

OBLICZENIA NAUKOWE
Lista nr 2 (laboratorium)¹
 (uwarunkowanie zadań i stabilność algorytmów)

zad. 1 Powtórz zadanie 5 z listy 1, ale usuń ostatnią 9 z x_4 i ostatnią 7 z x_5 . Jaki wpływ na wyniki mają niewielkie zmiany danych?

zad. 2 Narysować wykres funkcji $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$ w co najmniej dwóch dowolnych programach do wizualizacji. Następnie policzyć granicę funkcji $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Porównać wykres funkcji z policzoną granicą. Wyjaśnić zjawisko.

zad. 3 Rozważmy zadanie rozwiązywania układu równań liniowych

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

dla danej macierzy współczynników $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i wektora prawych stron $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Macierz \mathbf{A} generować w następujący sposób:

- (a) $\mathbf{A} = \mathbf{H}_n$, gdzie \mathbf{H}_n jest macierzą Hilberta stopnia n wygenerowaną za pomocą funkcji `A=hilb(n)` (źródła w języku Julia na stronie domowej),
- (b) $\mathbf{A} = \mathbf{R}_n$, gdzie \mathbf{R}_n jest losową macierzą stopnia n z zadaniem wskaźnikiem uwarunkowania c wygenerowaną za pomocą funkcji `A=matcond(n,c)` (źródła w języku Julia na stronie domowej).

Wektor \mathbf{b} zadany jest następująco $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$, gdzie \mathbf{A} jest wygenerowaną macierzą, a $\mathbf{x} = (1, \dots, 1)^T$. Zatem wiemy jakie jest rozwiązanie dokładne $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dla \mathbf{A} i \mathbf{b} .

Rozwiązać $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ za pomocą dwóch algorytmów: eliminacji Gaussa (`x=A\b`) oraz $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ (`x=inv(A)*b`). Eksperymenty wykonać dla macierzy Hilberta \mathbf{H}_n z rosnącym stopniem $n > 1$ oraz dla macierzy losowej \mathbf{R}_n , $n = 5, 10, 20$ z rosnącym wskaźnikiem uwarunkowania $c = 1, 10, 10^3, 10^7, 10^{12}, 10^{16}$. Porównać obliczony $\tilde{\mathbf{x}}$ z rozwiązaniem dokładnym $\mathbf{x} = (1, \dots, 1)^T$, tj. **policzyć błędy względne**.

W pakiecie `LinearAlgebra` znajdują się dwie użyteczne funkcje `cond(A)` i `rank(A)`. Za pomocą funkcji `cond(A)` można sprawdzić jaki jest wskaźnik uwarunkowania wygenerowanej macierzy. Natomiast za pomocą funkcji `rank(A)` można sprawdzić jaki jest rząd macierzy.

zad. 4 ("złośliwy wielomian", Wilkinson) Zainstalować pakiet `Polynomials`.

- (a) Użyć funkcji `roots` (z pakietu `Polynomials`) do obliczenia 20 zer wielomianu P w

¹Większość zadań pochodzi z książki: D. Kincaid, W. Cheney, Analiza numeryczna, WNT, 2005. Zadania 5 i 6 pochodzą z książki H.O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe *Granice chaosu. Fraktale, część 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997, rozdziały 1.4 i 1.5.

postaci naturalnej

$$\begin{aligned}
 P(x) = & x^{20} - 210x^{19} + 20615x^{18} - 1256850x^{17} + 53327946x^{16} \\
 & - 1672280820x^{15} + 40171771630x^{14} - 756111184500x^{13} \\
 & + 11310276995381x^{12} - 135585182899530x^{11} \\
 & + 1307535010540395x^{10} - 10142299865511450x^9 \\
 & + 63030812099294896x^8 - 311333643161390640x^7 \\
 & + 1206647803780373360x^6 - 3599979517947607200x^5 \\
 & + 8037811822645051776x^4 - 12870931245150988800x^3 \\
 & + 13803759753640704000x^2 - 8752948036761600000x \\
 & + 2432902008176640000
 \end{aligned}$$

(współczynniki wielomianu P umieszczone są na stronie domowej w pliku `wielomian.txt`).
 P jest postacią naturalną wielomianu Wilkinsona p

$$\begin{aligned}
 p(x) = & (x - 20)(x - 19)(x - 18)(x - 17)(x - 16) \\
 & (x - 15)(x - 14)(x - 13)(x - 12)(x - 11) \\
 & (x - 10)(x - 9)(x - 8)(x - 7)(x - 6) \\
 & (x - 5)(x - 4)(x - 3)(x - 2)(x - 1)
 \end{aligned}$$

Sprawdzić obliczone pierwiastki z_k , $1 \leq k \leq 20$, obliczając $|P(z_k)|$, $|p(z_k)|$ i $|z_k - k|$.
 Wyjaśnić rozbieżności.

Zapoznać się z funkcjami: `Poly`, `poly`, `polyval` (z pakietu `Polynomials`).

Wsk. Arytmetyka w `Float64` w języku `Julia` ma od 15 do 17 cyfr znaczących w systemie dziesiętnym.

- (b) Powtórzyć eksperyment Wilkinsona, tj. zmienić współczynnik -210 na $-210 - 2^{-23}$.
 Wyjaśnić zjawisko.

zad. 5 Rozważmy równanie rekurencyjne (model logistyczny, model wzrostu populacji)

$$p_{n+1} := p_n + rp_n(1 - p_n), \text{ dla } n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

gdzie r jest pewną daną stałą, $r(1 - p_n)$ jest czynnikiem wzrostu populacji, a p_0 jest wielkością populacji stanowiącą procent maksymalnej wielkości populacji dla danego stanu środowiska.

Przeprowadzić następujące eksperymenty:

1. Dla danych $p_0 = 0.01$ i $r = 3$ wykonać 40 iteracji wyrażenia (1), a następnie wykonać ponownie 40 iteracji wyrażenia (1) z niewielką modyfikacją tj. wykonać 10 iteracji, zatrzymać, zastosować obcięcie wyniku odrzucając cyfry po trzecim miejscu po przecinku (daje to liczbę 0.722) i kontynuować dalej obliczenia (do 40-tej iteracji) tak, jak gdyby był to ostatni wynik na wyjściu. Porównać otrzymane wyniki.
 Obliczenia wykonać w arytmetyce `Float32` (w języku `Julia`).
2. Dla danych $p_0 = 0.01$ i $r = 3$ wykonać 40 iteracji wyrażenia (1) w arytmetyce `Float32` i `Float64` (w języku `Julia`). Porównać otrzymane wyniki.

zad. 6 Rozważmy równanie rekurencyjne

$$x_{n+1} := x_n^2 + c \text{ dla } n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

gdzie c jest pewną daną stałą.

Przeprowadzić następujące eksperymenty. Dla danych:

1. $c = -2$ i $x_0 = 1$
2. $c = -2$ i $x_0 = 2$
3. $c = -2$ i $x_0 = 1.999999999999999$
4. $c = -1$ i $x_0 = 1$
5. $c = -1$ i $x_0 = -1$
6. $c = -1$ i $x_0 = 0.75$
7. $c = -1$ i $x_0 = 0.25$

wykonać, w języku **Julia** w arytmetyce **Float64**, 40 iteracji wyrażenia (2). Zaobserwować zachowanie generowanych ciągów.

Wsk. Przeprowadzić iteracje graficzną $x_{n+1} := x_n^2 + c$.

Rozwiązania zadań przedstawić w sprawozdaniu, plik pdf + **wydruk**, które powinno zawierać:

1. krótki opis problemu,
2. rozwiązanie,
3. wyniki oraz ich interpretację,
4. wnioski.

Do sprawozdania należy dołączyć pliki z kodem (*.jl). Pliki powinny być skomentowane: imię i nazwisko autora (**anonimowe źródła nie będą sprawdzane**), opisane parametry formalne funkcji, komentarze zmiennych. Spakowane pliki wraz ze sprawozdaniem (*.zip) należy przesłać e-mailem prowadzącemu. Natomiast wydruk sprawozdania należy oddać **prowadzącemu na laboratorium**.

UWAGA: Ostateczną wersję programów proszę przetestować pod linuxem.