КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра прикладних інформаційних систем

Звіт до лабораторної роботи №8

з курсу

«Чисельні методи»

студента 3 курсу
групи ПП-31
спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»
ОП «Прикладне програмування»
Селецького В. Р.

Викладач:
Жихарєва Ю.І.

Київ – 2023

Тема: Звичайні диференціальні рівняння 2-го порядку

Мета: Здобути практичні навички чисельного розв’язання задачі Коші другого та лінійно крайової задачі другого порядку.

Завдання

1) Розв’язати задану задачу Коші 2-го порядку методом Ейлера-Коші на відрізку [0, 1] з кроком 0,05. Результати представити у вигляді графіка.

16) $y'' - 5y' + 6y = x^2 - x$;

$y(0)=0;$ $y'(0)=1;$

2) Розв’язати задану лінійну крайову задачу різницевим методом з кроком 0,1. Для розв’язання СЛАР застосувати метод прогонки.

16. $y'' - 2xy' - 2y = 0{,}6$

$y'(2) = 1$

$y'(2{,}3) = 1{,}5$

Хід роботи

Розв'яжемо рівняння відносно другої похідної

$y''=x^2-x+5y'-6y$

та проведемо заміну змінної: $y'=z$, тоді $y''=z'$

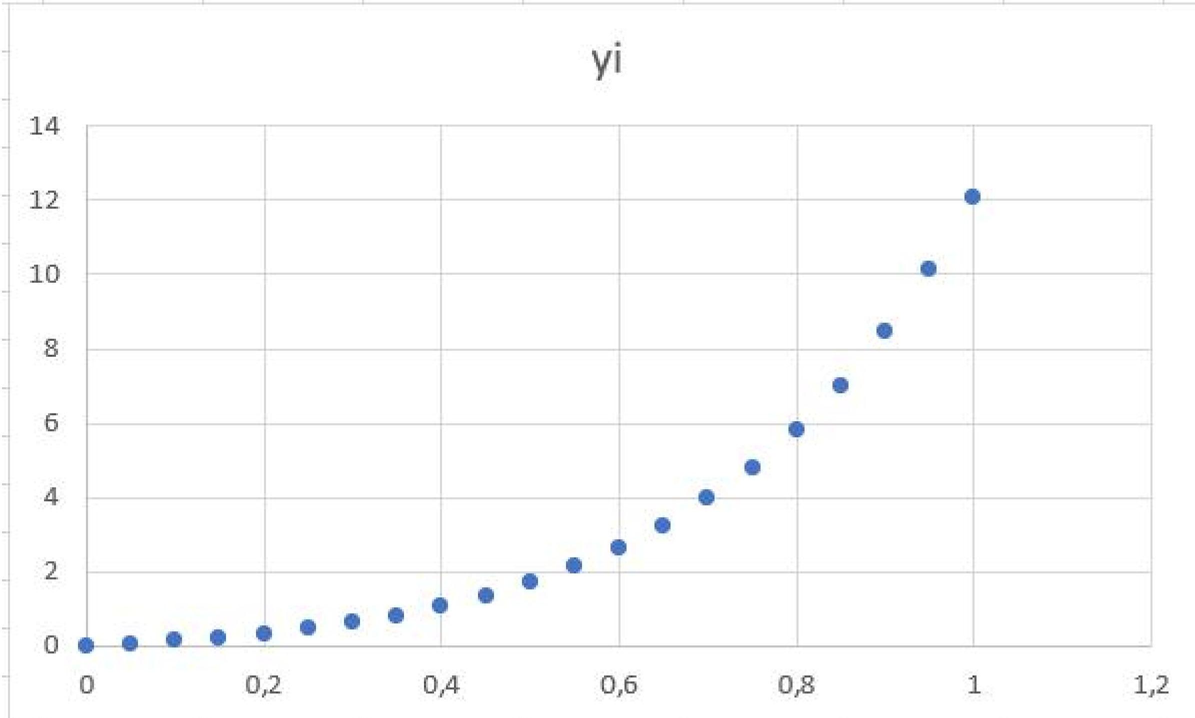
Отримаємо систему двох диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = x^2 - x + 5 * z - 6y \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману задачу Коші методом Ейлера-Коші

Ейлера-Коші		h=	0,05		
i	xi	yi~	yi	zi~	zi
0	0	0	0	1	1
1	0,05	0,05	0,05625	1,25	1,272563
2	0,1	0,119878	0,12735	1,571453	1,598208
3	0,15	0,207261	0,216182	1,955055	1,986736
4	0,2	0,315519	0,326155	2,412191	2,44966
5	0,25	0,448638	0,461302	2,956228	3,000489
6	0,3	0,611327	0,626386	3,602846	3,655074
7	0,35	0,809139	0,827023	4,370427	4,431995
8	0,4	1,048623	1,069836	5,280512	5,353025
9	0,45	1,337487	1,36262	6,35833	6,443658
10	0,5	1,684803	1,714546	7,633411	7,733741
11	0,55	2,101234	2,136398	9,140312	9,258193
12	0,6	2,599307	2,640839	10,91945	11,05785
13	0,65	3,193732	3,242737	13,01807	13,18047
14	0,7	3,90176	3,959533	15,49139	15,68184
15	0,75	4,743626	4,811678	18,40394	18,62715
16	0,8	5,743036	5,823133	21,83106	22,09254
17	0,85	6,92776	7,021965	25,86073	26,16687
18	0,9	8,330309	8,441028	30,59563	30,95391
19	0,95	9,988723	10,11876	36,15558	36,57469
20	1	11,9475	12,10014	42,68036	43,17045

Графік



Далі розв'яжемо лінійну крайову задачу. Для цього визначаємо сітку

x = 2 і x = 2,3 – крайні точки

x = 2,1; x = 2,2 – внутрішні точки

Здійснюємо апроксимацію рівнянь системи:

при x_1=2; $\frac{y_2-y_1}{0,1} = 1$

при x_2=2,1; $\frac{y_3-2*y_2+y_1}{0,1^2} - 2*2,1*\frac{y_3-y_1}{2*0,1} - 2*y_2 = 0,6$

при x_3=2; $\frac{y_4-2*y_3+y_2}{0,1^2} - 2*2,2*\frac{y_4-y_2}{2*0,1} - 2*y_3 = 0,6$

при x_4=2,3; $\frac{y_4-y_3}{0,1} = 1,5$

Отримали систему 4-х рівнянь з 4-ма невідомими:

$$10*(y_2-y_1) = 1$$
$$100*(y_3-2*y_2+y_1) - 21*(y_3-y_1) - 2*y_2 = 0,6$$
$$100*(y_4-2*y_3+y_2) - 22(y_4-y_2) - 2*y_3 = 0,6$$
$$10*(y_4-y_3) = 1,5$$

$-10y_1+10y_2=1$

$121y1-202y_2+79y_3=0,6$

$122y2-202y3+78y4=0,6$

$-10y3+10y4=1,5$

Далі вирішимо СЛАР методом прогонки

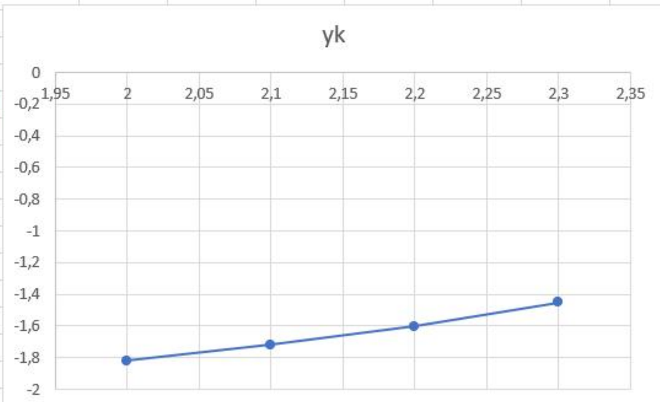
Метод прогонки

a	b	c	d	A	B	x(розв)
0	-10	10	1	1	-0,1	-1,819
121	-202	79	0,6	0,97531	-0,1568	-1,719
122	-202	78	0,6	0,93962	-0,2377	-1,6017
-10	10	0	1,5	0	-1,4517	-1,4517

основна матриця системи

y1	y2	y3	y4
-10	10	0	0
121	-202	79	0
0	122	-202	78
0	0	-10	10

xk	2	2,1	2,2	2,3
yk	-1,819	-1,719	-1,6017	-1,4517



Висновки

В результаті виконання даної роботи я здобув практичні навички чисельного розв'язання задачі Коші другого порядку, а також лінійно крайової задачі другого порядку.

Контрольні питання:

1. Дайте означення диференціального рівняння 2-го порядку, загального та частинного розв'язку такого рівняння;

Якщо рівняння містить похідну або диференціал другого порядку, то воно називається диференціальним рівнянням другого порядку.

Означення. *Загальним розв'язком диференціального рівняння другого порядку називається функція* $y=\varphi(x,C_1,C_2)$ *від x і двох довільних сталих* C_1, C_2, *яка перетворює це рівняння в тотожність. Загальний розв'язок, який одержимо в неявному вигляді* $\Phi(x,y,C_1,C_2)=0$, *називається загальним інтегралом.*

Означення. *Частинним розв'язком диференціального рівняння II-го порядку називається розв'язок, який отримано із загального розв'язку при фіксованому значенні сталих* C_1, C_2: $y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0)$, *де* C_1^0 *і* C_2^0 *– фіксовані числа (аналогічно частинний інтеграл* $\Phi(x,y,C_1^0,C_2^0)=0$).

2. Сформулюйте задачу Коші для ЗДР 2-го порядку, а також теорему Коші про існування та єдиність розв’язку такої задачі;

Для диференціальних рівнянь другого порядку задача Коші має вигляд: серед усіх розв’язків рівняння знайти такий розв’язок $y = y(x), x \in (a,b)$ *який при* $x = x_0 \in (a,b)$ *задовольняє такі умови*

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$ *тобто* $\begin{cases} F(x, y, y', y'') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$

Сталі C_1 *і* C_2 *знаходять із системи рівнянь*

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2) \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1, C_2) \end{cases}$$

Теорема Коші. Якщо функція f(x, y, y’) і її частинні похідні по аргументах y, y’ неперервні в деякій відкритій області G є R_3, то для довільної точки (x_0, y_0, y_0’) є G існує єдиний розв’язок y=y(x) диференціального рівняння y’’=f(x, y, y’,), який задовольняє початкові умови $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$.

3. Які класи ЗДР 2-го порядку можна розв’язати аналітично?

Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

4. Дайте означення нормальної системи ЗДР та сформулюйте задачу Коші для такої системи.

Система ЗДР називається нормальною, якщо кожне рівняння, що входить в цю систему, зліва містить похідну першого порядку від відповідної шуканої функції, а права частина залежить від незалежної змінної x і n шуканих функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \qquad (8.3)$$

5. Як звести ЗДР вищих порядків до розв'язання системи ЗДР?

Будь-яке диференціальне рівняння вищого порядку можна привести до системи диференціальних рівнянь 1-го порядку шляхом заміни змінних.

Розглянемо диференціальне рівняння 2-го порядку: $F(x, y, y', y'') = 0$

Задані початкові умови: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$

Розв'яжемо рівняння (8.5) відносно старшої похідної: $y'' = f(x, y, y')$

Замінимо першу похідну y' функцією z. Тоді: $y'' = z'; \quad y'(x_0) = z_0$

Отримаємо систему: $\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}$

18

6. Запишіть розрахункову схему методу Рунге-Кутти для системи двох ЗДР.

$$k_1 = h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i)$$
$$l_1 = h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i)$$
$$k_2 = h \cdot f_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2})$$
$$l_2 = h \cdot f_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2})$$
$$k_3 = h \cdot f_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2})$$
$$l_3 = h \cdot f_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2})$$
$$k_4 = h \cdot f_1(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3)$$
$$l_4 = h \cdot f_2(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6} \cdot (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

7. У чому принципова відмінність задачі Коші та крайової задачі для ЗДР?

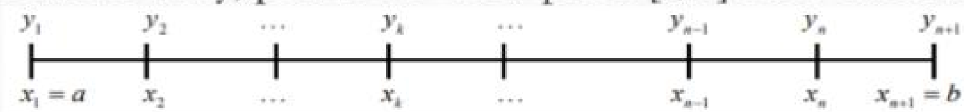
В тому, що для крайової задачі є задання додаткових крайових умов більш ніж в одній точці незалежної змінної.

8. Запишіть лінійну крайову задачу 2-го порядку у загальному вигляді.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$
$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3$$
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta_3$$
$$\text{при} \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0 \qquad |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0 \quad x \in [a; b].$$

9. Розкрийте суть різницевого методу розв’язання лінійної крайової задачу 2-го порядку.

1. Введемо сітку, розділивши відрізок $[a, b]$ на n частин:



$$x_1 = a,\quad x_{k+1} = x_k + h,\quad h = \frac{b-a}{n},\quad k = 1, 2, \dots n+1$$

2. Визначимо сіткову функцію: $y_k = y(x_k)$:

$x_1 = a$	x_2	x_3	…	$x_{n+1} = b$
y_1	y_2	y_3	…	y_{n+1}

3. У кожній вузловій точці x_k замінимо функції та похідні в рівняннях системи (8.25) їх різницевими аналогами (формули (6.31)-(6.34) лекції 6)

$y(x_k) = y_k$

$k = 1$	$y'_k = \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h}$	т.е. $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 \dfrac{y_2 - y_1}{h} = \alpha_3$
$k = 2,\dots,n$	$y'_k = \dfrac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$	$y''_k = \dfrac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}$
$k = n+1$	$y'_k = \dfrac{y_k - y_{k-1}}{h}$	т.е. $\beta_1 y_n + \beta_2 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = \beta_3$

4. Отриману тридіагональну систему із $n+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення $n+1$ невідомих y_k розв’яжемо методом прогонки.