21.11.2019

Obliczenia Naukowe

Laboratorium Nr 3

Piotr Popis

Zadanie 1

1. Opis problemu

Wyznaczanie miejsca zerowego funkcji ciągłej przy wykorzystaniu metody bisekcji. Celem jest implementacja algorytmu wyznaczającego przybliżone miejsce zerowej zadanej funkcji. Metoda ta wykorzystuję własność, twierdzenie Darboux tzn. *Dla funkcji ciągłej jeśli znak iloczynu f(a)*f(b) < 0 to funkcja zmienia znak w przedziale [a,b]* co równoważne jest z stwierdzeniem, iż w tym przedziale funkcja posiada miejsce zerowe. Jeśli **f(a)*f(b) < 0** to (środek) **c = 0.5*(a+b)**, wtedy badamy przedział [a,c] oraz [c,a]. Jeśli **f(a) * f(c) < 0** tzn, że funkcja ma miejsce zerowe w przedziale [a,c] w przeciwnym wypadku miejsce zerowe jest w przedziale [c,b].

2. Rozwiązanie problemu

Wejście:
f – funkcja f(x) zadana jako anonimowa funkcja (ang. anonymous function),
a,b - końce przedziału początkowego,
delta, epsilon - dokładności obliczeń

Wyjście:
r - przybliżenie pierwiastka równania f(x) = 0
v - wartośćf(r)
it - liczba wykonanych iteracji,
err - sygnalizacja błędu
0 - brak błędu
1 - funkcja nie zmienia znaku w przedziale [a,b]

Rozwiązaniem jest implementacja algorytmu podanego na wykładzie, tj badanie kolejnych zmian znaku w przdziałach [a,c] oraz [c,b].
Warte wytłumaczeznia jest ograniczenie wykonywanych pętli stałą M. M istnieje, aby uniknąć sytuacji nieskończonej ilości iteracji w pewnych warunkach.
C wyznaczane jest jako suma mniejszej wartości oraz połowy (b-a) w celu zabezpieczenia. Wykorzystując funkcję sgn(u) unikamy mnożenia wartości o przeciwnych znakach.

Zadanie 2

1. Opis problemu

Celem jest implementacja algorytmu Newtona, metoda stycznych służąca do wyznaczania przybliżonego miejsca zerowego zadanej funkcji. Metoda stycznych piera się na linearyzacji funkcji, czyli zastąpieniu funkcją liniową – styczną do wykresu w konkretnym punkcie. Zbieżność metody stycznych jest kwadratowa, zatem gdy przybliżenia tworzone są tą metodą łatwo trafić maksymalną dokładność. Należy jednak nadmienić, iż metoda ta nie zawsze jest zbieżna, z tego pwoodu często używa się kombinacji z np. metodą bisekcji. Problemem tej metody jest również wyznaczanie pochodnej zadanej funkcji. Dodatkowo wprowadza się zabezpieczenie maxit w celu ograniczenia niepowodzenia obliczeń. Metoda jest mniej stablina niż metoda bisekcji. Wyszukuje się obszary zbieżności, a następnie wykorzystuje się metodę stycznych.

2. Rozwiązanie problemu

Wejście:
f , *pf* – funkcja f(x) oraz f'(x) zadana jako anonimowa funkcja (ang. anonymous function)
x_o – przybliżenie początkowe
delta, epsilon - dokładności obliczeń
maxit – maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

Wyjście:
r - przybliżenie pierwiastka równania f(x) = 0
v - wartośćf(r)
it - liczba wykonanych iteracji,
err - sygnalizacja błędu
0 – metoda zbieżna
1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności wmaxititeracji
2 – pochodna bliska zeru

Zaimplementowane rozwiązanie opiera się o sprawdzanie pochodnej pf, jeśli jest ona dostatecznie bliska zeru, program zakóńczy obliczenia i zwróci błąd, bo niemożliwe jest wtedy zastosowanie metody Newtona. W wielu przypadkach szczególnie gdy punkt startowy jest daleko od szukanego miejsca zerowego metoda bywa rozbieżna. Gdy pierwiastki przybliżone są dostatecznie bliskie faktycznej wartości pierwiastka wystarczy niewielka ilość iteracji, aby uzyskać prawidłowy wynik. Błąd maleje kwadratowo ze wzrostem iteracji it.

Zadanie 3

1. Opis problemu

Celem jest implementacja metody siecznych służącej do odnajdywania prybliżonego miejsca zerowego zadanej funkcji. Algorytm jest zmodyfikowaną metodą Newtona. Metoda ta również opiera się o linearyzację funkcji, w metodzie siecznych przybliżamy funkcję sieczną, a nie styczną jak w poprzednim zadaniu. Warto także dodać, iż w tej metodzie potrzebne są dwa punkty przybliżenia początkowego.

2. Rozwiązanie problemu

Wejście:
f – funkcja f(x) zadana jako anonimowa funkcja (ang. anonymous function)
x_o, x_1 – przybliżenia początkowe
delta, epsilon - dokładności obliczeń
maxit – maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

Wyjście:
r - przybliżenie pierwiastka równania f(x) = 0
v - wartośćf(r)
it - liczba wykonanych iteracji,
err - sygnalizacja błędu
0 – metoda zbieżna
1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w maxit iteracji

Algorytm przestawia końce x_o oraz x_1 gdy wymaga tego utrzymanie nierówności $|f_a| \leq |f_b|$. Dzięki takiemu podejściu moduły wartości funkcji w punktach x_n nie rosną. Program kończy działanie w momencie uzyskania przybliżonej wartości zera funkcji lub gdy w kolejnych iteracjach odgległość przybliżeń jest dostatecznie mała. Jeśli nie uda znaleźć się zadanego wyniku w maxit zwracany jest błąd.
Wszystkie powyższe funkcje zostają umieszczone w jednym module (functions) z załączonymi testami.

Zadanie 4

1. Opis problemu

Zadanie polga na wyznacznieu miejsca zerowego równania funkcji

$$\sin(x) - (0.5x)^2 = 0$$

1. bisekcji z przedziałem początkowym [1.5,2]
2. Newtona z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1.5$
3. siecznych z przybliżeniami początkowym $x_0 = 1$, $x_1 = 2$

gdzie $\delta, \epsilon = 0.5 * 10^{-5}$

2. Rozwiązanie problemu

W celu znalezienia pierwiastków równania nieliniowego i sprawdzenia jakości zaimplementowanych metod przeprowadzamy badanie nad zadaną funkcją.

3. Wyniki

Meotda	Miejsce zerowe	Wartośc funkcji	Iteracja	Sygnał błędu
Bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	0
Newtona	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4	0
Siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	0

4. Wnioski

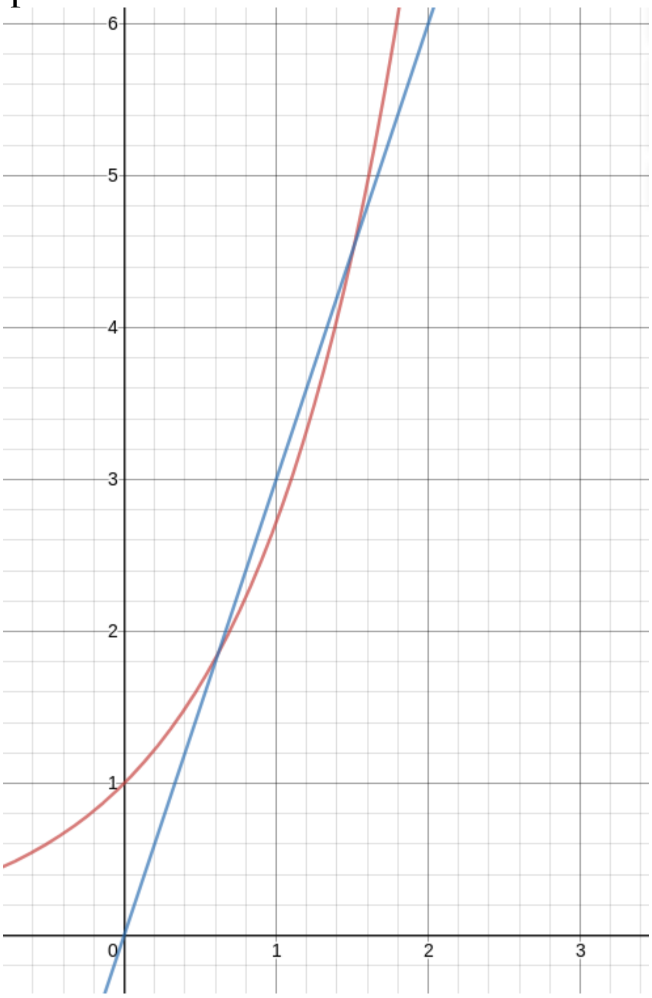
Metoda Bisekcji potrzebowała, aż 16 iteracji co stawią ją na najbardziej monotonnej pozycji. Podczas, gdy metody statycznych oraz siecznych znalazły pierwiastek po tylko 4 iteracjach. Zauważalny jest zatem wpływ kwadratowej zbieżności dwóch z trzech zadanych metod na liczbę iteracji potrzebnych do wyznaczenia miejsca zerowego zadaej funkcji nieliniowej.

Zadanie 5

1. Opis problemu

Zadanie polega na znalezieniu punktów przecięcia dwóch zadanych funkcji y = 3x oraz y = e^x wykorzystując na ten moment najbardziej stabilną i najwolniejszą metodę bisekcji z zadaną dokładnością δ, ϵ = $0.5 * 10^{-4}$.

2. Rozwiązanie problemu



W celu rozwiązania zadania porównujemy funkcję f_1 z f_2 i otrzymujemy równanie

$$3x = e^x$$

Szukamy miejsc zerowych otrzymanego równania wykorzystując funkcje zaimplementowane w zadaniach 1-3. Przedział dobierając na podstawie wykresu stworzonegu przy użyciu graficznego kalkulatora desmos dostępnego w każdej nowoczesnej przeglądarce internetowej.

3. Wyniki

Przedział	Miejsca zerowe	Wartość funkcji	Iteracje	Sygnał Błędu
[0,1]	0.619140625	-9.066320343276146e-5	9	0
[1,2]	1.5120849609375	-7.618578602741621e-5	13	0

4. Wnioski

Znalezienie miejsc zerowych metodą bisekcji jest dość wygodne. Jedynym problemem było wyszukanie przybliżeń miejsc zerowych. Dzięki nowoczesnym aplikacjom jesteśmy w stanie te przedziały odnaleźć bez większego wysiłku. Bez dobrego wykresu moglibyśmy miejsc zerowych nie wyznaczyć np. dla przedziału [0,2] metoda bisekcji nie jest skuteczna, ponieważ znak na krańcach przedziałów wartości funkcji jest taki sam. W celu wyznaczenia miejsc zerowych funkcji przy użyciu metody bisecji potrzebny jest nam przebieg zmienności funkcji. W zadanym przykładzie moglibyśmy skorzystać z metody siecznej lub stycznej, która nie wymaga znajomości dokładnego przebiegu funkcji.

Zadanie 6

1. Opis problemu

Zadanie polega na znalezieniu miejsc zerowych funkcji:

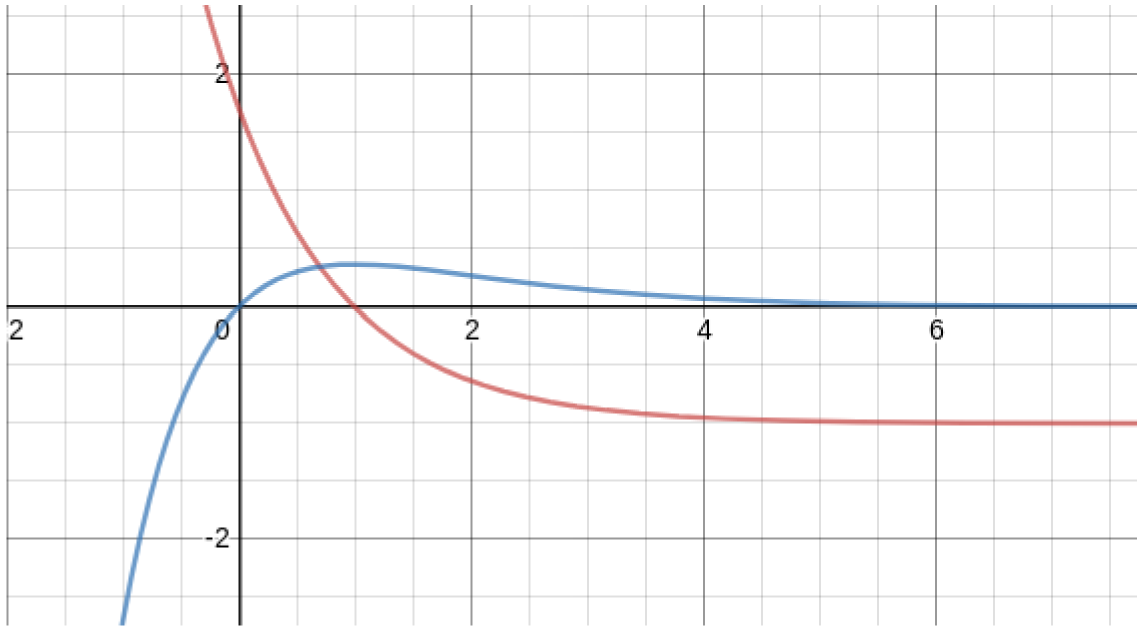
$$f_1 = e^{1-x}-1$$

$$f_2 = xe^{-x}$$

Wykosztując metodę bisekcji, Newtona oraz siecznych z dokładnością
$\delta, \epsilon = 0.5 * 10^{-5}$. Należy również rozważyć co stanie się gdy w metodzie Newtona dla f_1 wybierzemy $x_o \in (1,\infty]$, dla f_2 wybierzemy $x_o > 0$ oraz czy można wybrać $x_o = 1$ dla f_2.

2. Rozwiązanie problemu

W celu rowiązania zadania zaimplementowane zostały obie funkcje oraz ich pochodne. Narysowany został wykres w celu poznania przebiegu zmienności funkcji, aby ułatwić wybranie odpowiednich przedziałów i przybliżeń początkowych. Do wyznaczenia miejsc zerowych (roots z ang) wykorzystujemy funkcję zawarte w module functions.



3. Wyniki

Metoda Bisekcji

Przedział	Miejsce zerowe	Wartość funkcji	Iteracja	Sygnał Błędu
[1, 2]	1.0	0.0	1	0
[-4, 4]	1.0	0.0	3	0
[0, 1.5]	1.0000076293945312	-7.6293654275305656e-6	16	0
[-1, 250]	1.0000000596046448	-5.9604642999033786e-8	24	0

Przedział	Miejsce zerowe	Wartość funkcji	Iteracja	Sygnał Błędu
[-0.5, 0.5]	0.0	0.0	1	0
[-0.4, 0.3]	9.155273437452418e-6	9.155189618804395e-6	15	0
[-1.0, 5.0]	7.62939453125e-6	7.62933632381113e-6	18	0
[-42.7, 13.4]	1.9073486152072522e-7	1.9073482514094127e-7	19	0

Metoda Stycznych

Przybliżenie początkowe	Miejsce zerowe	Wartość funkcji	Iteracja	Sygnał Błędu
0.999	0.9999995001666251	4.99833499922886e-7	1	0
0.0	0.9999984358892101	1.5641120130194253e-6	4	0
-0.95	0.9999952167407401	4.7832706997485985e-6	5	0
-10.0	0.9999999998781014	1.2189849130095354e-10	15	0

Przybliżenie początkowe	Miejsce zerowe	Wartość funkcji	Iteracja	Sygnał Błędu
-0.999	-3.008488064355731e-7	-3.00848896945591e-7	5	0
-2.5	-3.3084197593330218e-6	-3.3084307049924325e-6	7	0
-5.0	-9.064102913053547e-6	-9.064185071387511e-6	10	0
-10.0	3.784424932490619e-7	-3.784426364678097e-7	16	0
1.0	NaN	NaN	NaN	2

Metoda siecznych

Przybliżenia początkowe	Miejsce zerowe	Wartość funkcji	Iteracja	Sygnał Błędu
0.8, 0.9	0.9999977808590759	2.2191433863838483e-6	3	0
-1.0, 0.9	0.9999998148188315	1.8518118571897446e-7	4	0
-1.0, 0.5	0.9999977863660099	2.2136364401514896e-6	5	0
-2.5, 0.5	0.99999178278336	8.217250401454379e-6	5	0
-1.0, -0.1	0.9999973575008151	2.6425026762311177e-6	6	0
3.0, 5.0	1.0000002553381668	-2.553381341918737e-7	21	0

Przybliżenia początkowe	Miejsce zerowe	Wartość funkcji	Iteracja	Sygnał Błędu
-0.2, -0.01	0.9999999323253579	6.76746443328824e-8	6	0
-1.0, -0.5	0.9999999251013865	7.489861642007156e-8	7	0
-2.0, -0.999	0.9999999281198206	7.188018202874957e-8	8	0
-2.5, 0.5	0.99999178278336	8.217250401454379e-6	5	0
-7.0, -4.0	0.999999981707956	1.829204410164209e-8	13	0

4. Wnioski

Metoda Bisekcji

Zauważmy, nieumiejętne dobranie przdziału początkowego wiąże się z obciążeniem metody tym gorzej dobrany przedział tym więcej iteracji wykonał algorytm

Metoda Stycznych

Odpowiednie dobranie przybliżenia początkowego pozwala zredukowac ilość wykonywanych iteracji. Metoda stycznych jest szbyka w stosunku do metody bisekcji. Mimo, że dla funkcji f_1 możemy ustalić przybliżenie początkowe jako dowolne (mowa o stronie lewej, prawej od miejsca zerowego) to dla funkcji f_2 ustawienie takie jest niemożliwe, ponieważ wartości tej funkcji zbiegają do zera. Metoda Stycznych próbuje znaleźć miejsce zerowe podążając w kierunku zbieżności, zamiast prawidłowo wskazać miejsce zerowe.

Metoda Siecznych

Dobranie złych punktów początkowych x_0 oraz x_1 wpływa na ilość iteracji koniecznych do przejścia w celu uzyskania poprawnego wyniku. Zwróćmy uwagę na funkcję f_2 tak jak w poprzednim przypadku niepoprawne określenie x_0 i x_1 prowadzi do błędnego podążenia za miejscem zerowym. Odpowiednio duże przybliżenie uniemożliwi otrzymanie poprawnych wyników.

Aby uzyskąć wyniki prawidłowe przy użyciu metody siecznych i stycznych konieczne jest znalezienie początkowych przybliżeń możliwie jak najmniej oddalonych od rzeczywistego meijsca zerowego funkcji.

W przypadku metody bisekcji konieczne jest prawidłowe dobranie przedziału początkowego. Potrzebny jest jak najbardziej wąski przedział zawierający w sobie miejsce zerowe, które znajduje się jak najbliżej środka naszego przedziału.

Sprawdzić co stanie, gdy w metodzie Newtona dla (I)f_1 wybierzemy $x_0 \in (1,\infty]$, a dla (II)f_2 wybierzemy $x_0 > 1$, czy mogę wybrać $x_0 = 1$ dla f_2?

(I) przy maxit = 50

Przybliżenie początkowe	Miejsce zerowe	Wartość funkcji	Iteracja	Sygnał Błędu
1.0	1.0	0.0	0	2
2.0	0.9999999810061002	1.8993900008368314e-8	5	0
3.0	0.9999999710783241	2.892167638712806e-8	9	0
4.0	0.9999999995278234	4.721765201054495e-10	21	0
5.0	NaN	NaN	NaN	1
. . .				
12.0	NaN	NaN	NaN	1
13.0	NaN	NaN	NaN	2
. . .				
∞	NaN	NaN	NaN	2

Funkcja f_1 osiąga poprawne wartości do pewnego momentu, dla przybliżenia większego niż 13 pochodna funkcji osiąga wartość bliską zeru.

(II)

Przybliżenie początkowe	Miejsce zerowe	Wartość funkcji	Iteracja	Sygnał Błędu
1.0	NaN	NaN	NaN	2
2.0	14.398662765680003	8.036415344217211e-6	10	0
3.0	14.787436802837927	5.594878975694858e-6	10	0
4.0	14.398662765680003	8.036415344217211e-6	9	0
5.0	15.194283983439147	3.827247505782993e-6	9	0
6.0	14.97432014974184	4.699833827208111e-6	8	0
7.0	14.792276940955892	5.569686859646652e-6	7	0
8.0	14.636807965014	6.438155219843286e-6	6	0
9.0	14.50105208065629	7.305881300498495e-6	5	0
10.0	14.380524159896261	8.173205649825554e-6	4	0
11.0	14.272123938290518	9.040322779745372e-6	3	0
12.0	14.173615857826384	9.907349924182477e-6	2	0
13.0	15.159766454352443	3.95266121872815e-6	2	0
14.0	15.076923076923077	4.270593381508261e-6	1	0
15.0	NaN	NaN	NaN	2
. . .				
∞	NaN	NaN	NaN	2

Jak widać w powyższej tabeli wartość wybranie 1.0 jest niemożliwe. Wartość pochodnej jest bliska zeru, dlatego algorytm nie zadziała dla niej poprawnie. Pozostałe wartości są zgodne z wnioskami z poprzedniego zadania.