КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра прикладних інформаційних систем

Звіт до лабораторної роботи №7

з курсу

«Чисельні методи»

студента 3 курсу
групи ПП-31
спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»
ОП «Прикладне програмування»
Селецького В. Р.

Викладач:
Жихарєва Ю.І.

Київ – 2023

Мета: Здобути практичні навички чисельного розв'язання задачі Коші першого порядку різними методами, проводити оцінку точності отриманих результатів

Завдання

Завдання 1

Розв'язати задачу Коші 1-го порядку на заданому відрізку. Виконати n=10 кроків.

1) Методом Ейлера, оцінити похибку Методу за правилом Рунге.

2) Методом Рунге-Кутти 4-го порядку, оцінити похибку методу за правилом Рунге.

3) Знайти наближений розв'язок задачі Коші в околі точки x_0 шляхом розкладання розв'язку рівняння у степеневий ряд.

4) Методом Адамса-Башфорта. Початкові точки знайти методом розкладання у степеневий ряд.

5) Здійснити перевірку адекватності отриманих результатів порівнявши результати розв'язки різними методами.

16. $y' = 1 - x + y$ $\quad y(0) = 1 \quad x \in [0;\ 2{,}5]$

Хід роботи

Для початку розв’яжемо задачу методом Ейлера і визначимо похибку за правилом Рунге.

Метод Ейлера h= 0,25

i	xi	yi
0	0	1
1	0,25	1,5
2	0,5	2,0625
3	0,75	2,703125
4	1	3,441406
5	1,25	4,301758
6	1,5	5,314697
7	1,75	6,518372
8	2	7,960464
9	2,25	9,700581
10	2,5	11,81323

h= 0,5

i	xi	yi	похибка	
0	0	1		
1	0,5	2	0,0625	
2	1	3,25	0,191406	
3	1,5	4,875	0,439697	
4	2	7,0625	0,897964	
5	2,5	10,09375	1,719476	max

16. $y' = 1 - x + y \qquad y(0) = 1 \qquad x \in [0;\ 2{,}5]$

Похибка 1,719476

Далі розв’яжемо задачу методом Рунге-Кутти 4-го порядку, оцінимо похибку методу за правилом Рунге.

Метод Рунге-Кутти 4-го порядку

h= 0,25

i	xi	yi	k1	k2	k3	k4
0	0	1	0,5	0,53125	0,535156	0,571289063
1	0,25	1,534017	0,571004	0,61113	0,616145	0,662540595
2	0,5	2,148699	0,662175	0,713697	0,720137	0,779709107
3	0,75	2,866958	0,77924	0,845394	0,853664	0,930155459
4	1	3,71821	0,929552	1,014497	1,025115	1,123331123
5	1,25	4,740228	1,122557	1,231627	1,24526	1,371371945
6	1,5	5,981511	1,370378	1,510425	1,527931	1,689860559
7	1,75	7,504336	1,688584	1,868407	1,890885	2,09880533
8	2	9,388665	2,097166	2,328062	2,356924	2,623897339
9	2,25	11,73717	2,621793	2,918267	2,955326	3,298124366
10	2,5	14,68169	3,295422	3,6761	3,723685	4,163843282

h= 0,5

i	xi	yi	k1	k2	k3	k4	похибка	
0	0	1	1	1,125	1,15625	1,328125		
1	0,5	2,148438	1,324219	1,530273	1,581787	1,865112	1,74646E-05	
2	1	3,717346	1,858673	2,198341	2,283258	2,750302	5,75832E-05	
3	1,5	5,979375	2,739688	3,29961	3,43959	4,209483	0,000142395	
4	2	9,38397	4,191985	5,114981	5,345731	6,61485	0,000312997	
5	2,5	14,67201	6,586007	8,107508	8,487884	10,57995	0,000644996	max

Похибка 0,000644996

Далі знайдемо наближений розв’язок задачі Коші в околі точки x_0 шляхом розкладання розв’язку рівняння у степеневий ряд. Заодно знайдемо чотири перші члени розкладу в степеневий ряд розв’язку y=y(x) задачі Коші: y\`=x^2 + y, y(0)=1.

Оскільки розклад проводиться в околі точки x=0, то шуканий розв'язок рівняння y=(x) можна записати у вигляді розкладу у ряд Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3$$

y(0)=1 – за умовою

y'(0) знаходимо підставивши початкові умови в диференціальне рівняння y'=1-x+y, тоді y'(0)=1-0+1=2;

y''(0) знаходимо продиференціювавши задане рівняння і вирахувавши, що при x=0 - y=0, а y'=2:

y'' = -1+y'; отже y''(0) = -1+2 = 1;

Аналогічно шукаємо y'''(0)

y'''= y'', отже y'''=1.

Підставляємо знайдені величини у формулу

$$y(x) \approx y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3$$

остаточно

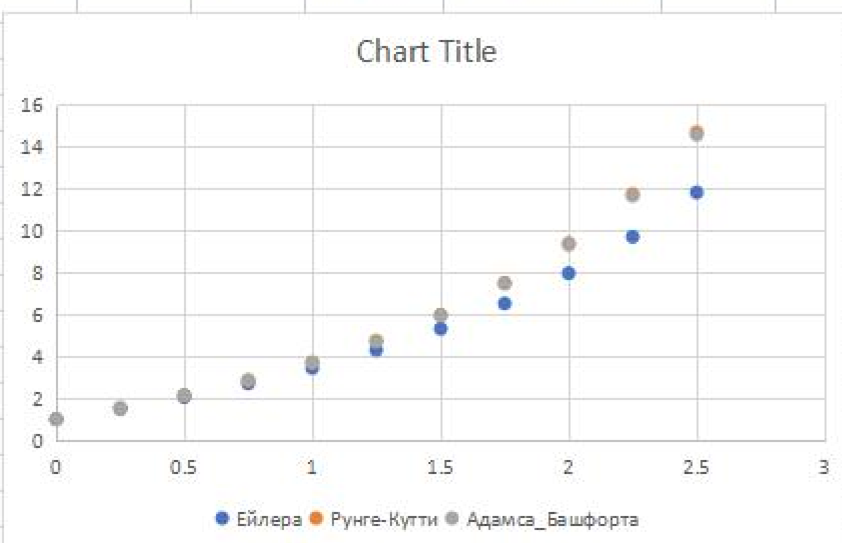
$$y(x) \approx 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

Також розв'яжемо методом Адамса-Башфорта. Початкові точки знайти методом розкладання у степеневий ряд.

Метод Адамса-Башфорта		
h=	0,25	
i	xi	yi
0	0	1
1	0,25	1,533854
2	0,5	2,145833
3	0,75	2,851563
4	1	3,69515
5	1,25	4,711631
6	1,5	5,944143
7	1,75	7,45454
8	2	9,32297
9	2,25	11,65083
10	2,5	14,56813

Далі виконаємо порівняння методів

i	xi	Ейлера	Рунге-Кутти	Адамса_Башфорта
0	0	1	1	1
1	0.25	1.5	1.5340169	1.533854167
2	0.5	2.0625	2.1486995	2.145833333
3	0.75	2.70313	2.866958	2.8515625
4	1	3.44141	3.7182099	3.69514974
5	1.25	4.30176	4.7402276	4.711630927
6	1.5	5.3147	5.9815113	5.944143207
7	1.75	6.51837	7.5043363	7.45454039
8	2	7.96046	9.3886653	9.322970274
9	2.25	9.70058	11.737171	11.65082551
10	2.5	11.8132	14.681689	14.56812616



Як бачимо методи Рунге-Кутти і Адамса-Башфорта дають дуже схожі результати, а метод Ейлера найменш точний.

Висновки

В результаті виконання даної роботи я здобув практичні навички чисельного розв'язання задачі Коші першого порядку різними методами, провів оцінку точності отриманих результатів

Контрольні питання:

1. Дайте означення звичайного диференціального рівняння (ЗДР), загального та частинного розв'язку такого рівняння.

Звичайне диференціальне рівняння це рівняння яке містить шукану функцію однієї змінної та її похідні або диференціали.

2. Дайте означення задачі Коші. Запишіть задачу Коші для ЗДР 1-го порядку.

Сумісне завдання диференціального рівняння та відповідної кількості початкових умов називають задачею Коші.

3. Сформулюйте теорему Коші про існування і єдність розв'язку.

Нехай функція f(x, y) і її частинна похідна f_y'(x, y) визначені і неперервні у відкритій області G площини Oxy і точка (x_0, y_0) є G. Тоді існує єдиний розвязок y=φ(x) рівняння y'=f(x, y), який задовольняє умову φ(x_0)=y_0

4. Розкрийте суть методики наближеного розв'язування задачі Коші за допомогою розкладу її розв'язку в степеневий ряд.

Нехай функція $f(x)$ на інтервалі $(x_0 - R;\ x_0 + R)$ має похідні всіх порядків та існує число M>0 таке, що

$$\left|f^{n}(x) < M\right|,\ x \in (x_0 - R;\ x_0 + R),\ n = 0,1,2,\ldots,$$

то функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд - *ряд Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Ряд Маклорена - частинний випадок ряду Тейлора при $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

5. Сформулюйте постановку задачі чисельного інтегрування ЗДР та запишіть вихідну формулу для побудови чисельних методів інтегрування ЗДР.

Нехай на відрізку $[a; b]$ треба знайти розв'язок задачі Коші: $\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$

Для цього відрізок поділимо на n рівних частин точками

$$a=x_0, x_1,\ldots, x_n = b, \quad \text{де } x_k = x_0+kh \ (k=0,1,\ldots,n).$$

Число h називають кроком чисельного інтегрування ЗДР

Розв'язати задачу Кошічисельно означає: для заданої послідовності значень незалежної змінної $x_0, x_1,\ldots, x_n$ побудувати числову послідовність $y_0, y_1,\ldots, y_n$ наближених значень шуканого розв'язку заданої задачі Коші .

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

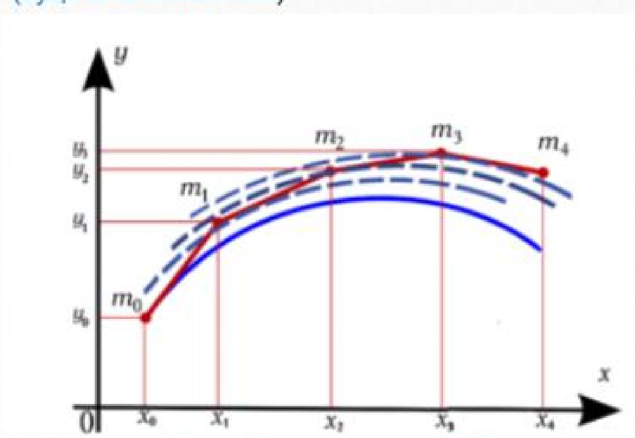
6. Розкрийте суть методу Ейлера, запишіть розрахункові формули методу для ЗДР, дайте геометричну інтерпретацію та назвіть основні характеристики методу.

Інтеграл у формулі (8.10) обчислюємо методом лівих прямокутників, отримуємо розрахункову формулу методу Ейлера:

$$\boxed{\begin{aligned} &y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)\ , \qquad y_0 = y(x_0),\ i = 0, 1, 2, \ldots \\ &x_{i+1} = x_i + \text{h}. \end{aligned}} \qquad (8.11)$$

Метод Ейлера, як і метод лівих прямокутників, має похибку O(h), пропорційну кроку в першій степені , отже, є методом першого порядку точності.

y = y (x) - точний розв'язок ЗДР (суцільна синя лінія)



Наближений розв'язок – ламана Ейлера (червона лінія)

- Крок 1. Замінимо на відрізку (x_0,x_1) інтегральну криву на дотичну:
- Крок 2. Замінимо на відрізку (x_1,x_2) інтегральну криву на дотичну:
- ....
- Висновок: З графіка видно, що зі збільшенням кількості кроків похибка значно зростає.

- Метод Ейлера є однокроковим методом, тобто для розрахунку наступої точки необхідно знати тільки координати попередньої.
- Даний метод використовує явну схему. У правій частині формули Ейлера стоять всі відомі величини.
- Метод Ейлера не є стійким методом, тому він застосовується тільки для ЗДР, рішенням яких є досить гладкі функції.
- Цей метод характеризується першим порядком точності (точність низька).

7. Розкрийте суть методу Ейлера-Коші, запишіть розрахункові формули методу для ЗДР, дайте геометричну інтерпретацію та назвіть основні характеристик методу

Інтеграл у формулі (8.10) обчислюємо методом трапецій, тоді отримуємо неявну розрахункову схему:

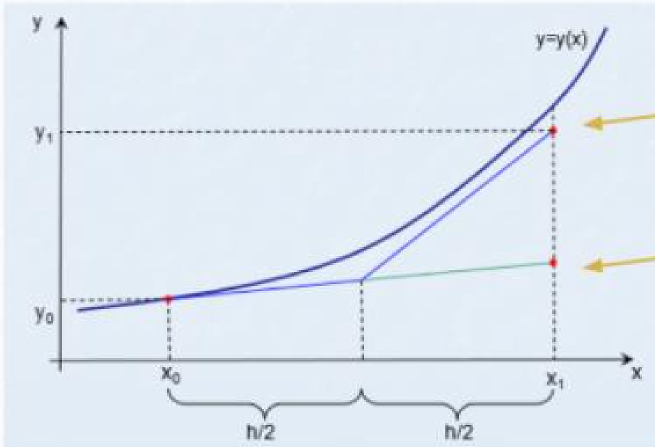
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right] \qquad (8.12)$$

Невідому змінну y_{i+1} у неявній формулі (8.12) наблизимо за методом Ейлера, позначивши її $\tilde{y}_{i+1}$. Після підстановки $\tilde{y}_{i+1}$ в праву частину формули (8.12) отримаємо розрахункову формулу методу Ейлера-Коші:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{i+1} &= y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \\ x_{i+1} &= x_i + h, \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})\right). \end{aligned} \qquad (8.13)$$

24

Метод заснований на тому, що перша половина кроку здійснюється з тангенсом кута нахилу дотичної в попередній точці, а друга половина кроку - з тангенсом кута нахилу в наступній точці.



Розв'язок, знайдений за методом Ейлера-Коші

Розв'язок, знайдений за методом Ейлера

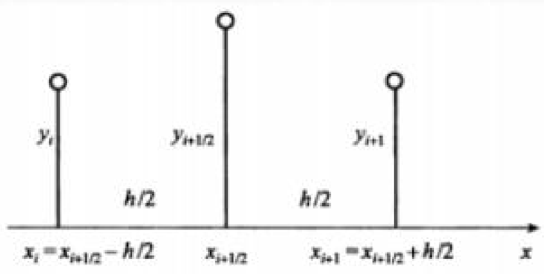
- Однокроковий
- Стійкий
- Має 2-й порядок точності $O(h^2)$ (на порядок точніший за методом Ейлера)
- Є частинним випадком великого класу методів типу «предиктор-коректор». Перше рівняння (8.13) - предиктор, третє рівняння (8.13) - коректор.

8. Розкрийте суть методу Рунге-Кутти, запишіть розрахункові формули методу для ЗДР та системи ЗДР та назвіть основні характеристик методу

Інтеграл у формулі (8.10) обчислюємо методом Сімпсона.

Для застосування квадратурної формули Сімпсона потрібно три вузли (пара кроків), а у формулі (8.10) є лише два: x_i та x_{i+1}.

Тому задіємо проміжну точку $x_{i+1/2} = x_i + {}^{h}/_{2}$ між вузлами x_i та x_{i+1} як показано на схемі:



$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx = \tag{8.14}$$

$$= y_i + \int_{x_{i+1/2}-h/2}^{x_{i+1/2}+h/2} f(x, y(x))\, dx.$$

Для інтегралу у виразі (8.14) застосуємо метод Сімпсона:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h/2}{3}\left[f(x_i, y_i) + 4f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

Неявні складові у виразі (8.15) знаходимо за методом Ейлера, після чого отримуємо розрахункову схему методу Рунге-Кутти 4-го порядку :

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$x_{i+1} = x_i + h$$

- Однокроковий
- Явний
- Не завжди стійкий
- Має 4-й порядок точності $O(h^4)$
- Найбільш поширений серед всіх відомих методів чисельного розв'язання задачі Коші

9. Які методи називають однокроковими, а які багатокроковими?

Розглянуті нами методи належать до однокрокових, тобто для розрахунку наступної точки необхідно знати координати лише однієї попередньої.

Загальний вигляд явного однокрокового методу:

$$y_{n+1} = F(f, x_n, x_{n+1}, y_n)$$

Багатокрокові методи – це методи, що дозволяють одержати наближення y_{n+k} до значення точного розв'язку $y(x_{n+k})$ для кожного вузла дискретизації x_{n+k} у загальному випадку на основі відомих наближень $y_{n+k-1}, y_{n+k-2}, \dots, y_n$ у вузлах $x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_n$.

Загальний вигляд явного k – крокового методу:

$$y_{n+k} = F(f, x_{n+k-1}, \dots, x_n, y_{n+k-1}, \dots, y_n)$$

31

10. Як отримано розрахункову формулу методу Адамса-Башфорта? Порівняйте порівняйте його з методом Рунге-Кутти 4-го порядку.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})\right)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

- Перевага методу Адамса При однаковій точності метод Адамса більш економічний, оскільки він вимагає обчислення лише одного значення правої частини на кожному кроці (у методі Рунге-Кутта – чотирьох).

Недоліки методу Адамса

- 1. Неможливо почати обчислення по одному лише відомому значенню. Розрахунки можна почати тільки з вузла x_3, а не x_0. Значення y_1, y_2, y_3, необхідні для обчислення y_4, потрібно одержати у будь-який інший спосіб (наприклад, методом Рунге-Кутта), що суттєво ускладнює алгоритм.
- 2. Не дозволяє (без ускладнення формул) змінити крок у процесі обчислень; цього недоліку позбавлені однокрокові методи.