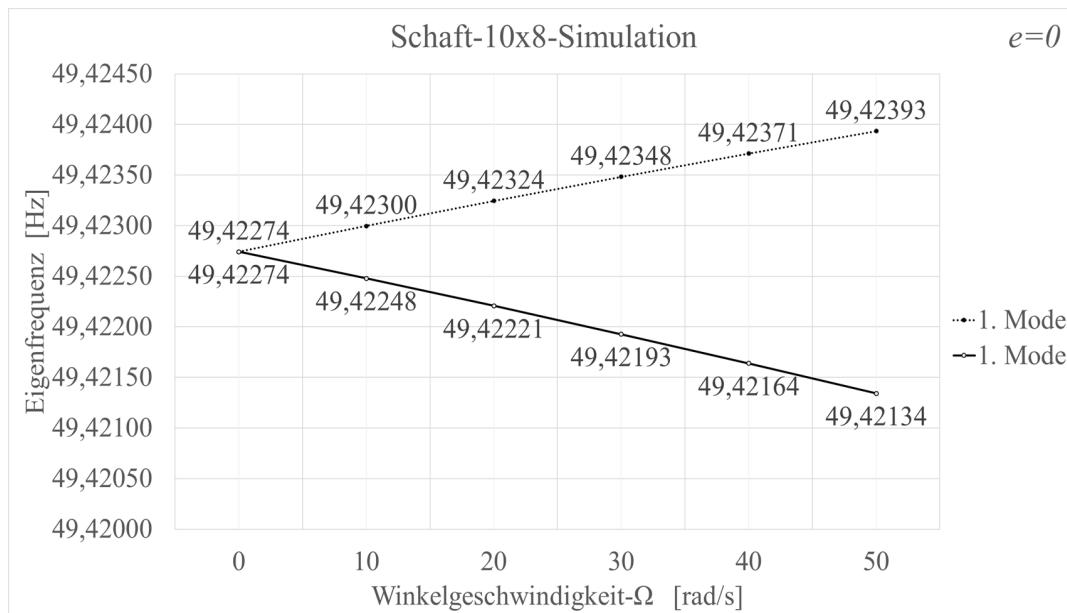


Abbildung 5.3: Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0$ im ruhenden Inertialsystem. Berechnungsparameter: Schaft 10×8 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$.

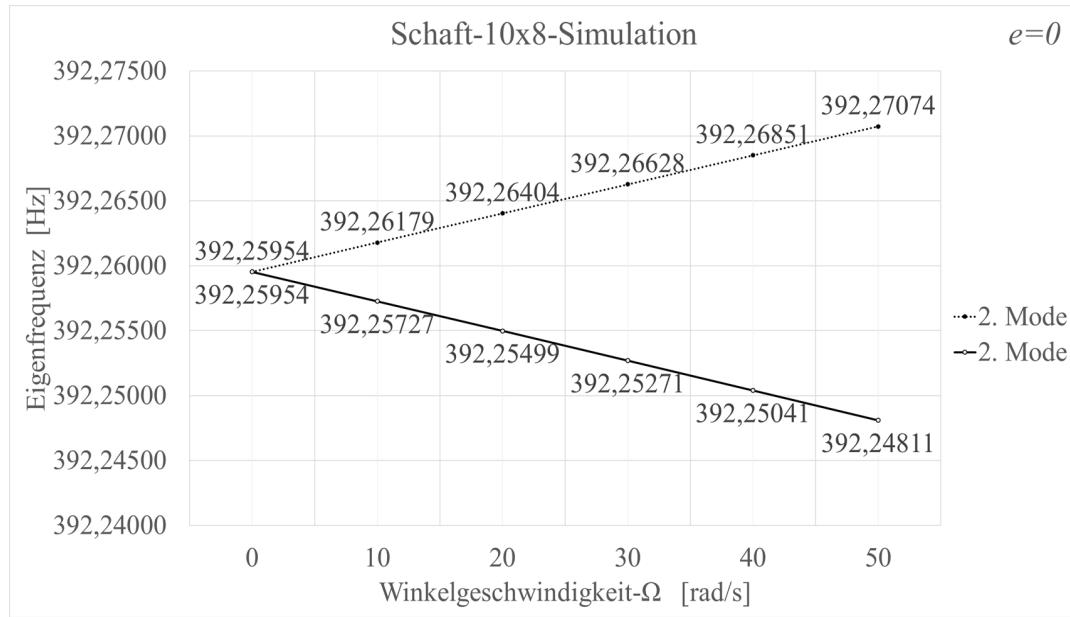


Abbildung 5.4: Eigenfrequenzen vom 2. Biegemode in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0$ im ruhenden Inertialsystem. Berechnungsparameter: Schaft 10×8 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$.

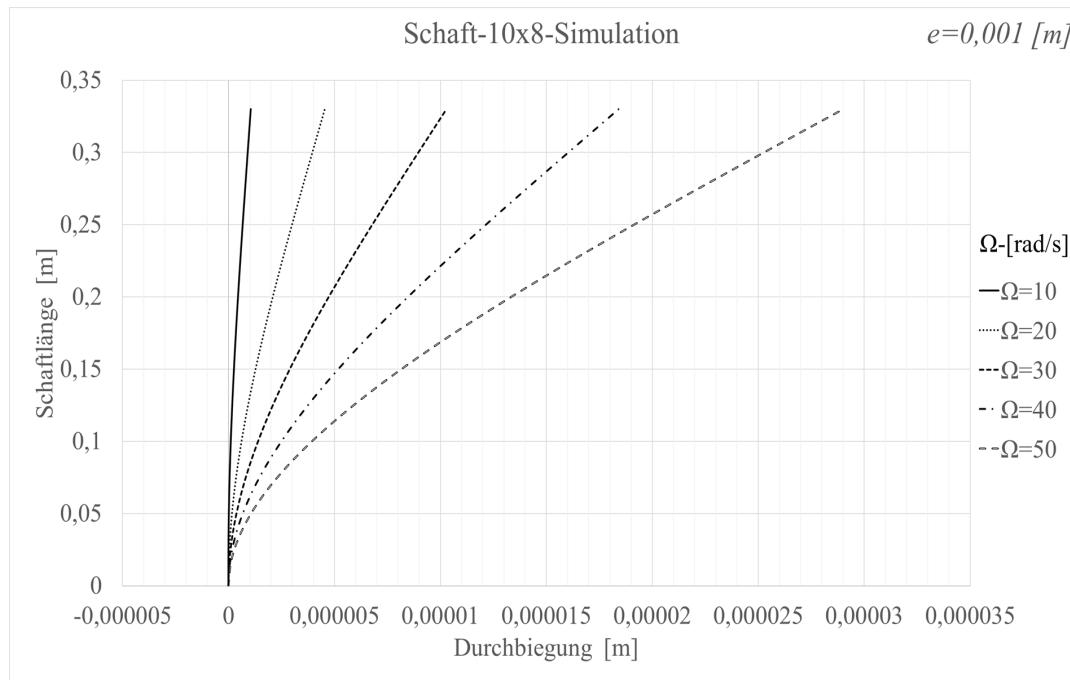


Abbildung 5.5: Durchbiegung in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0,001 \text{ m}$. Berechnungsparameter: Schaft 10×8 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$.

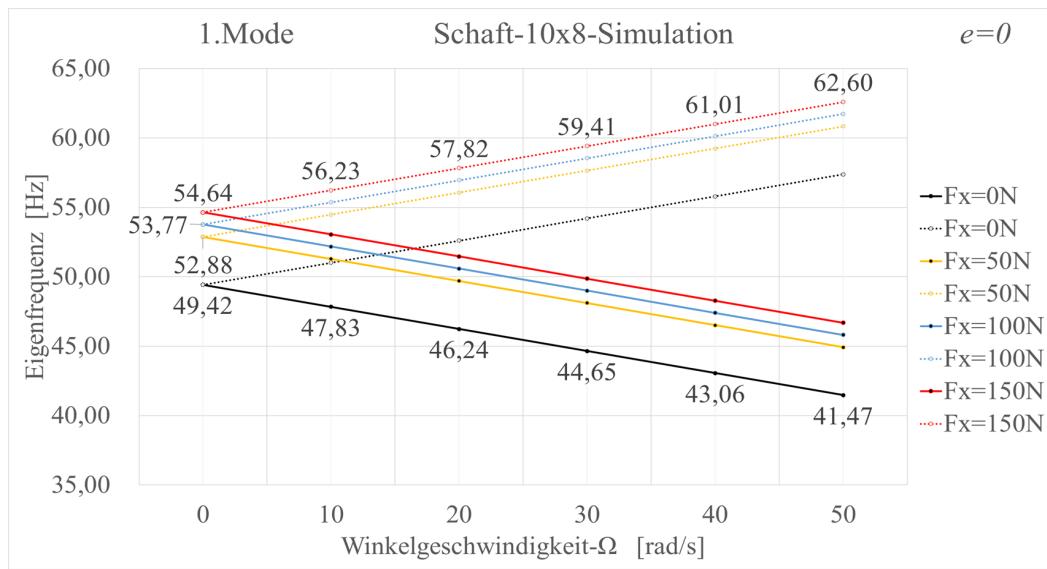


Abbildung 5.6: Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit Ω und der Zugkraft F_x bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0$. Berechnungsparameter: Schaft 10×8 , $\rho = 7800\text{kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11}\text{N/m}^2$, $v = 0,28$.

Die experimentellen Ergebnissen werden gemäß den verschiedenen Messrichtungen des Beschleunigungssensors in die zwei Fälle unterteilt. Die Messrichtung erfolgt entweder parallel oder senkrecht zur Anregungsrichtung. Nach Gleichung 4.7 kann die Radialkraft in ein Produkt aus Exzentrizitätsfehler ($e = 0,001\text{ m}$) und Winkelgeschwindigkeit umgerechnet werden. Weitere experimentelle Ergebnisse sind in den Abbildungen 5.7 bis 5.12 dargestellt.

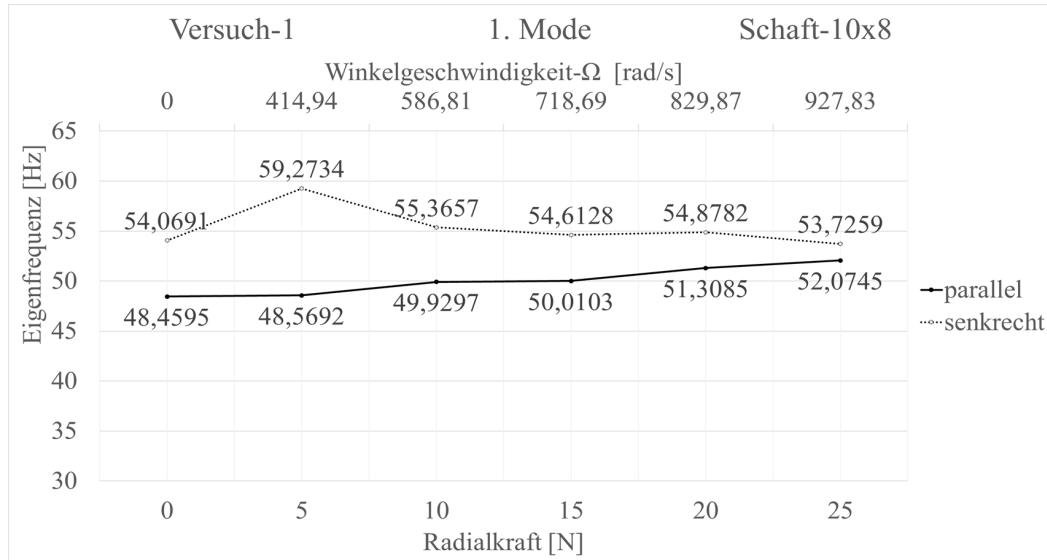


Abbildung 5.7: Gemessene Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen parallel und senkrecht zur Vorspannrichtung. (Probe Nr. 1 (Schaft 10×8), Versuchsreihe 1)

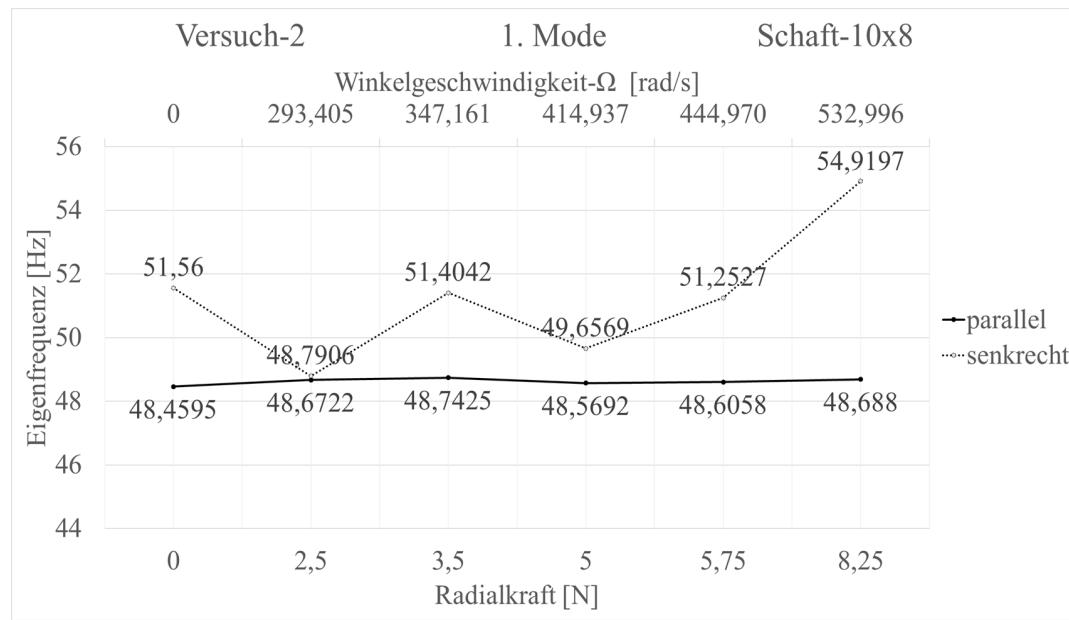


Abbildung 5.8: Gemessene Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen parallel und senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10 × 8), Versuchsreihe 2).

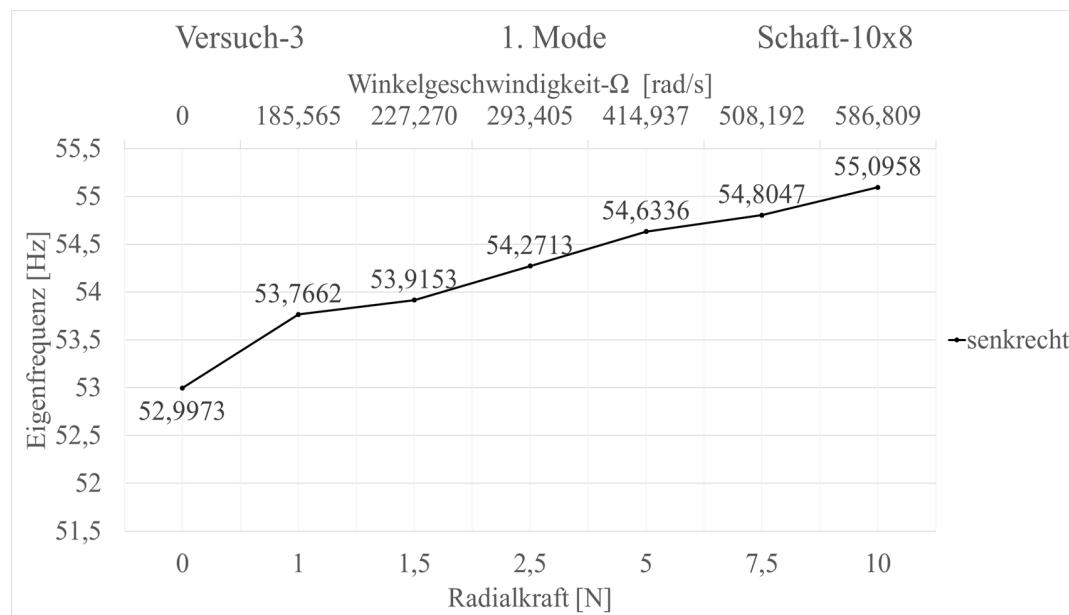


Abbildung 5.9: Gemessene Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10 × 8), Versuchsreihe 3).

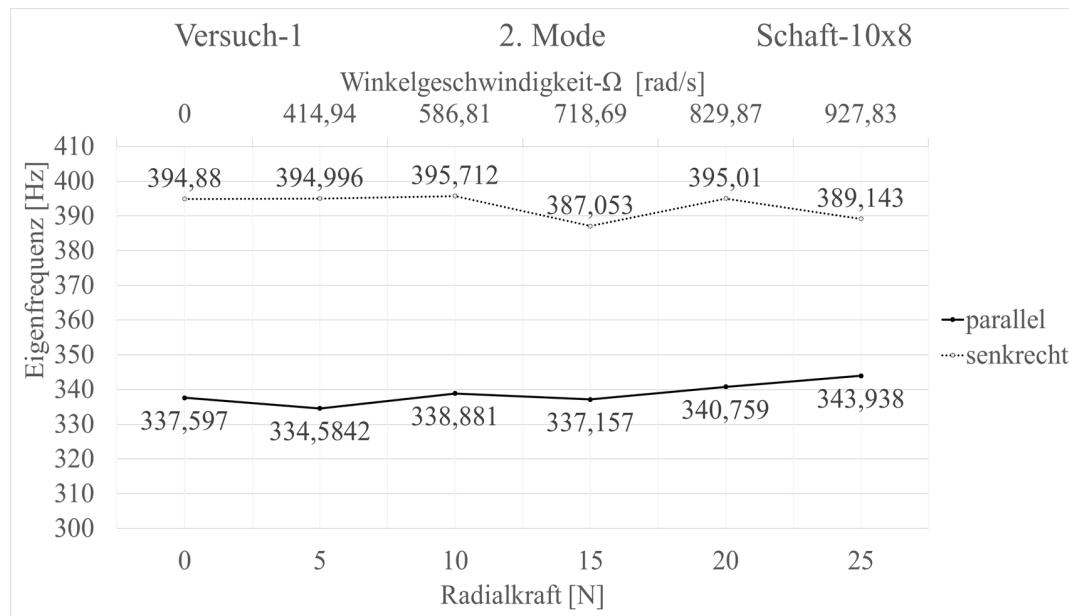


Abbildung 5.10: Gemessene Eigenfrequenzen vom 2. Biegemode in Abhängigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen parallel und senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10 × 8), Versuchsreihe 1).

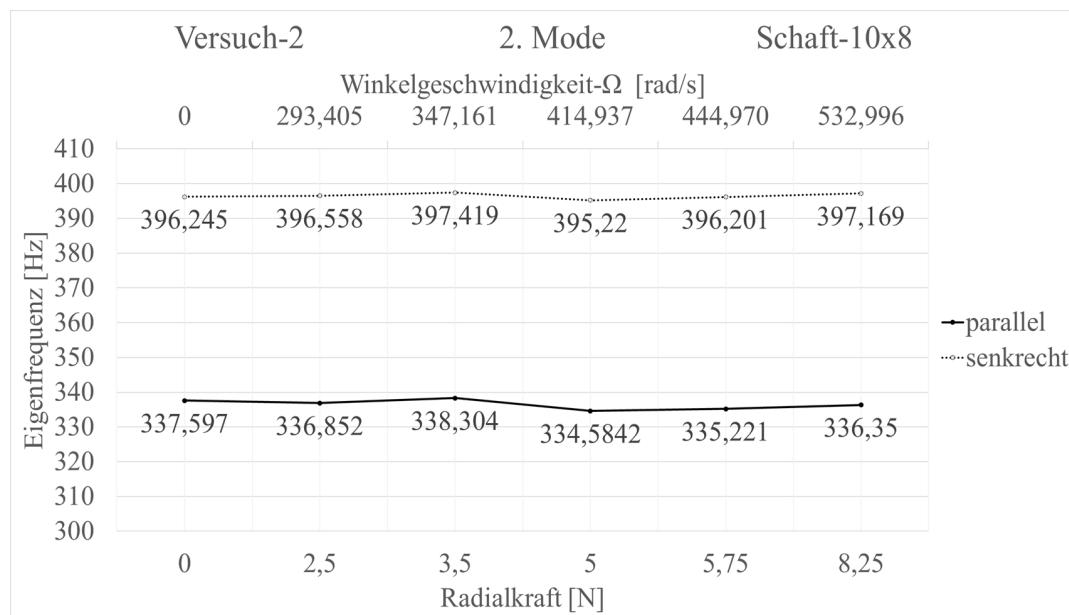


Abbildung 5.11: Gemessene Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen parallel und senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10 × 8), Versuchsreihe 2).

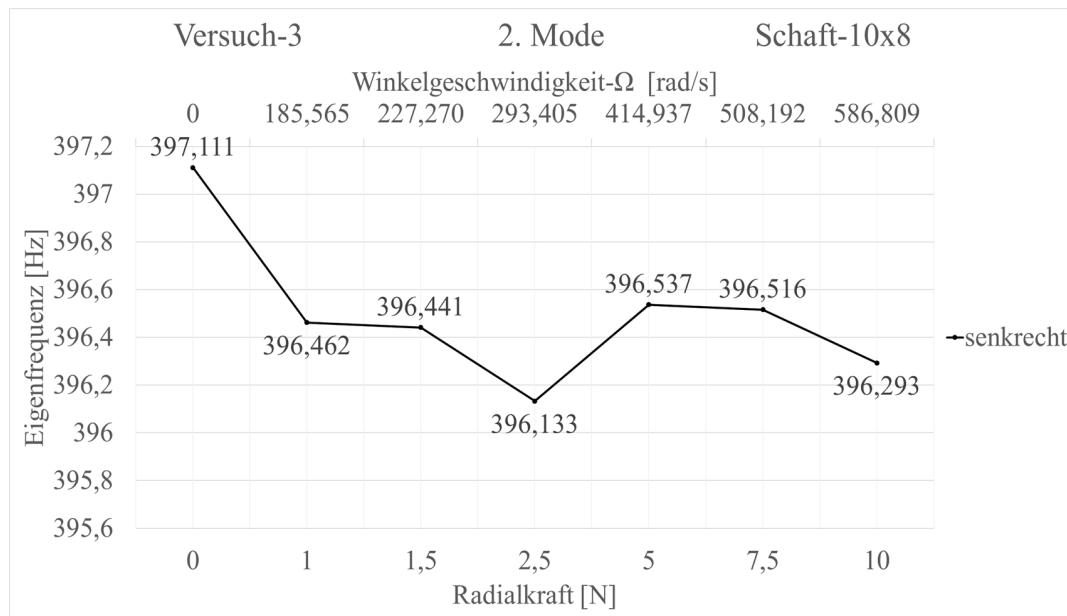


Abbildung 5.12: Gemessene Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10 × 8), Versuchsreihe 3).

Die Abbildungen 5.7 bis 5.9 zeigen die Ergebnisse für die ersten beiden Moden. Eine klare Abhängigkeit der Eigenfrequenzen lässt sich nur schwer ableiten. Tendenziell nehmen die Eigenfrequenzen senkrecht zur Vorspannrichtung mit zunehmender Vorspannkraft leicht zu (vgl. Abbildung 5.8 und 5.9). Parallel zur Vorspannrichtung ist der Einfluss der Vorspannkraft auf die Eigenfrequenzen geringer. Die Ungenauigkeiten der experimentellen Ergebnisse begründen sich mit verschiedenen Störungen und Messungenauigkeiten. Die Eigenfrequenz des ersten Modes im senkrechten Fall zeigt, dass mit zunehmender Radialkraft die Eigenfrequenz allmählich zunimmt. Werden die gemessenen und berechneten Eigenfrequenzen für den ruhenden Schaft verglichen, so fällt auf, dass die gemessenen Werte niedriger sind. Ursache dafür sind die zusätzliche Massen durch den Beschleunigungssensor und die Feder.

5.2 Probe Nr. 2 (Schaft 10×9)

Als zweiter Probekörper wird der Schaft-10 × 9 betrachtet. Die Materialparameter sind identisch zu Probe Nr.1. In den Abbildungen 5.13 bis 5.18 sind zunächst wieder die Simulationsergebnisse dargestellt. Die experimentellen Ergebnisse sind anschließend in den Abbildungen 5.19 bis 5.22 dargestellt.

Der Einfluss der Winkelgeschwindigkeit Ω und der Zugkraft F_x auf die Eigenfrequenzen ist ähnlich zu den Ergebnissen für Probe 1. Weiterhin hat auch hier der Exzentrizitätsfehler in Verbindung mit einer Winkelgeschwindigkeit keinen Einfluss auf die Eigenfrequenzen. Jedoch sind die Eigenfrequenzen im ruhenden Zustand für die Probe 2 niedriger als für Probe 1. Der Einfluss der Winkelgeschwindigkeit Ω auf die Durchbiegung ist analog zu den Ergebnissen für Probe 1. Jedoch sind die Durchbiegungen für die Probe 2, wegen der geringeren Steifigkeit, größer als bei Probe 1.

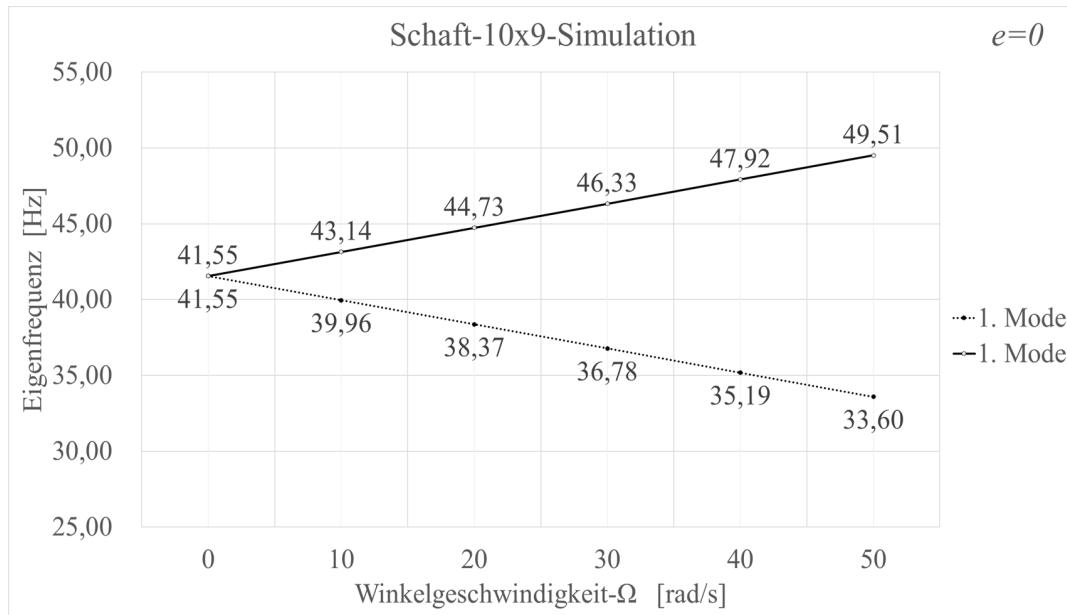


Abbildung 5.13: Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0$. Berechnungsparameter: Schaft 10×9 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$.

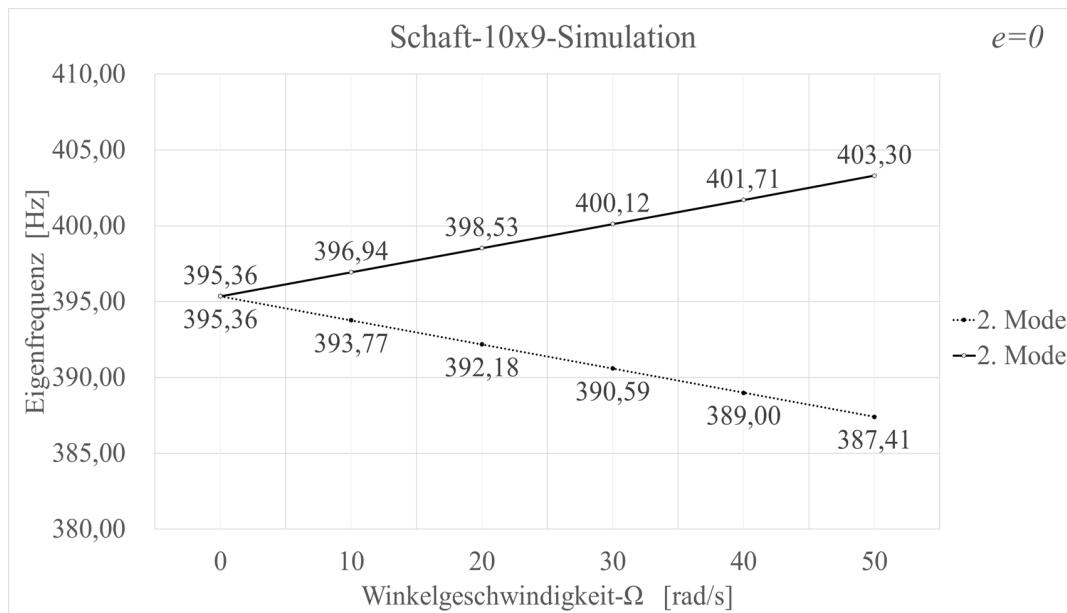


Abbildung 5.14: Eigenfrequenzen vom 2. Biegemode in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0$. Berechnungsparameter: Schaft 10×9 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$.

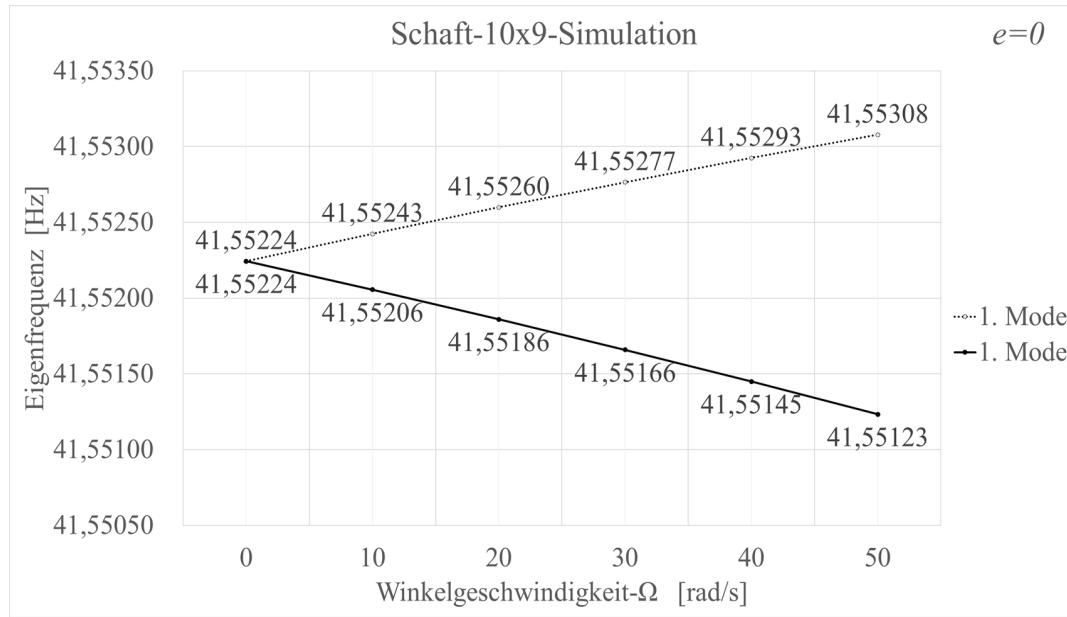


Abbildung 5.15: Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0$ im ruhenden Inertialsystem. Berechnungsparameter: Schaft 10×9 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$.

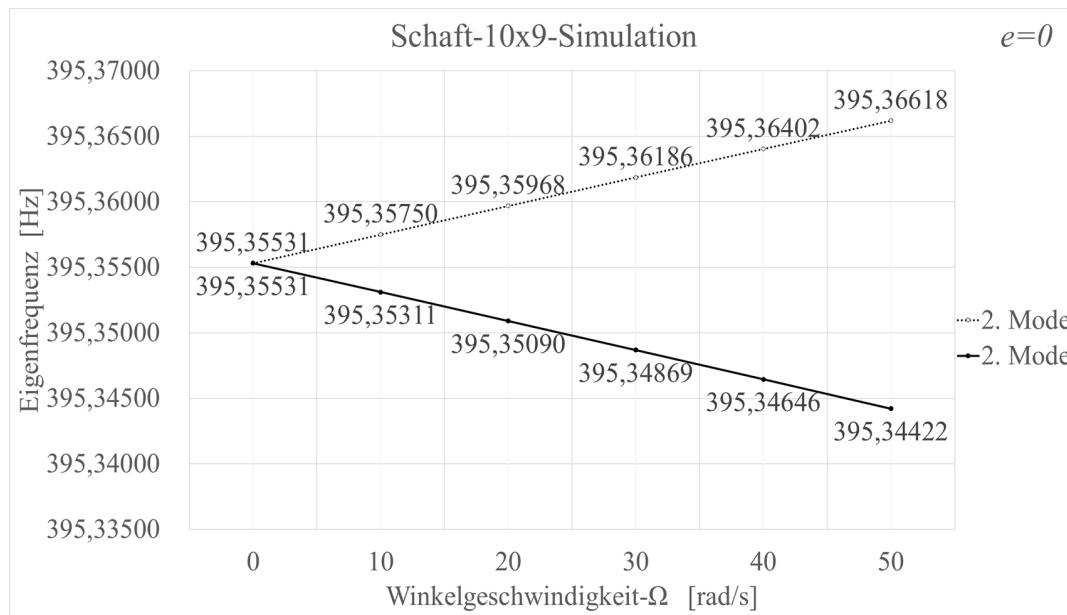


Abbildung 5.16: Eigenfrequenzen vom 2. Biegemode in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0$ im ruhenden Inertialsystem. Berechnungsparameter: Schaft 10×9 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$.

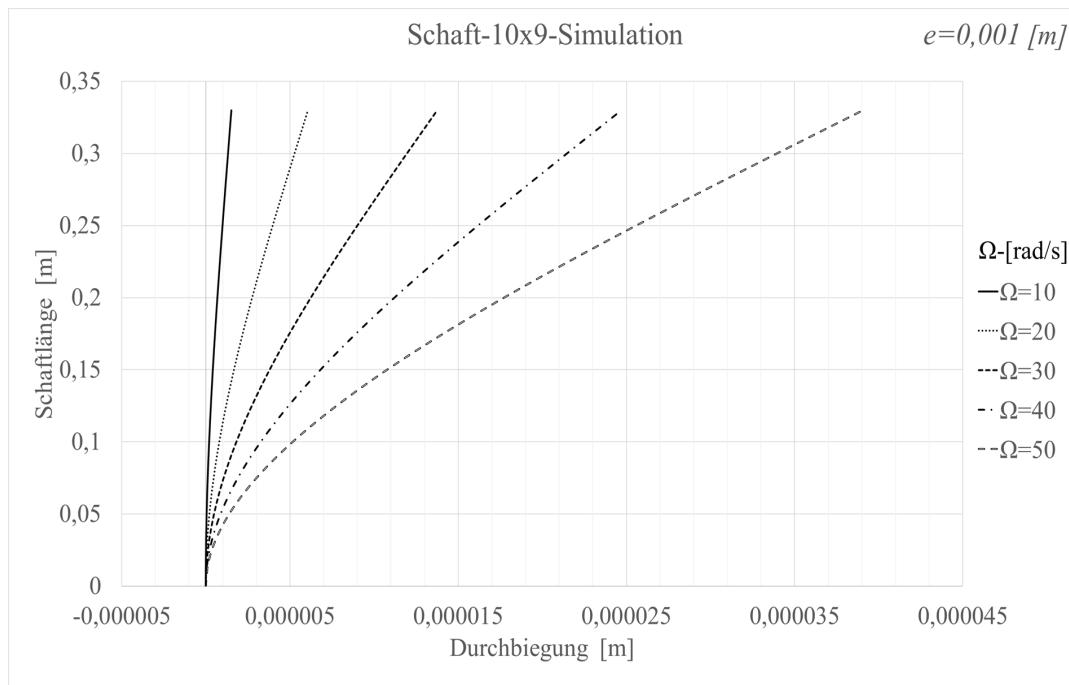


Abbildung 5.17: Durchbiegung in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0,001 \text{ m}$. Berechnungsparameter: Schaft 10×9 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$.

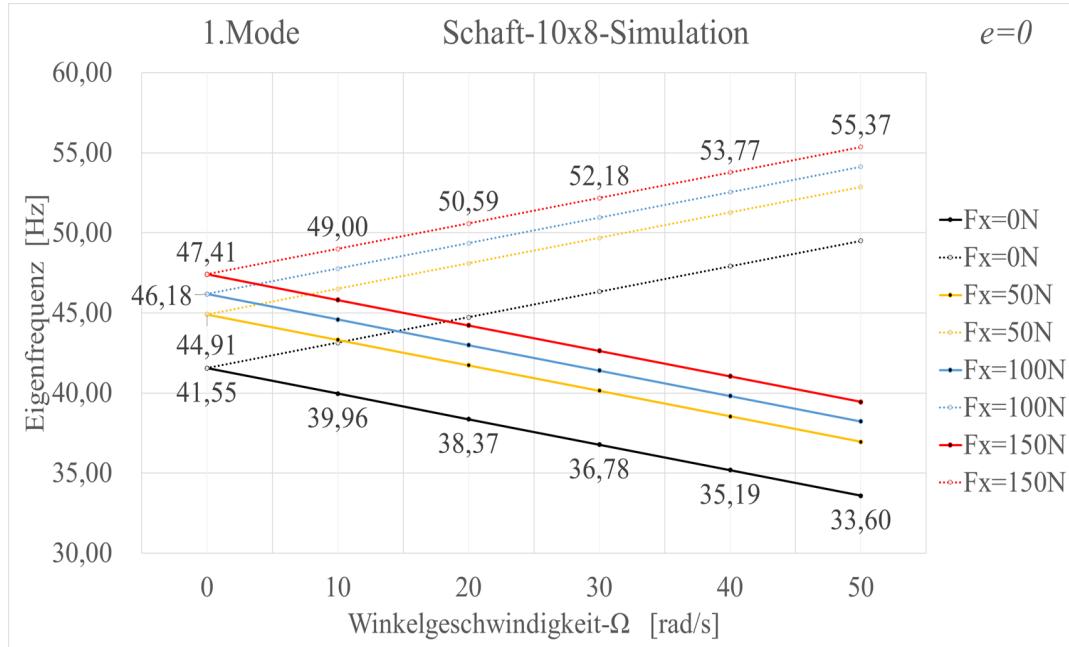


Abbildung 5.18: Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit Ω und der Zugkraft F_x bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0$. Berechnungsparameter: Schaft 10×9 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$.

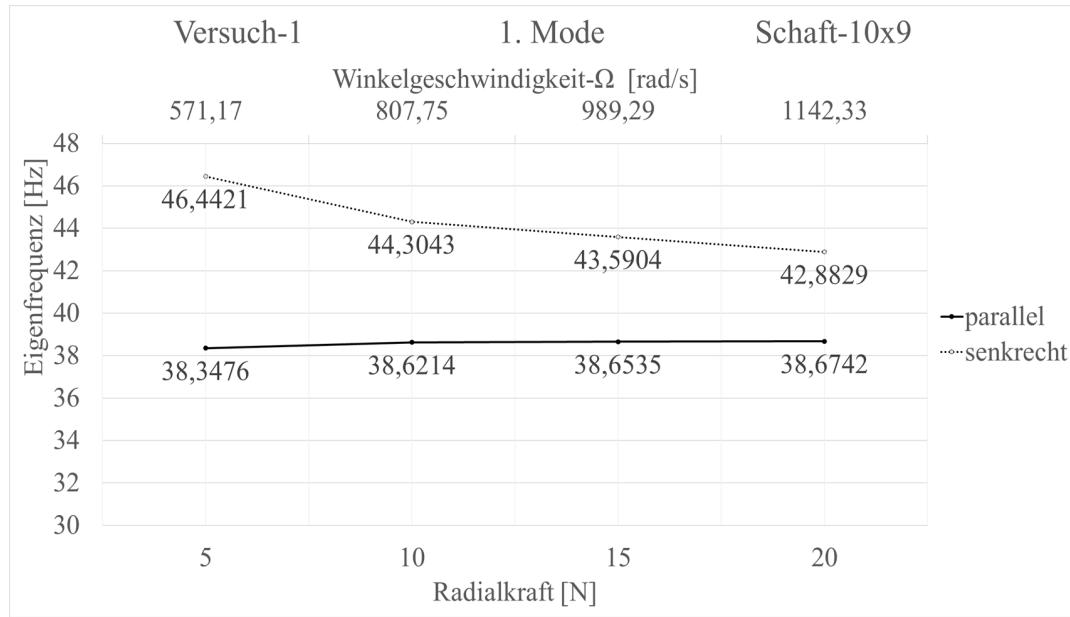


Abbildung 5.19: Gemessene Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen parallel und senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10 × 9), Versuchsreihe 1).

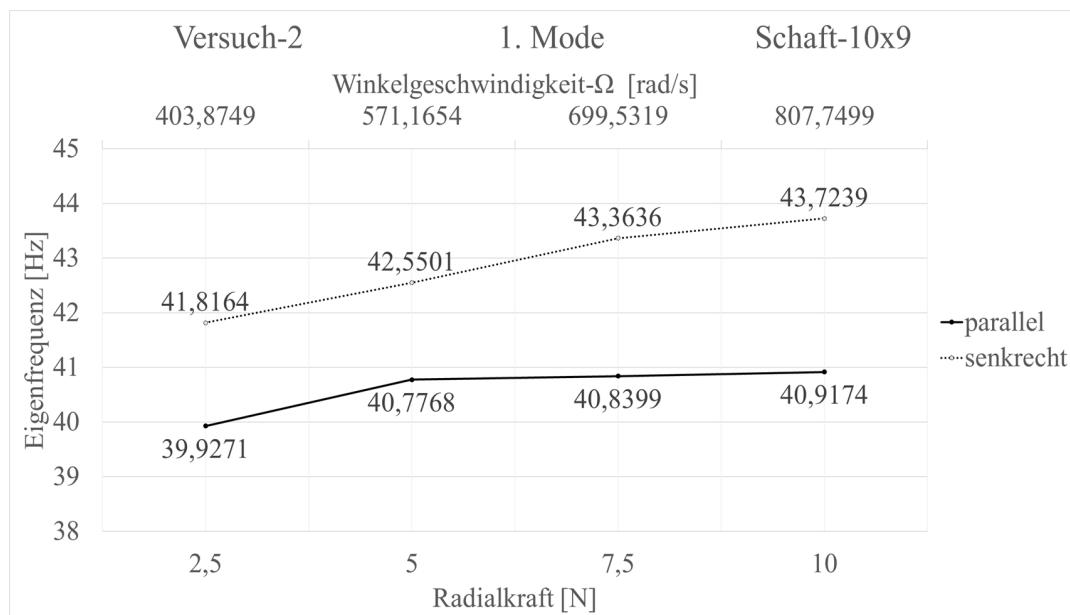


Abbildung 5.20: Gemessene Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen parallel und senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10 × 9), Versuchsreihe 2).

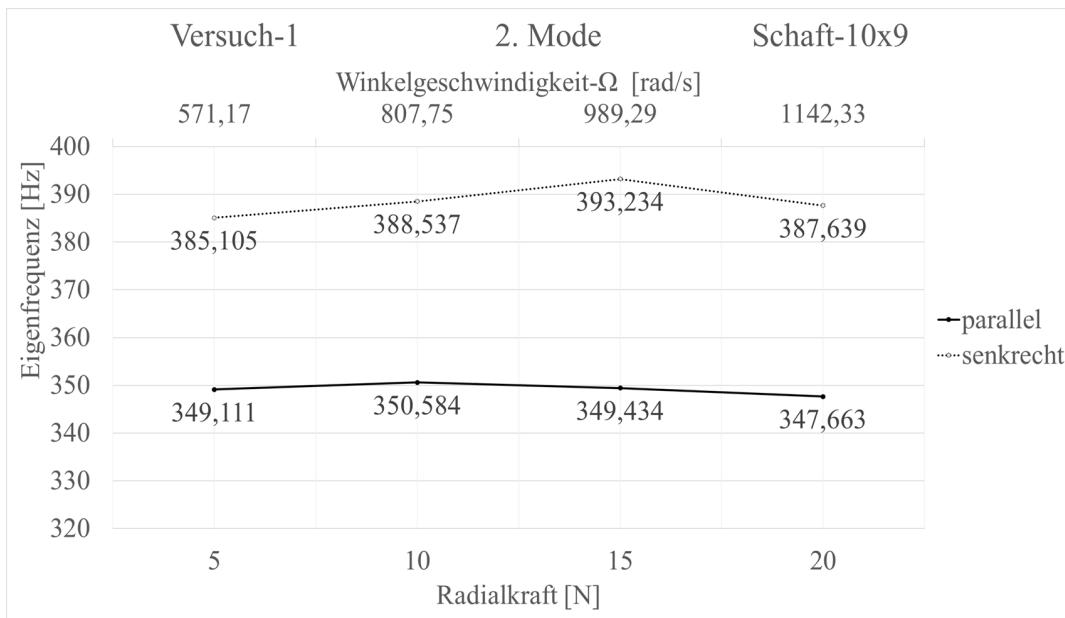


Abbildung 5.21: Gemessene Eigenfrequenzen vom 2. Biegemode in Abhängigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen parallel und senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10 × 9), Versuchsreihe 1).

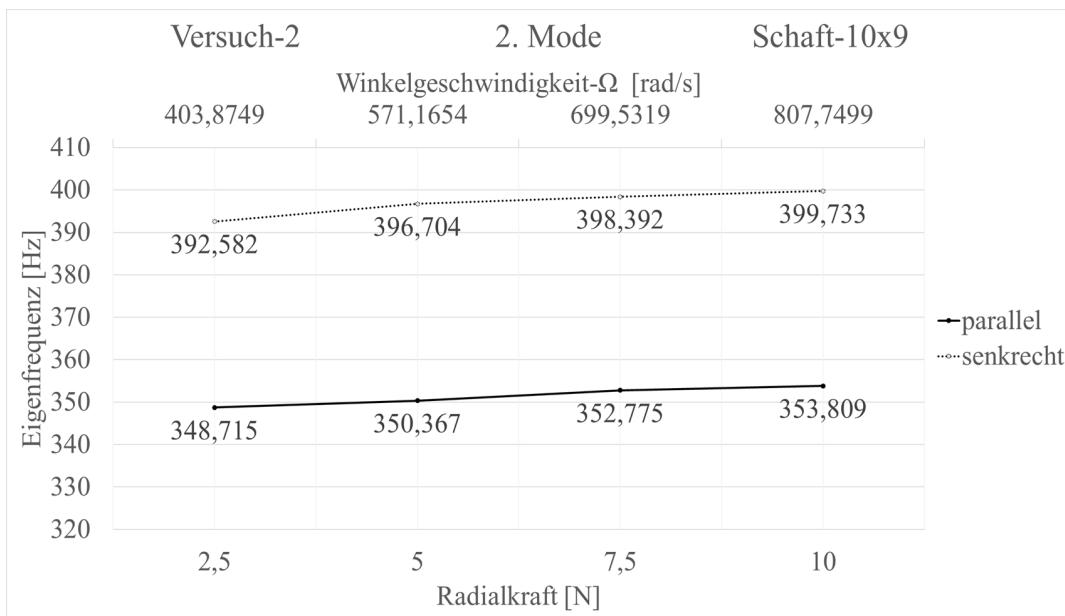


Abbildung 5.22: Gemessene Eigenfrequenzen vom 2. Biegemode in Abhängigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen parallel und senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10 × 9), Versuchsreihe 2).

Der Einfluss der Vorspannkraft auf die Eigenfrequenzen ist ähnlich wie bei Probe 1. Die in den Abbildungen gezeigte Winkelgeschwindigkeit wurde wieder, mit einem konstanten Exzentrizitätsfehler von $e = 0,001 \text{ m}$, nach 4.7 berechnet.

Für den ersten Mode kann erneut eine tendenzielle Versteifung der Eigenfrequenzen festgestellt werden, wobei der Einfluss senkrecht zur Vorspannrichtung größer ist als parallel dazu. Gleiches gilt auch für die Eigenfrequenzen von Mode 2. Der relative Einfluss ist hier jedoch geringer. Erneut sind die simulierten Eigenfrequenzen des ruhenden Schaft etwas höher als die gemessenen Werte.

Es ist ersichtlich, dass die experimentellen Ergebnisse eine gewisse Zufälligkeit aufweisen. Um genauere Ergebnisse zu erhalten müssten mehrere Messungen durchgeführt und diese dann gemittelt werden.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird sowohl die numerische als auch die experimentelle Modalanalyse eines Werkzeugschaftes beim HSC-Fräsen beschrieben. Dabei werden die Auswirkungen von verschiedenen Parametern auf die Eigenfrequenzen des Schafes analysiert. Wegen der hohen Rotationsgeschwindigkeit des Werkzeughalters wurde die simulative Modalanalyse durch eine nichtlinearen Finite-Elemente-Methode, in Kombination mit dem Prinzip von Hamilton, durchgeführt und mit MATLAB® programmiert. Aufgrund des experimentellen Versuchsaufbaus mit dem kabelgebundenen Anregungshammer und dem Beschleunigungssensor ist es nicht möglich, Versuche unter Rotation durchzuführen. Deshalb wurde am oberen Ende des Werkzeugschafts eine Radialkraft eingeleitet, um die Wirkung der Rotation in Verbindung mit einer Exzentrizität nachzubilden.

Zunächst werden die notwendigen theoretischen Grundlagen erklärt, um das Berechnungsmodell zur numerischen Simulation umzusetzen. Im Speziellen wird hierfür die nichtlineare Finite-Elemente-Methode verwendet. Anschließend werden die Eigenfrequenzen und Deformationen des Schafes für verschiedene Parameter simuliert. Bei den Experimenten werden die niedrigsten Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Vorspannkraft (entspricht einem Exzentrizitätsfehler e bei gleichzeitiger Rotation) ermittelt.

Die Ergebnisse werden anschließend in einem separaten Kapitel ausgewertet. Beispielsweise zeigen die Simulationen eine Aufspaltung der Eigenfrequenzen durch die Rotation. Weiterhin ist eine schwache Abhängigkeit der Eigenfrequenzen von der Vorspannkraft bei den experimentellen Ergebnissen zu sehen. So wurde eine tendenzielle Versteifung für die Eigenfrequenzen des ersten Modes mit zunehmender Vorspannkraft festgestellt.

Schließlich ist festzustellen, dass die ermittelten Erkenntnisse zur Konstruktion von schwingungsarmen Werkzeugschäften und deren Optimierung verwendet werden können. Für das weitere Vorgehen wird empfohlen, mehrere Messungen durchzuführen und die Ergebnisse anschließend zu mitteln. Damit können Messungenauigkeiten durch zufällige Störungen minimiert werden.

7 Verzeichnis

7.1 Quellenverzeichnis

- [Døs89] O Døssing. Strukturen prüfen teil 1: Mechanische beweglichkeits-messungen. Brüel & Kjær, 1989.
- [GHSW04] Dietmar Gross, Werner Hauger, Jörg Schröder, and Wolfgang A Wall. Technische Mechanik 3: Kinetik. Springer, 2004.
- [GHSW17] Dietmar Gross, Werner Hauger, Jörg Schröder, and Wolfgang A Wall. Technische Mechanik 2: Elastostatik. Springer-Verlag, 2017.
- [HGP15] Bodo HEIMANN., Wilfried Gerth, and Karl Popp. MECHATRONIK 4. A. CARL HANSER Verlag GMBH &, 2015.
- [HH15] Rafiq Huseynov and Bertram Hentschel. Entwicklung von Werkzeugschläften für einen Betrieb im überkritischen Drehzahlbereich. Shaker, 2015.
- [Kat10] Peter I Kattan. MATLAB guide to finite elements: an interactive approach. Springer Science & Business Media, 2010.
- [Kok09] Judith Kokavecz. Modalanalyse. In Michael Möser, editor, Messtechnik der Akustik, pages 499–535. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [LY⁺84] David G Luenberger, Yinyu Ye, et al. Linear and nonlinear programming, volume 2. Springer, 1984.
- [MS79] Hermann Matthies and Gilbert Strang. The solution of nonlinear finite element equations. International journal for numerical methods in engineering, 14(11):1613–1626, 1979.
- [Rus11] Wilhelm Rust. Nichtlineare finite-elemente-berechnungen. Springer, 2011.
- [Sch91] Hans-Rudolf Schwarz. Methode der finiten Elemente: eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Rechenpraxis, volume 47. Teubner-Verlag, 1991.
- [Ste15] Peter Steinke. Finite-Elemente-Methode: Rechnergestützte Einführung. Springer-Verlag, 2015.
- [Wau14] Jörg Wauer. Kontinuumsschwingungen. Springer, 2014.

7.2 Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

Lateinische Notation

A	m^2	Querschnittsfläche
e	m	Exzentrizitätsfehler
E	N/m^2	E-Modul
E_{kin}	J	kinetische Energie
E_{pot}	J	potentielle Energie
F	N	Radialkraft
F_x	N	Zugkraft
H	m	Übertragungsfunktion
i	—	Zählvariablen
I	m^4	Flächenträgheitsmoment
I_t	m^4	Torsionsträgheitsmoment
L	m	Länge des Schafes
l_e	m	Länge eines Elements
M_b	Nm	Biegemoment
t	s	Zeit
u	m	Längsverschiebung in X-Richtung
v	m	Durchbiegung in Y-Richtung
V	m^3	Volumen
w	m	Durchbiegung in Z-Richtung
W	J	Formänderungsenergie

Griechische Notation

ε	1	Dehnung
λ	—	Eigenwert
ν	1	Poissionzahl
ρ	kg/m^3	Dichte
ϕ	1	Verdrehung der Torsion
φ, ψ	1	Biegewinkel
Ω	rad/s	Winkelgeschwindigkeit
ω	$1/\text{s}$	Kreisfrequenz

Vektoren und Matrizen

D	Dämpfungsmatrix
D_e	Dämpfungsmatrix eines Elements
\vec{f}	Knotenkraftvektor
\vec{f}_e	Knotenkraftvektor eines Elements
K	Steifigkeitsmatrix
K_e	Steifigkeitsmatrix eines Elements
M	Massenmatrix
M_e	Massenmatrix eines Elements
\vec{N}	Vektor der Formfunktion
R	Rotationsmatrix
\vec{x}	Knotenverschiebungsvektor
\vec{x}_e	Knotenverschiebungsvektoreines Elements

Indices

() _t ; () [.]	Erste Ableitung nach der Zeit
() _{tt} ; () ^{..}	Zweite Ableitung nach der Zeit
() ^T	Transposition der Matrix
() _x ; () _y ; () _z	Erste Ableitung in Richtung X,Y,Z
() _{xx} ; () _{yy} ; () _{zz}	Zweite Ableitung in Richtung X,Y,Z

7.3 Abbildungsverzeichnis

2.1	Zweiknotiges Balkenelement mit Koordinaten und Verschiebungen.	4
3.1	Balken mit Rotation und Exzentrizitätsfehler.	9
4.1	Schnittmoment für (1) einen Balken mit Rotation und Exzentrizität und (2) einen Balken mit Radialkraft.	18
4.2	3D-Modell von Probekörper Nr.1 (Schaft- 10×8).	19
4.3	3D-Modelle der Stopfen für den Schaft- 10×8 für die Lagerung (links) und Einbringung der Vorspannkraft (rechts).	19
4.4	3D-Modell der Baugruppe des Schaftes- 10×8 (1: Stopfen Lagerung, 2: Schaft, 3: Stopfen Vorspannkraft, 4: Ringschraube).	20
4.5	Versuchsaufbau mit einzelnen Objekten.	21
4.6	Userinterface für PULSE LABSHOP Version 14.1.1 von BRÜEL & KJÆR.	21
4.7	Userinterface der Software ME'SCOPEVES von VIBRANT TECHNOLOGY INC.	22
5.1	Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0$. Berechnungsparameter: Schaft 10×8 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$	25
5.2	Eigenfrequenzen vom 2. Biegemode in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0$. Berechnungsparameter: Schaft 10×8 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$	26
5.3	Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0$ im ruhenden Inertialsystem. Berechnungsparameter: Schaft 10×8 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$	26
5.4	Eigenfrequenzen vom 2. Biegemode in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0$ im ruhenden Inertialsystem. Berechnungsparameter: Schaft 10×8 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$	27
5.5	Durchbiegung in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0,001 \text{ m}$. Berechnungsparameter: Schaft 10×8 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$	27
5.6	Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit Ω und der Zugkraft F_x bei einem Exzentrizitätsfehler von $e = 0$. Berechnungsparameter: Schaft 10×8 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$	28
5.7	Gemessene Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen parallel und senkrecht zur Vorspannrichtung. (Probe Nr. 1 (Schaft 10×8), Versuchsreihe 1).	28
5.8	Gemessene Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen parallel und senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10×8), Versuchsreihe 2).	29
5.9	Gemessene Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10×8), Versuchsreihe 3).	29
5.10	Gemessene Eigenfrequenzen vom 2. Biegemode in Abhängigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen parallel und senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10×8), Versuchsreihe 1).	30
5.11	Gemessene Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhängigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen parallel und senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10×8), Versuchsreihe 2).	30

5.12	Gemessene Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhangigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10×8), Versuchsreihe 3).	31
5.13	Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhangigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitatsfehler von $e = 0$. Berechnungsparameter: Schaft 10×9 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$	32
5.14	Eigenfrequenzen vom 2. Biegemode in Abhangigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitatsfehler von $e = 0$. Berechnungsparameter: Schaft 10×9 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$	32
5.15	Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhangigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitatsfehler von $e = 0$ im ruhenden Inertialsystem. Berechnungsparameter: Schaft 10×9 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$	33
5.16	Eigenfrequenzen vom 2. Biegemode in Abhangigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitatsfehler von $e = 0$ im ruhenden Inertialsystem. Berechnungsparameter: Schaft 10×9 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$	33
5.17	Durchbiegung in Abhangigkeit der Winkelgeschwindigkeit bei einem Exzentrizitatsfehler von $e = 0,001 \text{ m}$. Berechnungsparameter: Schaft 10×9 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$	34
5.18	Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhangigkeit der Winkelgeschwindigkeit Ω und der Zugkraft F_x bei einem Exzentrizitatsfehler von $e = 0$. Berechnungsparameter: Schaft 10×9 , $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $v = 0,28$	34
5.19	Gemessene Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhangigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen parallel und senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10×9), Versuchsreihe 1).	35
5.20	Gemessene Eigenfrequenzen vom 1. Biegemode in Abhangigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen parallel und senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10×9), Versuchsreihe 2).	35
5.21	Gemessene Eigenfrequenzen vom 2. Biegemode in Abhangigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen parallel und senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10×9), Versuchsreihe 1).	36
5.22	Gemessene Eigenfrequenzen vom 2. Biegemode in Abhangigkeit der Vorspannkraft. Angabe der Eigenfrequenzen parallel und senkrecht zur Vorspannrichtung (Probe Nr. 1 (Schaft 10×9), Versuchsreihe 2).	36

7.4 Tabellenverzeichnis

4.1 Parameter der verwendeten Versuchsschäfte.	18
--	----

Anhang A: Programme

Hauptprogramm

```

clear
close all
#####
% main Program Ver-7.3 08.06.2020 Qian Sun
#####
% parameter
E=2.1e11; % N/m^2
D0=0.01; % Durchmesser m
R=D0/2;
d=0.0005; % Wandstaeker m
r=R-d;
A=pi*(R^2-r^2); % Flaeche m^2
l=0.33; % m
rho=7800; % Dichte in [kg/m^3]
V0=A*l*rho; % Volume [m^3]
mu=rho*A; % Massenbelegung in [kg/m]
Nel=20; % number of elements in bend
Nno=Nel+1; % number of nodes in bend in
            linear_ansatz
% Nno=Nel*2+1; % number of nodes in qudra-ansatz
le=1/Nel; % length of an element
I=pi*(R^4-r^4)/4; % Flaechentraegheitsmoment
It=2*I; % Torsionstraegheitsmoment
v=0.28; % Poissonzahl
G=E/(2*(1+v)); % Schubmodul
c=0; % Feder-Steifigkeit [N/m]
m=0.0303; % Masse [kg]

Omega=40; % Drehgeschwindigkeit [rad/s]
e=-0; % Exzentrizitaet [m]
q=6; % Freiheitsgrad

Fx=50; % force [N]
Fy=0; % force [N]
Fz=0; % force [N]
M=0; % moment [N*m]

FVec= zeros(q*Nel,1); % empty global force Vektor
FVec(end-5)=Fx;
FVec(end-4)=Fy;
FVec(end-2)=Fz;
FVec(end)=M;

```

```

uMat=[];
vMat=[];
vxMat=[];
wMat=[];
wxMat=[];

% define empty matrices
Kt=zeros(Nno*q); % empty global stiffness-matrix
M=zeros(Nno*q); % empty global mass-matrix
B=zeros(Nno*q);
Q=zeros(Nno*q);

Ae=zeros(2*q,q*Nno,Nel);
for ie=1:Nel
for i=1:2*q
Ae(i,q*(ie-1)+i,ie)=1;
end
end

u=zeros(Nno,1);
w=zeros(Nno,1);
v=zeros(Nno,1);
wx=zeros(Nno,1);
vx=zeros(Nno,1);
phi=zeros(Nno,1);

Nloop=5;
Ux=0;
Vx=0;
Wx=0;

% main program
for j=1:Nloop

if j==1

for k=1:Nel % loop
    over every element
    [Kte,Me,Be,Qe,Ce,MeM,KteM,BeM,QeM] =
        Elementroutine_n_linear(A,E,rho,le,Ux,Vx,Wx,I,It,G,
        Omega,e,c,m);
    if k==Nel
        Kt=Kt+Ae(:,:,k) * Kte*Ae(:,:,k)+Ae(:,:,k) * Ce*Ae(:,:,k) +
            Ae(:,:,k) * KteM*Ae(:,:,k);
        M =M+Ae(:,:,k) * Me*Ae(:,:,k)+Ae(:,:,k) * MeM*Ae(:,:,k);
        B =B+Ae(:,:,k) * Be*Ae(:,:,k)+Ae(:,:,k) * BeM*Ae(:,:,k);
    end
end

```

```

Q =Q+Ae(:,:,k) '*Qe*Ae(:,:,k)+Ae(:,:,k) '*QeM*Ae(:,:,k);
else
Kt=Kt+Ae(:,:,k) '*Kte*Ae(:,:,k); % place the
                                     distribution of every element to right place in
                                     global stiffness-matrix
M =M+Ae(:,:,k) '*Me*Ae(:,:,k); % place the
                                     distribution of every element to right place in
                                     global mass-matrix
B =B+Ae(:,:,k) '*Be*Ae(:,:,k);
Q =Q+Ae(:,:,k) '*Qe*Ae(:,:,k);
end
end

else

for k=1:Nel % loop
    over every element

    %
    %
    %
    Ux=Fx/E/A;
    Vx=(vx(k+1)+vx(k))/2;
    Wx=(wx(k+1)+wx(k))/2;
    %

    Ux=(u(k+1)-u(k))/1e ;
    Wx=(w(k+1)-w(k))/1e ;
    Vx=(v(k+1)-v(k))/1e ;
    [Kte ,Me,Be,Ce,MeM,KteM,BeM,QeM] =
        Elementroutine_n_linear(A,E,rho ,le ,Ux,Vx,Wx,I ,It ,G,
        Omega,e ,c ,m);
    if k==Nel
        Kt=Kt+Ae(:,:,k) '*Kte*Ae(:,:,k)+Ae(:,:,k) '*Ce*Ae(:,:,k)+
            Ae(:,:,k) '*KteM*Ae(:,:,k);
        M =M+Ae(:,:,k) '*Me*Ae(:,:,k)+Ae(:,:,k) '*MeM*Ae(:,:,k); % place the distribution of every
                                     element to right place in global mass-matrix
        B =B+Ae(:,:,k) '*Be*Ae(:,:,k)+Ae(:,:,k) '*BeM*Ae(:,:,k);
        Q =Q+Ae(:,:,k) '*Qe*Ae(:,:,k)+Ae(:,:,k) '*QeM*Ae(:,:,k);
    else
        Kt=Kt+Ae(:,:,k) '*Kte*Ae(:,:,k); % place the
                                     distribution of every element to right place in
                                     global stiffness-matrix
        M =M+Ae(:,:,k) '*Me*Ae(:,:,k); % place the
                                     distribution of every element to right place in
                                     global mass-matrix
        B =B+Ae(:,:,k) '*Be*Ae(:,:,k);
        Q =Q+Ae(:,:,k) '*Qe*Ae(:,:,k);
    end

```

```

end
end

for zz=1:q
Kt(1,:) = [];
Kt(:,1) = [];
M(1,:) = [];
M(:,1) = [];
B(1,:) = [];
B(:,1) = [];
end

QVec=diag(Q);
QVec(1:q)=[];

AVec=FVec+QVec;

P=Kt\AVec;
for yy=1:q
P=[0;P];
end

for xx=1:Nno
n=(xx-1)*q+1;
u(xx)=P(n);
w(xx)=P(n+1);
wx(xx)=P(n+2);
v(xx)=P(n+3);
vx(xx)=P(n+4);
phi(xx)=P(n+5);
end

if j==Nloop

else
Kt= zeros(q*Nno); % empty
    global stiffness-matrix
M = zeros(q*Nno); % empty
    global mass-matrix
B = zeros(q*Nno);
Q = zeros(q*Nno);
end

% uMat=[uMat,u];
% vMat=[vMat,v];
% vxMat=[vxMat,vx];
% wMat=[wMat,w];

```

```

% wxMat=[wxMat , wx];
end

%%
% define system-matrix
null=zeros(size(M));
Eins = eye(size(M));
SysMat=[null , Eins ; -inv(M)*Kt,-inv(M)*B];

[V,D]=eig(SysMat);

temp_d = diag(D);
org_d = temp_d;
for i=1:Nel*6
temp_d(i,:)=[];
end

[nd, sortindex] = sort(temp_d);
temp_v = V(:, sortindex);
temp_f = -imag(nd)/(2*pi);

%%
lVec = zeros (Nno, 1); % vector with node
coordinates

for k = 1: Nno
lVec(k)=1/Nel*(k-1);
end

%%
plot

figure('Name','Programm')
grid on

subplot(1,3,1)
plot(lVec,u);
title('u(x)')
subplot(1,3,2)
plot(lVec,w);
title('w(x)')
subplot(1,3,3)
plot(lVec,v);
title('v(x)')

```

Elementroutine

```
%#####
% Elementroutine Ver-7.3 08.06.2020 Qian Sun
%#####
function [Kte, Me, Be, Qe, Ce, MeM, KteM, BeM, QeM] =
    Elementroutine_n_linear(A, E, rho, le, Ux, Vx, Wx, I, It, G,
    Omega, e, c, m)
% Elementroutine: compute Kte, Me

%%
% define empty Matrix
Kteux=zeros(12);
Ktev=zeros(12);
Ktevx=zeros(12);
Ktevxx=zeros(12);
Ktew=zeros(12);
Ktewx=zeros(12);
Ktewxx=zeros(12);
Ktephi=zeros(12);
Ktephix=zeros(12);

Me=zeros(12);

Be=zeros(12);
Qe=zeros(12,1);

%%
xiVec=[-sqrt(3/7+2/7*sqrt(6/5)), -sqrt(3/7-2/7*sqrt(6/5))
    ,sqrt(3/7-2/7*sqrt(6/5)), sqrt(3/7+2/7*sqrt(6/5))]; % 
    % define sampling points for Gauss-quadrature
wVec=[(18-sqrt(30))/36,(18+sqrt(30))/36,(18+sqrt(30))
    /36,(18-sqrt(30))/36]; % weights for sampling
    % points of Gauss-quadrature

%%
for i=1:length(xiVec)
    xi=xiVec(i);
    w=wVec(i);

    % define N, Nx, Nxx vector linear
N=[0.5-xi/2, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5+xi/2, 0, 0, 0, 0, 0; ...
    0, 1/2-(3*xi)/4+(xi^3)/4, 1/4-xi/4-(xi^2)/4+(xi^3)/4, 0,
    0, 0, 1/2+(3*xi)/4-(xi^3)/4, -1/4-xi/4+(xi^2)/4+(xi^3)/4, 0,
    0, 0, 0; ...
    0, -3/4+(3*xi^2)/4, -1/4-xi/2+(3*xi^2)/4, 0, 0, 0, 0,
    3/4-(3*xi^2)/4, -1/4+xi/2+(3*xi^2)/4, 0, 0, 0; ...
    0, 0, 0, 1/2-(3*xi)/4+(xi^3)/4, 1/4-xi/4-(xi^2)/4+(xi^3)
```

```

/4, 0, 0, 0, 0, 1/2+(3*xi)/4-(xi3)/4, -1/4-xi/4+(xi2)/4+(xi3)/4, 0; ...
0, 0, 0, -3/4+(3*xi2)/4, -1/4-xi/2+(3*xi2)/4, 0, 0, 0,
0, 3/4-(3*xi2)/4, -1/4+xi/2+(3*xi2)/4, 0; ...
0, 0, 0, 0, 0, 0.5-xi/2, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5+xi/2];

Nx=[-0.5, 0, 0, 0, 0, 0.5, 0, 0, 0, 0; ...
0, -3/4+(3*xi2)/4, -1/4-xi/2+(3*xi2)/4, 0, 0, 0, 0,
3/4-(3*xi2)/4, -1/4+xi/2+(3*xi2)/4, 0, 0, 0; ...
0, 3*xi/2, -1/2+3*xi/2, 0, 0, 0, -3*xi/2, 1/2+3*xi/2,
0, 0, 0; ...
0, 0, 0, -3/4+(3*xi2)/4, -1/4-xi/2+(3*xi2)/4, 0, 0,
0, 0, 3/4-(3*xi2)/4, -1/4+xi/2+(3*xi2)/4, 0; ...
0, 0, 0, 3*xi/2, -1/2+3*xi/2, 0, 0, 0, -3*xi/2,
1/2+3*xi/2, 0; ...
0, 0, 0, 0, -0.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5]*(2/1e);

Nxx=[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; ...
0, 3*xi/2, -1/2+3*xi/2, 0, 0, 0, -3*xi/2, 1/2+3*xi/2,
0, 0, 0; ...
0, 3/2, 3/2, 0, 0, 0, -3/2, 3/2, 0, 0, 0; ...
0, 0, 0, 3*xi/2, -1/2+3*xi/2, 0, 0, 0, -3*xi/2,
1/2+3*xi/2, 0; ...
0, 0, 0, 3/2, 3/2, 0, 0, 0, -3/2, 3/2, 0; ...
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]*((2/1e)2);

Nu=N(1,:);
Nw=N(2,:);
Nv=N(4,:);
Nphi=N(6,:);

Nux=Nx(1,:);
Nwx=Nx(2,:);
Nvx=Nx(4,:);
Nphix=Nx(6,:);

NuXX=Nxx(1,:);
NwXX=Nxx(2,:);
NvXX=Nxx(4,:);
NphiXX=Nxx(6,:);

% compute Kte, Me, Be, Qe for sampling point of Gauss-
% integration
Me=Me + w*( rho*A*( (Nu'*Nu) + (Nv'*Nv) + (Nw'*Nw) ) +
rho*I*( (Nvx'*Nvx)+(Nwx'*Nwx)+2*(Nphi'*Nphi) ) ) *1e
/2;

```

```

Be=Be+w*( 2*rho*A*Omega*( (Nv'*Nw) - (Nw'*Nv) ))*1e / 2;

Qe=Qe+w*(-rho*A*e*Omega^2*Nv')*1e / 2;
%%%
Kteux=Kteux+w*A*E*((1+3*Ux+1.5*Ux^2+0.5*Vx^2+0.5*Wx^2)*
Nux+(Vx+Vx*Ux)*Nvx+(Wx+Wx*Ux)*Nwx )'*Nux;
Ktev=Ktev+w*rho*A*Omega^2*(-Nv'*Nv);
Ktevx=Ktevx+w*A*E*((Vx+Vx*Ux)*Nux+(Ux+0.5*Ux^2+1.5*Vx
^2+0.5*Wx^2)*Nvx+Vx*Wx*Nwx )'*Nvx;
Ktevxx=Ktevxx+w*E*I*(Nvxx'*Nvxx);
Ktew=Ktew+w*rho*A*Omega^2*(-Nw'*Nw);
Ktewx=Ktewx+w*A*E*((Wx+Wx*Ux)*Nux+Vx*Wx*Nvx+(Ux+0.5*Ux
^2+0.5*Vx^2+1.5*Wx^2)*Nwx )'*Nwx;
Ktewxx=Ktewxx+w*E*I*(Nwxx'*Nwxx);
Ktephi=Ktephi+w*rho*I*2*(-Nphix'*Nphix)*Omega^2;
Ktephix=Ktephix+w*(G*It*Nphix )'*Nphix;

end

Kte=(Kteux+Ktev+Ktevx+Ktevxx+Ktew+Ktewx+Ktewxx+Ktephi+
Ktephix)*1e / 2;
Qe=diag(Qe);

%% Ce, MeM, KteM
xi=1;
N=[ 0.5-xi/2, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5+xi/2, 0, 0, 0, 0, 0;
...
0, 1/2-(3*xi)/4+(xi^3)/4, 1/4-xi/4-(xi^2)/4+(xi^3)/4, 0,
0, 0, 0, 1/2+(3*xi)/4-(xi^3)/4, -1/4-xi/4+(xi^2)/4+(xi^3)/4, 0, 0, 0; ...
0, -3/4+(3*xi^2)/4, -1/4-xi/2+(3*xi^2)/4, 0, 0, 0, 0,
3/4-(3*xi^2)/4, -1/4+xi/2+(3*xi^2)/4, 0, 0, 0; ...
0, 0, 0, 1/2-(3*xi)/4+(xi^3)/4, 1/4-xi/4-(xi^2)/4+(xi^3)
/4, 0, 0, 0, 1/2+(3*xi)/4-(xi^3)/4, -1/4-xi/4+(xi^2)/4+(xi^3)/4, 0; ...
0, 0, 0, -3/4+(3*xi^2)/4, -1/4-xi/2+(3*xi^2)/4, 0, 0, 0,
0, 3/4-(3*xi^2)/4, -1/4+xi/2+(3*xi^2)/4, 0; ...
0, 0, 0, 0, 0.5-xi/2, 0, 0, 0, 0, 0.5+xi/2];

Nu=N(1,:);
Nw=N(2,:);
Nv=N(4,:);

MeM=m*( (Nu'*Nu) + (Nv'*Nv) + (Nw'*Nw) );
BeM=2*m*Omega*( (Nv'*Nw) - (Nw'*Nv) );

```

```
QeM=-m*e*Omega^2*Nv' ;
QeM=diag(QeM) ;

Ce=c*(Nv'*Nv) ;

KtevM=m*Omega^2*(-Nv'*Nv) ;
KtewM=m*Omega^2*(-Nw'*Nw) ;

KteM=KtevM+KtewM ;

end
```


Anhang B: Zeichnungen der Bauteile

