RSA算法原理（一）

作者： 阮一峰

日期： 2013年6月27日

如果你问我，哪一种算法最重要？

我可能会回答"公钥加密算法"。

因为它是计算机通信安全的基石，保证了加密数据不会被破解。你可以想象一下，信用卡交易被破解的后果。

进入正题之前，我先简单介绍一下，什么是"公钥加密算法"。

一、一点**历**史

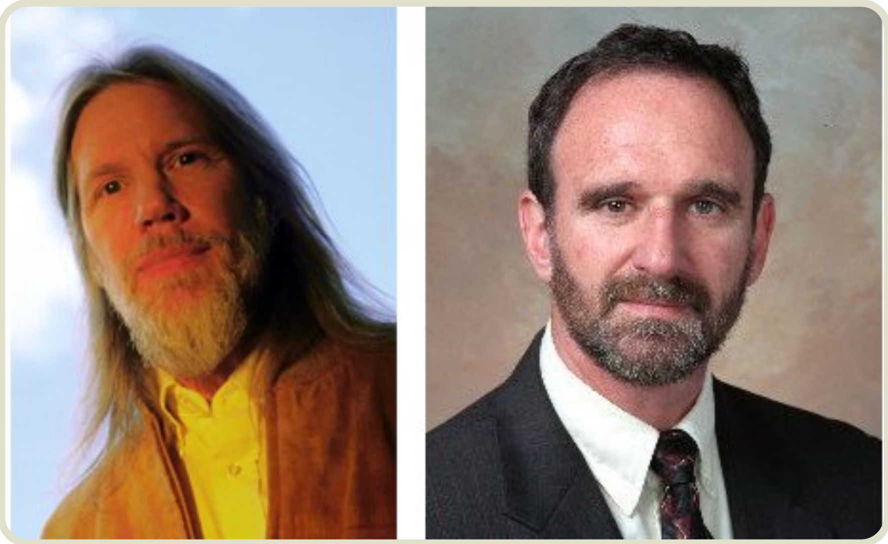
1976年以前，所有的加密方法都是同一种模式：

> （1）甲方选择某一种加密规则，对信息进行加密；

（2）乙方使用同一种规则，对信息进行解密。

由于加密和解密使用同样规则（简称"密钥"），这被称为"对称加密算法"（Symmetric-key algorithm）。

这种加密模式有一个最大弱点：甲方必须把加密规则告诉乙方，否则无法解密。保存和传递密钥，就成了最头疼的问题。



1976年，两位美国计算机学家Whitfield Diffie 和 Martin Hellman，提出了一种崭新构思，可以在不直接传递密钥的情况下，完成解密。这被称为"Diffie-Hellman密钥交换算法"。这个算法启发了其他科学家。人们认识到，加密和解密可以使用不同的规则，只要这两种规则之间存在某种对应关系即可，这样就避免了直接传递密钥。

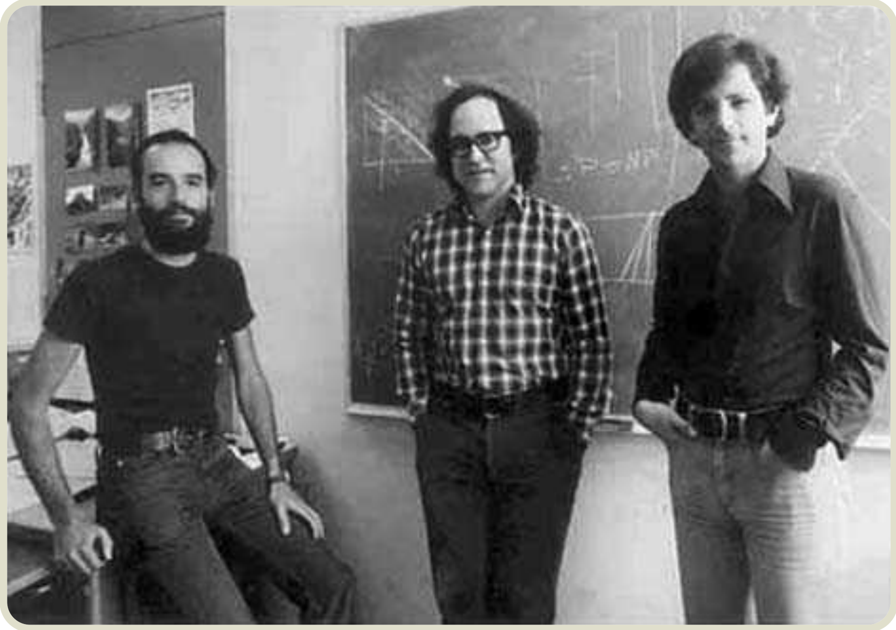
这种新的加密模式被称为"非对称加密算法"。

（1）乙方生成两把密钥（公钥和私钥）。公钥是公开的，任何人都可以获得，私钥则是保密的。

（2）甲方获取乙方的公钥，然后用它对信息加密。

（3）乙方得到加密后的信息，用私钥解密。

如果公钥加密的信息只有私钥解得开，那么只要私钥不泄漏，通信就是安全的。



1977年，三位数学家Rivest、Shamir 和 Adleman 设计了一种算法，可以实现非对称加密。这种算法用他们三个人的名字命名，叫做RSA算法。从那时直到现在，RSA算法一直是最广为使用的"非对称加密算法"。毫不夸张地说，只要有计算机网络的地方，就有RSA算法。

这种算法非常可靠，密钥越长，它就越难破解。根据已经披露的文献，目前被破解的最长RSA密钥是768个二进制位。也就是说，长度超过768位的密钥，还无法破解（至少没人公开宣布）。因此可以认为，1024位的RSA密钥基本安全，2048位的密钥极其安全。

下面，我就进入正题，解释RSA算法的原理。文章共分成两部分，今天是第一部分，介绍要用到的四个数学概念。你可以看到，RSA算法并不难，只需要一点数论知识就可以理解。

二、互**质**关系

如果两个正整数，除了1以外，没有其他公因子，我们就称这两个数是互质关系（coprime）。比如，15和32没有公因子，所以它们是互质关系。这说明，不是质数也可以构成互质关系。

关于互质关系，不难得到以下结论：

> 1． 任意两个质数构成互质关系，比如13和61。
>
> 2． 一个数是质数，另一个数只要不是前者的倍数，两者就构成互质关系，比如3和10。

> 3. 如果两个数之中，较大的那个数是质数，则两者构成互质关系，比如97和57。
>
> 4. 1和任意一个自然数是都是互质关系，比如1和99。
>
> 5. p是大于1的整数，则p和p-1构成互质关系，比如57和56。
>
> 6. p是大于1的奇数，则p和p-2构成互质关系，比如17和15。

三、欧拉函数

请思考以下问题：

> 任意给定正整数n，请问在小于等于n的正整数之中，有多少个与n构成互质关系？（比如，在1到8之中，有多少个数与8构成互质关系？）

计算这个值的方法就叫做欧拉函数，以φ(n)表示。在1到8之中，与8形成互质关系的是1、3、5、7，所以 φ(n) = 4。

φ(n) 的计算方法并不复杂，但是为了得到最后那个公式，需要一步步讨论。

第一种情况

如果n=1，则 φ(1) = 1 。因为1与任何数（包括自身）都构成互质关系。

第二种情况

如果n是质数，则 φ(n)=n-1 。因为质数与小于它的每一个数，都构成互质关系。比如5与1、2、3、4都构成互质关系。

第三种情况

如果n是质数的某一个次方，即 n = p^k (p为质数，k为大于等于1的整数)，则

$$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$$

比如 φ(8) = φ(2^3) =2^3 - 2^2 = 8 -4 = 4。

这是因为只有当一个数不包含质数p，才可能与n互质。而包含质数p的数一共有p^(k-1)

个，即1×p、2×p、3×p、...、p^(k-1)×p，把它们去除，剩下的就是与n互质的数。

上面的式子还可以写成下面的形式：

$$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k(1 - \frac{1}{p})$$

可以看出，上面的第二种情况是 k=1 时的特例。

第四种情况

如果n可以分解成两个互质的整数之积，

```
n = p1 × p2
```

则

```
φ(n) = φ(p1p2) = φ(p1)φ(p2)
```

即积的欧拉函数等于各个因子的欧拉函数之积。比如，φ(56)=φ(8×7)=φ(8)×φ(7)=4×6=24。

这一条的证明要用到"中国剩余定理"，这里就不展开了，只简单说一下思路：如果a与p1互质(a<p1)，b与p2互质(b<p2)，c与p1p2互质(c<p1p2)，则c与数对 (a,b) 是一一对应关系。由于a的值有φ(p1)种可能，b的值有φ(p2)种可能，则数对 (a,b) 有φ(p1)φ(p2)种可能，而c的值有φ(p1p2)种可能，所以φ(p1p2)就等于φ(p1)φ(p2)。

第五种情况

因为任意一个大于1的正整数，都可以写成一系列质数的积。

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}$$

根据第4条的结论，得到

$$\phi(n) = \phi(p_1^{k_1})\phi(p_2^{k_2})...\phi(p_r^{k_r})$$

再根据第3条的结论，得到

$$\phi(n) = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r} (1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})...(1-\frac{1}{p_r})$$

也就等于

$$\phi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})...(1-\frac{1}{p_r})$$

这就是欧拉函数的通用计算公式。比如，1323的欧拉函数，计算过程如下：

$$\phi(1323) = \phi(3^3 \times 7^2) = 1323(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{7}) = 756$$

四、欧拉定理

欧拉函数的用处，在于欧拉定理。"欧拉定理"指的是：

> 如果两个正整数a和n互质，则n的欧拉函数 φ(n) 可以让下面的等式成立：
>
> $$a^{\phi(n)} \equiv 1 (mod\ n)$$

也就是说，a的φ(n)次方被n除的余数为1。或者说，a的φ(n)次方减去1，可以被n整除。比如，3和7互质，而7的欧拉函数φ(7)等于6，所以3的6次方（729）减去1，可以被7整除（728/7=104）。

欧拉定理的证明比较复杂，这里就省略了。我们只要记住它的结论就行了。

欧拉定理可以大大简化某些运算。比如，7和10互质，根据欧拉定理，

$$7^{\phi(10)} \equiv 1\ (mod\ 10)$$

已知 φ(10) 等于4，所以马上得到7的4倍数次方的个位数肯定是1。

$$7^{4k} \equiv 1\ (mod\ 10)$$

因此，7的任意次方的个位数（例如7的222次方），心算就可以算出来。

欧拉定理有一个特殊情况。

> 假设正整数a与质数p互质，因为质数p的φ(p)等于p-1，则欧拉定理可以写成
>
> $$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

这就是著名的[费马小定理](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%B4%B9%E9%A9%AC%E5%B0%8F%E5%AE%9A%E7%90%86)。它是欧拉定理的特例。

欧拉定理是RSA算法的核心。理解了这个定理，就可以理解RSA。

五、模反元素

还剩下最后一个概念：

> 如果两个正整数a和n互质，那么一定可以找到整数b，使得 ab-1 被n整除，或者说ab被n除的余数是1。
>
> $$ab \equiv 1 \pmod n$$
>
> 这时，b就叫做a的"模反元素"。

比如，3和11互质，那么3的模反元素就是4，因为 (3 × 4)-1 可以被11整除。显然，模反元素不止一个， 4加减11的整数倍都是3的模反元素 {...,-18,-7,4,15,26,...}，即如果b是a的模反元素，则 b+kn 都是a的模反元素。

欧拉定理可以用来证明模反元素必然存在。

$$a^{\phi(n)} = a \times a^{\phi(n)-1} \equiv 1 \pmod n$$

可以看到，a的 φ(n)-1 次方，就是a的模反元素。

==

好了，需要用到的数学工具，全部介绍完了。RSA算法涉及的数学知识，就是上面这些，下一次我就来介绍公钥和私钥到底是怎么生成的。

RSA算法原理（二）

作者： 阮一峰

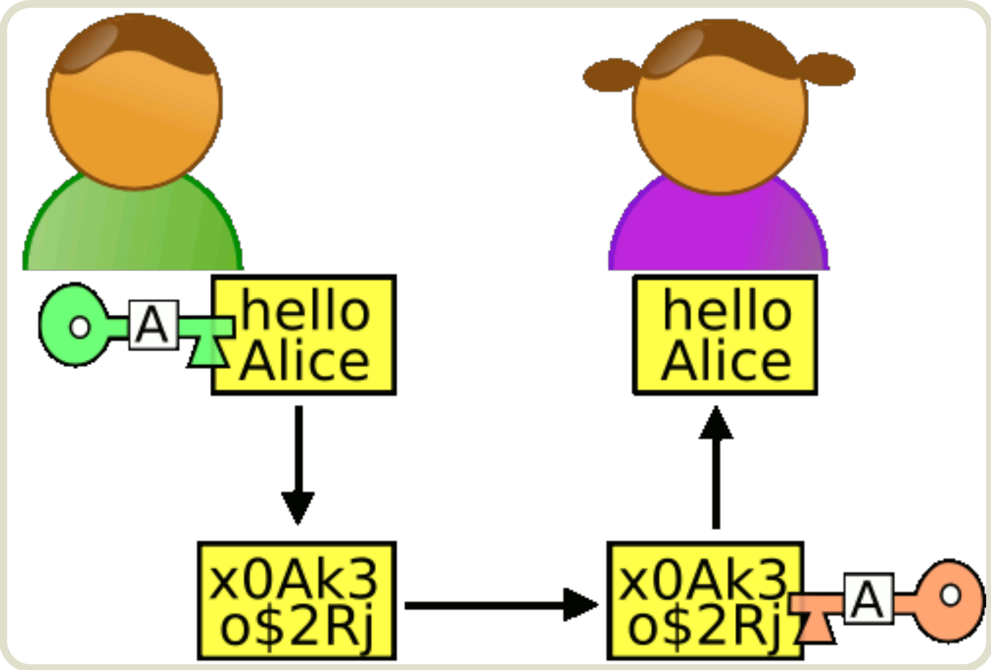
日期： 2013年7月 4日

上一次，我介绍了一些数论知识。

有了这些知识，我们就可以看懂RSA算法。这是目前地球上最重要的加密算法。

六、密钥生成的步骤

我们通过一个例子，来理解RSA算法。假设爱丽丝要与鲍勃进行加密通信，她该怎么生成公钥和私钥呢？



第一步，随机**选择两**个不相等的**质数p**和**q**。

爱丽丝选择了61和53。（实际应用中，这两个质数越大，就越难破解。）

第二步，**计**算**p**和**q**的乘**积n**。

爱丽丝就把61和53相乘。

```
n = 61×53 = 3233
```

n的长度就是密钥长度。3233写成二进制是110010100001，一共有12位，所以这个密钥就是12位。实际应用中，RSA密钥一般是1024位，重要场合则为2048位。

第三步，**计**算**n**的欧拉函数**φ(n)**。

根据公式：

```
φ(n) = (p-1)(q-1)
```

爱丽丝算出φ(3233)等于60×52，即3120。

第四步，随机**选择**一个整数**e**，条件是**1< e < φ(n)**，且**e**与**φ(n)** 互**质**。

爱丽丝就在1到3120之间，随机选择了17。（实际应用中，常常选择65537。）

第五步，**计算e对于φ(n)的模反元素d。**

所谓"模反元素"就是指有一个整数d，可以使得ed被φ(n)除的余数为1。

```
ed ≡ 1 (mod φ(n))
```

这个式子等价于

```
ed - 1 = kφ(n)
```

于是，找到模反元素d，实质上就是对下面这个二元一次方程求解。

```
ex + φ(n)y = 1
```

已知 e=17, φ(n)=3120,

```
17x + 3120y = 1
```

这个方程可以用"扩展欧几里得算法"求解，此处省略具体过程。总之，爱丽丝算出一组整数解为 (x,y)=(2753,-15)，即 d=2753。

至此所有计算完成。

第六步，将**n和e封装成公钥，n和d封装成私钥。**

在爱丽丝的例子中，n=3233，e=17，d=2753，所以公钥就是 (3233,17)，私钥就是 (3233, 2753)。

实际应用中，公钥和私钥的数据都采用ASN.1格式表达（实例）。

七、**RSA算法的可靠性**

回顾上面的密钥生成步骤，一共出现六个数字：

```
p
q
n
φ(n)
e
d
```

这六个数字之中，公钥用到了两个（n和e），其余四个数字都是不公开的。其中最关键的是d，因为n和d组成了私钥，一旦d泄漏，就等于私钥泄漏。

那么，有无可能在已知**n**和**e**的情况下，推**导**出**d**？

> （1）ed≡1 (mod φ(n))。只有知道e和φ(n)，才能算出d。
>
> （2）φ(n)=(p-1)(q-1)。只有知道p和q，才能算出φ(n)。
>
> （3）n=pq。只有将n因数分解，才能算出p和q。

结论：如果**n**可以被因数分解，**d**就可以算出，也就意味着私**钥**被破解。

可是，大整数的因数分解，是一件非常困难的事情。目前，除了暴力破解，还没有发现别的有效方法。维基百科这样写道：

> "对极大整数做因数分解的难度决定了RSA算法的可靠性。换言之，对一极大整数做因数分解愈困难，RSA算法愈可靠。
>
> 假如有人找到一种快速因数分解的算法，那么RSA的可靠性就会极度下降。但找到这样的算法的可能性是非常小的。今天只有短的RSA密钥才可能被暴力破解。到2008年为止，世界上还没有任何可靠的攻击RSA算法的方式。
>
> 只要密钥长度足够长，用RSA加密的信息实际上是不能被解破的。"

举例来说，你可以对3233进行因数分解（61×53），但是你没法对下面这个整数进行因数分解。

```
12301866845301177551304949
58384962720772853569595334
79219732245215172640050726
36575187452021997864693899
56474942774063845925192557
32630345373154826850791702
61221429134616704292143116
02221240479274737794080665
351419597459856902143413
```

它等于这样两个质数的乘积：

```
33478071698956898786044169
84821269081770479498371376
85689124313889828837938780
02287614711652531743087737
814467999489
    ×
36746043666799590428244633
79962795263227915816434308
76426760322838157396665112
79233373417143396810270092
798736308917
```

事实上，这大概是人类已经分解的最大整数（232个十进制位，768个二进制位）。比它更大的因数分解，还没有被报道过，因此目前被破解的最长RSA密钥就是768位。

八、加密和解密

有了公钥和密钥，就能进行加密和解密了。

（1）加密要用公**钥 (n,e)**

假设鲍勃要向爱丽丝发送加密信息m，他就要用爱丽丝的公钥 (n,e) 对m进行加密。这里需要注意，m必须是整数（字符串可以取ascii值或unicode值），且m必须小于n。

所谓"加密"，就是算出下式的c：

$$m^e \equiv c \pmod{n}$$

爱丽丝的公钥是 (3233, 17)，鲍勃的m假设是65，那么可以算出下面的等式：

$$65^{17} \equiv 2790 \pmod{3233}$$

于是，c等于2790，鲍勃就把2790发给了爱丽丝。

（2）解密要用私**钥(n,d)**

爱丽丝拿到鲍勃发来的2790以后，就用自己的私钥(3233, 2753) 进行解密。可以证明，下面的等式一定成立：

$$c^d \equiv m \pmod{n}$$

也就是说，c的d次方除以n的余数为m。现在，c等于2790，私钥是(3233, 2753)，那么，爱丽丝算出

$$2790^{2753} \equiv 65 \pmod{3233}$$

因此，爱丽丝知道了鲍勃加密前的原文就是65。

至此，"加密--解密"的整个过程全部完成。

我们可以看到，如果不知道d，就没有办法从c求出m。而前面已经说过，要知道d就必须分解n，这是极难做到的，所以RSA算法保证了通信安全。

你可能会问，公钥(n,e) 只能加密小于n的整数m，那么如果要加密大于n的整数，该怎么办？有两种解决方法：一种是把长信息分割成若干段短消息，每段分别加密；另一种是先选择一种"对称性加密算法"（比如DES），用这种算法的密钥加密信息，再用RSA公钥加密DES密钥。

九、私**钥**解密的**证**明

最后，我们来证明，为什么用私钥解密，一定可以正确地得到m。也就是证明下面这个式子：

$$c^d \equiv m \pmod{n}$$

因为，根据加密规则

$$m^e \equiv c \pmod{n}$$

于是，c可以写成下面的形式：

$$c = m^e - kn$$

将c代入要我们要证明的那个解密规则：

$$(m^e - kn)^d \equiv m \pmod{n}$$

它等同于求证

$$m^{ed} \equiv m \pmod{n}$$

由于

$$ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$$

所以

$$ed = h\varphi(n)+1$$

将ed代入：

$$m^{h\varphi(n)+1} \equiv m \pmod{n}$$

接下来，分成两种情况证明上面这个式子。

（1）m与n互质。

根据欧拉定理，此时

$$m^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

得到

$$(m^{\varphi(n)})^h \times m \equiv m \pmod{n}$$

原式得到证明。

（2）m与n不是互质关系。

此时，由于n等于质数p和q的乘积，所以m必然等于kp或kq。

以 m = kp为例，考虑到这时k与q必然互质，则根据欧拉定理，下面的式子成立：

$$(kp)^{q-1} \equiv 1 \pmod q$$

进一步得到

$$[(kp)^{q-1}]^{h(p-1)} \times kp \equiv kp \pmod q$$

即

$$(kp)^{ed} \equiv kp \pmod q$$

将它改写成下面的等式

$$(kp)^{ed} = tq + kp$$

这时t必然能被p整除，即 t=t'p

$$(kp)^{ed} = t'pq + kp$$

因为 m=kp，n=pq，所以

$$m^{ed} \equiv m \pmod n$$

原式得到证明。

（完）

文档信息