КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра прикладних інформаційних систем

Звіт до лабораторної роботи №6

з курсу

«Чисельні методи»

студента 3 курсу
групи ПП-31
спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»
ОП «Прикладне програмування»
Селецького В. Р.

Викладач:
Жихарєва Ю.І.

Київ – 2023

Тема: Чисельне диференціювання та інтегрування.

Мета: Навчитися проводити чисельне диференціювання та чисельно знаходити визначений інтеграл з оцінкою точності отриманих результатів.

Завдання

Завдання 1

Задано визначений інтеграл:

$$\int_a^b \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3}{1 + c_4 x^3} dx,$$

де $a = 0{,}12 \cdot N$; $b = a + 1{,}2$;

$c_0 = 0{,}1 \cdot (30 - N)$; $c_1 = 0{,}1 \cdot (N - 40{,}1)$; $c_2 = 0{,}1 \cdot (50{,}2 - N)$;

$c_3 = 0{,}1 \cdot (N - 60{,}3)$; $c_4 = 0{,}1 \cdot (50{,}4 - N)$;

N – номер варіанту.

Необхідно

1) Знайти чисельно першу та другу похідні від підінтегральної функції з кроком h=0,05 на проміжку інтегрування [a;b] з точністю $O(h^2)$. Визначити $M_2 = \max_{[a,\ b]}|f''(x)|$ - максимальне значення модуля другої похідної на цьому проміжку. Проміжок інтегрування розбити на n=12 частин.

2) Знайти визначений інтеграл за методом прямокутників. Оцінити похибку інтегрування при заданій кількості кроків методом подвійного перерахунку за правилом Рунге.

3) Обчислити інтеграл методом трапецій. Оцінити залишковий член за формулою $R \leq \frac{h^2(b-a)}{24} M_2$, де $M_2 = \max_{[a,\ b]}|f''(x)|$. Значення величини M_2 оцінити за допомогою чисельного диференціювання. Визначити кількість кроків, необхідних для досягнення точності обчислень $\varepsilon = 10^{-4}$.

4) Знайти визначений інтеграл методом Сімпсона. Оцінити точність обрахунків за формулою: $R \leq \frac{(b-a)}{180}|\overline{\Delta^{(4)}y}|$, де $|\overline{\Delta^{(4)}y}|$ - середнє арифметичне скінчень різниць 4-го порядку.

5) Порівняти точність методів. Зробити висновки.

Хід роботи

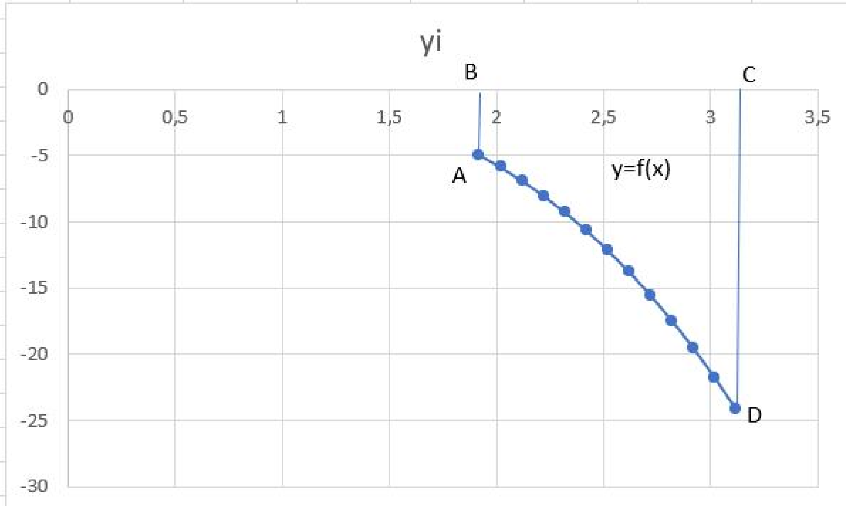
Для першого завдання нам потрібно визначити значення a=0,12*N, і b=a+1,2. Оскільки N=16 то a=1,92; b=3,12; формула $\int_a^b \frac{1{,}4-2{,}41x+3{,}42x^2-4{,}43x^3}{4{,}44} dx$ Далі знаходимо чисельно першу і другу похідну за формулою, а також знаходимо максимальне по модулю значення другої похідної.

xi	y	y`	y``	max|y``|
1,87	-4,53062			17,1372973
1,92	-4,94927	-8,62174	-9,95351	
1,97	-5,3928	-9,1269	-10,2528	
2,02	-5,86196	-9,64702	-10,5522	
2,07	-6,3575	-10,1821	-10,8515	
2,12	-6,88017	-10,7322	-11,1508	
2,17	-7,43072	-11,2972	-11,4501	
2,22	-8,00989	-11,8772	-11,7495	
2,27	-8,61844	-12,4721	-12,0488	
2,32	-9,25711	-13,0821	-12,3481	
2,37	-9,92664	-13,707	-12,6474	
2,42	-10,6278	-14,3468	-12,9468	
2,47	-11,3613	-15,0016	-13,2461	
2,52	-12,128	-15,6714	-13,5454	
2,57	-12,9285	-16,3562	-13,8447	
2,62	-13,7636	-17,0559	-14,1441	
2,67	-14,6341	-17,7706	-14,4434	
2,72	-15,5406	-18,5002	-14,7427	
2,77	-16,4841	-19,2448	-15,042	
2,82	-17,4651	-20,0044	-15,3414	
2,87	-18,4845	-20,779	-15,6407	
2,92	-19,543	-21,5685	-15,94	
2,97	-20,6414	-22,373	-16,2393	
3,02	-21,7803	-23,1924	-16,5386	
3,07	-22,9606	-24,0268	-16,838	
3,12	-24,183	-24,8762	-17,1373	
3,17	-25,4482			

Далі побудуємо графік

a	b	n	h=(b-a)/n
1,92	3,12	12	0,1

i	xi	yi
0	1,92	-4,94927
1	2,02	-5,86196
2	2,12	-6,88017
3	2,22	-8,00989
4	2,32	-9,25711
5	2,42	-10,6278
6	2,52	-12,128
7	2,62	-13,7636
8	2,72	-15,5406
9	2,82	-17,4651
10	2,92	-19,543
11	3,02	-21,7803
12	3,12	-24,183



Знаходимо визначений інтеграл за методом прямокутників і оцінюємо похибку інтегрування за правилом Рунге.

i	xi	$\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})$
0	1,92	1,97	-5,392798286
1	2,02	2,07	-6,357500786
2	2,12	2,17	-7,430718151
3	2,22	2,27	-8,618436867
4	2,32	2,37	-9,926643421
5	2,42	2,47	-11,3613243
6	2,52	2,57	-12,92846599
7	2,62	2,67	-14,63405498
8	2,72	2,77	-16,48407775
9	2,82	2,87	-18,48452079
10	2,92	2,97	-20,64137058
11	3,02	3,07	-22,96061362
12	3,12		
Сума			-155,2205255

i	xi	$\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})$
0	1,92	2,02	-5,861959333
1	2,12	2,22	-8,009890685
2	2,32	2,42	-10,62780041
3	2,52	2,62	-13,76358041
4	2,72	2,82	-17,46512258
5	2,92	3,02	-21,78031879
6	3,12		
Сума			-77,50867222

a	b	n2	h2	n1	h1
1,92	3,12	12	0,1	6	0,2

I2n=	-15,5221		
In=	-15,5017		
Δ2n=	0,006773	≈0,007	<0,05

Відповідь: I≈-15,5

Обчислимо інтеграл методом трапецій а також обчислимо кількість кроків необхідну для досягнення заданої точності

i	xi	yi	yi
0	1,92	-4,9493	
1	2,02		-5,862
2	2,12		-6,8802
3	2,22		-8,0099
4	2,32		-9,2571
5	2,42		-10,628
6	2,52		-12,128
7	2,62		-13,764
8	2,72		-15,541
9	2,82		-17,465
10	2,92		-19,543
11	3,02		-21,78
12	3,12	-24,183	
Сума		-29,132	-140,86

a	b	n	h	ε
1,92	3,12	12	0,1	0,0001

I*=	-15,542		M2=	17,1373
R<=	0,01714	≈0,02	<0,05	
n>	157,091			

Для досягнення необхідної точності ε=0,0001 слід обрати 158 інтервалів

Відповідь: I=-15,5

Далі обчислимо інтеграл за методом Сімпсона, а також оцінимо точність обрахунків

i	xi	y	непарні	парні
0	1.92	-4.9493		
1	2.02	-5.862	-5.862	
2	2.12	-6.8802		-6.8802
3	2.22	-8.0099	-8.0099	
4	2.32	-9.2571		-9.2571
5	2.42	-10.628	-10.628	
6	2.52	-12.128		-12.128
7	2.62	-13.764	-13.764	
8	2.72	-15.541		-15.541
9	2.82	-17.465	-17.465	
10	2.92	-19.543		-19.543
11	3.02	-21.78	-21.78	
12	3.12	-24.183		
Сума			-77.509	-63.349

a	b	n	h
1.92	3.12	12	0.1
I*=	-15.528825254054100		
R<=	1.21713E-16	≈0,000000000000000	<0,0000000000000005
Відповідь:	-15.528825254054100		

i	xi	y	1-го	2-го	3-го	4-го	Сер.Арифм.
0	1.92	-4.9493	-0.9127	-0.1055	-0.006	-7.1054E-15	1.8257E-14
1	2.02	-5.862	-1.0182	-0.1115	-0.006	-1.0658E-14	
2	2.12	-6.8802	-1.1297	-0.1175	-0.006	1.68754E-14	
3	2.22	-8.0099	-1.2472	-0.1235	-0.006	-1.0658E-14	
4	2.32	-9.2571	-1.3707	-0.1295	-0.006	3.55271E-15	
5	2.42	-10.628	-1.5002	-0.1355	-0.006	2.13163E-14	
6	2.52	-12.128	-1.6356	-0.1414	-0.006	-5.3291E-14	
7	2.62	-13.764	-1.7771	-0.1474	-0.006	4.08562E-14	
8	2.72	-15.541	-1.9245	-0.1534	-0.006	0	
9	2.82	-17.465	-2.0779	-0.1594	-0.006		
10	2.92	-19.543	-2.2373	-0.1654			
11	3.02	-21.78	-2.4027				
12	3.12	-24.183					

Також порявняємо точність методів

Метод	Інтеграл чисельно	Оцінка похибки
Сімпсона	-15,528825254054100	≈0,0000000000000002
прямокутників	-15,5	≈0,02
трапецій	-15,5	≈0,007

Як бачимо, метод Сімпсона виявився найбільш точним; за ним метод трапецій, а після - метод прямокутників.

Висновки

В результаті виконання даної роботи я навчився проводити чисельне диференціювання та чисельно знаходити визначений інтеграл з оцінкою точності отриманих результатів.

Контрольні питання:

1) Коли застосовують чисельне диференціювання?

Тоді, коли функція задана таблицею, або коли залежність y=f(x) представлена надто складним аналітичним виразом.

2) Що називається порядком точності методу чисельного диференціювання та який математичний апарат використовують для оцінки похибки різницевих формул?

Порядком точності методу чисельного диференціювання називають показник степені кроку h в головному члені похибки.

Для оцінки похибки різницевих формул ми використовуємо розклад функції y=f(x) у ряд Тейлора в околі точки xi.

3) У чому полягає некоректність чисельного диференціювання?

Залишкові члени $R_n'(x)$, $R_n''(x)$,…, $R_n^{(k)}(x)$ виражають похибки цих наближених рівнянь. При заміні функції f(x) інтерполяційним многочленом $P_n(x)$ необхідно мати на увазі, що залишковий член $R_n(x)$ повинен бути достатньо малим, але із цього не випливає той факт, що $R_n'(x)$, $R_n''(x)$,…, $R_n^{(k)}(x)$ будуть достатньо малими. Похибки, отримані при обчисленні похідних (особливо вищих порядків), можуть бути значними.

4) Чи можна зробити похибку чисельного диференціювання як завгодно малою за рахунок зменшення кроку? Відповідь обґрунтуйте.

Ні, оскільки вибір занадто малого кроку може призвести до різкого збільшення похибки диференціювання внаслідок обчислювальних похибок, пов’язаних з діленням на різницю близьких чисел.

5) Сформулюйте підстави для чисельного інтегрування. Яка з цих підстав є у Вашому варіанті?

Підстави:

1. Первісна не виражається через елементарні функції.

2. Первісна виражається через елементарні функції, але процес вираження її через елементарні функції є достатньо складним, тобто потребує певного рівня математичної підготовки.

3. Вираз первісної через елементарні функції є громіздким, тобто його незручно використовувати в розрахунках.

4. Підінтегральну функцію задано у вигляді таблиці.

В моєму варіанті є підстава 3.

6) Дайте означення квадратурної формули інтерполяційного типу

Це інтерполяційний поліном деякої степені з вузлами інтерполяції в точках розбиття відрізку інтегрування: x_0, x_1, x_2,…, x_n

7) У який спосіб будуються квадратурні формули?

Найбільш поширений спосіб побудови квадратурних формул полягає заміні підінтегральної функції інтерполяційним поліномом деякої степені з вузлами інтерполяції в точках розбиття відрізку інтегрування : x_0, x_1, x_2,…, x_n

8) Що таке сімейство квадратурних формул Ньютона-Котеса? Запишіть загальну формулу цього сімейства, охарактеризуйте коефіцієнти Котеса

Інтерполяційні квадратурні формули з рівновіддаленими вузлами інтерполяції, побудовані шляхом заміни підінтегральної функції інтерполяційним поліномом Лагранжа різної степені становлять сімейство квадратурних формул Ньютона-Котеса.

$$L_n(x_0+qh)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}y_i}{i!(n-i)!}\cdot\frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{q-i}.$$

Коефіцієнти Котеса не залежать від відрізка інтегрування і їх можна визначити заздалегідь.

9) Поліномами якої степеній інтерполюється підінтегральна функція у формулах прямокутників, трапецій, Сімпсона?

Для прямокутників поліномом нульової степені,

для трапецій поліномом першої степені,

для Сімпсона поліномом другої степені.

10) Сформулюйте правило Рунге та методику його застосування для практичної оцінки похибки чисельного інтегрування

Правило Рунге: похибка квадратурної формули пропорційна різниці двох наближених значень інтегралу, обчислених за тією ж квадратурною формулою з кількістю кроків n та 2n.

Методика застосування полягає у послідовному подвоєнні кількості інтервалів розбиття відрізку інтегрування: Задають значення заданої точності розрахунку ε і початкову кількість інтервалів n. Обчислюють величина інтегралу за обраною квадратурною формулою при n інтервалах і при 2n інтервалах, тобто матимемо відповідно величини In та I2n .