ECT2303 - Linguagem de Programação
Funções Recursivas

Carlos Olarte.

3 de Dezembro de 2020

Motivação

Considere as seguintes funções:

- $n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \times (n-1)! & \text{se } n > 0 \end{cases}$
- $pow(a, n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ a \times pow(a, n-1) & \text{se } n > 0 \end{cases}$
- $fib(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq n \leq 2 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & \text{se } n > 2 \end{cases}$

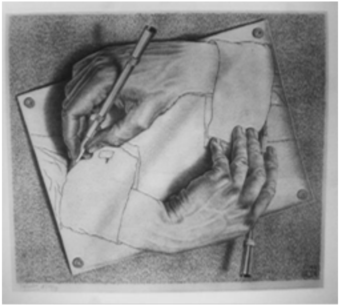
O que elas têm em comum ?

Objetivo da Aula

- Entender o mecanismo de recursividade nas linguagens de programação.
- Utilizar o conceito de recursividade para definir funções.

Definições

- Uma função recursiva é uma função que se refere a si própria.
- Utilizamos a própria função que estamos a definir na sua definição.



Funções Recursivas

Ideia Geral:

- Caso Base: o resultado é conhecido (não precisamos calcula-o).
- Caso Recursivo: para resolver um problema de tamanho N, precisamos de uma solução a um problema de tamanho $M < N$ (subproblemas do problema inicial).

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \text{ (caso base)} \\ n \times (n-1)! & \text{se } n > 0 \text{ (caso recursivo)} \end{cases}$$

Exemplo 1

Execução de funções recursivas

Versão não recursiva

```
int fatorial (int num){
 int prod = 1;
 int i;
 for(i=n;i>=1;i--)
   prod *= i;

 return prod;
}
```

Versão recursiva

```
int fatorial (int num){
  if (num == 0)
    return 1;
  else
    return num * fatorial (num-1);
}
```

Exemplo 2: Sequências geradas recursivamente

1, 1, 2, 3, 5, 8 ...

$$fib(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq n \leq 2 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

```
int fib( int n ){
  if( n <= 2)
    return 1;
  else
    return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

Funções Recursivas

- Em geral, a todo procedimento recursivo corresponde um outro não recursivo (iterativo).

Vantagens da recursão:

- algoritmos mais concisos;
- simplifica a solução de alguns problemas;
- facilidade de implementação e compreensão;
- estratégia divisão e conquista.

Função Ackermann

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{se } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{se } m > 0 \text{ e } n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{se } m, n > 0 \end{cases}$$

Values of $A(m, n)$

m\n	0	1	2	3	4	n
0	1	2	3	4	5	$n+1$
1	2	3	4	5	6	$n+2=2+(n+3)-3$
2	3	5	7	9	11	$2n+3=2\cdot(n+3)-3$
3	5	13	29	61	125	$2^{(n+3)}-3$
4	13 $=2^{2^2}-3$	65533 $=2^{2^{2^2}}-3$	$2^{65536}-3$ $=2^{2^{2^{2^2}}}-3$	$2^{2^{65536}}-3$ $=2^{2^{2^{2^{2^2}}}}-3$	$2^{2^{2^{65536}}}-3$ $=2^{2^{2^{2^{2^{2^2}}}}}-3$	$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{n+3}-3$

Algoritmo de Euclides:Máximo divisor comum

Alguns exemplos:

- MDC(4,2) = ?
- MDC(8,7) = ?
- MDC(12,1) = ?
- MDC(20,15) = ?
- MDC(200,0) = ?
- MDC(X,Y) == MDC(Y,X) ?

Algoritmo de Euclides

Euclides achou um jeito bem legal de calcular (recursivamente) o MDC

X	Y	Observação
9	*6*	*Y!=0, 9%6==3*
6	*3*	*Y!=0, 6%3 == 0*
3	*0*	*Y==0, FIM*

X	Y	Observação
20	*18*	*Y!=0, 20%18==2*
18	*2*	*Y!=0, 18%2 == 0*
2	*0*	*Y==0, FIM*

Algoritmo de Euclides

$$MDC(X,Y) = \begin{cases} X & \text{se } Y = 0 \\ MDC(Y, X\%Y) & \text{se } Y > 0 \end{cases}$$

```
int euclides_MDC(int a, int b){
  if(b==0)
    return a;
  else
    return euclides_MDC(b,a%b);
}
```

Busca em vetor ordenado

Busca Binária

- Faça uma função que dado um vetor de inteiros v de tamanho n e um número inteiro x, retorne o índice m tal que $v[m] == x$. Se tal m não existe, a função deve retornar -1.

Se o vetor v está ordenado, nossa função poderia ser melhor ?

Exercícios

Defina recursivamente as seguintes funções. Assuma que os parâmetros x e y são inteiros positivos.

- *mult* : $x \times y$ (utilizando somas)
- *pow* : x^y. (utilizando multiplicações)

Par / Ímpar

Como poderia determinar se um inteiro positivo x é par ou não sem utilizar o resto da divisão ? Dica. Defina uma função recursiva cujos casos base são:

$$\begin{array}{lcl} \texttt{ehPar}(0) & \rightarrow & \texttt{true} \\ \texttt{ehPar}(1) & \rightarrow & \texttt{false} \end{array}$$

Exercícios

- Calcular (recursivamente) o somatório de um vetor de números
- Definir uma função recursiva para determinar se uma palavra é um palíndromo.

Merge Sort

Dividir e Conquistar:

1. Em lugar de ordenar um vetor de n elementos, ordenamos dois subvetores (de $n/2$ elementos cada).
2. Apos ordenar os subvetores, “unimos as soluções”

```
[ 5 , 3 , 2 , 10 ] ==> [ 5 , 3 ] , [ 2 , 10] (dividir)
[ 5 , 3 ] ==> [ 5 ] , [ 3 ] (dividir)
[ 5 ] + [ 3 ] ==> [ 3 , 5 ] (conquistar)
[ 2 , 10 ] ==> [ 2 ] , [ 10 ] (dividir)
[ 2 ] , [ 10 ] ==> [2 , 10 ] (conquistar)
[ 3 , 5] + [2,10] = [2,3,5,10] (conquistar)
```

Merge Sort

A parte recursiva... bem simples!

```
// Merge Sort
void mergeSort(int v[], int n){
    mergeRec(v,0, n-1);
}

// Ordenar o subvetor v[ini..fim]
void mergeRec(int v[], int ini, int fim){
    if (fim > ini) { // Condição de parada
        int m = (fim + ini) / 2; // metade
        mergeRec(v, ini, m); // subv a esquerda
        mergeRec(v, m+1, fim); //subv a direita
        intercalar(v, ini, m+1 , fim);  // Unir
    }
}
```

Merge Sort

Juntar os 2 subvetores já foi implementado antes:

```
// Unir v[ini..meio-1] + v[meio ..fim]
// Os subvetores devem estar ordenados
void interc(int v[], int ini, int meio, int fim){
    int aux[TAM];
    int i=ini, j=meio, k=0;
    while(i< meio && j <= fim){
        if(v[i]< v[j]) // copiar da esquerda
            aux[k++] = v[i++];
        else // copiar da direita
            aux[k++] = v[j++];
    }
    // Armazenar os valores que faltaram
    while(i < meio) aux[k++] = v[i++];
    while(j <= fim) aux[k++] = v[j++];
    // Copiar aux no vetor original
    k=0;
    for(i=ini ; i <= fim ; i++) v[i] = aux[k++];
}
```

Merge Sort

Como ordenamos de forma decrescente?
O que deve ser modificado?

Merge Sort

Só precisamos redefinir a função de intercalação.

Antes:

```
if(v[i]< v[j])
    aux[k++] = v[i++];
else
    aux[k++] = v[j++];
```

Depois:

```
if(v[i]> v[j])
    aux[k++] = v[i++];
else
    aux[k++] = v[j++];
```

Merge Sort

Note que isso funciona para os outros algoritmos de ordenação:

Antes:

```
void bubble(int v[], int n){
...
      if(v[j] > v[j+1])
        swap(v,j,j+1);
...
```

Depois:

```
...
      if(v[j] < v[j+1])
        swap(v,j,j+1);
...
```

Teste!