Лекція 1: *Числова послідовність та її границя.*

Границя функції та неперервність.

1. Поняття числової послідовності.

2. Границя числової послідовності.

3. Границя функції в точці.

4. Неперервність функції.

Поняття числової послідовності

Означення 1.1: Сукупність чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, які є значеннями функції $x_n = f(n)$ натурального аргументу та розташовані у порядку його зростання, називається *числовою послідовністю*, а числа $x_1, x_2, \dots$ – *членами* цієї послідовності.

Є декілька способів позначення числової послідовності:

1. У вигляді $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.
2. За допомогою символу $\{x_n\}$.
3. Вказавши її загальний член: $x_n = f(n)$.

Послідовність вважається заданою, якщо існує правило, за яким можна обчислити будь-який її член.

Способи задання числової послідовності

1. За допомогою опису знаходження її членів.

<u>Приклад 1.1:</u>

Послідовність додатних чисел, кратних 5, записаних у порядку зростання:

$$\{x_n\}: 5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots$$

2. За допомогою формули n-го члена.

<u>Приклад 1.2:</u>

$x_n = n^2 + 1$:

$\{x_n\}: 2, 5, 10, 17, 26, 37, \ldots$

3. За допомогою рекурентної формули: числова послідовність задана рекурентно, якщо відомо кілька її перших членів і вказано закон, за яким можна знайти решту членів.

<u>Приклад 1.3:</u>

Числа Фібоначчі:

$x_1 = 1, x_2 = 1, x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$

$\{x_n\}: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

Обмежені числові послідовності

Нехай задано числову послідовність $\{x_n\}$.

Означення 1.2: Послідовність $\{x_n\}$ називається *обмеженою*, якщо існує таке число $M > 0$, що значення всіх її членів за модулем не перевищують M, тобто

$$|x_n| \le M, \forall n \in N.$$

Означення 1.3: Послідовність $\{x_n\}$ називається *необмеженою*, якщо для будь-якого як завгодно великого числа $K > 0$ знайдеться такий член цієї послідовності x_n, для якого виконується нерівність:

$$|x_n| > K.$$

Приклад 1.4:

Послідовність $\{x_n\}$ із загальним членом $x_n = (-1)^n$ – обмежена, оскільки $|x_n| = 1, \forall n \in N$, в якості числа M можна взяти будь-яке число з проміжку $[1; +\infty)$.

Монотонні числові послідовності

Означення 1.4: Послідовність $\{x_n\}$ називається *незростаючою(неспадною)*, якщо значення кожного наступного члена послідовності не більше (не менше) значення попереднього члена, тобто

$$x_{n+1} \le x_n \ (x_{n+1} \ge x_n), \qquad \forall n \in N.$$

Означення 1.5: Послідовність $\{x_n\}$ називається *спадною (зростаючою)*, якщо значення кожного наступного члена послідовності менше (більше) значення попереднього члена, тобто

$$x_{n+1} < x_n \ (x_{n+1} > x_n), \qquad \forall n \in N.$$

Незростаючі та неспадні послідовності називаються *монотонними*, а зростаючі та спадні – *строго монотонними*.

Границя числові послідовності

Означення 1.6: Дійсне число a називається *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність:

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Позначається

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Послідовність, яка має границю, називається *збіжною*, в протилежному випадку – *розбіжною*.

Означення 1.7: Числова послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно малою*, якщо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Приклад 1.5:

Довести, що послідовність із загальним членом $x_n = \frac{n+2}{n}$ має границю $a = 1$.

Доведення:

Нехай маємо довільне $\varepsilon > 0$. Покажемо, що існує номер $N(\varepsilon)$ такий, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність:

$$\left|\frac{n+2}{n} - 1\right| < \varepsilon.$$

Перетворимо вираз під знаком модуля:

$$\left|\frac{n+2}{n} - 1\right| = \left|\frac{n+2-n}{n}\right| = \left|\frac{2}{n}\right| = \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$, то $n > \frac{2}{\varepsilon}$.

Отже, шукане число

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1.$$

Тобто при $n > N(\varepsilon)$ буде виконуватись нерівність:

$$\left|\frac{n+2}{n} - 1\right| < \varepsilon,$$

а це означає, що послідовність $\{x_n\}$ є збіжною і її границя – число $a = 1$.

Властивості збіжних послідовностей та правила для обчислення границь:

1. Збіжна послідовність має єдину границю.
2. Якщо послідовність збіжна, то вона обмежена.
3. Границя суми збіжних послідовностей дорівнює сумі границь:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

4. Границя добутку збіжних послідовностей дорівнює добутку границь:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

5. Сталий множик можна виносити за знак границі:

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c\lim_{n\to\infty} x_n.$$

6. Границя частки збіжних послідовностей дорівнює частці границь послідовностей (за умови, що $\{y_n\}$ не є нескінченно малою):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0.$$

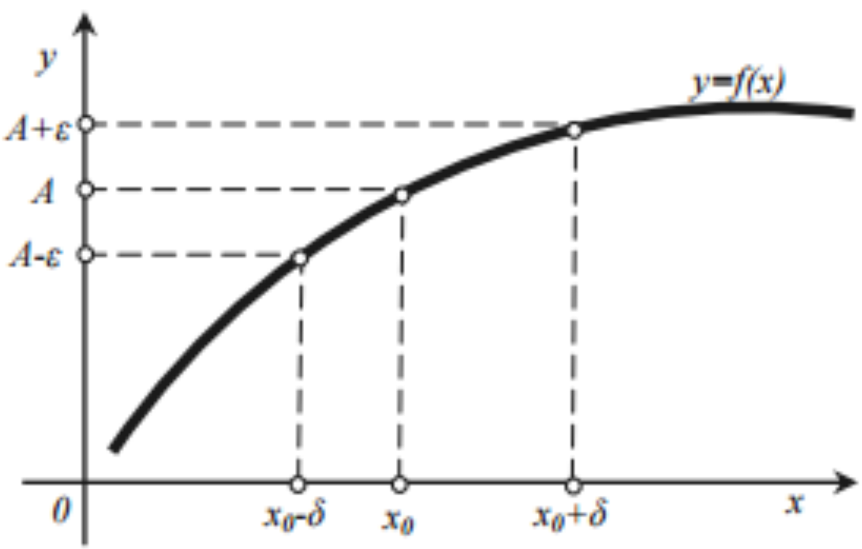
7. Якщо послідовність $\{x_n\}$ збіжна, то при $a > 0$ має місце формула:

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}.$$

8. Якщо послідовність $\{x_n\}$ збіжна, то має місце формула:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} x_n}.$$

Границя функції в точці



Означення 1.8: Дійсне число A називається *границею функції* $y = f(x)$ *в точці* x_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, для яких виконується нерівність $|x - x_0| < \delta$, матиме місце також нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Позначається

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Властивості функцій, що мають границю в точці

1. Якщо функція $y = f(x)$ має границю в точці x_0, то ця границя єдина.

2. Якщо виконується нерівність $f(x) \leq g(x)$ і функції $f(x)$ та $g(x)$ мають скінченні границі в точці x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

3. Якщо виконується нерівність $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ і

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = A,$$

то функція $f(x)$ також має границю в точці x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Властивості границь функцій

1. Границя сталої в будь-якій точці дорівнює самій цій сталій:

$$\lim_{x \to x_0} C = C.$$

2. Сталий множник можна виносити за знак границі:

$$\lim_{x \to x_0} cf(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x).$$

3. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ мають скінченні границі в точці x_0. Тоді мають місце рівності:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \text{ якщо } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$$

Приклад 1.6:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-7)=4+4-7=1;$

2) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}(x-3)=-6.$

Важливі границі

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}.$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$

<u>Означення 1.9:</u> Інтервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) = \{x: |x - x_0| < \varepsilon\}$ називається ε *−околом* точки x_0.

<u>Означення 1.10:</u> Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі $O = (x_0 - r; x_0)$ точки x_0. Число A називається *лівосторонньою границею функції в точці* x_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, матиме місце нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначається:

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = A.$$

<u>Означення 1.11:</u> Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі $O = (x_0; x_0 + r)$ точки x_0. Число B називається *правосторонньою границею функції в точці* x_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, матиме місце нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$.

Позначається:

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = B.$$

Неперервність функцій

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 та в деякому околі цієї точки.

<u>***Означення 1.12:***</u> Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо існує границя функції в цій точці і ця границя дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

<u>***Означення 1.13:***</u> Функція $y = f(x)$ називається *неперервною на проміжку*, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Неперервність функцій

Означення 1.14: Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці x_0 зліва*, якщо її лівостороння границя в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0).$$

Означення 1.15: Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці x_0 справа*, якщо її правостороння границя в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0).$$

Теорема 1.1:

Для того, щоб функція $y = f(x)$ була неперервною в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб вона була неперервною в цій точці зліва і справа.

Приклад 1.7:

Дослідити функцію $f(x)$ на неперервність у точці $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \le 1, \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання:

Обчислимо лівосторонню границю функції $f(x)$ в точці $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (1 - x^2) = 0 .$$

Обчислимо правосторонню границю функції $f(x)$ в точці $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} (x - 1) = 0 .$$

Обчислимо значення функції $f(x)$ в точці $x = 1$:

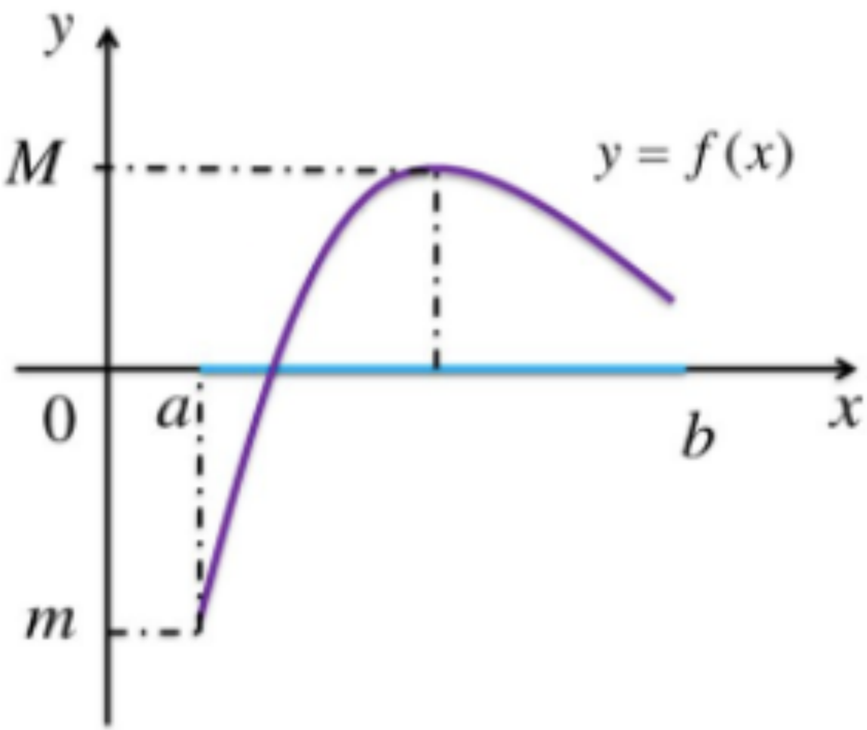
$$f(1) = 1 - 1^2 = 0 .$$

Отже,

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = f(1) = 0.$$

А це означає, що функція $f(x)$ неперервна в точці x_0.

Основні властивості функцій, неперервних на відрізку



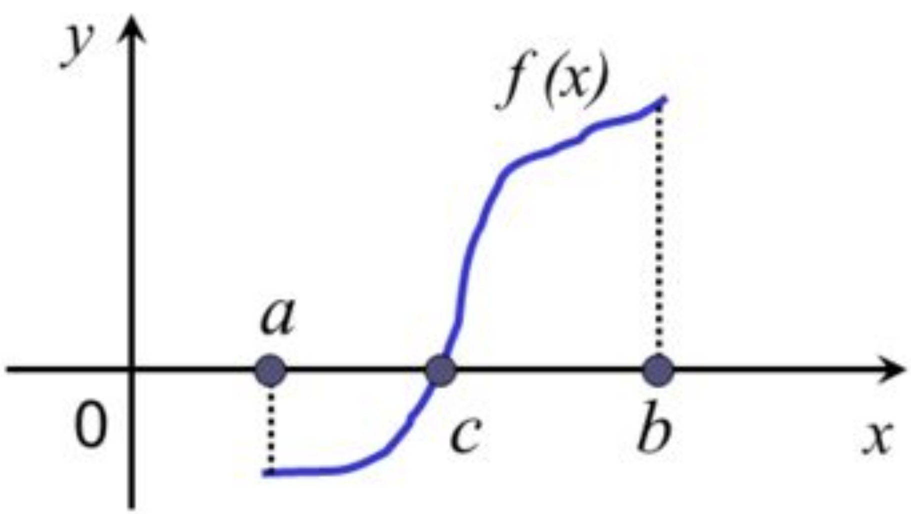
Теорема 1.2: **(Вейєрштрасса)**

Якщо функція неперервна на відрізку, то вона приймає на цьому відрізку своє найбільше та найменше значення.

Основні властивості функцій, неперервних на відрізку

Теорема 1.3: **(Больцано-Коші)**

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і приймає на кінцях цього відрізку значення з протилежними знаками, то всередині цього відрізка знайдеться точка $c \in [a, b]$ така, що $f(c) = 0$.



$f(a) < 0$

$f(b) > 0$

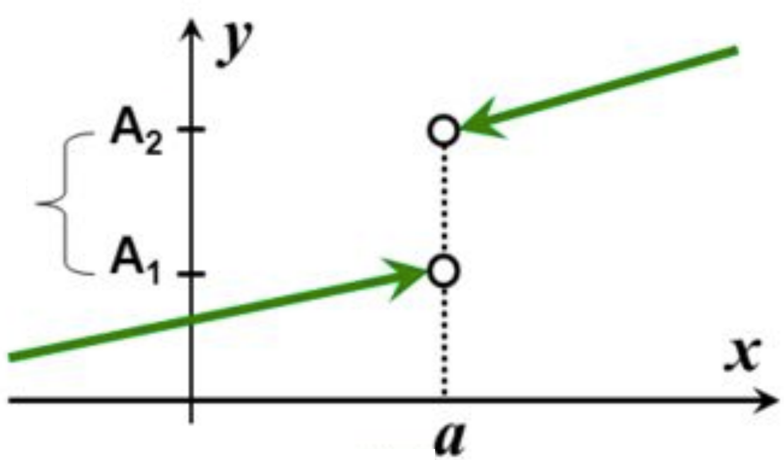
$f(c) = 0$

Точки розриву функції та їх класифікація

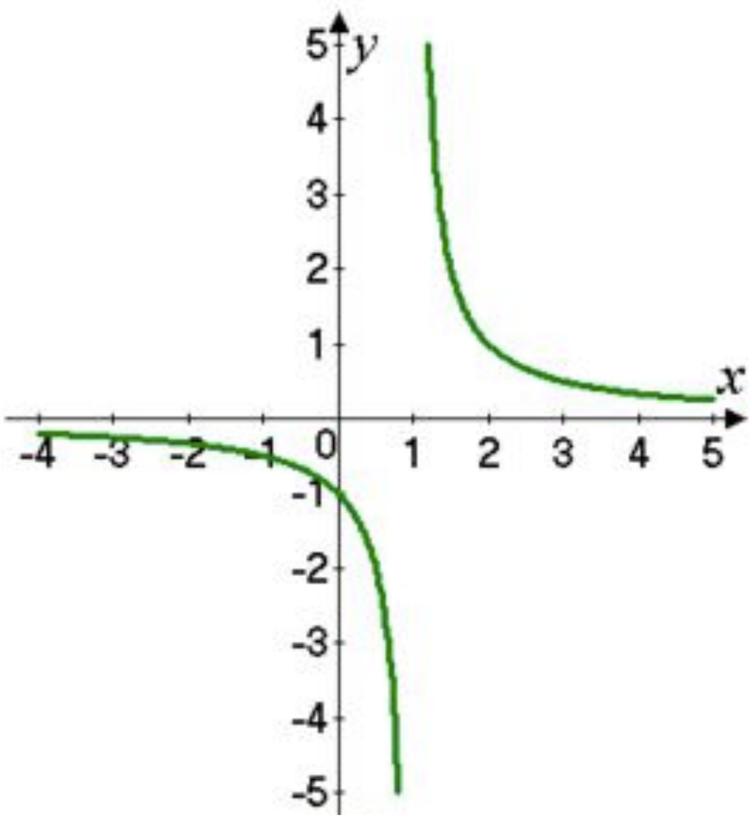
Точки, в яких порушується неперервність функції, називаються *точками розриву функції*.

Означення 1.16: Точка розриву x_0 називається *точкою розриву першого роду* функції $y = f(x)$, якщо в цій точці існують скінченні односторонні границі функції, але вони не співпадають, тобто

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = A_1 < \infty; \quad \lim_{x \to x_0 +} f(x) = A_2 < \infty; \quad A_1 \neq A_2.$$



Точки розриву функції та їх класифікація



Означення 1.17: Точка розриву x_0 називається точкою розриву другого роду функції $y = f(x)$, якщо в цій точці принаймні одна із односторонніх границь функції не існує або дорівнює нескінченності.

Точки розриву функції та їх класифікація

<u>***Означення 1.18:***</u> Точка розриву x_0 називається *усувною точкою розриву* функції $y = f(x)$, якщо в цій точці існують скінченні односторонні границі функції, вони співпадають (тобто існує границя функції), але не дорівнюють значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) \neq f(x_0).$$

Дослідити функцію на неперервність:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant -1, \\ x^2 - 3, & -1 < x < 2, \\ x - 3, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

Дана функція визначена на всій числовій осі. Вона неперервна на інтервалах $(-\infty;-1)$, $(-1;2)$ і $(2;+\infty)$. Спільні кінці цих інтервалів $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$ можуть бути точками розриву. Знайдемо односторонні границі заданої функції в цих точках.

Дослідимо спочатку точку $x_1 = -1$.

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-} 1 = 1, \qquad \lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1-} (x^2-3) = -2.$$

Оскільки односторонні границі в цій точці існують, але не рівні між собою, то точка $x_1 = -1$ є точкою розриву першого роду.

Розглянемо точку $x_2 = 2$.

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (x^2-3) = 1, \qquad \lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2-} (x-3) = -1.$$

Оскільки односторонні границі в цій точці існують, але не рівні між собою, то точка $x_2 = 2$ є точкою розриву першого роду.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant -1, \\ x^2 - 3, & -1 < x < 2, \\ x - 3, & x \geqslant 2. \end{cases}$$