

# Zadanie 7 Lista 4

Piotr Popis, 245162

December 8, 2019

## 1 Zadanie 1

### 1.1 Opis problemu

Celem zadania jest implementacja funkcji obliczającej ilorazy różnicowe. Danymi wejściowymi są:

- x- wektor długości  $n+1$  zawierający węzły  $x_0, \dots, x_n$   $x[1] = x_0, \dots, x[n+1] = x_n$
- f- wektor długości  $n+1$  zawierający wartości interpolowanej funkcji w węzłach  $f(x_0), \dots, f(x_n)$

Wyniki:

- fx- wektor długości  $n+1$  zawierający obliczone ilorazy różnicowe
- $$fx[1] = f[x_0],$$
- $$fx[2] = f[x_0, x_1], \dots, fx[n] = f[x_0, \dots, x_{n-1}], fx[n+1] = f[x_0, \dots, x_n].$$

Addytywnym utrudnieniem jest restrykcja użycia tablicy dwuwymiarowej, czyli macierzy.

### 1.2 Rozwiązanie

Ilorazem różnicowym  $n$ - tego rzędu funkcji  $f : X \rightarrow Y$  w punktach  $x_0, \dots, x_n \in X$  nazywamy funkcję:

$$f(x_0, \dots, x_n) := \sum_i^n \frac{f(x_i)}{\prod_j^n (x_i - x_j)}$$

W celu realizacji zadania, czyli uniknięcia wykorzystania macierzy skorzystamy z zależności rekurencyjnej:

1.  $i = 0$

$$f[x_0] = f(x_0)$$

2.  $i = 1$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

3.  $i = n$

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f(x_1, \dots, x_n) - f(x_0, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}$$

Znając węzły  $x_n$  i wartości funkcji  $f(x_n)$ , można utworzyć dwuwymiarową tablicę ilorazów różnicowych. Jednak algorytm można zoptymalizować, ponieważ wystarczy użyć tablicy jednowymiarowej  $w$  do zapamiętywania dwóch poprzednich wartości (tablicę aktualizujemy od dołu do góry i od lewej do prawej). Pozostałe wartości tylko i wyłącznie spowalniają nasz algorytm. Początkowymi wartościami są  $w_i$  są odpowiadające im  $f[x_i]$ . W kolejnych krokach aktualizowane jest jedno miejsce mniej.

## 2 Zadanie 2

### 2.1 Opis problemu

Napisać funkcję obliczającą wartość wielomianu interpolacyjnego stopnia  $n$  w postaci Newtona  $N_n(x)$  w punkcie  $x=t$  za pomocą algorytmu Hornera w czasie  $\theta(n)$ . Dane wejściowe:

$$\begin{aligned}x &- \text{wektor długości } n+1 \text{ zawierający węzły } x_0, \dots, x_n \\x[1] &= x_0, \dots, x[n+1] = x_n \\fx &- \text{wektor długości } n+1 \text{ zawierający ilorazy różnicowe} \\fx[1] &= f[x_0], \\fx[2] &= f[x_0, x_1], \dots, fx[n] = f[x_0, \dots, x_{n-1}], fx[n+1] = f[x_0, \dots, x_n]\end{aligned}$$

Wyniki:

$$\begin{aligned}a &- \text{wektor długości } n+1 \text{ zawierający obliczone współczynniki postaci naturalnej} \\a[1] &= a_0, \\a[2] &= a_1, \dots, a[n] = a_{n-1}, a[n+1] = a_n.\end{aligned}$$

### 2.2 Rozwiązanie

W celu wyznaczenia wartości wielomianu interpolacyjnego stopnia  $n$  w postaci Newton'a  $N_n(x)$  w punkcie  $x = t$  zaimplementowano uogólniony schemat Hornera.

$$N_n(x) = \sum_{i=0}^k c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Wartość wielomianu przyjmowana w danym punkcie  $t$  obliczamy, kosztując z:

$$w(x) = (x - t) \cdot q(z) \cdot w(t)$$

Można też śmiało stwierdzić, iż metoda Newton'a jest trudniejsza w implementacji niż np metoda Lagrange'a i wymaga większej ilości oddzielnych kroków. Jest jednak znacznie lepiej uwarunkowana numerycznie. W metodzie najpierw wyznaczane są odpowiednie ilorazy różnicowe, a dopiero później z ich użyciem - interpolowana funkcja. Algorytm zaczynamy od przypisania do zmiennej  $nt$  konkretnego wektora ilorazów różnicowych. W kolejnych krokach od  $n-1$  zwiększamy wartość wektora pomnożoną przez różnicę wartości węzła i wielomianu  $t$ . Otrzymujemy:

$$nt = f_x(i) + nt \cdot (t - \omega[i]), \text{ gdzie } f_x \text{ jest wektorem ilorazów różnicowych.}$$

Algorytm działa w czasie liniowym.

### 3 Zadanie 3

#### 3.1 Opis Problemu

Celem zadania jest kreacja funkcji obliczającej współczynniki postaci naturalnej wielomianu interpolacyjnego znając współczynniki wielomianu interpolacyjnego w postaci Newton'a  $c_0 = f[x_0]$ ,  $c_1 = f[x_0, x_1]$ ,  $c_2 = f[x_0, x_1, x_2]$ , ...,  $c_n = f[x_0, \dots, x_n]$  (ilorazy różnicowe) oraz węzły  $x_0, x_1, \dots, x_n$  działającą w czasie  $\theta(n^2)$ . Dane wejściowe:

x- wektor długości  $n + 1$  zawierający węzły  $x_0, \dots, x_n$   $x[1] = x_0, \dots, x[n + 1] = x_n$

fx- wektor długości  $n + 1$  zawierający ilorazy różnicowe

$fx[1] = f[x_0]$ ,  $fx[2] = f[x_0, x_1]$ , ...,  $fx[n] = f[x_0, \dots, x_{n-1}]$ ,  $fx[n + 1] = f[x_0, \dots, x_n]$

Wyniki:

a- wektor długości  $n + 1$  zawierający obliczone współczynniki postaci naturalnej

$$a[1] = a_0,$$

$$a[2] = a_1, \dots, a[n] = a_{n-1}, a[n + 1] = a_n$$

#### 3.2 Rozwiązanie

Korzystając z faktu, iż współczynnik sąsiadujący z  $x^k$  to  $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ , czyli  $c_n$  przy najwyższej potęgde wielomianu w postaci Newton'a. Ponownie wykorzystujemy uogólnienie schematu Hornera, a następnie z wzoru na postać Newton'a podanego na wykładzie:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

Wielomian posiada współczynniki przy odpowiadających im potęgach  $a_0, a_1, \dots, a_k$ , gdzie współczynnik  $a_k$  leży przy największej potęgde. Dokonujemy mnożenia danego wielomianu począwszy od jego ostatnich potęg. W każdym kroku mnożymy nasz wielomian przez dwumian  $(x - x_{n-1})$ . Ostateczny wielomian wynikowy będzie zaprezentowany jako prosty wektor współczynników analogiczny do wektora wejściowego. W wyniku wykonanych mnożeń otrzymujemy postać wynikową wielomianu, którego współczynniki wynoszą kolejno  $a_k, a_{k-1}, \dots, a_0$ . Aby wynik był postaci  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  musimy dokonać również przestawienia. Całkowita złożoność obliczeniowa wynosi  $\theta(n^2)$ , ponieważ złożoność obliczeniowa schematu Hornera wynosi  $\theta(n)$  oraz mnożenie wielomianów również  $\theta(n)$

## 4 Zadanie 4

### 4.1 Opis Problemu

Celem zadania jest utworzenie funkcji, która zinterpoluje zadaną funkcję  $f(x)$  w przedziale  $[a,b]$  za pomocą wielomianu interpolacyjnego stopnia  $n$  w postaci Newton'a, a następnie narysuje wielomian interpolacyjny i funkcję interpolowaną. Wykorzystać Plots lub PyPlot lub Gadfly do narysowania grafów.

W interpolacji użyć węzłów równoodległych,

$$x_k = a + k \cdot h, \\ h = \frac{b-a}{n}, k = 0, 1, \dots, n$$

W zadaniu należy nie wyznaczać jawnej postaci wielomianu interpolacyjnego. Należy skorzystać z funkcji zaimplementowanych w zadaniu 1 oraz zadaniu 2 odpowiednio `iloryRznicowe` i `warNewton`. Dane wejściowe:

f– funkcja  $f(x)$  zadana jako anonimowa funkcja,  
a,b– przedział interpolacji,  
n– stopień wielomianu interpolacyjnego

Wyniki:

-funkcja rysuje wielomian interpolacyjny i interpolowaną funkcję w przedziale  $[a, b]$

### 4.2 Rozwiązanie

Pierwszym schodem jest wyznaczenie równoodległych węzłów i obliczenie odległości  $h$  między nimi z wzoru

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Kolejnym etapem jest wyznaczenie wartości zadanej funkcji w wyznaczonych węzłach.

Następnie korzystając z funkcji zaimplementowanej w sekcji Zadanie 1 - `ilorazyRoznicowe`, tablic z węzłami i wartościami funkcji wyznaczenie wektora ilorazów różnicowych.

Przedostatni krok to wyznaczenie wartości funkcji interpolowanej i wielomianu interpolacyjnego w  $s$  równoodległych punktach na zadanym przedziale .

Ostatni etap to rysunek wykorzystując pakiet Plots.

W pliku tekst znajdują się testy do powyższych funkcji. Wszystkie powyższe funkcje zostały umieszczone w wspólnym module - *functions*

## 5 Zadanie 5

### 5.1 Opis Problemu

5.1.1 a)  $e^x, [0, 1], n = 5, 10, 15,$

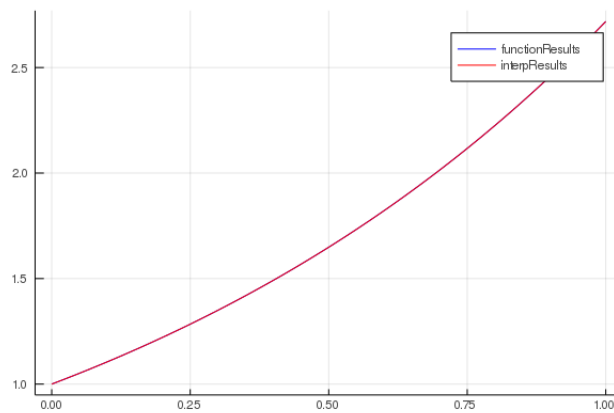
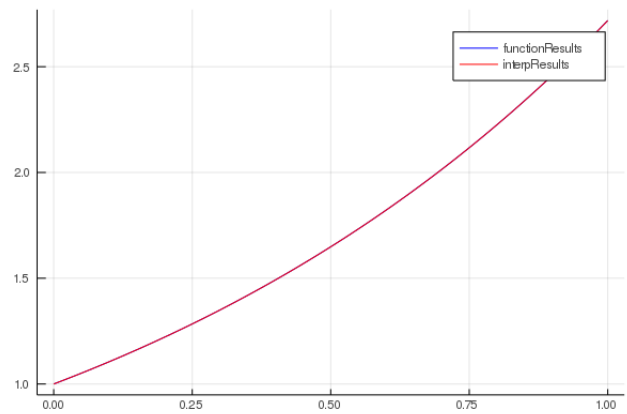
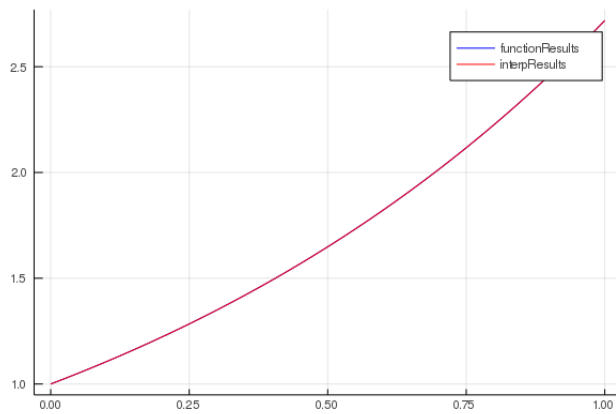
5.1.2 b)  $x^2 \sin(x), [-1, 1], n = 5, 10, 15$

### 5.2 Rozwiązanie

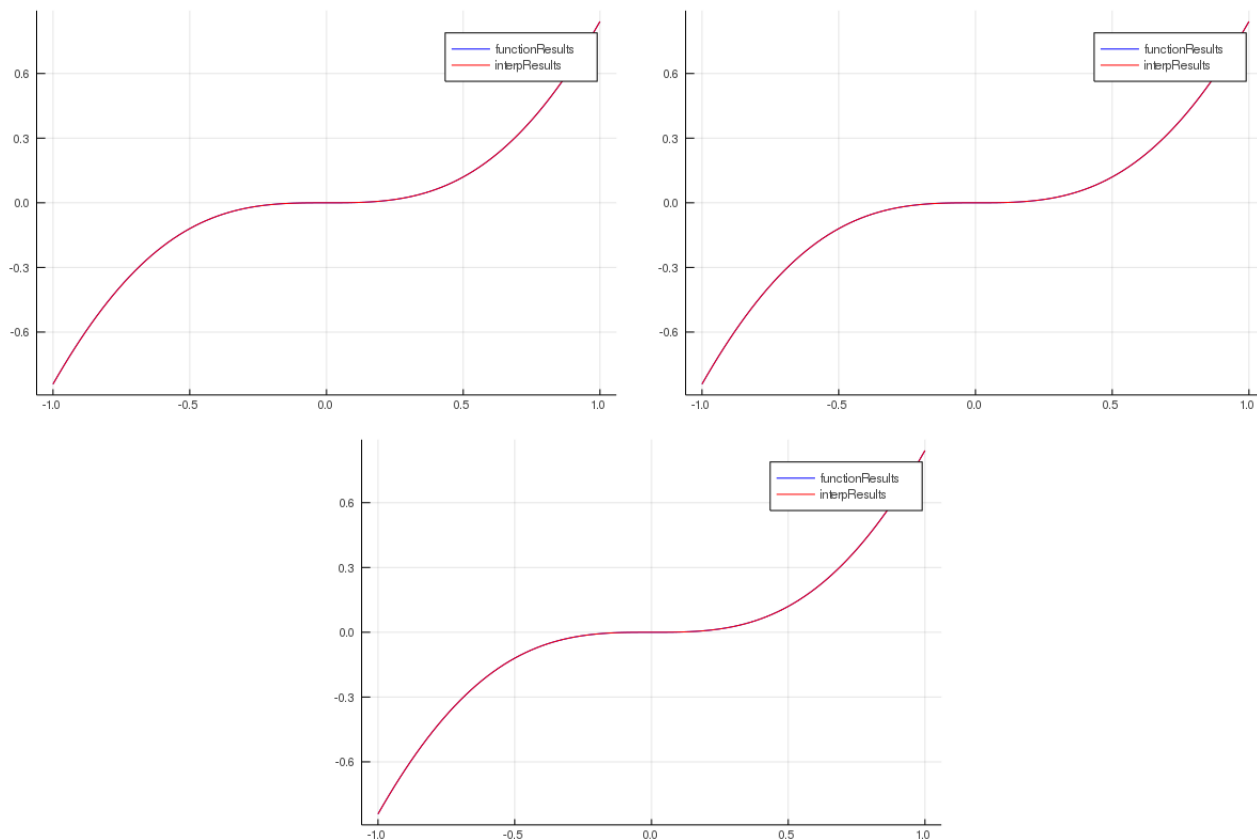
W celu rozwiązania zadania należy przetestować zaimplementowaną w Zadaniu 4 funkcję i narysować wykresy dla zadanych przykładów.

### 5.3 Wyniki

5.3.1 a)  $e^x, [0, 1], n = 5, 10, 15,$



### 5.3.2 b) $x^2 \sin(x), [-1, 1], n = 5, 10, 15$



## 5.4 Wnioski

Jak widać w sekcji wyniki dla zadanych przykładów a i b wykresu wielomianów interpolacyjnych oraz interpolowanych funkcji są niemalże identyczne, nakładają się.

Wykorzystanie równoogięgłych węzłów przy interpolacji dało niemal perfekcyjne wyniki. Powstałe wielomiany interpolacyjne praktycznie idealnie odwzorowały przebieg funkcji, co więcej zwiększenie stopnia wielomianu zwiększa jego podobieństwo do oryginalnej funkcji.

## 6 Zadanie 6

### 6.1 Opis Problemu

6.1.1 a)  $|x|, [-1, 1], n = 5, 10, 15$

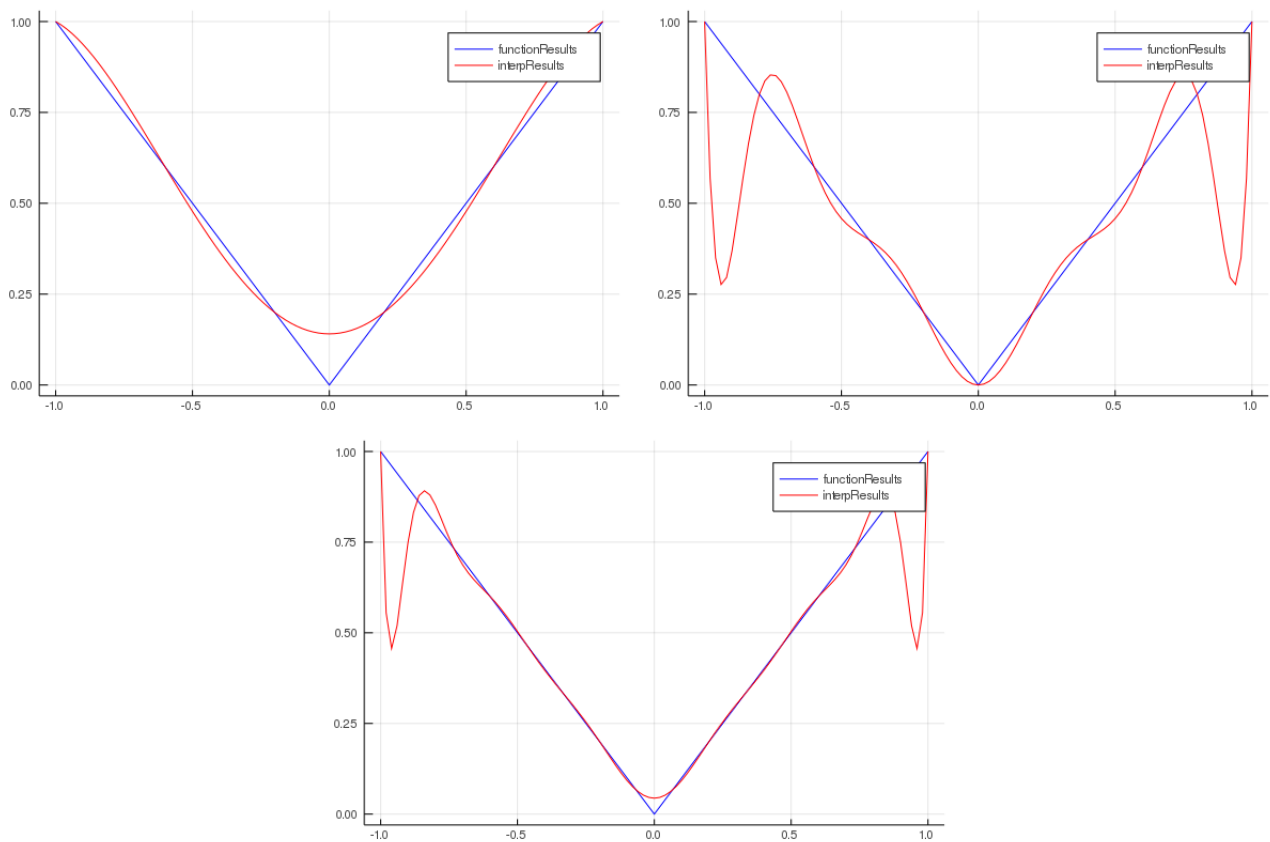
6.1.2 b)  $\frac{1}{1+x^2}, [-5, 5], n = 5, 10, 15$  (zjawisko Runge'go)

### 6.2 Rozwiązanie

W celu rozwiązania zadania należy przetestować zaimplementowaną w Zadaniu 4 funkcję i narysować wykresy dla zadanych przykładów. Obserwacja Zjawiska Rozbieżności.

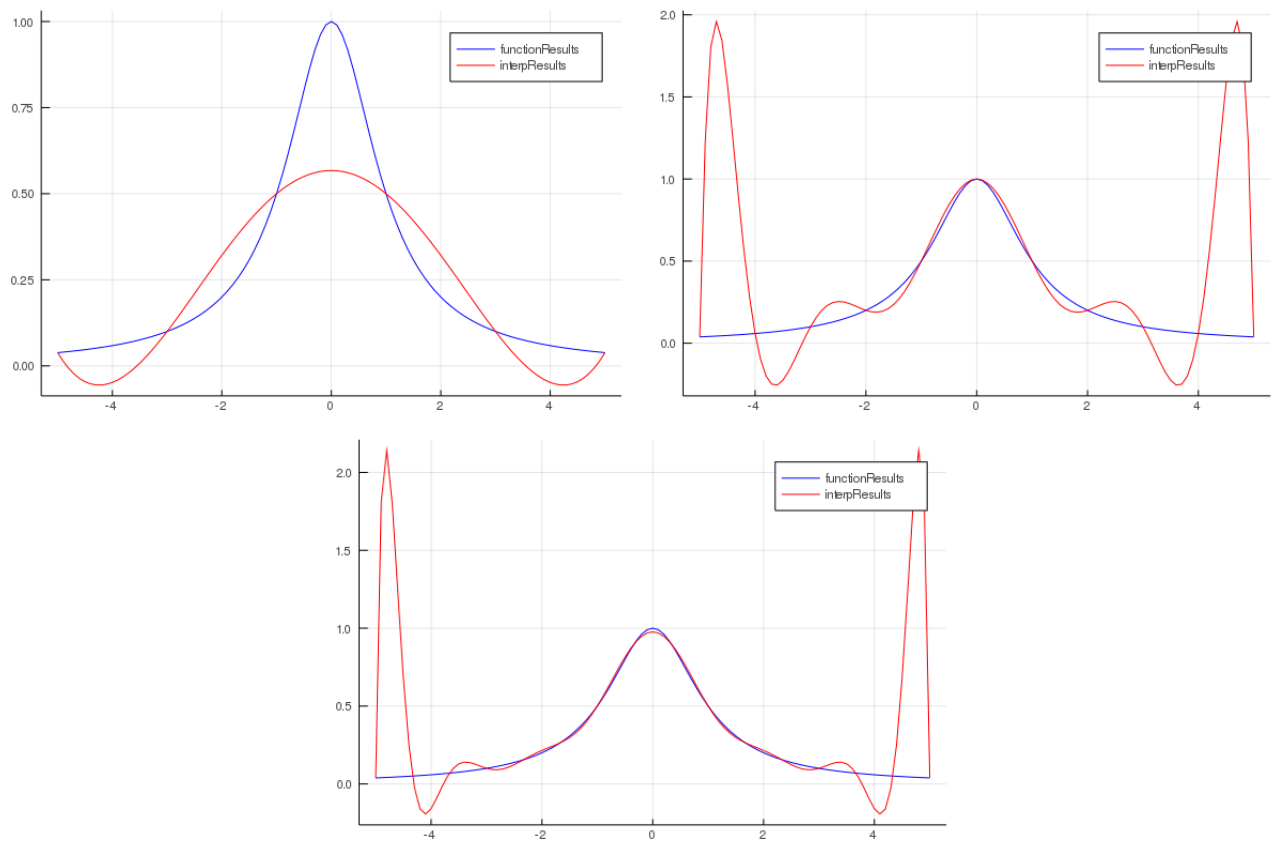
### 6.3 Wyniki

6.3.1 a)  $|x|, [-1, 1], n = 5, 10, 15$





6.3.2 b)  $\frac{1}{1+x^2}, [-5, 5], n = 5, 10, 15$  (zjawisko Runge'go)



## 6.4 Wnioski

**Zjawisko Runge’go** Wiąże się z zachowaniem samych wielomianów bazowych: wielomiany oparte na węzłach równoodległych silnie oscylują w pobliżu krańców przedziału.

Na podstawie powyższych wyników jesteśmy w stanie zauważyć, iż wartości funkcji dla danych argumentów nie pokrywają się z wartościami wielomianów interpolacyjnych. Dla funkcji  $|x|$  dzieje się tak, bo funkcja nie jest różniczkowalna. Natomiast funkcja  $\frac{1}{1+x^2}$  jest przykładem powyżej wspomnianego zjawiska Runge’go. Zjawisko to występuje w przypadku pogorszenia jakości interpolacji wielomianowej pomimo zwiększenia ilości węzłów wielomianu interpolacyjnego. Przy zwiększaniu wartości  $n$  wykres początkowo sprawia złudzenie zmierzania do poprawnego kształtu, by po chwili całkowicie odejść od poprawności. Zjawisko jest popularne dla interpolacji za pomocą wielomianów wysokich stopni przy zastosowaniu równoodległych węzłów. Występuje również w przypadku funkcji nieciągłej. W celu uniknięcia takiej sytuacji należy zastosować interpolację z węzłami coraz gęściej upakowanymi na krańcach przedziału interpolacji. (Dobrym przykładem są wspomniane na stronie MIMUW węzły Czebyszewa, dla których wraz ze wzrostem stopnia wielomianu maleje błąd maksymalny aproksymacji funkcji). Wielomiany wysokiego stopnia nie są odpowiednim wyborem dla interpolacji dla równo oddalonych węzłów.