1)Дискретная математика. Высказывания. Логические операции над высказываниями.

Дискре́тная матема́тика — область математики, занимающаяся изучением дискретных структур, которые возникают как в пределах самой математики, так и в её приложениях.

Высказывание — это выражение, относительно которого можно сделать вывод о его истинности или ложности. Высказывания могут быть истинными, ложными или содержащими истину и ложь в разных соотношениях.

Операции.

Отрицание - унарная логическая операция (применяется к одному высказыванию), соответствующая конструкциям: «Не…,», «Не верно, что…». О. Отрицание высказывания *a* – высказывание, обозначаемое $\neg A$, $\sim A$, $\bar{A}$.

$\hat{a}$	$\hat{\bar{a}}$
0	1
1	0

Операция логического сложения (дизъюнкция)- Соединение двух высказываний А и В в одно с помощью союза "ИЛИ", употребляемого в неисключающем смысле, называется логическим сложением (дизъюнкцией), а полученное составное высказывание - логической суммой. *Пример дизъюнктивного высказывания:* "Председателем кооператива "Аметист" будет избран Иванов, или председателем кооператива "Аметист" будет избран Петров".Дизъюнкция обозначается знаком "+" или знаком " ∨" (А + В или А∨ В). Дизюнкция ложна тогда, когда ложны оба входа в нее высказывания. Законы: $a \vee d \equiv b \vee a$, $a \vee a \equiv a$, $a \vee 0 \equiv a$, $a \vee 1 \equiv 1$.

Операция логического умножения (конъюнкция)- Соединение двух высказываний А и В в одно с помощью союза "И", называется логическим умножением (конъюнкцией).

Результат умножения (составное высказывание) называется логическим произведением. Обозначение: А· В или А ∧ В Пример: Пусть даны два простых высказывания: А: "Вильнюс - столица Литвы." В: "В Вильнюсе проживает 1 млн. жителей." Получим конъюнкцию: Вильнюс - столица Литвы и в Вильнюсе проживает 1млн. жителей. Законы: Закон анпотенции- $a \wedge b \equiv b \wedge a$, $a \wedge a \equiv a$. Закон нуля и единицы- $a \wedge 1 \equiv 0$, $a \wedge 0 \equiv a$.

Эквиваленция- логическая операция, соответствующая союзу "тогда и только тогда, когда" называется эквиваленцией.

Введем для обозначения эквиваленции символ $\approx$ или $\Leftrightarrow$. Запись А $\Leftrightarrow$ читается так: "А тогда и только тогда, когда В". Когда мы говорим "А тогда и только тогда, когда В", то имеем в виду, что оба предложения А и В одновременно истинны, либо одновременно ложны. Например, "Я поеду в Ленинград тогда и только тогда, когда ты поедешь в Киев." . Св-ва: $a \approx b \equiv b \approx a$, $a \approx 1 \equiv a$, $a \approx 0 \equiv a$, $a \approx b \equiv \bar{a} \approx \bar{b}$.

Импликация- логическая операция, соответствующая союзу "если ..., то ..." называется импликацией.

Будем обозначать эту операцию символом $\to$. Запись А$\to$ В читается так: "если А, то В", либо "А имплицирует В". С - "Если число n делится на 4 , то оно делится на 2"

D - "Если Иванов увлечен математикой, то Петров ничем, кроме хоккея, не интересуется." Импликация высказываний ложна лишь в случае, когда А истинно, а В ложно. Св-ва: $a \to b \not\equiv b \to a$, $a \to a \equiv 1$, $0 \to a \equiv 1$, $1 \to a \equiv a$, $a \to 1 \equiv 1$, $a \to 0 \equiv \bar{a}$.

2)Логические операции. Зависимости между операциями.

*Зависимость между операциями***.** Все операции не являются независимыми. Одни из них могут быть выражены через других. Справедливо следующее-

$$a \to b \equiv \bar{a} \vee b$$

$$a \approx b \equiv (a \to b)(b \to a) \equiv (\bar{a} \vee b)(\bar{b} \vee a) \equiv (ab) \vee (\bar{a}\bar{b})$$

Т. Справедливы следующие 19 равносильностей для булевых операций алгебры высказываний:

0. $\bar{\bar{a}} \equiv a$ -- *закон двойного отрицания*
1. $a \vee b \equiv b \vee a$
2. $a \wedge b \equiv b \wedge a$ — *коммутативные законы*
3. $a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c$
4. $a \wedge (b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \wedge c$ — *ассоциативные законы*
5. $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
6. $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ — *дистрибутивные законы*
7. $a \vee a \equiv a$
8. $a \wedge a \equiv a$ — *законы идемпотентности*
9. $\overline{a \vee b} \equiv \bar{a} \wedge \bar{a}$
10. $\overline{a \wedge b} \equiv \bar{a} \vee \bar{b}$ — *законы де Моргана*[2]
11. $a \vee 1 \equiv 1$
12. $a \wedge 0 \equiv 0$
13. $a \vee 0 \equiv a$
14. $a \wedge 1 \equiv a$ — *законы нуля и единицы*
15. $a \vee (a \wedge b) \equiv a$
16. $a \wedge (a \vee b) \equiv a$ — *законы поглощения*
17. $a \vee \bar{a} \equiv 1$ — *закон исключенного третьего*
18. $a \wedge \bar{a} \equiv 0$ — *закон противоречия*

3)Формулы алгебры высказываний. Теорема о

4)Ранг формул. Булевы формулы. Теорема о

фиксации значений. Теорема о равносильной подстановки.

Формулой алгебры высказываний называются: 1) сами высказывания и символы высказывательных переменных; 2) выражения вида $\overline{F_1}$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \to F_2)$, $(F_1 \sim F_2)$, где F_1, F_2 - формулы алгебры высказываний.

Теорема. *Теорема о фиксации значений в формуле. Если $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ - формула в алгебре высказываний, где $x1,x2,\ldots,x_n$ – высказывательные переменные формулы, то при фиксации значений всех высказывательных переменных (т. е. при подстановке вместо них высказываний) формула алгебры высказываний превращается в высказывание. Т.е. формула алгебры высказываний является отображением множества наборов значений высказывательных переменных в высказывания.*

Теорема. Теорема о равносильной подстановке. *Пусть $F(y_1, y_2,\ldots, y_m) \equiv G(y_1, y_2,\ldots, y_m)$, $f_1(x_1, x_2,\ldots,x_n) \equiv g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $f_2(x_1, x_2,\ldots,x_n) \equiv g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, ... $f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv g_m(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ - равносильные формулы алгебры высказываний. Тогда $F(f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1, x_2,\ldots,x_n)) = G(g_1(x_1, x_2,\ldots,x_n),\ldots,g_m(x_1, x_2,\ldots,x_n))$.*

существовании равносильной булевой формулы.

О. рангом формулы алгебры высказываний называют число логических операций встречаемых в формуле, причем каждая операция считается столько раз сколько встречается. Т. Для любой формулы АВ существуют равносильное и булевы формула АВ.

ДОК-ВО. По методу индукции начинаем с какого то начального числа. ФОРМУЛА РАНГА НОЛЬ. Все формулы ранга ноль из формул: $\overline{F_1}$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \to F_2)$, $(F_1 \sim F_2)$, все это булевы формулы. ФОРМУЛА РАНГА ОДИН. Если А и В формулы 0 ранга (булевы), то $\neg A$, $\neg B$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \sim B$, $A \to B$ формулы ранга 1. Первые 4 булевы формулы, последние 2 можно преобразовать: $A \sim B \equiv (A \wedge B) \vee (\overline{B} \wedge A)$,

$$A \to B \equiv \overline{A} \vee B$$

5)Двойственность. Закон двойственности.

О. Пусть $f(x1,x2,\ldots,x_n)$ – формула алгебры высказываний. Двойственной к ней будем называть формулу $f^*(x1,x2,\ldots,x_n)$, определенную следующим:

$f^*(x1,x2,\ldots,x_n) \equiv \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n)}$. Из закона двойного отрицания следует, что $(f^*)^* \equiv f$

Т. Закон двойственности. Формулы $f_1(x1,x2,\ldots,x_n)$ и $f_2(x1,x2,\ldots,x_n)$ равносильны тогда, когда равносильны Формулы $f^*_1(x1,x2,\ldots,x_n)$ и $f^*_2(x1,x2,\ldots,x_n)$, т.е.

$$f_1(x_1, x_2,\ldots, x_n) \equiv f_2(x_1, x_2,\ldots, x_n) \Leftrightarrow$$
$$f^*{}_1(x_1, x_2,\ldots, x_n) \equiv f^*{}_2(x_1, x_2,\ldots, x_n).$$

6)Двойственность. Принцип двойственности для булевых формул.

Т. принцип двойственности для булевых формул.

Двойственная к булевой формуле может быть полученная заменой констант 0 на 1, 1 на 0,
$\vee$ на $\wedge$, $\wedge$ на $\vee$ и сохранением структуры формулы (т.е. соответствующего порядка действий).

Док-во. Доказательство проведем индукцией по рангу формулы. 0-й шаг (случай ранга 0). *Все формулы 0 –го ранга - $\overline{F_1}$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \to F_2)$, $(F_1 \sim F_2)$.* Это формулы 0, 1, х. Мы знаем, что $0^* \equiv 1$, $1^* \equiv 0$, $x^* \equiv x$, т.е. утверждение теоремы выполнено. 1-й шаг. (случай ранга 1). Все булевы формулы имеют вид $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, где А, В – булевы формулы ранга 0. Применим общий принцип двойственности

$$(\neg A)^* \equiv \left(\neg y_1|_{y_1 \leftarrow B}\right)^* \equiv \neg y_1|_{y_1 \leftarrow A^*} \equiv \neg A^*;$$
$$(A \vee B)^* \equiv \left(y_1 \vee y_2|_{\substack{y_1 \leftarrow A \\ y_2 \leftarrow B}}\right)^* \equiv y_1 \wedge y_2|_{\substack{y_1 \leftarrow A^* \\ y_2 \leftarrow B^*}} \equiv A^* \wedge B^*;$$
$$(A \wedge B)^* \equiv \left(y_1 \wedge y_2|_{\substack{y_1 \leftarrow A \\ y_2 \leftarrow B}}\right)^* \equiv y_1 \vee y_2|_{\substack{y_1 \leftarrow A^* \\ y_2 \leftarrow B^*}} \equiv A^* \vee B^*.$$

7)Нормальные формы. Лемма о разложении переменных.

О. Пусть $\sigma_i \in \{0,1\}$, х – высказывательная переменная.

Определим $x^\sigma \begin{cases} x, если \sigma = 1 \\ \overline{x}, если \sigma = 0 \end{cases}$

Лемма о разложении переменных.

Пусть $f(x1,x2,\ldots,x_n)$ – формула алгебры высказываний, $1 \le i \le n$, тогда

$f(x1,x2,\ldots,x_n) \equiv x_i\ f(x_1, x_2 \ldots x_{i-1}, x_{i+1} \ldots x_n) \vee$
$\overline{x}_i\ f(x_1, x_2 \ldots x_{i-1}, 0, x_{i+1} \ldots x_n) \equiv$

8)Нормальные формы. Теорема о существовании СДНФ и СКНФ.

СДНФ (совершенная дизъюнктивная нормальная форма)

Теорема: Для любой Формулы алгебры высказываний, отличной от тождественно ложной существует ее представление в виде

$$f(x_1, x_2,\ldots x_n) \equiv \vee x^{\sigma_1}{}_1, x^{\sigma_2}{}_2,\ldots x^{\sigma_n}{}_n.$$

(под дизъюнкцией - $\sigma_i \in \{0;1\}$; $\hat{f}(\sigma_1, \sigma_2,\ldots,\sigma_n) = 1$)

Которое называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой.

СКНФ (совершенная конъюнктивная нормальная форма)

$\vee\, x_i^6\ \ f(x_1, x_2 \ldots x_{i-1}, \sigma_i \,.\, x_{i+1} \ldots x_n)\ .\ \sigma_i \in \{0,1\}.$

где x_i — неизвестные, σ_i — параметры.

Теорема: Для любой отличной от тождественно истиной формулы алгебры высказываний существует и единственное ее представление в виде СКНФ конъюнкций полных совершенных элементарных дизъюнкций (сомножителей вида$(x_1^{\sigma 1} \vee x_2^{\sigma 2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma n})$).

$f(x_1,x_2,..,x_n) \equiv\ \wedge(x_1^{\sigma 1} \vee x_2^{\sigma 2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma n})$ снизу конъюнкции $[(\sigma_1,\sigma_2,..,\sigma_n)\ ;\ f(\sigma_1,\sigma_2,..,\sigma_n) \equiv 0]$ - СКНФ данной формулы.

9)Типы конъюнкции и дизъюнкции. Теорема о существовании равносильных ДНФ и КНФ.

КНФ, ДНФ

О. Пусть $V_n=\{x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2,.., x_n, \bar{x}_n\}$ и пусть $\upsilon(\varnothing) \subset V_n$.

Элементарной конъюнкцией, порожденной подмножеством υ , называется конъюнкция всех элементов υ .

О. Элементарная конъюнкция называется совершенной, если в нее не входит никакая из переменных одновременно с отрицанием этой переменной.

О. Элементарная конъюнкция называется полной, если в ней представлены все переменные.

О. Дизъюнктивной нормальной формой (*ДНФ)* называется дизъюнкция элементарных конъюнкций.

О. Конъюнктивной нормальной формой (*КНФ)* называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Т. Для любой формулы алгебры высказываний существуют равносильные ей ДНФ и КНФ.

Док-во. Опишем алгоритм перехода к ДНФ. Рассмотрим отдельно случай формул ранга 0:

$\underbrace{1 \equiv x \vee \bar{x}}_{\text{ДНФ}} \equiv \underbrace{(x \vee \bar{x})}_{\text{КНФ}}, \quad \underbrace{0 \equiv x \cdot \bar{x}}_{\text{ДНФ}} \equiv \underbrace{(x) \cdot (\bar{x})}_{\text{КНФ}}.$

Формула *x* является одновременно и ДНФ и КНФ. Случай формулы $r \geq 1$ Опишем шаги алгоритма, приводящие к цели: 1. Пользуясь формулами $x \to y \equiv \bar{x} \vee y$ и $x \sim y \equiv x \cdot y \vee \bar{x} \cdot \bar{y}$, перейти к равносильной булевой формуле. 2.Пользуясь законами де Моргана, перейти к формуле с тесными отрицаниями, т.е. содержащей отрицание не выше чем над переменными (пропустить отрицание внутрь формулы). 3. Пользуюясь дистрибутивными законами, сделать дизэюнкцию (конъюнкцию) внешней операцией.

10)Основные проблемы алгебры высказываний.

В алгебре высказываний выделяют 3 основные проблемы: 1)разрешение, 2)равносильности, 3) представления.

1. Проблема разрешения. Существует ли алгоритм позволяющий с помощью равносильных преобразований для произвольной формулы алгебры высказываний выяснить является ли она тождественно истинной или ложной или нетривиально невыполнимой? 2.Проблема равносильности. Существует ли алгоритм, позволяющий с помощью равносильных преобразований для произвольных формул выяснить, равносильны ли они? 3. Проблема представления. Можно ли двузначную 0-1 функцию n двузначных переменных $f(x_1 \ldots x_n)$ реализовать формулой алгебры высказываний $F(x_1 \ldots x_n)$ так что $f(x_1 \ldots x_n) = F(x_1 \ldots x_n)$?

11)Критерий тождественной истинности.

Т1. Для того чтобы формула алгебры высказываний была тождественно истинной, необходимо и достаточно, чтобы в равносильной ей КНФ были тождественно истинны все элементарные дизъюнкции.

Т2. Для того чтобы элементарная дизъюнкция была тождественно истинная, достаточно чтобы в ней существовала хотя бы для одной переменной пара состоящей из этой переменной и ее отрицания

Достаточность - $\cdots \vee x \vee \bar{x} \vee \cdots \equiv 1.$

12)Предикаты. Логические операции над предикатами. Операции, уменьшающие местность.

Существует 2 операции уменьшающие местность. 1) фиксация значения переменных и 2)навешивание кванторов (квантификация).

Фиксация значения переменных.

Пусть $P(x_1 \ldots x_n)$ – *n местный* предикат определенный на Ω . Зафиксируем x_i=a, $1 \leq i \leq n$. Обозначим Ω_a^i - множество значений переменных $x_1 \ldots x_{i-1}, x_{i+1} \ldots x_n$ определяемое следующим.

$\{x_1,..., x_{i-1}, x_{i+1},..., x_n) \in \Omega_a^i \Leftrightarrow$

$\{x_1,..., x_{i-1}, a, x_{i+1},..., x_n) \in \Omega$.

Определим на Ω_a^i {n – 1) – местный предикат $Q(x_1,..., x_{i-1}, x_{i+1},..., x_n)$ следующим:

$$Q(x_1,..., x_{i-1}, x_{i+1},..., x_n) \equiv P(x_1,..., x_{i-1}, x_{i+1},..., x_n)$$

Навешивание кванторов (квантификация).

Переход от P(x) к $\forall x P(x)$ или $\exists x P(x)$ называется навешиванием квантора на переменную x (или связыванием переменной x). При этом переменная x, на которую навешен квантор, называется связанной, в противном случае – свободной. Где P(x) – одноместный предикат с предметной областью M. $\forall x P(x)$ бозначается высказывание, которое истинно, если P(x) тождественно истинный предикат и ложно в противном случае. $\forall$ называется квантором всеобщности. $\exists x P(x)$ обозначается высказывание, которое истинно, если P(x) выполнимый предикат и ложно, если P(x) тождественно ложный предикат. $\exists$ называется квантором существования.

13)Предикаты, содержащие кванторы. Теорема о равносильности содержащих кванторы.

T1. Разноименные кванторы, вообще говоря, не коммутируют.

T2. (основные равносильности, содержащие кванторы). Имеют место следующие равносильности:

$$\left.\begin{array}{l} 1. \overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)} \\ 2. \overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)} \end{array}\right\}\text{- законы де Моргана для кванторов}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3. \forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y) \\ 4. \exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \exists x P(x,y) \end{array}\right\}\text{- коммутация одноименных кванторов}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5. \forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \\ 6. \exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \end{array}\right\}\text{- дистрибутивные законы для кванторов}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7. \forall x (P(x) \vee Q(y)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(y) \\ 8. \exists x (P(x) \wedge Q(y)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(y) \end{array}\right\}\text{- законы ограничения действия кванторов}$$

$$9. \exists y \forall x P(x,y) \to \forall x \exists y P(x,y) \equiv 1$$

14)Предикаты, содержащие кванторы. Кванторы как обобщение логических операций.

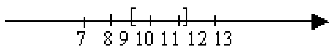
Теорема. (Кванторы, как обобщения логических операций). Пусть P(x) - одноместный предикат, определенный на конечном множестве X = { x_1, x_2 …x_n}, тогда получаем

$$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge ... \wedge P(x_n)$$

$$\exists x P(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee ... \vee P(x_n)$$

Пример. Пусть P(x) = ”x $\leq$ 10, x $\in$ [9; 12]”

Рисунок 1.7.7.



$\forall$xP(x) a = “$\forall$x $\in$ [9; 12] x $\leq$ 10”, $\hat{a} = 0$

P(x_1) = P(7) = “9 $\leq$ 10” $\hat{P}$(9) = 1

P(x_2) = P(10) = “10 $\leq$ 10” $\hat{P}$(10) = 1

P(x_3) = P(11) = “11 $\leq$ 10” $\hat{P}$(11) = 0

P(x_4) = P(12) = “12 $\leq$ 10” $\hat{P}$(12) = 0

$\hat{a} = 0$. $\forall$xP(x) $\equiv$ P(x_1)$\wedge$P(x_2)$\wedge$P(x_3) $\wedge$P(x_4); 0 $\equiv$ $1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0$; 0 $\equiv$ 0

$\exists$xP(x) $\equiv$ P(x_1)$\vee$P(x_2)$\vee$ P(x_3) $\vee$P(x_4)

$\exists$xP(x) b = “$\exists$x $\in$ [9; 12] x $\leq$ 10”, $\hat{b}$ = 1

$1 \equiv 1 \vee 1 \vee 0 \vee 0 \Rightarrow 1 \equiv 1.$

15)Типы множеств. Операции над множествами.

Операции над множествами.

1) объединение: множество тех элементов x, которые принадлежат хотя бы одному множеству. A$\cup$B={x:x$\in$A или x$\in$B}

2) пересечение: A$\cap$B={x:x$\in$A $\wedge$ x$\in$B}.

3) разность множеств.A\B={x::x$\in$A $\wedge$ x$\notin$B}

4) симметрическая разность

$A \Delta B \equiv A - B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) =$

$A \cap \overline{B} + \overline{A} \cap B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$.

5) Декартовое или прямое произведение

$A \times B = \{(a,\ b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$

6) Дополнение до множества x.

$X^c = \mathfrak{X} - X = \{x \in \mathfrak{X} : x \notin X\}$

16)Подмножество. Теоремы о подмножестве.

T. Любое подмножество конечного множества само конечно. Любое надмножество бесконечного множества само бесконечно.

T.Число элементов конечного множества *A* и *n*- число элементов *B*. Предположим, что $n \geq m$. Так как $A \supset B$, то $A \neq 0, n > 0$ и $A \sim |1, m|$. Также $n \geq m > 0$, следовательно, $B \sim |1, n|$. При взаимно однозначном отображении *A* на отрезок |1,*m*| множество *B* отображается также взаимно однозначно на некоторое собственное подмножество *B’* отрезка |1,*m*| таким образом, что *B*~*B’*

17)Свойства образов и прообразов. Композиция отображений. Теорема об ассоциативности композиций. Типы отображений.

Т.Свойства прообразов и образов. Пусть $f: X \to Y$; $A_1, A_2 \subset X$; $B_1, B_2 \subset Y$: тогда имеют место соотношения:

$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Пусть $y \in f(x_1) \cup A_2 \Leftrightarrow f^{-1}(\{y\}) \cap (A_1 \cup A_2) \neq \varnothing$

$\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2).$

О. Композиция отображений.
Пусть $f: X \to Y, g: Y \to Z$. Композицией отображений f и g называется отображение $g \circ f: X \to Z$, определяемое следующим: $(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in X$.

$g \circ f \neq f \circ g, h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$

Теорема ассоциативности композиций.
Если $f: X \to Y, g: Y \to Z$, $h: Z \to W$, то $\forall x(\in X)$

$(h \circ (g \circ f)(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$

$(h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$

$((h \circ y) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$

Типы отображений
3 типа: инъективные, сурьективные, биективные.
О. Отображение $f: X \to Y$ называется сюръективным, если

$\forall y(\in Y) \quad f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$.

О. Отображение $f: X \to Y$ называется инъективным, если $\forall x_1(\in X) \forall x_2(\in X)((x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$

О. Отображение $f: X \to Y$ называется биективным, если оно инъективно и сюръективно.

18)Типы отображений. Теоремы о композиции.
Т.Композиция инъективных отображений.
Если $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ - инъективные отображения, то $g \circ f: X \to Z$ - инъективное отображение
Т. О композициях сурьективных отношений.
Если $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ -сюръективные отображения, то $g \circ f: x \to z$ - сюръективное отображение.
Т. О композиции биективных отображений.
Если $f: x \to y, y: y \to z$ биективно, то отображение $g \circ f: X \to Z$ -биективное отображение.

19)Обратимость. Критерий односторонней обратимости.
Т. Критерий обратимости слева. Для того чтобы отображение $f: X \to Y$ было обратимым слева, необходимо и достаточно, чтобы f было инъективным.
Т. Критерий обратимости справа. Для того чтобы отображение $f: X \to Y$ было обратимым справа, необходимо и достаточно, чтобы f было сюръективно.
Т. Критерий обратимости. Для того чтобы отображение $f: X \to Y$ было обратимым, необходимо и достаточно, чтобы f было биективным.

20)Комбинаторика. Аксиомы комбинаторики. Число элементов в конечном множестве. Декартово произведение множеств.
Аксиомы.
1. Отрезок натурального ряда $[1,n]_N$=(1,2,3,…,n} содержит n элементов.
2.Если A и B множество и существует биективное отношение $\varphi: A \to B, mo|A| = |B|$

$|A|$-количество элементов в множестве.

3.$|\varnothing| = 0$.

Декартово произведение множества.
Декартовое произведение множества *x* и *y* называют множество обозначаемое $X \times Y$ элементами которых являются упорядоченные пары (x,y), где $x \in X$ и $y \in Y$. Под равенством понимается- $z_1=(x_1,y_1)$

$z_1, z_2 \in X \times Y$, тогда $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2)$

Т. Если X и Y- конечные множества, то $X \times Y$ - конечное множество и $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$