

# $l_q$ -规范最小化问题和压缩传感

学生：王汉

导师：王汉



云南大学

2021 年 6 月 9 日

# 目录

## 1 背景问题定义

## 2 研究方案

- 重定义问题
- 解决方案
- 加权 lasso 问题及求解

## 3 论文提出算法

## 4 结果图

# 目录

## 1 背景问题定义

## 2 研究方案

## 3 论文提出算法

## 4 结果图

## 5 Q&A

# 背景问题定义

## CS 基本问题

$x_0 \in R^n$  是  $k$  稀疏的 ( $\|x\|_0 \leq k$ ), 采样矩阵 (测量矩阵)  $A \in R^{m \times n}$ , 观测向量  $y \in R^m$ .

$$y = Ax_0$$

## $l_0$ -范数正则化问题

$$\min_x \frac{1}{2} \|y - Ax\|_2^2 + \lambda \|x\|_0$$

NP 难问题。

## lasso 问题

$$\min_x \frac{1}{2} \|y - Ax\|_2^2 + \lambda \|x\|_1$$

采用近端梯度下降法 (PGD), IHT 与 ISTA。对压缩感知的非凸优化比 L1 范数凸优化方法的稀疏约束更强。<sup>1</sup> 压缩传感应用非凸模型会比凸模型更为可取。<sup>2</sup>

## $l_q$ 问题 ( $0 < q \leq 1$ )

$$\min_x \frac{1}{2} \|y - Ax\|_2^2 + \lambda \|x\|_q^q$$

---

<sup>1</sup> Q. Lyu, Z. Lin, Y. She, et al., “A comparison of typical  $p$  minimization algorithms,” *Neurocomputing*, vol. 119, pp. 413–424, 2013.

<sup>2</sup> 常象宇, 饶过, 吴一戎, et al., “如何在压缩感知中正确使用阈值迭代算法,” *Ph.D. dissertation*, 2010.

# 目录

## 1 背景问题定义

## 2 研究方案

- 重定义问题
- 解决方案
- 加权 lasso 问题及求解

## 3 论文提出算法

## 4 结果图

## 5 Q&A

# 重定义问题及解决方案

## 近似原问题<sup>3</sup>

$$\min_x F(x) = \frac{1}{2} \|y - Ax\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{(|x_i| + \varepsilon_i)^{1-q}}$$

## 原问题

$$\lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0^+} \frac{|x_i|}{(|x_i| + \varepsilon_i)^{1-q}} = |x_i|^q$$

---

<sup>3</sup>9231911.

# 重定义问题及解决方案

## 拓展重定义问题

$F(x)$  拓展为  $H(x, c)$ :

$$\min_{x,c} H(x, c) = \frac{1}{2} \|y - Ax\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{(|c_i| + \varepsilon_i)^{1-q}}.$$

## 两步问题

当  $x = c$  时,  $H(x, c)$  退化为  $F(x)$ , 可以表述为下列两步问题:

$$\begin{cases} \min_x H(x, \bar{c}) = \frac{1}{2} \|y - Ax\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{(|\bar{c}_i| + \varepsilon_i)^{1-q}} \\ \min_c |H(\bar{x}, c) - H(\bar{x}, \bar{x})| \end{cases}$$



# 加权 lasso 问题

## 加权 lasso 问题

$$\min_x \frac{1}{2} \|y - Ax\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^n |w_i x_i|$$

## 求解方法

$$\begin{cases} r^t = x^t + \beta A^T(y - Ax^t) \\ x^{t+1} = \eta(r^t; \theta_t) \end{cases}$$

其中  $\theta_i = \frac{\lambda}{(|\bar{c}_i| + \varepsilon_i)^{1-q}}, \eta(x; \theta) = \text{sign}(x) \cdot \max\{0, |x| - \theta\}$ .

# 目录

1 背景问题定义

2 研究方案

3 论文提出算法

4 结果图

5 Q&A

# 论文提出算法

---

**Algorithm 1** QISTA

---

```
1: Set parameters  $\beta, \lambda, \text{TOL}$ ;  
2: Initial  $x^{\text{init}} = x^0 = x^{-1} \in \mathbb{R}^n$ ;  
3: repeat  
4:    $r^t = x^{t-1} + \beta A^T (y - Ax^{t-1})$ ;  
5:    $x_i^t = \eta \left( r_i^t; \frac{\lambda}{(|r_i^t| + \varepsilon_i)^{1-q}} \right), \forall i \in [1 : n]$ ;  
6: until ( $\|x^t - x^{t-1}\|_2 < \text{TOL}$ )
```

图 1: QISTA 伪代码

# 目录

1 背景问题定义

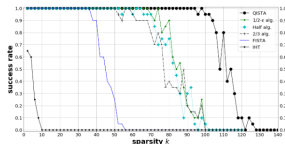
2 研究方案

3 论文提出算法

4 结果图

5 Q&A

## 结果图

图 2:  $n=1024, m=256, k=64$ 图 3: QISTA, 1/2 算法, 半阈值算法, 2/3 算法, FISTA 和 IHT 的成功率随稀疏度的变化 ( $n=1024, m=256$ )

# 目录

1 背景问题定义

2 研究方案

3 论文提出算法

4 结果图

5 Q&A

## Q&A

结束，谢谢  
Q&A