

# Zadanie 7 Lista 4

Piotr Popis, 245162

December 6, 2019

## 1 Zadanie 1

### 1.1 Opis problemu

Celem zadania jest implementacja funkcji obliczającej ilorazy różnicowe. Danymi wejściowymi są:

- x- wektor długości  $n + 1$  zawierający węzły  $x_0, \dots, x_n$   $x[1] = x_0, \dots, x[n + 1] = x_n$
- f- wektor długości  $n + 1$  zawierający wartości interpolowanej funkcji w węzłach  $f(x_0), \dots, f(x_n)$

Wyniki:

- fx- wektor długości  $n + 1$  zawierający obliczone ilorazy różnicowe
- $$fx[1] = f[x_0],$$
- $$fx[2] = f[x_0, x_1], \dots, fx[n] = f[x_0, \dots, x_{n-1}], fx[n + 1] = f[x_0, \dots, x_n].$$

Addytywnym utrudnieniem jest restrykcja użycia tablicy dwuwymiarowej, czyli macierzy.

### 1.2 Rozwiązanie

Ilorazem różnicowym  $n$ - tego rzędu funkcji  $f : X \longrightarrow Y$  w punktach  $x_0, \dots, x_n \in X$  nazywamy funkcję:

$$f(x_0, \dots, x_n) := \sum_i^n \frac{f(x_i)}{\prod_j^n (x_i - x_j)}$$

W celu realizacji zadania, czyli uniknięcia wykorzystania macierzy skorzystamy z zależności rekurencyjnej:

1.  $i = 0$

$$f[x_0] = f(x_0)$$

2.  $i = 1$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

3.  $i = n$

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f(x_1, \dots, x_n) - f(x_0, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}$$

Znając węzły  $x_n$  i wartości funkcji  $f(x_n)$ , można utworzyć dwuwymiarową tablicę ilorazów różnicowych. Jednak algorytm można zoptymalizować, ponieważ wystarczy użyć tablicy jednowymiarowej  $w$  do zapamiętywania dwóch poprzednich wartości (tablicę aktualizujemy od dołu do góry i od lewej do prawej). Pozostałe wartości tylko i wyłącznie spowalniają nasz algorytm. Początkowymi wartościami są  $w_i$  są odpowiadające im  $f[x_i]$ . W kolejnych krokach aktualizowane jest jedno miejsce mniej.

## 2 Zadanie 2

### 2.1 Opis problemu

Napisać funkcję obliczającą wartość wielomianu interpolacyjnego stopnia  $n$  w postaci Newtona  $N_n(x)$  w punkcie  $x=t$  za pomocą algorytmu Hornera w czasie  $\theta(n)$ . Dane wejściowe:

$$\begin{aligned} & \mathbf{x} - \text{wektor długości } n+1 \text{ zawierający węzły } x_0, \dots, x_n \\ & \quad x[1] = x_0, \dots, x[n+1] = x_n \\ & \mathbf{fx} - \text{wektor długości } n+1 \text{ zawierający ilorazy różnicowe} \\ & \quad fx[1] = f[x_0], \\ & \quad fx[2] = f[x_0, x_1], \dots, fx[n] = f[x_0, \dots, x_{n-1}], fx[n+1] = f[x_0, \dots, x_n] \end{aligned}$$

Wyniki:

$$\begin{aligned} & \mathbf{a} - \text{wektor długości } n+1 \text{ zawierający obliczone współczynniki postaci naturalnej} \\ & \quad a[1] = a_0, \\ & \quad a[2] = a_1, \dots, a[n] = a_{n-1}, a[n+1] = a_n. \end{aligned}$$

### 2.2 Rozwiązanie

W celu wyznaczenia wartości wielomianu interpolacyjnego stopnia  $n$  w postaci Newton'a  $N_n(x)$  w punkcie  $x = t$  zaimplementowano uogólniony schemat Hornera.