КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра прикладних інформаційних систем

Звіт до лабораторної роботи №4

з курсу

«Чисельні методи»

студента 3 курсу
групи ПП-31
спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»
ОП «Прикладне програмування»
Селецького В. Р.

Викладач:
Жихарєва Ю. І.

Київ – 2023

Мета: Набути практичні навички розв'язання системи нелінійних рівнянь за допомогою різних чисельних методів.

Варіант 16

Завдання

Варіант 16

$$\begin{cases} \cos(y+0,5)+x=0,8 \\ \sin x-2y=1,6 \end{cases}$$

1) Визначити область визначення системи та локалізувати графічно корінь на ОДЗ за допомогою майстра діаграм MS Excel, протабулювавши змінну з кроком h=0,1;
2) Перетворити систему F(x) = 0 до виду x = φ(x);
3) Перевірити виконання умов збіжності методу простих ітерацій (методу Зейделя);
4) Розв'язати систему методом Якобі та методом Зейделя з точністю ε=0,001 використовуючи емпіричний критерій зупину ітераційного процесу.
5) Розв'язати систему методом Ньютона з точністю ε=0,001;
6) Перевірити виконання умов збіжності методу Ньютона;
7) Порівняти трудомісткість та швидкість збіжності кожного методу
8) Зробити висновок до роботи

Розв’язання

Привели рівняння до виду

$$\begin{cases} x = 0.8 - \cos(y + 0.5) \\ y = (1.6 - \sin(x))/-2 \end{cases}$$

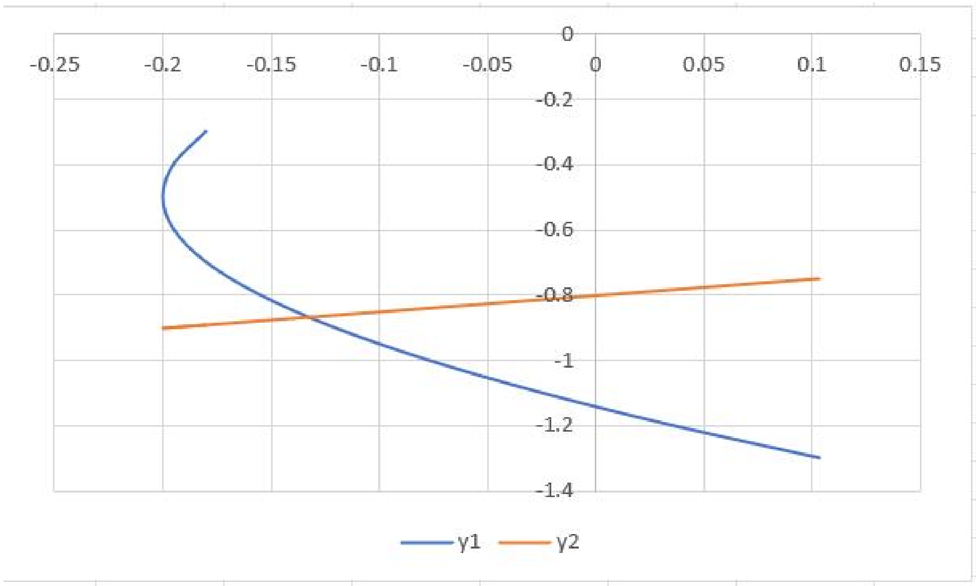
Знайшли верхню та нижню границі “у”

=(1.6-1)/-2	
D	E
-0.3	верхня границя

=(1.6+1)/-2	
D	E
-1.3	нижня границя

Побудували графік

x	y1	y2
0.103293	-1.3	-0.74845
0.035158	-1.2	-0.78242
-0.02534	-1.1	-0.81267
-0.07758	-1	-0.83875
-0.12106	-0.9	-0.86038
-0.15534	-0.8	-0.87736
-0.18007	-0.7	-0.88955
-0.195	-0.6	-0.89689
-0.2	-0.5	-0.89933
-0.195	-0.4	-0.89689
-0.18007	-0.3	-0.88955



Локалізували корінь

-0.15<=x<=-0.1
-1<=y<=-0.8

Метод простої ітерації та метода Зейделя

Перевіримо виконання умов збіжності методу простих ітерацій (для методу Зейделя умови такі ж самі);
Для цього знайдемо частинні похідні функцій $\Phi_1(x,y)$ та $\Phi_2(x,y)$ та запишемо матрицю Якобі.

$$\Phi'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & sin(y+0.5) \\ 0.5*\cos(x) & 0 \end{pmatrix}$$

Знайдемо x0, y0 із знайдених границь

-0.15<=x<=-0.1

-1<=y<=-0.8

x0=-0.125; y0=-0.9

Перевіряємо на збіжність

Підставляємо

$$= \begin{pmatrix} 0 & sin(y+0.5) \\ 0.5 * \cos(x) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.38942 \\ 0.496 & 0 \end{pmatrix}$$

$||\Phi'(x^{(0)}, y^{(0)})||$ = max{0.38942 , 0.496} = 0.496 <1 –умова збіжності виконана

Знаходимо рішення за допомогою метода простої ітерації та метода Зейделя. Для метода простої ітерації підставлямо разрахунки по знайденій вище формулі, а для зейделя для значення “у” беремо значення “х” з поточної ітерації.

Умова зупинки емпіричний критерій.

Метод простої ітерації

	x	y
1	-0.125	-0.900
2	-0.121	-0.862
3	-0.135	-0.860
4	-0.136	-0.867
5	-0.133	-0.868
6	-0.133	-0.866
7	-0.134	-0.866
8	-0.134	-0.867
9	-0.134	-0.867
10	-0.134	-0.867
11	-0.134	-0.867
12	-0.134	-0.867
13	-0.134	-0.867
14	-0.134	-0.867
15	-0.134	-0.867
16	-0.134	-0.867

Зейделя

	x	y
1	-0.125	-0.900
2	-0.121	-0.860
3	-0.136	-0.868
4	-0.133	-0.866
5	-0.134	-0.867
6	-0.134	-0.867
7	-0.134	-0.867
8	-0.134	-0.867
9	-0.134	-0.867
10	-0.134	-0.867
11	-0.134	-0.867
12	-0.134	-0.867
13	-0.134	-0.867
14	-0.134	-0.867
15	-0.134	-0.867
16	-0.134	-0.867

Метод Ньютона

Ньютона

Варіант 16

$$\begin{cases}\cos(y+0{,}5)+x=0{,}8\\ \sin x-2y=1{,}6\end{cases}$$

Запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases}f1(x,y)=\cos(y+0.5)+x-0.8=0\\ f2(x,y)=\sin(x)-2y-1.6=0\end{cases}$$

Початкове наближення

x0=-0.125; y0=-0.9

$$\begin{cases}f1(x0,y0)=\cos(-0.9+0.5)+-0.125-0.8=-0.00394\\ f2(x0,y0)=\sin(-0.125)-2*-0.9-1.6=0.075325\end{cases}$$

Будуємо матрицю Якобі

$$J(x,y)=F'=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\sin(y+0.5)\\ \cos(x) & -2\end{pmatrix}$$

Підставляємо

x0=-0.125; y0=-0.9

$$J(x,y)=\begin{pmatrix}1 & -\sin(-0.9+0.5)\\ \cos(-0.125) & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0.389418\\ 0.992198 & -2\end{pmatrix}$$

Шукаємо визначник

$$detJ(x0, y0) = 1 * (-2) - 0.389418 * 0.992198 = -2.38638 \neq 0$$,отже матриця не вироджена і має обернену:

Знаходимо обернену матрицю

$$J^{-1}(x, y) = \frac{1}{-2.38638}\begin{pmatrix} -2 & -0.389418 \\ -0.992198 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.838089 & -0.163184 \\ 0.415775 & -0.41904 \end{pmatrix}$$

Обчислюємо перше наближення за формулою 6.13 $x^{(k+1)} = x^{(k)} - F^{-1}\left(x^{(k)}\right) \cdot f\left(x^{(k)}\right)$

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} - J^{-1}(x_0, y_0) * \begin{pmatrix} f_1(x^{(0)}, y^{(0)}) \\ f_1(x^{(0)}, y^{(0)}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.125 \\ -0.9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.838089 & -0.163184 \\ 0.415775 & -0.41904 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -0.00394 \\ 0.075325 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.109406 \\ -0.866798 \end{pmatrix}$$

Перевіряємо умову зупинки

$$\max\{|x1 - x0|, |y1 - y1|\} = \max\{|-0.109406 - (-0.125|, |-0.866798 - (-0.9)|\} = 0.033202 > \varepsilon$$

Далі продовжимо з використанням MS Excel

Ітерації	x	y	f1	f2	Похибка		j11	j12	j21	j22		detJ		a11	a12	a21	a22
1	-0.12500	-0.90000	-0.00394	0.07533			1.00000	0.38942	0.99220	-2.00000		-2.38638		0.83809	0.16318	0.41578	-0.41904
2	-0.13399	-0.86680	-0.00051	0.00001	0.03320		1.00000	0.35863	0.99104	-2.00000		-2.35541		0.84911	0.15226	0.42075	-0.42455
3	-0.13356	-0.86658	0.00000	0.00000	0.00043		1.00000	0.35843	0.99109	-2.00000		-2.35523		0.84917	0.15218	0.42081	-0.42459
4	-0.13356	-0.86658	0.00000	0.00000	0.00000		1.00000	0.35843	0.99109	-2.00000		-2.35523		0.84917	0.15218	0.42081	-0.42459
5	-0.13356	-0.86658	0.00000	0.00000	0.00000		1.00000	0.35843	0.99109	-2.00000		-2.35523		0.84917	0.15218	0.42081	-0.42459
6	-0.13356	-0.86658	0.00000	0.00000	0.00000		1.00000	0.35843	0.99109	-2.00000		-2.35523		0.84917	0.15218	0.42081	-0.42459
7	-0.13356	-0.86658	0.00000	0.00000	0.00000		1.00000	0.35843	0.99109	-2.00000		-2.35523		0.84917	0.15218	0.42081	-0.42459
8	-0.13356	-0.86658	0.00000	0.00000	0.00000		1.00000	0.35843	0.99109	-2.00000		-2.35523		0.84917	0.15218	0.42081	-0.42459
9	-0.13356	-0.86658	0.00000	0.00000	0.00000		1.00000	0.35843	0.99109	-2.00000		-2.35523		0.84917	0.15218	0.42081	-0.42459
10	-0.13356	-0.86658	0.00000	0.00000	0.00000		1.00000	0.35843	0.99109	-2.00000		-2.35523		0.84917	0.15218	0.42081	-0.42459

Перевірка умови збіжності Ньютона

1. Матриця Якобі для початкового наближення $F\left(x^{(0)}\right)$ повинна мати обернену матрицю F^{-1} з нормою, меншою за певну величину A, тобто

$$\left\|F^{-1}\left(x^{(0)}\right)\right\| \le A;$$

Рахуємо А

$$J^{-1}(x0, y0) = \frac{1}{-2.38638}\begin{pmatrix} -2 & -0.389418 \\ -0.992198 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.838089 & -0.163184 \\ 0.415775 & -0.41904 \end{pmatrix}$$

$||J^{-1}(x0, y0)||$ =max(|0.838089|+|−0.163184 |; |0.415775|+|−0.41904 |)= 1.001273 < 1.002 . Отже A=1.002

Рахуємо В

$$J^{-1}(x0, y0) * \begin{pmatrix} f_1\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) \\ f_1\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.838089 & -0.163184 \\ 0.415775 & -0.41904 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -0.00394 \\ 0.075325 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.01559 \\ -0.0332 \end{pmatrix}$$

0.033202 <0.04

B= 0.04

Рахуємо С

$$J(x,y) = F' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sin(y+0.5) \\ \cos(x) & -2 \end{pmatrix}$$

x0=-0.125; y0=-0.9

$$J'(x_0, y_{0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos(y+0.5) & 0 \\ -\sin(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos(-0.9+0.5) & 0 \\ -\sin(-0.125) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.92106 & 0 \\ 0.124675 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0+0 & -0.92106+0 \\ 0.124675+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.92106 \\ 0.124675 & 0 \end{pmatrix}$$

Всі елементи цієї матриці ≤1, отже С=1

Сталі величини A , B та C мають задовольняти умову: $2nABC \le 1$

0.16032 <=1 -умова збіжності виконується

7. Порівняти трудомісткість та швидкість збіжності кожного методу.

По трудомісткості методи Зейделя і простих ітерацій однакові, проте метод Зейделя швидший (5 кроків проти 8 у метода простих ітерацій). Метод Ньютона найтрудомісткіший, проте найшвидший (3 кроки), також перевірка виконання умови збіжності метода Ньютона значно трудомісткіша за перевірку у методах Зейделя і простих ітерацій.

Висновок: в ході лабораторної роботи здобули практичні навички розв’язання системи нелінійних рівнянь за допомогою різних чисельних методів, а саме: метод простих ітерацій, метод Зейделя та метод Ньютона.

Контрольні питання:

1. **Дайте означення системи нелінійних рівнянь (СНР) та розв'язку такої системи.**

Системи n нелійнійних рівнянь з n невідомими у загальному випадку записуються в такому вигляді:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \quad ... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

де f_n – це будь-які функції від n незалежних змінах, у тому числі нелійнійні щодо невідомих.

Розв'язком системи нелінійних рівнянь називається вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, при підстановці компонент якого замість відповідних невідомих у кожне з рівнянь системи перетворює їх на тотожності.

2. **У чому полягає складність розв'язання СНР?**

Складність полягає у тому, що не існує методів, які гарантують успішне розв'язання такої задачі. Головною проблемою є локалізація коренів, для їх виделення не існує ніяких методів. При розв'язку прикладних задач, у яких моделюється об'єкт або процес, зазвичай керуються змістом умови моделі. Для системи двох невідомих локалізацію проводиться графічно.

3. **Сформулюйте достатні умови збіжності методу простих ітерацій та Зейделя для СНР.**

Процес ітерації для СНР збігається до єдиного її розв'язку, якщо норма матриці Якобі $\varphi'(x)$ в заданому околі є меньшо за одиницю, тобто для збіжності достатня умова: $||\varphi'(x)|| \leq 1$, де

$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Умови збіжності для вирішення СНР методом Зейделя є такі самі, як і для методу прстих ітерацій.

4. Які основні переваги та недоліки методу простих ітерацій?

Основною перевагою цього методу є невисока трудомісткість методу.

Основними недоліками цього методу є:

- Складність переходу від запису системи F(x) = 0 до виду x = φ(x), зручного для запису ітерацій, зважаючи на нелінійність функції;
- Збіжність тільки для достатньо близьких до розв'язку початкових наближень;
- Невисока швидкість збіжності

5. У чому основна ідея методу Зейделя?

Для покращення швидкості методу простих ітерацій використовується метод Зейделя. Метод Зейделя для СНР, я і для СЛР, полягає у використані уточнених значень зміних уже на поточному ітераційному кроці. Так для уточнення на (k+1) - му кроці значення першої зміної $x_1^{(k+1)}$ використовуємо усі значення попереднього k-го кроку, для другої зміної $x_2^{(k+1)}$ – значення $x_1^{(k+1)}$ $(k+1)$-го кроку та значення решти зміних – з попереднього k-го кроку.

6. У чому суть методу Ньютона для ров'язання СНР?

Метод Ньютона є узагальненням методу дотичних, який використовується для розв’язання нелійнійних рівнянь.

Метод Ньютона зводиться до послідовного розв’язання СЛАР, отриманих шляхом лінеаризації СНР.

7. Яке математичне підгрунтя методу Ньютона для ров'язання СНР?

Математичним підгрунтям методу є лінеаризація функції шляхом розкладання в ряд Тейлора в околі точки початкового наближення до розв’язку систем рівнянь й нехтуванням всіма членами ряду, окрім лінійних щодо приросту зміних.

8. Які основні переваги та недоліки методу Ньютона для СНР?

Перевагою методу Ньютона є швидка збіжність при вдалому виборі початкового наближення та за умови невиродженості матриці Якобі.

Недоліки методу Ньютона:

- Чутливий до вибору початкового наближення;
- Висока трудомісткість, викликана необхідністю обчилювати матриці Якобі та оберненої до неї матриці на кожному кроці ітерації;
- Необхідність розв’язувати на кожному кроці СЛАР, яка може бути погано обумовленою.