Zadanie 7 Lista 4

Piotr Popis, 245162

December 7, 2019

1 Zadanie 1

1.1 Opis problemu

Celem zadania jest implementacja funkcji obliczającej ilorazy różnicowe. Danymi wejściowymi są:

x- wektor długości n+ 1 zawierający węzły $x_0, ..., x_n$ $x[1] = x_0, ..., x[n+1] = x_n$
f– wektor długości n+1 zawierający wartości interpolowanejfunkcji w węzłach $f(x_0), ..., f(x_n)$

Wyniki:

fx- wektor długości $n+1$ zawierający obliczone ilorazy różnicowe
$fx[1] = f[x_0]$,
$fx[2] = f[x_0, x_1], ..., fx[n] = f[x_0, ..., x_{n-1}], fx[n+1] = f[x_0, ..., x_n]$.

Addytywnym utrudnieniem jest restrykcja użycia tablicy dwuwymiarowej, czyli macierzy.

1.2 Rozwiązanie

Ilorazem różnicowym n- tego rzędu funkcji $f : X \longrightarrow Y$ w punktach $x_0, ..., x_n \epsilon X$ nazywamy funkcję:

$$f(x_0, ..., x_n) := \Sigma_i^n \frac{f(x_i)}{\Pi_j^n (x_i - x_j)}$$

W celu realizacji zadania, czyli uniknięcia wykorzystania macierzy skorzystamy z zależności rekurencyjnej:
1.$i = 0$
$f[x_0] = f(x_0)$
2.$i = 1$
$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$
3.$i = n$
$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f(x_1, ..., x_n) - f(x_0, ..., x_{n-1})}{x_n - x_0}$

Znając węzły x_n i wartości funkcji f(x_n), można utworzyć dwuwymiarową tablicę ilorazów różnicowych. Jednak algorytm można zoopytmalizować, ponieważ wystarczy użyć tablicy jednowymiarowej w do zapamiętywania dwóch poprzednich wartości(tablicę aktualizujemy od dołu do góry i od lewej do prawej). Pozostałe wartości tylko i wyłącznie spowalniają nasz algorytm. Początkowymi wartości są w_i są odpowiadające im f[x_i]. W kolejnych krokach aktualizowane jest jedno miejsce mniej.

2 Zadanie 2

2.1 Opis problemu

Napisać funkcję obliczającą wartość wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona $N_n(x)$ w punkcie x=t za pomocą algorytmu Hornera w czasie $\theta(n)$. Dane wejściowe:

$$\text{x– wektor długości n+ 1 zawierający węzły } x_0, ..., x_n$$
$$x[1] = x0, ..., x[n+1] = x_n$$
$$\text{fx– wektor długości n+ 1 zawierający ilorazy różnicowe}$$
$$fx[1] = f[x_0],$$
$$fx[2] = f[x_0, x_1], ..., fx[n] = f[x_0, ..., x_{n-1}], fx[n+1] = f[x_0, ..., x_n]$$

Wyniki:

$$\text{a – wektor długości n+ 1 zawierający obliczone współczynniki postaci naturalnej}$$
$$a[1] = a_0,$$
$$a[2] = a_1, ..., a[n] = a_{n-1}, a[n+1] = a_n.$$

2.2 Rozwiązanie

W celu wyznaczenia wartości wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newton'a $N_n(x)$ w punkcie $x = t$ zaimplementowano uogólniony schemat Hornera.

$$N_n(x) = \Sigma_{i=0}^{k} c_i \Pi_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Wartość wielomianu przyjmowana w danym punkcie t obliczamy, kosztystając z:

$$w(x) = (x - t) \cdot q(z) \cdot w(t)$$

Można też śmiało stwierdzić, iż metoda Newton'a jest trudniejsza w impementacji niż np metoda Lagrange'a i wymaga większej ilości oddzielnych kroków. Jest jednak znacznie lepiej uwarunkowana nmerycznie.W metodzie najpierw wzynaczane są odpowiednie ilorazy różnicowe, a dopiero później z ich użyciem- interpolowa funkcja. Algorytm zaczynamy od przypisania do zmiennej nt konkretnego wektora ilorazów różnicowych. W kolejnych krokach od n-1 zwiększamy wartość wektora pomnożoną przez różnicę wartości węzła i weilomianu t. Otrzymujemy:

$$nt = f_x(i) + nt \cdot (t - \omega[i]), \text{ gdzie } f_x \text{ jest wektorem ilorazów różnicowych.}$$

Algorytm działa w czasie liniowym.

3 Zadanie 3

3.1 Opis Problemu

Celem zadania jest kreacja funkcji obliczającej współczynniki postaci naturalnej wielomianu interpolacyjnego znając współczynniki wielomianu interpolacyjnnego w postaci Newton'a c_0 = f[x_0], $c_1 = f[x_0, x_1]$, c_2= $f[x_0, x_1, x_2], ..., cn = f[x_0, ..., x_n]$ (ilorazy różnicowe) oraz węzły $x_0, x_2, ..., x_n$ działającą w czasie $\theta(n^2)$. Dane wejściowe:

x– wektor długości $n + 1$ zawierający węzły $x_0, ..., x_n x[1] = x_0, ..., x[n + 1] = x_n$
fx– wektor długości n+ 1 zawierający ilorazy różnicowe
$fx[1] = f[x_0], fx[2] = f[x_0, x_1], ..., fx[n] = f[x0, ..., x_{n-1}], fx[n + 1] = f[x0, ..., x_n]$

Wyniki:

a– wektor długości $n + 1$ zawierający obliczone współczynniki postaci naturalnej
$a[1] = a_0$,
$a[2] = a_{\cdot}.., a[n] = a_{n-1}, a[n + 1] = a_n$

3.2 Rozwiązanie

Korzystając z faktu, iż współczynnik sąsiadujący z x^k to f[$x_0, x_1, ..., x_k$], czyli c_n przy najwyżej potędze wielomianu w postaci Newton'a. Ponownie wykorzystujemy ugólnienie schematu Hornera, a następnie z wzoru na postać Newton'a podanego na wykładzie:

$$p(x) = \Sigma_{k=0}^{n} f[x_0, ..., x_k] \Pi_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

Wielomian posiada współczynniki przy odpowiadających im potęgach $a_0, a_1, ..., a_k$, gdzie współczynnik a_k leży przy największej potędze. Dokonujemy mnożenia danego wielomianu począwszy od jego ostatnich potęg. W każdym kroku mnożemy nasz wielomian przez dwumian $(x - x_{n-1})$. Ostateczny wielomian wynikowy będzie zaprezentwoany jako prosty wektor współczynników analagoiczny do wektora wejściowego. W wyniku wykonanych mnożeń otrzymujemy postać wynikową wielomianu, którego współczynniki wynoszą kolejno $a_k, a_{k-1}, .., a_0$. Aby wynik był postaci $a_0 + a_1 x + a_x^2 + ... + a_n x^n$ musimy dokonać również przestawienia. Całkowita złożoność obliczeniowa wynosi $\theta(n^2)$, ponieważ złożoność obliczeniowa schmeatu Horner;a wynosi $\theta(n)$ oraz mnożenie wielomianów również $\theta(n)$

4 Zadanie 4

4.1 Opis Problemu

Celem zadania jest utworzenie funkcji, która zinterpoluje zadaną funkcję f(x) w przedziale [a,b] za pomocą wielominau interpolacyjnego stopnia n w postaci Newton'a, a następnie narysuje wielomian interpolacyjny i funkcję interpolową. Wykorzystać Plots lub PyPlot lub Gadfly do narysowania grafów.

W interpolacji użyć węzłów równoodległych,

$$x_k = a + k \cdot h,$$
$$h = \frac{b-a}{n}, k = 0, 1..., n$$

W zadaniu należy nie wyznaczać jawnej postaci wielomianu interpolacyjnego. Należy skorzystać z funkcji zaimplementowanych w zadaniu 1 oraz zadaniu 2 odpowiednio iloryRzonicowe i warNewton. Dane wejściowe:

f– funkcja f(x) zadana jako anonimowa funkcja,
a,b– przedział interpolacji,
n– stopień wielomianu interpolacyjnego

Wyniki:

-funkcja rysuje wielomian interpolacyjny i interpolowaną funkcję w przedziale[a, b]

4.2 Rozwiązanie

Pierwszym schodem jest wyznaczenie równoodległch węzłów i obliczenie odległosci h między nimi z wzoru

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Kolejnym etapem jest wyznaczenie wartości zadanej funkcji w wyznaczonych węzłach.
Następnie korzystając z funkcji zaimplementowanej w sekcji Zadanie 1 - ilorazyRoznicowe, tablic z węzłami i wartościami funkcji wyznaczenie wektora ilorazów różnicowych.
Przedostatni krok to wyznaczenie wartości funkcji interpolowanej i wielomianu interpolacyjnego w s równoodległych punktach na zadanym przedziale .
Ostatni etap to rysunek wykorzystując pakiet Plots.

W pliku tekst znajdują się testy do powyższych funkcji. Wszystkie powyższe funkcje zostały umieszczone w wspólnym module - *functions*

5 Zadanie 5

5.1 Opis Problemu

5.1.1 a) $e^x, [0, 1], n = 5, 10, 15,$

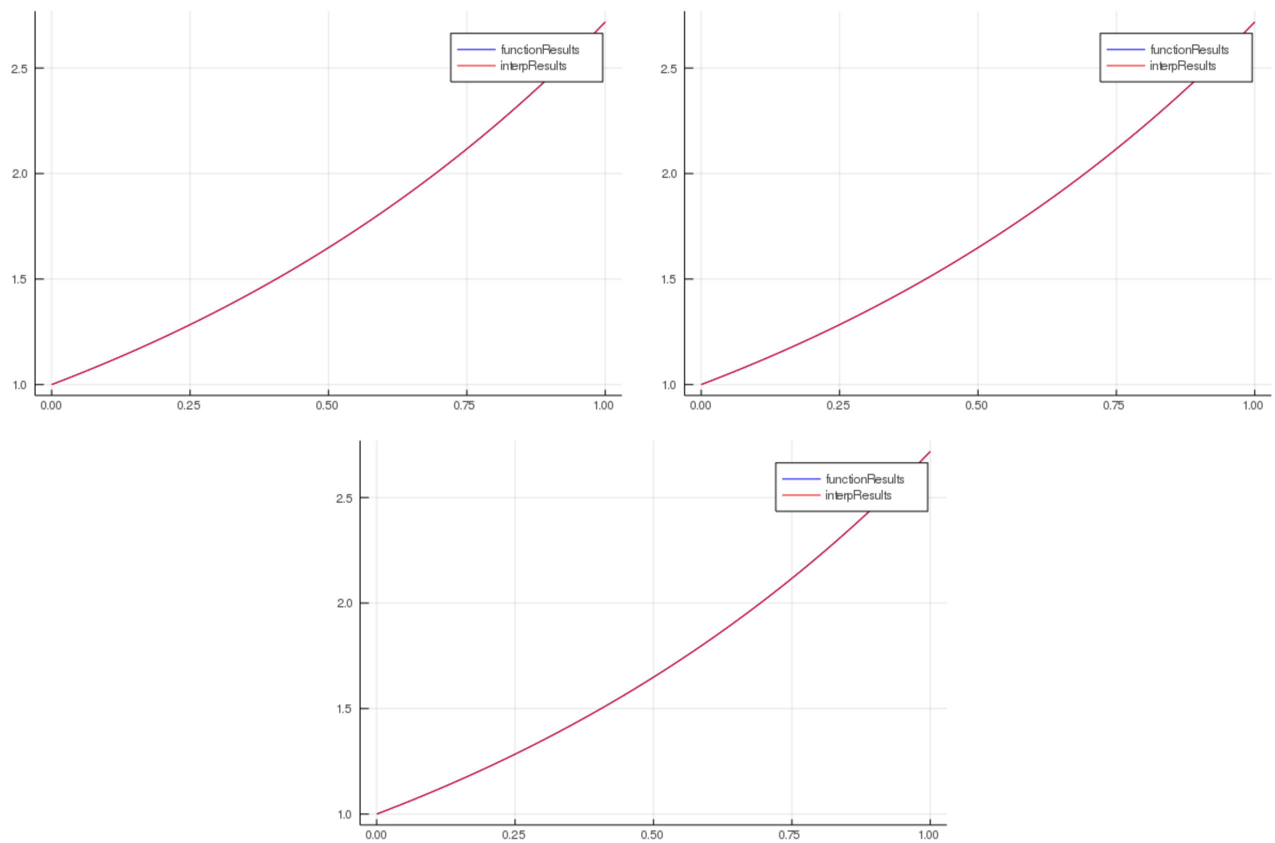
5.1.2 b) $x^2 sin(x), [-1, 1], n = 5, 10, 15$

5.2 Rozwiązanie

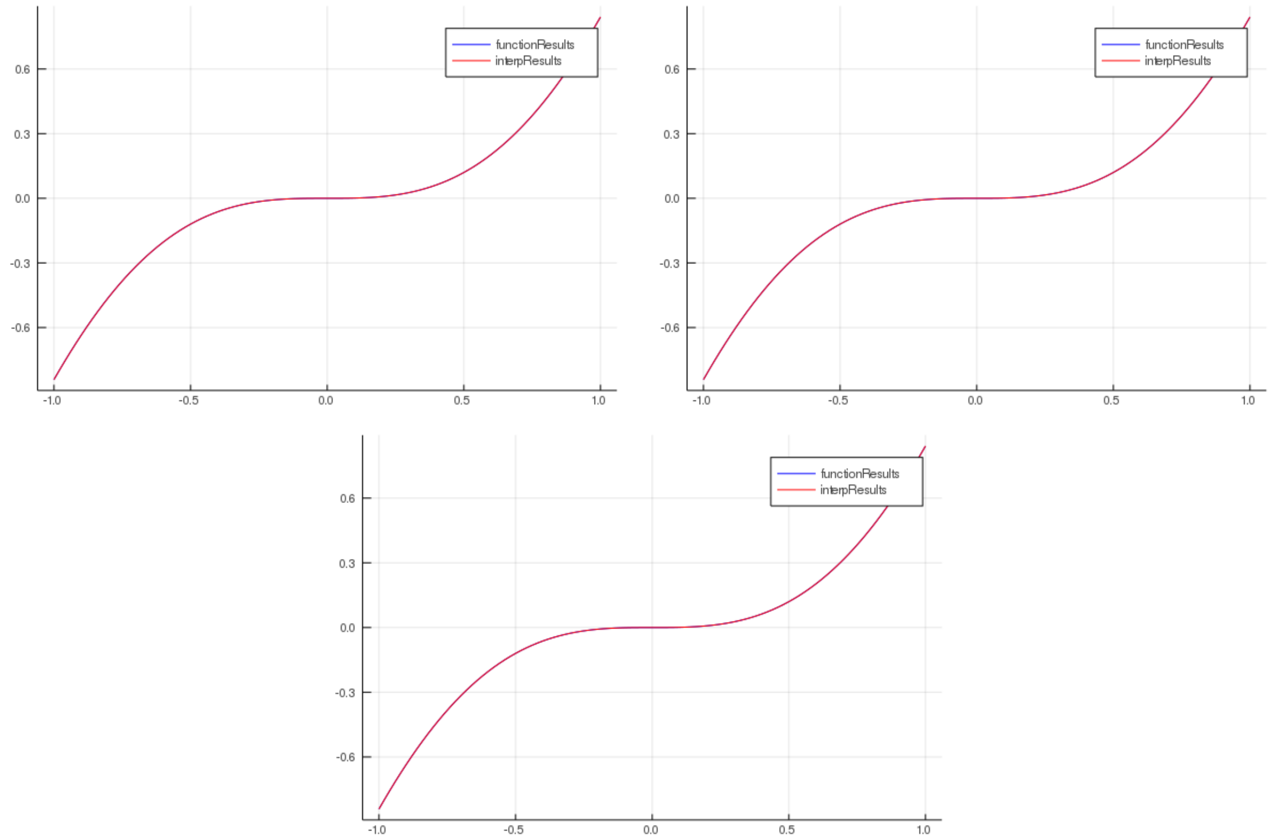
W celu rozwiązania zadania należy przetestować zaimplementowaną w Zadaniu 4 funkcję i narysować wykresy dla zadanych przykładów

5.3 Wyniki

5.3.1 a) $e^x, [0, 1], n = 5, 10, 15,$



5.3.2 b) $x^2 sin(x), [-1, 1], n = 5, 10, 15$



5.4 Wnioski

xxxxxxxxxxx