Obliczenia Naukowe

Laboratorium Lista Nr 5
Piotr Popis
245162

6 grudzień 2019

1 Zadanie 1

1.1 Opis problemu

Celem zadania jest implementacja funkcji obliczającej ilorazy różnicowe. Danymi wejściowymi są:

x- wektor długości n+ 1 zawierający węzły $x_0, ..., x_n$ $x[1] = x_0, ..., x[n+1] = x_n$
f– wektor długości n+1 zawierający wartości interpolowanejfunkcji w węzłach $f(x_0), ..., f(x_n)$

Wyniki:

fx- wektor długości $n+1$ zawierający obliczone ilorazy różnicowe
$fx[1] = f[x_0]$,
$fx[2] = f[x_0, x_1], ..., fx[n] = f[x_0, ..., x_{n-1}], fx[n+1] = f[x_0, ..., x_n]$.

Addytywnym utrudnieniem jest restrykcja użycia tablicy dwuwymiarowej, czyli macierzy.

1.2 Rozwiązanie

Ilorazem różnicowym n- tego rzędu funkcji $f : X \longrightarrow Y$ w punktach $x_0, ..., x_n \epsilon X$ nazywamy funkcję:

$$f(x_0, ..., x_n) := \sum_{i}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_j^n (x_i - x_j)}$$

W celu realizacji zadania, czyli uniknięcia wykorzystania macierzy skorzystamy z zależności rekurencyjnej:

1.$i = 0$
$f[x_0] = f(x_0)$

2.$i = 1$
$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

3.$i = n$
$f[x_0, ..., x_n] = \dfrac{f(x_1, ..., x_n) - f(x_0, ..., x_{n-1})}{x_n - x_0}$

Znając węzły x_n i wartości funkcji f(x_n), można utworzyć dwuwymiarową tablicę ilorazów różnicowych. Jednak prowadzi to do źle uwarunkowanej macierzy Vanermode'a. Algorytm natomiast można zoopytmalizować, ponieważ wystarczy użyć tablicy jednowymiarowej w do zapamiętywania dwóch poprzednich wartości(tablicę aktualizujemy od góry do dołu i od lewej do prawej). Pozostałe wartości są po prostu niepotrzebne. Początkowymi wartości w_i są odpowiadające im f[x_i]. Ostatecznie ilorazem różnicowym opartym na węzłach $x_0, ..., x_n$ będziemy nazywali wielkość $f[x_0, ..., x_n]$.

Postać Newton'a wzoru interpolacyjnego

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k q_k(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, ..., x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

gdzie c_0 zależy od f(x_0),

$$\vdots$$

c_n zależy od f w punktach $x_0, ..., x_n$

2 Zadanie 2

2.1 Opis problemu

Napisać funkcję obliczającą wartość wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona $N_n(x)$ w punkcie x=t za pomocą algorytmu Hornera w czasie $\theta(n)$. Dane wejściowe:

$$\text{x– wektor długości n+ 1 zawierający węzły } x_0, ..., x_n$$
$$x[1] = x0, ..., x[n+1] = x_n$$
$$\text{fx– wektor długości n+ 1 zawierający ilorazy różnicowe}$$
$$fx[1] = f[x_0],$$
$$fx[2] = f[x_0, x_1], ..., fx[n] = f[x_0, ..., x_{n-1}], fx[n+1] = f[x_0, ..., x_n]$$

Wyniki:

$$\text{a – wektor długości n+ 1 zawierający obliczone współczynniki postaci naturalnej}$$
$$a[1] = a_0,$$
$$a[2] = a_1, ..., a[n] = a_{n-1}, a[n+1] = a_n.$$

2.2 Rozwiązanie

W celu wyznaczenia wartości wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newton'a $N_n(x)$ w punkcie $x = t$ zaimplementowano uogólniony schemat Hornera.

$$N_n(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Wartość wielomianu przyjmowana w danym punkcie t obliczamy, kosztystając z:

$$w(x) = (x - t) \cdot q(z) \cdot w(t)$$

Można też śmiało stwierdzić, iż metoda Newton'a jest trudniejsza w impementacji niż np metoda Lagrange'a i wymaga większej ilości oddzielnych kroków. Jest jednak znacznie lepiej uwarunkowana nmerycznie.W metodzie najpierw wzynaczane są odpowiednie ilorazy różnicowe, a dopiero później z ich użyciem- interpolowa funkcja. Algorytm zaczynamy od przypisania do zmiennej nt konkretnego wektora ilorazów różnicowych. W kolejnych krokach od n-1 zwiększamy wartość wektora pomnożoną przez różnicę wartości węzła i weilomianu t. Otrzymujemy:

$$nt = f_x(i) + nt \cdot (t - \omega[i]), \text{ gdzie } f_x \text{ jest wektorem ilorazów różnicowych.}$$

Algorytm działa w czasie liniowym.

3 Zadanie 3

3.1 Opis Problemu

Celem zadania jest kreacja funkcji obliczającej współczynniki postaci naturalnej wielomianu interpolacyjnego znając współczynniki wielomianu interpolacyjnnego w postaci Newton'a c_0 = f[x_0], $c_1 = f[x_0, x_1]$, c_2= $f[x_0, x_1, x_2], ..., cn = f[x_0, ..., x_n]$ (ilorazy różnicowe) oraz węzły $x_0, x_2, ..., x_n$ działającą w czasie $\theta(n^2)$. Dane wejściowe:

$$\text{x– wektor długości } n + 1 \text{ zawierający węzły } x_0, ..., x_n x[1] = x_0, ..., x[n + 1] = x_n$$
$$\text{fx– wektor długości n+ 1 zawierający ilorazy różnicowe}$$
$$fx[1] = f[x_0], fx[2] = f[x_0, x_1], ..., fx[n] = f[x0, ..., x_{n-1}], fx[n + 1] = f[x0, ..., x_n]$$

Wyniki:

$$\text{a– wektor długości } n + 1 \text{ zawierający obliczone współczynniki postaci naturalnej}$$
$$a[1] = a_0,$$
$$a[2] = a_{.}.., a[n] = a_{n-1}, a[n + 1] = a_n$$

3.2 Rozwiązanie

Korzystając z faktu, iż współczynnik sąsiadujący z x^k to f[$x_0, x_1, ..., x_k$], czyli c_n przy najwyżej potędze wielomianu w postaci Newton'a. Ponownie wykorzystujemy ugólnienie schematu Hornera, a następnie z wzoru na postać Newton'a podanego na wykładzie:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, ..., x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

Wielomian posiada współczynniki przy odpowiadających im potęgach $a_0, a_1, ..., a_k$, gdzie współczynnik a_k leży przy największej potędze. Dokonujemy mnożenia danego wielomianu począwszy od jego ostatnich potęg. W każdym kroku mnożemy nasz wielomian przez dwumian $(x - x_{n-1})$. Ostateczny wielomian wynikowy będzie zaprezentwoany jako prosty wektor współczynników analagoiczny do wektora wejściowego. W wyniku wykonanych mnożeń otrzymujemy postać wynikową wielomianu, którego współczynniki wynoszą kolejno $a_k, a_{k-1}, .., a_0$. Aby wynik był postaci $a_0 + a_1x + a_x^2 + ... + a_nx^n$ musimy dokonać również przestawienia. Całkowita złożoność obliczeniowa wynosi $\theta(n^2)$, ponieważ złożoność obliczeniowa schmeatu Horner;a wynosi $\theta(n)$ oraz mnożenie wielomianów również $\theta(n)$

4 Zadanie 4

4.1 Opis Problemu

Celem zadania jest utworzenie funkcji, która zinterpoluje zadaną funkcję f(x) w przedziale [a,b] za pomocą wielominau interpolacyjnego stopnia n w postaci Newton'a, a następnie narysuje wielomian interpolacyjny i funkcję interpolową. Wykorzystać Plots lub PyPlot lub Gadfly do narysowania grafów.

W interpolacji użyć węzłów równoodległych,

$$x_k = a + k \cdot h,$$
$$h = \frac{b-a}{n}, k = 0, 1..., n$$

W zadaniu należy nie wyznaczać jawnej postaci wielomianu interpolacyjnego. Należy skorzystać z funkcji zaimplementowanych w zadaniu 1 oraz zadaniu 2 odpowiednio iloryRzonicowe i warNewton. Dane wejściowe:

f– funkcja f(x) zadana jako anonimowa funkcja,
a,b– przedział interpolacji,
n– stopień wielomianu interpolacyjnego

Wyniki:

-funkcja rysuje wielomian interpolacyjny i interpolowaną funkcję w przedziale[a, b]

4.2 Rozwiązanie

Pierwszym schodem jest wyznaczenie równoodległch węzłów i obliczenie odległosci h między nimi z wzoru

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Kolejnym etapem jest wyznaczenie wartości zadanej funkcji w wyznaczonych węzłach.
Następnie korzystając z funkcji zaimplementowanej w sekcji Zadanie 1 - ilorazyRoznicowe, tablic z węzłami i wartościami funkcji wyznaczenie wektora ilorazów różnicowych.
Przedostatni krok to wyznaczenie wartości funkcji interpolowanej i wielomianu interpolacyjnego w s równoodległych punktach na zadanym przedziale .
Ostatni etap to rysunek wykorzystując pakiet Plots.

W pliku tekst znajdują się testy do powyższych funkcji. Wszystkie powyższe funkcje zostały umieszczone w wspólnym module - $functions$

5 Zadanie 5

5.1 Opis Problemu

5.1.1 a) $e^x, [0, 1], n = 5, 10, 15,$

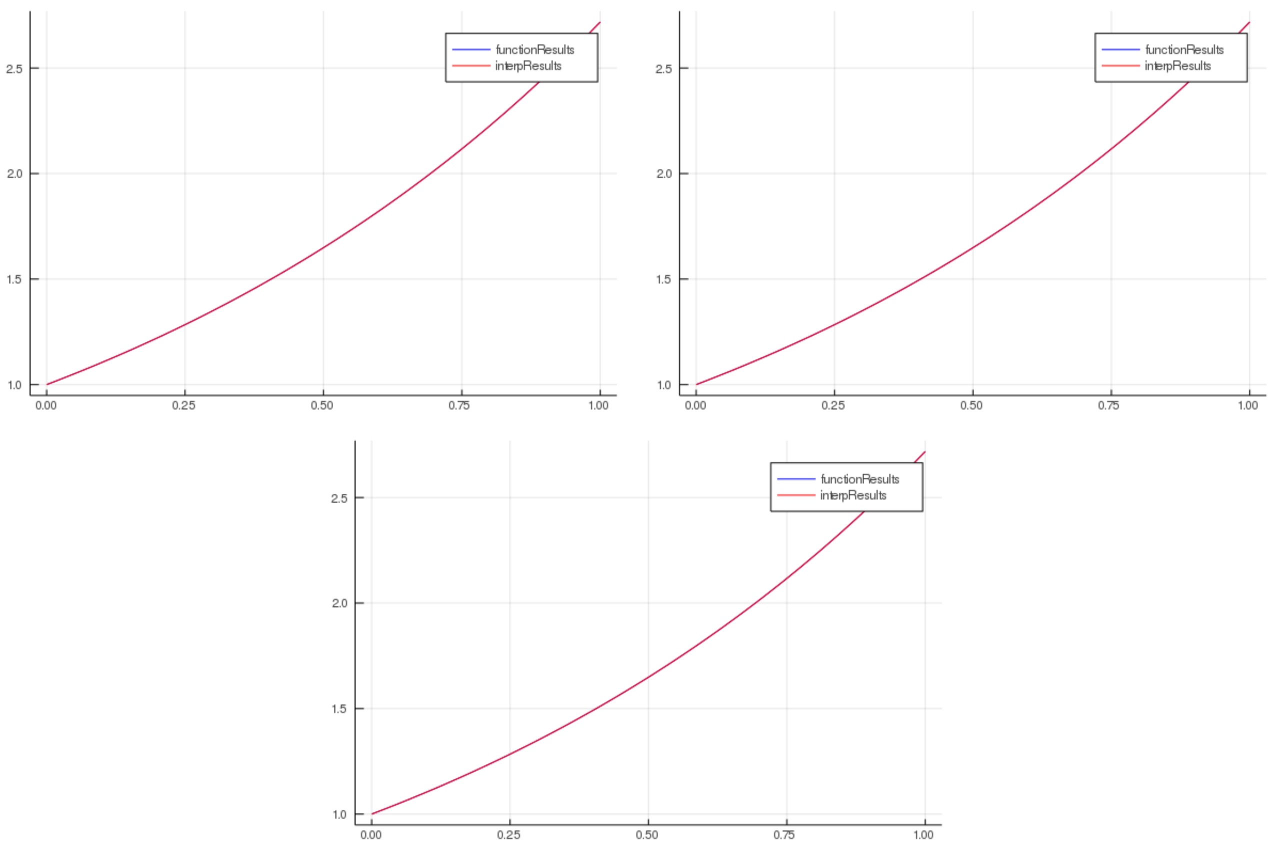
5.1.2 b) $x^2 sin(x), [-1, 1], n = 5, 10, 15$

5.2 Rozwiązanie

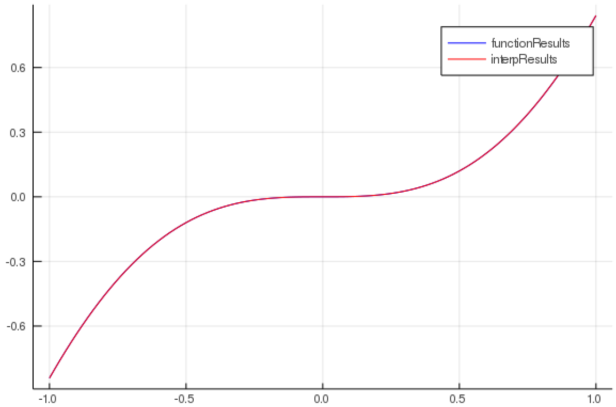
W celu rozwiązania zadania należy przetestować zaimplementowaną w Zadaniu 4 funkcję i narysować wykresy dla zadanych przykładów.

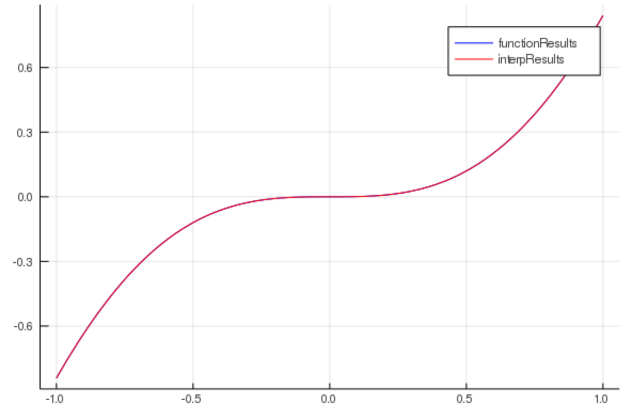
5.3 Wyniki

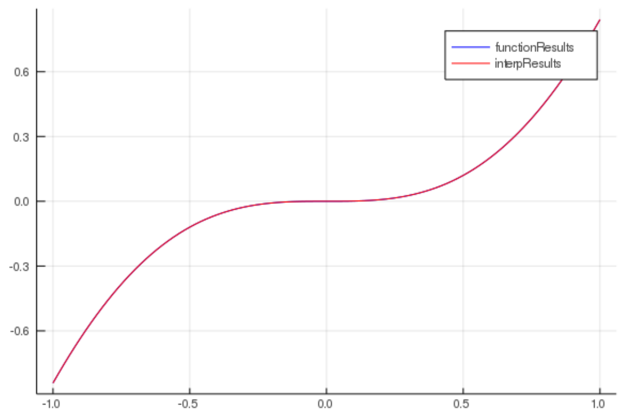
5.3.1 a) $e^x, [0, 1], n = 5, 10, 15,$



5.3.2 b) $x^2 sin(x), [-1, 1], n = 5, 10, 15$







5.4 Wnioski

Jak widać w sekcji wyniki dla zadanych przykładów a i b wykresu wielomianów interpolacyjnych oraz interpolowanych funkcji są niemalże identyczne, nakładają się.
Wykorzystanie równoogległych węzłów przy interpoloacji dało niemal perfekcyjne wyniki. Powstałe wielomiany interpolacyjne praktycznie idealnie odwzorowały przebieg funkcji, co więcej zwiększenie stopnia wielomianu zwiększa jego podobieństwo do oryginalnej funkcji.

6 Zadanie 6

6.1 Opis Problemu

6.1.1 a) $|x|, [-1, 1], n = 5, 10, 15$

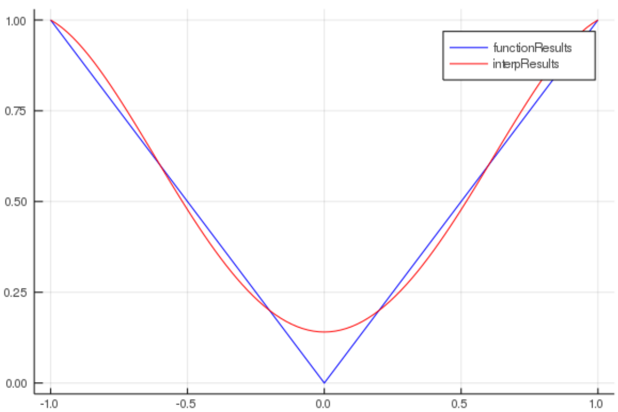
6.1.2 b) $\frac{1}{1+x^2}, [-5, 5], n = 5, 10, 15$ (zjawisko Runge'go)

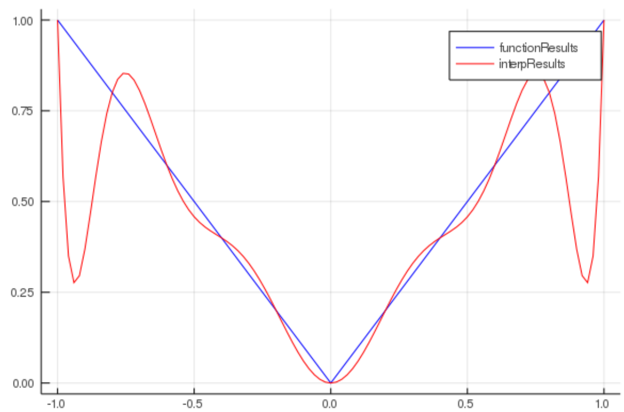
6.2 Rozwiązanie

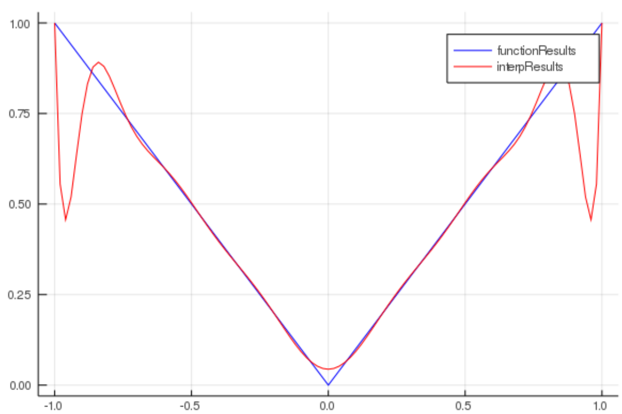
W celu rozwiązania zadania należy przetestować zaimplementowaną w Zadaniu 4 funkcję i narysować wykresy dla zadanych przykładów. Obserwacja Zjawiska Rozbieżności.

6.3 Wyniki

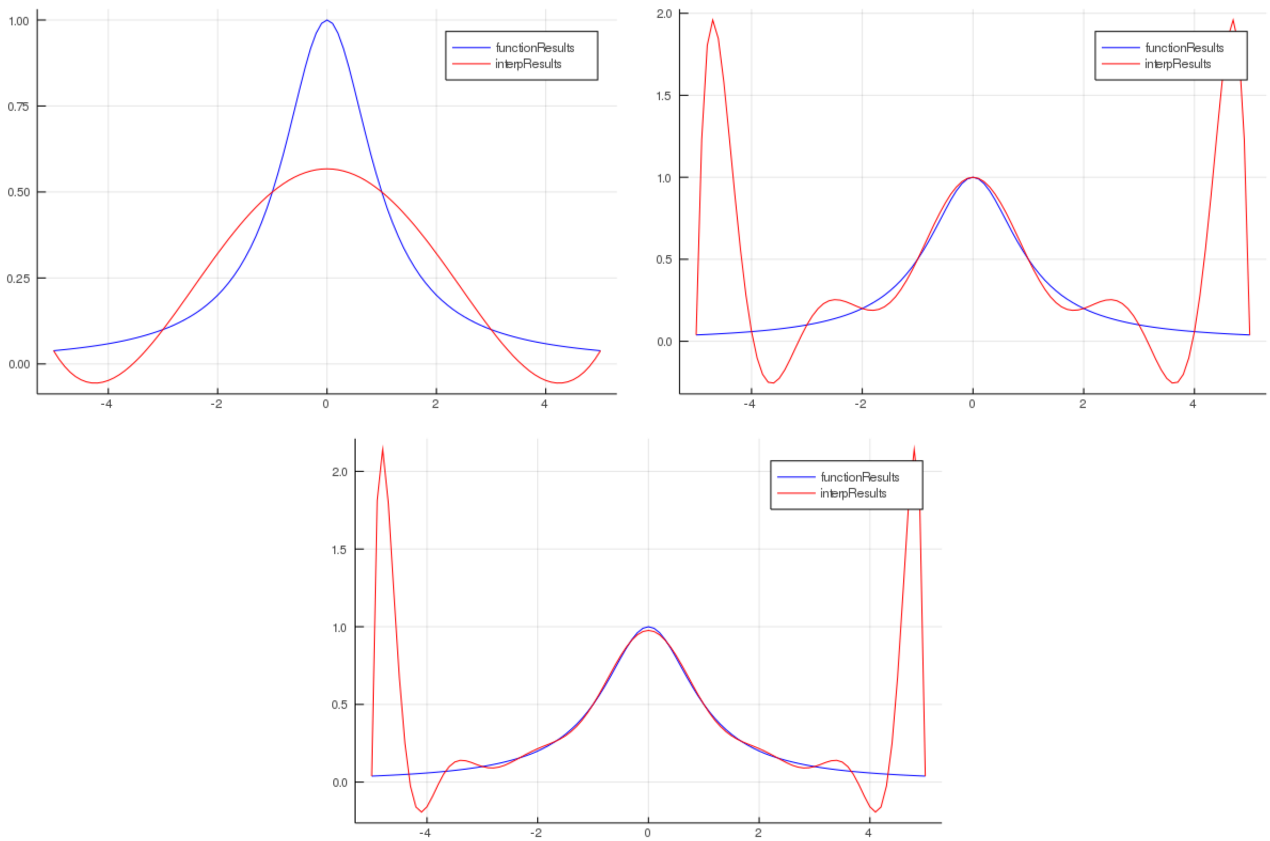
6.3.1 a) $|x|, [-1, 1], n = 5, 10, 15$







6.3.2 b) $\frac{1}{1+x^2}, [-5,5], n = 5, 10, 15$ (zjawisko Runge'go)



6.4 Wnioski

Zjawisko Runge'go Wiąże się z zachowaniem samych wielomianów bazowych: wielomiany oparte na węzłach równoodległych silnie oscylują w pobliżu krańców przedziału.
Na podstawie powyższych wyników jesteśmy w stanie zauważyć, iż wartości funkcji dla danych argumentów nie pokrywają się z wartościami wielomianów interpolacyjnch. Dla funkcji $|x|$ dziesie się tak, bo funkcja nie jest różniczkowalna. Natomiast funkcja $\dfrac{1}{1+x^2}$ jest przykładem powyżej wspomnianego zjawiska Runge'go. Zjawisko to występuje w przypadku pogorszenia jakości interpolacji wielomianowej pomimo zwiększenia ilości węzłow wielomianu interpolacyjnego. Przy zwiększaniu wartości n wykres początkowo sprawia złudzenie zmierzania do poprawnego kształtu, by po chwili całkowicie odejść od poprawności. Zjawisko jest popularne dla interpolacji za pomocą wielomianów wysokich stopni przy zastowaniu równoodległych węzłów. Występuje również w przypadku funkcji nieciągłej. W celu uniknięcia takiej sytuacji należy zastosowac interpolację z węzłami coraz gęściej upakowanymi na krańcach przedziału interpolacji.(Dobrym przykładem są wspomniane na stronie MIMUW węzły Czebyszewa, dla których wraz ze wzrostem sropnia wielomianu maleje błąd maksymalny aproksymacji funkcji). Wielomiany wysokiego stopnia nie są odpowiednim wyborem dla interpolacji dla równo oddalonych węzłów.