Лекція 6: Інтегрування тригонометричних функцій .

1. Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$.
2. Інтеграли вигляду $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin nx\, dx$.
3. Інтеграли вигляду $\int \sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x\, dx$.
4. Інтеграли вигляду $\int \mathrm{tg}^{n} x dx$, $\int \mathrm{ctg}^{n} x dx$.

Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$

Інтеграл вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$ знаходиться за допомогою універсальної тригонометричної підстановки:

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}.$$

При цьому

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Проте на практиці часто зустрічаються інтеграли, які швидше та простіше знаходяться з використанням інших підстановок та прийомів.

Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

1. Якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то інтеграл знаходиться за допомогою підстановки:

$$t = \cos x.$$

2. Якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то інтеграл знаходиться за допомогою підстановки:

$$t = \sin x.$$

3. Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то інтеграл знаходиться за допомогою підстановки:

$$t = \operatorname{tg} x.$$

Приклад 6.1:

$$\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x} = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3\cdot\frac{2t}{1+t^2} - 4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{6t-4+4t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{4t^2+6t-4} = \int \frac{dt}{2t^2+3t-2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{2}t-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{2}t-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2\cdot\frac{3}{4}t+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{4}}\ln\left|\frac{t+\frac{3}{4}-\frac{5}{4}}{t+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}\right| + c = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{2t-1}{2t+4}\right| + c = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}\right| + c.$$

Приклад 6.2:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ x = \arcsin t \\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{t^4} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{1-t^2}{t^4} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + c = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + c.$$

Інтеграли вигляду $\int \sin mx \cos nx \, dx, \int \cos mx \cos nx \, dx, \int \sin mx \sin nx \, dx$

Інтеграли такого типу знаходять використовуючи формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x),$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x).$$

Приклад 6.3:

$$\int \sin 3x \sin x \, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x)dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + c = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + c.$$

Інтеграли вигляду $\int \sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x\,dx$

Інтеграли такого типу знаходяться з використанням формул перетворення тригонометричних виразів, зокрема:

1. Якщо хоча б одне з чисел α або β – непарне, то від непарного степеня відокремлюють один співмножник, а парний степінь, що залишився, виражають за допомогою основної тригонометричної тотожності:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Приклад 6.4:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx = \int \sin^2 x\,(1 - \sin^2 x)(\sin x)'dx =$$

$$= \int (\sin^2 x - \sin^4 x)d(\sin x) = \int \sin^2 x\,d(\sin x) - \int \sin^4 x\,d(\sin x) =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c\,.$$

Інтеграли вигляду $\int \sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x \, dx$

2. Якщо α та β – парні числа, то для знаходження інтеграла використовують формули пониження степеня, переходячи до подвійного аргументу за допомогою формул:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Приклад 6.5:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x\, dx = \int (\cos^4 x - \cos^6 x) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx - \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx -$$

$$- \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x)^3 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx -$$

$$- \frac{1}{8} \int (1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 x + \cos^3 2x) dx = \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx +$$

$$+ \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8} \int dx - \frac{3}{8} \int \cos 2x\, dx - \frac{3}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx -$$

$$- \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \int \cos^2 2x\, (\sin 2x)' dx = \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{8} \left(\int dx + \int \cos 4x\, dx \right) -$$

$$- \frac{1}{8} x - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{3}{16} \left(\int dx + \int \cos 4x\, dx \right) - \frac{1}{16} \int (1 - \sin^2 2x) d(\sin 2x)$$

$$= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{8} x - \frac{3}{16} \sin 2x - \frac{3}{16} x - \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x -$$

$$- \frac{1}{16} \sin 2x + \frac{1}{16} \cdot \frac{\sin^3 2x}{3} + c = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + c.$$

Інтеграли вигляду $\int tg^n x\, dx, \ \int ctg^n x\, dx$

Для знаходження інтегралів такого типу використовують тригонометричні тотожності:

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \qquad \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Приклад 6.6:

$$\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx = \int (\operatorname{ctg}^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)^3 dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^6 x} - \frac{3}{\sin^4 x} + \frac{3}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\sin^6 x} - \int \frac{3dx}{\sin^4 x} + \int \frac{3dx}{\sin^2 x} - \int dx$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin x = \sqrt{\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2 x + 1}} = \\ = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^6} - \int \frac{\frac{3dt}{1+t^2}}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4} + \int \frac{\frac{3dt}{1+t^2}}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}$$

$$-x + c = \int \frac{(1+t^2)^3 dt}{t^6(1+t^2)} - 3\int \frac{(1+t^2)^2 dt}{t^4(1+t^2)} + 3\int \frac{(1+t^2)dt}{t^2(1+t^2)} - x + c =$$

$$= \int \frac{(1+t^2)^2 dt}{t^6} - 3\int \frac{(1+t^2)dt}{t^4} + 3\int \frac{dt}{t^2} - x + c = \int \frac{dt}{t^6} + 2\int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2} -$$

$$-3\int \frac{dt}{t^4} - 3\int \frac{dt}{t^2} + 3\int \frac{dt}{t^2} - x + c = \int \frac{dt}{t^6} - \int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2} - x + c =$$

$$= -\frac{1}{5t^5} + \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} - x + c = -\frac{1}{5\operatorname{tg}^5 x} + \frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} - x + c$$