

Równoważność DFA, NFA i RE. Minimalny DFA

Języki formalne i techniki translacji - Wykład 2

Maciek Gębala

15 października 2019

Maciek Gębala Równoważność DFA, NFA i RE. Minimalny DFA

Równoważność DFA i NFA

Fakt. Każdy DFA jest NFA.

Twierdzenie. Niech L będzie językiem akceptowanym przez NFA. Wtedy istnieje DFA akceptujący język L .

Dowód

Niech NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Definiujemy DFA $M' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ symulujący równolegle wszystkie przejścia przez automat M .

$$\begin{aligned} Q' &= 2^Q && \text{śledzimy wszystkie podzbiory stanów } M \\ F' &\subseteq Q' && q \in F' \iff \exists p \in q, p \in F \\ q'_0 &= \{q_0\} \\ \delta'(q, a) &= \bigcup_{p \in q} \delta(p, a) \end{aligned}$$

Dowód indukcyjny po długości wczytywanego słowa.

Maciek Gębala Równoważność DFA, NFA i RE. Minimalny DFA

Przykład

NFA

$$M = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$$

| δ | 0 | 1 |
|----------|----------------|----------------|
| q_0 | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_1\}$ |
| q_1 | \emptyset | $\{q_0, q_1\}$ |

Równoważny DFA

$$M' = (\{\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_0, q_1\}, \emptyset\}, \{0, 1\}, \delta', \{q_0\}, \{\{q_1\}, \{q_0, q_1\}\})$$

| δ' | 0 | 1 |
|----------------|----------------|----------------|
| $\{q_0\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_1\}$ |
| $\{q_1\}$ | \emptyset | $\{q_0, q_1\}$ |
| $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0, q_1\}$ |
| \emptyset | \emptyset | \emptyset |

Maciek Gębala Równoważność DFA, NFA i RE. Minimalny DFA

Równoważność NFA i NFA_ϵ

Fakt. Każdy NFA jest NFA_ϵ .

Twierdzenie. Jeśli L jest językiem akceptowanym przez NFA_ϵ to jest również akceptowany przez NFA.

Dowód

Niech $NFA_\epsilon M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Definiujemy NFA $M' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F')$

$$F' = \begin{cases} F \cup \{q_0\} & \text{jeśli z } q_0 \text{ można dojść do } q \in F \text{ } \epsilon\text{-przejściami} \\ F & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$\delta'(q, a) = \bigcup_{x \in (\epsilon^* a \epsilon^*)} \delta(q, x)$$

M' nie ma ϵ -przejść. Równość języków przez dowód indukcyjny po długości słowa.

Maciek Gębala Równoważność DFA, NFA i RE. Minimalny DFA

Notatki

Notatki

Notatki

Notatki

Równoważność DFA i RE

Twierdzenie. Niech r będzie wyrażeniem regularnym opisującym język L . Wtedy istnieje NFA_ϵ który akceptuje L .

Dowód

Indukcja po budowie wyrażenia regularnego.

Dowód na tablicy.



Równoważność DFA i RE

Twierdzenie. Jeżeli L jest akceptowany przez DFA, to L jest reprezentowany przez wyrażenie regularne.

Dowód

Niech L będzie akceptowany przez DFA

$$M = (\{q_1, \dots, q_n\}, \Sigma, \delta, q_1, F).$$

Zdefiniujmy

$$R_{ij}^k = \{x \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_i, x) = q_j \wedge \forall_{y = \text{prefix}(x), y \neq \varepsilon, y \neq x} \hat{\delta}(q_i, y) = q_l \implies l \leq k\}$$

R_{ij}^k – zbiór wszystkich słów z jakimi można przejść ze stanu q_i do stanu q_j , używając po drodze tylko pierwszych k stanów (i, j mogą być większe od k). R_{ij}^k – wszystkie łańcuchy z którymi możemy przejść z q_i do q_j .

$$L = \bigcup_{q_i \in F} R_{1j}^n$$

Równoważność DFA i RE

Dowód cd.

Definicja rekurencyjna

$$R_{ij}^0 = \begin{cases} \{a : \delta(q_i, a) = q_j\} & i \neq j \\ \{a : \delta(q_i, a) = q_i\} \cup \{\varepsilon\} & i = j \end{cases}$$

$$R_{ij}^k = R_{jk}^{k-1} (R_{kk}^{k-1})^* R_{ki}^{k-1} \cup R_{ij}^{k-1} \quad k > 0$$

Łatwo skonstruować wyrażenie regularne r_{ij}^k opisujące R_{ij}^k .
Dowód poprawności przez indukcję po k .

Duży przykład

Na ćwiczeniach.



Mały przykład dla

$$(\{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{((q_1, 0), q_1), ((q_1, 1), q_2), ((q_2, 0), q_1), ((q_2, 1), q_2)\}, q_1, \{q_1\})$$

$$r_{ij}^k = r_{ij}^{k-1} + r_{ik}^{k-1} (r_{kk}^{k-1})^* r_{kj}^{k-1} \text{ dla } k > 0$$

$$r_{11}^0 = 0 + \varepsilon$$

$$r_{12}^0 = 1$$

$$r_{21}^0 = 0$$

$$r_{22}^0 = 1 + \varepsilon$$

$$r_{11}^1 = (0 + \varepsilon) + (0 + \varepsilon)(0 + \varepsilon)^*(0 + \varepsilon) \equiv 0^*$$

$$r_{12}^1 = 1 + (0 + \varepsilon)(0 + \varepsilon)^* 1 \equiv 0^* 1$$

$$r_{21}^1 = 0 + 0(0 + \varepsilon)^*(0 + \varepsilon) \equiv 00^*$$

$$r_{22}^1 = (1 + \varepsilon) + 0(0 + \varepsilon)^*1 \equiv \varepsilon + 0^*1$$

$$r_{11}^2 = 0^* + 0^*1(0^*1)^*0^*0$$

Najprostsze wyrażenie regularne dla tego języka: $\varepsilon + (0 + 1)^*0$

Notatki

[illegible]

Notatki

[illegible]

Notatki

[illegible]

Notatki

[illegible]

Minimalny DFA

Dla każdego języka regularnego istnieje dokładnie jeden (z dokładnością do izomorfizmów) DFA o minimalnej liczbie stanów. (Własność ta wynika z twierdzenia Myhill-Nerode, które jednak zostanie pominięte na wykładzie.)

Idea algorytmu

Chcemy znaleźć takie stany które można ze sobą połączyć (stany równoważne). Dwa stany równoważne to takie, że dla każdego x startując z tych stanów albo znajdziemy się równocześnie w stanach akceptujących albo nieakceptujących.

Maciek Gębala

Równoważność DFA, NFA i RE, Minimalny DFA

Algorytm minimalizacji

Oznaczamy pary stanów, które nie są równoważne.

- ❶ for all $p \in F \wedge q \in Q \setminus F$ do oznacz parę (p, q)
- ❷ for all $p, q \in (F \times F) \cup (Q \setminus F \times Q \setminus F)$ t.ż. $p \neq q$ do
 - if $\exists a \in \Sigma$ t.ż. $(\delta(p, a), \delta(q, a))$ jest oznaczona then
 - oznacz (p, q)
 - oznacz w sposób rekurencyjny wszystkie nieoznaczone pary na liście (p, q)
- else /* żadna para $(\delta(p, a), \delta(q, a))$ nie jest oznaczona */
- for all $a \in \Sigma$ do
- umieść parę (p, q) na liście $(\delta(p, a), \delta(q, a))$,
- o ile $\delta(p, a) \neq \delta(q, a)$

DFA uzyskany przez złączenie stanów równoważnych uzyskanych przez powyższy algorytm, z usuniętymi stanami nieosiągalnymi, jest minimalnym DFA dla danego języka.

Maciek Gębala

Równoważność DFA, NFA i RE, Minimalny DFA

Przykład

$$M = (\{a, b, c, d, e, f\}, \{0, 1\}, \delta, a, \{c, d, e\})$$

| δ | 0 | 1 |
|----------|---|---|
| a | b | c |
| b | a | d |
| c | e | f |
| d | e | f |
| e | e | f |
| f | f | f |

Wykonanie algorytmu na tablicy.



Maciek Gębala

Równoważność DFA, NFA i RE, Minimalny DFA

Przykład cd.

DFA po minimalizacji

$$M' = (\{ab, cde, f\}, \{0, 1\}, \delta, ab, \{cde\})$$

| δ | 0 | 1 |
|----------|-----|-----|
| ab | ab | cde |
| cde | cde | f |
| f | f | f |

Maciek Gębala

Równoważność DFA, NFA i RE, Minimalny DFA

Notatki

Notatki

Notatki

Notatki