§1. Множество действительных чисел и его свойства.

A, B, C - множества.
$\varnothing$ - пустое множество.
a, b, c - элементы множества.
$a \in A$ - принадлежность.
$N \subset Z \subset Q \subset R$ - вхождение одного множества в другое.
$\left(r = \dfrac{p}{q}, p \in Z, q \in N\right)$
$\forall$ - "для любого" $(\forall a \in N\ a > 0)$
$\exists$ - "существует, найдется" ($\exists!$ - единственность)
$\exists! 1 \in N$
$\vee$ - "или" $(a \vee b)$
$\wedge$ - "и"
$\Rightarrow$ - "если, то"
$\Leftrightarrow$ - "эквиваленция","необходимо и достаточно"

Свойства действительных чисел :

I (аксиомы сложения)
Опр.1 $\forall a, b \in R\ \exists! a + b$ - сумма элементов a и b. Операция нахождения суммы называется сложением.
1. $\forall a, b \in R\ \ a + b = b + a$ - коммутативность
2. $\forall a, b, c \in R\ \ (a + b) + c = a + (b + c)$ - ассоциативность
3. $\exists 0 \in R\ \ \forall a \in R\ \ a + 0 = 0$
4. $\forall a \neq 0 \in R\ \ \exists(-a)\ \ a + (-a) = 0$

Сл.1 $0 \in R$ - единственный
□. $0 \in R \vee 0' \in R$
$0 + 0' \overset{I_3}{=} 0 \overset{I_1}{=} 0' + 0 \overset{I_3}{=} 0 \Rightarrow \exists! 0 \in R$ □.

II. (аксиомы умножения)
Опр.2 $\forall a, b \in R\ \exists! a \cdot b$ - произведение элементов a и b. Операция нахождения произведения - умножение.
1. $\forall a, b \in R\ \ a \cdot b = b \cdot a$ - коммутативность
2. $\forall a, b, c \in R\ \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ - ассоциативность
3. $\exists 1 \neq 0 \in R\ \forall a \in R\ \ a \cdot 1 = a$. Сл. $\exists! 1 \in R$
4. $\forall a \neq 0\ \exists\ 1/a$ - обратный для a - $a \cdot 1/a = 1$

III. (связь сложения и умножения)
1. $\forall a, b \in R\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ - дистрибутивность

IV.(аксиомы порядка)
Опр.3 $\forall a \in R\ (a > 0) \vee (a = 0) \vee (a < 0)$
Если $a > 0$, то $(-a) < 0$
1. $(a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow a + b > 0$
2. $(a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow a \cdot b > 0$

Опр.4 $\forall a, b \in R\ a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

V. (аксиомы непрерывности)
Опр.5 Отрезком $[a, b]$ с концами A, B на множестве R называют мн-во точек, удовлетв. условию $a \le c \le b$ (интервал (a, b), полуинтервал $(a, b]$)
Опр.6 Система отрезков $[a_n, b_n], n = 1, 2, 3...$ называется вложенной, т.е $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n]$, если:
$a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le ... \le ... \le b_n \le ... \le b_2 \le b_1$
1. Система вложенных отрезков мн-ва R имеет точку, общую всем этим отрезкам.

Опр.7 Система отрезков $[a_n, b_n]$ - стягивающаяся, т.е величина $(b_n - a_n) \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \ \forall n > n_\varepsilon\ \ b_n - a_n < \varepsilon$
Т. Кантера (о непрерывности мн-ва R). Вложенная система стягивающихся отрезков мн-ва R имеет общую, единственную точку для всех этих отрезков.
□. $I_1\ \exists c \in [a_n, b_n], n = 1, 2, ...$ Пусть $\exists d \neq c,\ d \in [a_n, b_n], d > c$
$\varepsilon = d - c > 0,\ \exists n_\varepsilon\ \ \forall n > n_\varepsilon\ \ b_n - a_n < \varepsilon,\ d - c < b_n - a_n$,
$d - c < \varepsilon \Rightarrow d - c = 0,\ d = c \Rightarrow c$ - единственный □.

Опр.8 R, элементы которого удовлетворяют аксиомам $I - V$ групп называется мн-вом действ. чисел, а элементы этого множества - действ. числами.
Опр.9 Иррациональным числов называется действ. число, которое не является рациональным. Обозн: T.
$Q \cup T = R,\ Q \cap T = \varnothing,\ R = R \cup \{-\infty, \infty\} = (-\infty, \infty)$
$\forall a \in R\ a > -\infty,\ \forall a \in R\ a < \infty,\ \ -\infty < \infty.$

§2. Модуль действ. числа и его свойства.

Опр.1 Модулем $a \in R$ ($|a|$) называется наибольшее a и $-a$
(1) $|a| = \max\{a, -a\}$
(2) $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \ge 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$
(3) $|a|$ - расстояние от начала координат до точки изобр. число. $a = \pm|a|$

Св.1 $|a + b| \le |a| + |b|$.
□. $\pm a \le |a|,\ \ \pm b \le |b|,\ \ \pm(a + b) \le |a| + |b| \Leftrightarrow |a + b| \le |a| + |b|$□.
Св.2 Если $a > 0,\ b > 0$ или $a < 0,\ b < 0\ \Rightarrow |ab| = ab$. Если $a > 0, b < 0$ или $a < 0,\ b > 0 \Rightarrow |ab| = -ab$.
Св.3 $||a| - |b|| \le |a - b| \le |a| + |b|$.
□. $|a - b| = |a + (-b)| \overset{\text{св.1}}{\le} |a| + |-b| = |a| + |b|$□.
Св.4 $|a| < c\ (c > 0)\ \Leftrightarrow -c < a < c$
□. $a \ge 0 \Rightarrow a < c,\ a < 0 \Rightarrow -a < c, a > -c \Rightarrow \forall a\ \ -c < a < c$.

§3. Функция (отображение). Действительные функции. Действительные переменные и их простейшие свойства.

Опр.1 Если каждому элементу x из мн-ва X ставится в соответствие по некоторому правилу и закону $f\ \exists! y \in Y$ $y = f(x)$, то говорят что на множестве X определена ф-ия $y = f(x)$ или задано отображение $f : X \to Y$.
y - образ элемента x (x - прообраз). $X = D(y)$ - ООФ.
Способы задания функций:
1. алгебраический(аналитический): $y = 1/|x|$.
2. кусочно-аналитический: $y = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \le 0 \\ 2x + 1, & \text{если } 0 < x \le 1 \\ 1/(x+1), & \text{если } 1 < x < \infty \end{cases}$
3. графический (нарисовать график, напр. $y = [x]$)

Опр.2 $f : X \to Y$ называется инъективным, если разным значениям $x \in X$ соответствуют разные $y \in Y$.
Опр.3 $f : X \to Y$ называют сюрьективным, если $\forall y \in Y\ \exists x\ y = f(x)$.
Опр.4 $f : X \to Y$ называется биективным, если оно одновременно инъективно и сюрьективно.
Опр.5 Если $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$, то $g \circ f : X \to Z$ - композиция отображений или сложная функция.
Опр.6 Если $f : X \to Y$ - биекция, то $f^{-1} : Y \to X$ - обратное отображение или обратная функция. Причем $f^{-1} \circ f \equiv 1$ ($f \circ f^{-1} \equiv 1$)
Опр.7 Действительной функцией действ. переменного x называется отображение из некоторого подмн-ва мн-ва действ. чисел в некоторое другое мн-во этого подмн-ва.
$X = D(f),\ f : R \supset X \to Y \subset R,\ y = f(x)$
Опр.8 $y = f(x)$ монотонно возрастает(убывает) в своей области определения, если
$\forall x_1, x_2 \in D(y)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\ (f(x_1) > f(x_2))$
Опр.9 Числовое мн-во X - симметрично относительно O, если $\forall x \in X\ \exists(-x) \in X$.
Опр.10 $y = f(x)$ определенная на сим. мн-ве X - четная (нечетная), если: $f(-x) = f(x)\ (f(-x) = -f(x))$
Т.1 Сумма двух четных функций - функция четная, сумма четной и нечетной функций - функция нечетная.
□. Пусть $f(x), g(x)$ - четные ф-ии. Рассмотрим $f(x) + g(x)$. Т.к. $f(-x) = f(x)$ и $g(-x) = g(x)$, то складывая равенства получим $f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x)$.
Т.е. $f(x) + g(x)$ - четная □.
Т.2 Произведение двух четных и двух нечетных функций - функция четная, произведение четной и нечетной - - функция нечетная. (Доказывается аналогично)
Опр.11. X называется ограниченным мн-вом если есть отрезок полностью содержащий это множество.
Опр.12 $y = f(x)$ - ограниченная, если ее Y - огр. мн-во.

§4. Числовые последовательности. Предел числовой числовой последовательности. Число е.

Опр.1 Отображение $f : N \to R$ называется числовой последовательностью(ЧП). $n \to x_n$ (x_n - общий член ЧП) ЧП ограничена снизу x_1.
Опр.2 ЧП (x_n) называется монотонно убывающей (возрастающей), если $\forall n \in N\ x_n > x_{n+1}\ (x_n < x_{n+1})$.
Опр.3 Окрестностью точки a радиуса $r > 0$ на числовой прямой наз-ся интервал с центром в этой точке. Обозн:
$U(a, r) = (a - r, a + r)$. Проколотая окр-ть: $\mathring{U}(a, r) = (a - r, a) \cup (a, a + r)$.
Опр.4 $a = \lim\limits_{x \to \infty} x_n : \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.
Опр.5 Последовательность, имеющая предел наз-ся сходящаяся.
Сходящиеся числовые последовательности обладают свойствами:
Т.1 Если последовательность сходится, то она имеет только один предел.
Т.2 Всякая сходящаяся последовательность ограничена.
Последовательность $x_n = \left(1 + 1/n\right)^n$ - сходится и
$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + 1/n\right)^n = e$ (число Бернулли).

§5. Предел функции в точке. Свойства функций, имеющих предел в точке. Предел на бесконечности. Бесконечные пределы.

Пусть задана $f(x)$ и $x \in \mathring{U}(x_0, r)$

Опр.1 Число A наз-ся пределом функции в т. x_0, если:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

$\mathring{U}(x_0, \delta) \Leftrightarrow 0 < |x - x_0| < \delta.$

Т.1 Если $f(x)$ имеем предел в точке, то он единственный.

□. $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A\right) \wedge \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B\right) \wedge (B > A) \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{B-A}{2} > 0$

$\exists \delta_1(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |f(x) - A| < \dfrac{B-A}{2}$ и

$\exists \delta_2(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2) \Rightarrow |f(x) - B| < \dfrac{B-A}{2}.$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}, x \in \mathring{U}(x_0, \delta),\ \dfrac{A+B}{2} < f(x) < \dfrac{A+B}{2}.$

Получили противоречие □.

Т.2 Если ф-ия $f(x)$ имеет предел в точке x_0, то $f(x)$ -
- ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

□. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Тогда $\exists \varepsilon = 1\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$

$\Rightarrow |f(x) - A| < 1$

$A - 1 < f(x) < A + 1$ - $f(x)$ - огр. в $\mathring{U}(x_0, \delta)$ □.

Т.3 Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, A \neq 0,$ то существует $\mathring{U}(x_0, \delta),$ где ф-ия сохраняет знак своего предела.

□. Пусть $A > 0,$ тогда $\varepsilon = A/2 > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Rightarrow$

$|f(x) - A| < A/2 \Rightarrow f(x) > A - A/2 = A/2 > 0.$

Пусть $A < 0,$ тогда $\varepsilon = -A/2 > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Rightarrow$

$|f(x) - A| < -A/2 \Rightarrow f(x) < A - A/2 = A/2 < 0$ □.

Т.4 Если $y = f(x)$ имеет $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, а $z = g(y)$ -
$\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = z_0$, то для $z = g(f(x))$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = z_0$.

Опр.2 Число A называется пределом на бесконечности, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A : \forall \varepsilon > 0\ \exists M(\varepsilon) > 0\ \forall x\ |x| > M \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

Опр.3 Предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ наз-ся бесконечным, если

$\forall M > 0\ \exists \delta(M) > 0\ \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x)| > M.$

Опр.4 Бесконечный предел на бесконечности: ээ.... уу...аааа...на лекциях не давали.

§6. Бесконечно малые в точке функции и их свойства. Необходимые и достаточные условия существования

Опр. $\alpha(x)$ - бесконечно малая (б.м.) ф-ия в точке x_0, если:

$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$

Т.1 Сумма двух б.м. в точке x_0 ф-ий - ф-ия б.м. в точке x_0. (методом матем. индукции теорема распространяется на любое конечное число слагаемых).

□. Пусть $\left(\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0\right) \wedge \left(\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0\right)$, тогда пусть

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists \delta_1(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon/2 \\ \exists \delta_2(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2) \Rightarrow |\beta(x)| < \varepsilon/2 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}\ \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Rightarrow |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| +$
$+ |\beta(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$ □.

Т.2 Произведение функции б.м. на функцию ограниченную в точке x_0 - функция б.м. в точке x_0.

□. Пусть $\alpha(x)$ - б.м. в точке x_0 функция, а $f(x)$ - огран.

Тогда для $f(x) : \exists M > 0\ \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |f(x)| \leq M$, а для

$\alpha(x) : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon/M,$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\},\ x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$. Пусть $g(x) = \alpha(x) f(x),$ тогда
$|g(x)| = |\alpha(x) f(x)| = |\alpha(x)||f(x)| < \varepsilon/M \cdot M = \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x)$ - б.м. в точке x_0 □.

Т.3 Произведение любого числа б.м. функций в точке x_0 - функция б.м. в этой точке.

Т.4 (критерий существования предела функции в точке)

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) = A + \alpha(x)\right)$, где $\alpha(x)$ - б.м функция.

□. 1.(необходимость)

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,\ \alpha(x) = f(x) - A,\ f(x) = A + \alpha(x),$
$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$

2.(достаточность)

Пусть $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) = A + \alpha(x) \wedge \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0,$

$|\alpha(x)| < \varepsilon,\ \alpha(x) = f(x) - A,\ |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A.$

□.

§7. Арифметические операции над пределами.

Утв.1 Если $f(x) = C,$ то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C.$

Т.1 Если $f(x)$ имеет $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,$ а $g(x)$ - $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B,$ то $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B.$

□. Т.к. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,$ то $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ $f(x) = A + \alpha(x),$
$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$

Т.к. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B,$ то $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2)$ $g(x) = B + \beta(x),$

$\lim\limits_{x \to x_0} b(x) = 0.$ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ $f(x) + g(x) =$
$= A + B + \gamma(x),$ где $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x),$ $\lim\limits_{x \to x_0} \gamma(x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$ □.

Т.2 Если $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \wedge \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B\right) \Rightarrow$
$\left(\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B\right).$

□. $f(x) = A + \alpha(x),\ g(x) = B + \beta(x),$
$f(x) \cdot g(x) = (A + f(x)) \cdot (B + \beta(x)) =$
$= A \cdot B + \overbrace{B\alpha(x) + A\beta(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x)}^{\text{бесконечно малая}} = A \cdot B + \gamma(x),$ где
$\gamma(x)$ - б.м. в т. x_0. Т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$ □.

Сл. Постоянную (С) можно выносить за знак предела:
$\lim\limits_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim\limits_{x \to x_0} f(x).$

Т.3 Если $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \wedge \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B \wedge B \neq 0\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}.$

□. $\dfrac{1}{g(x)}$ - ограничена в $\mathring{U}(x_0, \delta),$

$\varepsilon = \dfrac{|B|}{2} > 0\ \exists \delta(\varepsilon) >\ \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Rightarrow |g(x) - B| < \dfrac{|B|}{2}.$

$\dfrac{|B|}{2} < |g(x) - B| > B - |g(x)|,\ \dfrac{1}{|g(x)|} < \dfrac{2}{|B|},\ |g(x)| > \dfrac{|B|}{2},$

$\dfrac{1}{|g(x)|}$ - ограничена в $\mathring{U}(x_0, \delta),$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{A}{B} =$
$= \dfrac{(A + \alpha(x)) \cdot B - A \cdot (B + \beta(x))}{g(x) \cdot B} =$
$= \overbrace{\dfrac{1}{g(x) \cdot B}(\alpha(x) \cdot B - \beta(c) \cdot A)}^{\text{бесконечно малая}}.$ Следовательно, по критерию
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ □.

§8. Предельный переход в неравенствах.

Т.1 Если $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \wedge \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B \wedge A < B\right),$ то $\exists \mathring{U}(x_0, \delta)$ где $f(x) < g(x).$

□. В силу непрерывности мн-ва R : $A < C < B.$

$\varepsilon = C - A > 0,\ \exists \delta_1(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |f(x) - A| < C - A$
$\Rightarrow f(x) < A + C - A, f(x) < C,$

$\varepsilon = B - C > 0,\ \exists \delta_2(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2) \Rightarrow |g(x) - B| < B - C$

$\Rightarrow g(x) > B - (B - C), g(x) > C,\ \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}, x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$
$\Rightarrow f(x) < C < g(x)$ □.

Т.2 Если $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ $(f(x) \leq g(x) \leq \varphi(x)) \wedge$
$\wedge \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)\right).$

□. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Тогда $\varepsilon > 0 \Rightarrow \delta_1, \delta_2,$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}, x \in \mathring{U}(x_0, \delta),\ |f(x) - A| < \varepsilon, |\varphi(x) - A| < \varepsilon.$
$A - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq \varphi(x) < A + \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$ □.

Т.3 (о предельном переходе в неравенствах)
Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B,$ то:
1)если $f(x) > g(x),$ то $A \geq B,$ 2)если $f(x) \geq g(x),$ то $A \geq B,$
3)если $f(x) > B,$ то $A \geq B,$ 4) если $f(x) \geq B,$ то $A \geq B.$

□. 1) Пусть $A < B \overset{\text{Т.1}}{\Rightarrow} f(x) < g(x)$ - противоречие.

2) Пусть $A < B \overset{\text{Т.1}}{\Rightarrow} f(x) < g(x)$ - противоречие.
3) $B = g(x),$ 4) $B = g(x)$ □.

§9. Односторонние пределы. Необходимое и достаточное условия существования предела в точке.

Пусть $f(x)$ определена в $U(x_0,\delta)$.

Опр.1 Число $A=\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ наз-ся правым односторонним пределом $(x>x_0)$, если:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x\ x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow \left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$

Опр.2 Число $A=\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ наз-ся левым односторонним пределом $(x<x_0)$, если:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x\ x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow \left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$

Т.(необходимое и достаточное условие существования предела функции в точке)

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=A\right)\Leftrightarrow\left(\lim_{x\to x_0+} f(x)=\lim_{x\to x_0-} f(x)=A\right)$$

□. 1)необходимость

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A:\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x\ 0<\left|x-x_0\right|<\delta$

$\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$

$$0<\left|x-x_0\right|<\delta\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_0-\delta<x<x_0\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\\ x_0<x<x_0+\delta\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\end{matrix}\right|\Rightarrow$$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=A.$

2) достаточность

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=A.$ Пусть $\varepsilon>0,$ тогда

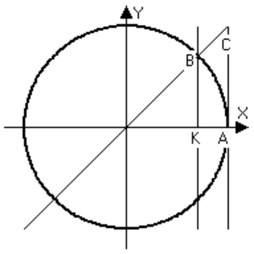
$\exists\delta_1(\varepsilon)>0\ \forall x\ x_0<x<x_0+\delta_1\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$

$\exists\delta_2(\varepsilon)>0\ \forall x\ x_0-\delta_2<x<x_0\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$

$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\},\ 0<\left|x-x_0\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon,$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ □.

§10. Первый замечательный предел.



Т. (о первом замечательном пределе).

Существует $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0}$.

□. 1) $0<x<\pi/2,\ S_{\square OBA}<S_{\square OBA}<S_{\square OCA},$

$S_{\square OBA}=\frac{1}{2}OA\cdot BK=\frac{1}{2}R^2\sin x,\ S_{\square OBA}=\frac{1}{2}R^2x,$

$S_{\square OCA}=\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x\Rightarrow\sin x<x<\operatorname{tg}x\Rightarrow 1<x/\sin x<1/\cos x\Rightarrow$

$\Rightarrow\underline{\cos x<\sin x/x<1},\ \lim\limits_{x\to 0+}1=1,$

$\lim\limits_{x\to 0-}\cos x=1:\varepsilon>0,\ \delta(\varepsilon)>0\ \ 0<x<\delta\Rightarrow\left|\cos x-1\right|<\varepsilon\Rightarrow$

$\Rightarrow 1-\cos x<\varepsilon\Rightarrow\sin x/2<\sqrt{\varepsilon/2},\ \sin x/2<x/2<\sqrt{\varepsilon/2},\ x<\sqrt{2\varepsilon},$

$\delta=\sqrt{2\varepsilon},$

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0+}1=1\\ \lim\limits_{x\to 0-}\cos x=1\end{matrix}\right|\Rightarrow\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

2) $-\pi/2<x<0,\ \ \lim\limits_{x\to 0-}=\left|\begin{matrix}t=-x,\\ t\to 0+\end{matrix}\right|=\lim\limits_{t\to 0+}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim\limits_{t\to 0+}\frac{\sin t}{t}=1$ (2)

Из (1) и (2) следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ □.

Другие замечательные пределы:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1,\ \ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin}{x}=1,\ \ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1}$$

§11. Второй замечательный предел и связанные с ним пределы.

Т. (1^∞) Существует предел $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+1/x\right)^x=e}$ (1) - второй замечательный предел.

Сл.1 $(1^\infty)\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{1/x}=e$

Сл.2 $\left(0/0\right)$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a\left(1+x\right)}{x}=\frac{1}{\ln a}}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}=1.$

(2) - третий замечательный предел

Сл.3 $\left(0/0\right)$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a}\ \Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$

четвертый замечательный предел

Сл.4 $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1+x\right)^\alpha-1}{x}=\alpha}$ – пятый замечательный предел.

§12. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке.

Пусть задана $f(x)\ D(y),\ x_0\in D(y).$

Опр.1 $f(x)$ - непрерывна в точке x_0 если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$ т.е.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x\in U(x_0,\delta)\Rightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon.$

Опр.2 $f(x)$ - непрерывна на мн-ве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Т.1 Если функции $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывны в т. x_0 и $g(x)\neq 0,$ то непрерывны следующие функции.

1) $f(x)\pm g(x),$ 2) $f(x)\cdot g(x),$ 3) $\frac{f(x)}{g(x)}.$

□. 1) $\varphi(x)=f(x)+g(x),\ \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)+g(x_0)=\varphi(x_0).$

2) $\varphi(x)=g(x)\cdot f(x),\ \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot f(x)=$

$=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=g(x_0)\cdot f(x_0)=\varphi(x_0).$

3) $\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\varphi(x_0)$ □.

Т.2 (о непрерывности сложной функции)

Если $y=f(x)$ - непрерывна в точке $x_0,\ z=g(y)$ -

- непрерывна в точке $y_0=f(x_0),$ то функция

$z=g(f(x))=\Phi(x)$ - непрерывна в точке x_0.

$\lim\limits_{x\to x_0}\Phi(x)=g(f(x_0))=\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=g\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right).$

□. Пусть $\varepsilon>0,\ z=g(x)$ - непрерывна в точке $y_0=f(x_0),$

тогда $\exists\eta(\varepsilon)>0\ \forall y\ \left|y-y_0\right|<\eta\Rightarrow\left|g(y)-g(y_0)\right|<\varepsilon.$ А т.к.

$y=f(x)$ - непрерывна в точке $x_0\Rightarrow\ \eta>0$,

$\exists\delta(\eta)>0\ \forall x\ \left|x-x_0\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|<\eta\Rightarrow$

$\Rightarrow\left|g(f(x))-g(f(x_0))\right|<\varepsilon.$ Следовательно $z=g(f(x))$ -

- непрерывна в точке x_0.

§13 Классификация точек разрыва функции одной переменной.

Пусть задана $f(x)$ и $x_0\in D(f).$

Опр.1 Ф-ия $f(x)$ называется разрывной в точке $x_0,$ если она не является в этой точке непрерывой. Т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\neq f(x_0).$

Опр.2 Точка x_0 - точка разрыва 1-го рода ф-ии $f(x),$ если:

а) $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ A\neq f(x_0)$ - точка устранимого разрыва.

б) $\exists\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ - точка неустранимого разрыва.

$h(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ - скачок функции в точке x_0.

Опр.3 Точка x_0 - точка разрыва 2-го рода, если $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ не существует или бесконечен.

§14. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Опр.1 $y=f(x)$ - непрерывна на $\left[a,b\right],$ если она непрерына в каждой точке $\left(a,b\right),$ в т.a - непр. справа, в т.b - слева.

Т.1 Если $f(x)$ - непрерывна на $\left[a,b\right]$ и $f(a)\cdot f(b)<0,$ то $\exists c\in\left[a,b\right]\ f(c)=0.$

Т.2 (первая теорема Вейерштрасса)

Если $f(x)$ - непрерывна на $\left[a,b\right],$ то она на этом отрезке ограничена. $\exists A,B\ (A<B)\ \forall x\in\left[a,b\right]\Rightarrow A\le f(x)\le B.$

Т.3 (вторая теорема Вейештрасса)

Непрерывная на $\left[a,b\right]$ ф-ия достигает на этом отрезке своих верхних и нижних граней, которые наз-ся соответсвенно наибольшее и наименьшее значения функции на $\left[a,b\right].$

Обозн: $\inf\limits_{[a,b]} f(x)=A,\ \sup\limits_{[a,b]} f(x)=B.$

$\exists\xi,\eta\in\left[a,b\right]\ \ A=f(\xi)=\min\limits_{[a,b]} f(x),\ B=f(\eta)=\max\limits_{[a,b]} f(x).$

□. По Т.2 $f(x)$ - ограничена на $\left[a,b\right],$ т.е.

$\exists A,B\ (A<B)\ \forall x\in\left[a,b\right]\Rightarrow A\le f(x)\le B.$

Пусть $f(x)<B.$ Рассмотрим $\varphi(x)=\frac{1}{B-f(x)}>0.$ $\varphi(x)$ -

- непрерывна на $\left[a,b\right].$

$\exists B_1>0\ \forall x\in\left[a,b\right]\ \varphi(x)\le B_1,\ \frac{1}{B-f(x)}\le B_1\ (B_1>0),$

$B-f(x)\ge 1/B_1,\ f(x)\le B-1/B_1<B$ - противоречие (B - не верхняя часть. Следовательно, $f(x)$ достигает своей верхней грани $B,$ т.е. $\exists\eta\in\left[a,b\right]\ f(\eta)=B=\max\limits_{[0,B]} f(x)$ □.

§15. Обратная функция и ее непрерывность.

Т. Если $f(x)$:

1) определена на $\left[a,b\right],\ f(a)=c,\ f(b)=d,$

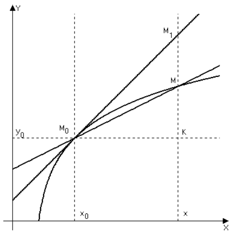
2) монотонно возрастает(убывает) на $\left[a,b\right]\Rightarrow$

$\Rightarrow f(a)\le f(x)\le f(b)\ \left(f(b)\le f(x)\le f(a)\right),$

3) непрерывна на $\left[a,b\right],$

то на $\left[c,d\right]$ определена обратная функция $f^{-1}(y),$ монотонно возрастающая (убывающая) и непрерывная на $\left[c,d\right].$

§1. Определение производной. Геометрический и механический смысл производной.



Задача 1. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, $y = f(x_0)$.
$\angle MM_0K = \beta$, $\angle M_1M_0K = \alpha$, $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$.
Опр.1 Предельное положение секущей M_0M при $\Delta x \to 0$ называется касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0.
Рассмотрим □M_0KM. $MK = y - y_0 = \Delta y$, $M_0K = \Delta x$.

$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\beta \to \alpha)}}{\to} \operatorname{tg}\alpha = k$, $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (1).

Уравнение касательной: $y - y_0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\left(x - x_0\right)$ (2).

Задача 2. Тело движется прямолинейно $S = s(t)$ из точки *A*. Найти мгновенную скорость тела в точке *B*.
В момент t_0 тело находилось в точке *A*. В момент t - в т.*B*.

$t - t_0 = \Delta t$, $s(t) - s(t_0) = \Delta S$, $v_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$,

$v_{\text{мгн}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ (3).

Пусть $y = f(x)$ - определена и непрерывна в окр. точки *x*.
Дадим *x* приращение Δx, так чтобы $x + \Delta x \in U(x, \varepsilon)$.
$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ - приращение функции в точке *x*.
Опр.2 Конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что $\Delta x \to 0$, наз-ся производной ф-ии $f(x)$ в точке *x*, а ф-ия - дифференцируемая в точке *x*. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx} = y'(x)$.

Т. Если $y = f(x)$ - дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

$\operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0)$.

Геометрический смысл производной:
Если $y = f(x)$ - дифференцируема в точке x_0, то к графику функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ $(y_0 = f(x_0))$ можно провести касательную, угловой коэффициент которой будет равен значению производной в точке x_0.

$\boxed{y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)}$ - ур-е касательной к кривой в т.M_0

$\boxed{y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)}\left(x - x_0\right)}$ - ур-е нормали к кривой в т.M_0

Механический смысл производной:
Производная - это скорость изменения функции в т.M_0.

§2.Два определения дифференцируемой в точке функции и их эквивалентность. Дифференциал 1-го порядка и его геометрический смысл.

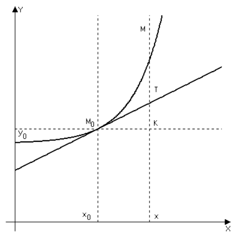
Опр.1 Функция $y = f(x)$ - дифференцируема в точке x_0, если у нее в этой точке есть производная.
Опр.2 Функция $y = f(x)$ - дифференцируема в точке x_0, если ее приращение в этой точке можно представить в виде: $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x$. *A* не зависит от Δx, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x_0, \Delta x) = 0$ (б.м.).
Т. Определения 1, 2 о дифференцировании функции в точке эквивалентны.
□. 1) $(1 \Rightarrow 2)$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) + \alpha(\Delta x)$,

$\Delta y = y'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, $A = y'(x_0) \Rightarrow$ функция дифференцируема в смысле опр.2
2) $(2 \Rightarrow 1)$

$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$,

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(A + \alpha(\Delta x)\right) = A = y'(x_0)$ - производная существует, следовательно,
$y = f(x)$ - дифференцируема в смысле опр.1 □.
Опр.3 Главная линейная относительно приращения аргумента часть приращения дифференцируемой ф-ии называют дифференциалом 1-го порядка или 1-м дифференциалом этой функции.
$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, $A = y'(x_0)$,
$\boxed{dy = A \cdot \Delta x = y'(x_0) \cdot \Delta x}$ (2)
$dx = \Delta x$, $dy = y'(x_0) \cdot dx$



$MK = \Delta y$, $TK = y'(x_0) \cdot \Delta x = dy$.
Геометрический смысл дифференциала: дифференциал функции - это приращение точек касательной и кривой $y = f(x)$ в точке M_0.

$\Delta y = dy + \underbrace{d(\Delta x) \cdot \Delta x}_{\text{малое число}}$, $f(x) - f(x_0) = dy \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \approx f(x_0) + dy$ (3)
(для приближенного вычисления значений функций).

§3. Производные основных элементарных функций.

1) $y = x^n, n \in Q$.
Дадим *x* приращение Δx.

$\Delta y = \left(x + \Delta x\right)^n - x^n = x^n\left(\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^n - 1\right)$,

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x^n\left(\left(1 + \Delta x/x\right)^n - 1\right)}{\Delta x/x \cdot x} \overset{\substack{\text{5-й зам.} \\ \text{предел}}}{=} nx^{n-1}$.

2) $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
Дадим *x* приращение Δx.

$\Delta y = \log_a\left(x + \Delta x\right) - \log_a x = \log_a\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$,

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\log_a\left(1 + \Delta x/x\right)}{\Delta x/x \cdot x} \overset{\substack{\text{3-й зам.} \\ \text{предел}}}{=} \dfrac{1}{x \ln a}$.

3) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
Дадим *x* приращение Δx.
$\Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)$,

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} \overset{\substack{\text{4-й зам.} \\ \text{предел}}}{=} a^x \ln a$.

4) $y = \sin x$. Дадим *x* приращение Δx.

$\Delta y = \sin\left(x + \Delta x\right) - \sin x = 2\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$,

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cos\left(x + \Delta x/2\right)\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} \overset{\substack{\text{1-й зам.} \\ \text{предел}}}{=} \cos x$.

5) $y = \cos x$. Дадим *x* приращение Δx.

$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$,

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin\left(x + \Delta x/2\right)\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} = -\sin x$.

§4. Правила дифференцирования.

Утв.1 Производная постоянной равна нулю:
$f(x)=C,\ \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0,$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0\Rightarrow C'=0$

Т.1 Если $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке $x,$ то их сумма и разность $\left(u(x)\pm v(x)\right)'=u'\pm v'$ (1).

Т.2 Если $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке $x,$ то их произведение $\left(u(x)\cdot v(x)\right)'=u'v+uv'$ (2).

□. Дадим x приращение Δx.
$u(x)=u,\ v(x)=v,\ \Delta u=u(x+\Delta x)-u,\ u(x+\Delta x)=\Delta u+u,$
$\Delta v=v(x+\Delta x)-v,$ м$(x+\Delta x)=\Delta v+v.$
Рассмотрим $z=u(x)\cdot v(x)$.
$\Delta z=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u\cdot v=$
$u\cdot v+v\cdot\Delta u+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v.$

$$(u\cdot v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\cdot\Delta u+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta v}+$$
$$+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=u'\cdot v+u\cdot v'\ □.$$

Т.3 Если $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке $x,$ то их частно $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ (3).

§5. Дифференцирование обратной и сложной функции.

Т.1 Если $y=f(x)$ монотонна и дифференцируема в окр-ти точки x_0 и ее производная $y'(x_0)\neq 0,$ то обратная функция $x=f^{-1}(y)$ дифференцируема в точке $y_0=f(x_0)$ и ее производная $\boxed{x'(y_0)=\dfrac{1}{y'(x_0)}}$ (1).

□. Дадим y_0 приращение Δy.
$\Delta x=x(x_0+\Delta x)-x(y_0),$

$$x'(y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta y/\Delta x}=\frac{1}{y'(x_0)}\ □.$$

Т.2 (о дифференцировании сложной функции).
Если $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а ф-ия $z=g(y)$ дифференцируема в точке $y_0=f(x_0),$ то сложная функция $z=g\left(f(x)\right)$ дифференцируема в точке x_0 и ее производная $\boxed{z'(x_0)=g(y_0)\cdot y'(x_0)}$ (2).

□. Дадим x_0 приращение Δx. Тогда y получит приращение $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=y-y_0,$ а $z=g(y)$ - приращение $\Delta z=g(y_0+\Delta y)-g(y_0),$

$$z'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=z'(y_0)\cdot y'(x_0)\ □.$$

§6. Метод логарифмического дифференцирования.

$y=u(x)^{v(x)}$. Прологарифмируем обе части, получим:
$\ln y=v(x)\ln u(x)$. Продифференцируем равенство:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x),$$
$$y'=y\left(v'(x)\cdot\ln u(x)+\frac{v(x)}{u(x)}\cdot u'(x)\right),$$
$$y'=u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\cdot\ln u(x)+\frac{v(x)}{u(x)}\cdot u'(x)\right).$$

§7. Производные высших порядков. Бином Ньютона.

Опр.1 Второй производной или производной 2-го порядка ф-ии $y=f(x)$ наз-ся производная ее первой производной.

$y''=\left(y'\right)',\ y'''=\left(y''\right)',\ y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$ или $y'=\dfrac{dy}{dx},\ y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}.$

1) $y=a^x,$
$y'=a^x\ln a,\ y''=a^x\ln^2 a,\ \dots,\ \boxed{y^{(n)}=a^x\ln^n a}$

2) $y=\ln x,$
$y'=\dfrac{1}{x},\ y''=-\dfrac{1}{x^2},\ y'''=\dfrac{1\cdot 2}{x^3},\ y^{(4)}=-\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{x^2},\ \dots,$

$$\boxed{y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}}$$

3) $y=\sin x,$
$y'=\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right),\ y''=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{2}+x\right),$
$\dots,\ \boxed{y^{(n)}=\sin\left(n\cdot\dfrac{\pi}{2}+x\right)}$

4) $y=\cos x,$
Аналогично пункту 3 получаем: $\boxed{y^{(n)}=\cos\left(n\cdot\dfrac{\pi}{2}+x\right)}$

Опр.2 Биномом Ньютона называет n-ая степень двучлена: $\left(x+a\right)^n$.

$(x+a)^n=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\dots+A_kx^{n-k}+\dots+A_{n-1}x+A_n$

Продифференцируем обе части равенства:
$n(x+a)^{n-1}=nx^{n-1}+A_1(n-1)x^{n-2}+A_2(n-2)x^{n-3}+\dots+$
$+A_k(n-k)x^{n-k-1}+\dots+A_{n-1}.$

Еще раз продифференцируем обе части неравенства:
$n(n-1)(x+a)^{n-2}=n(n-1)x^{n-2}+A_1(n-1)(n-2)x^{x-3}+\dots$
$\dots+(n-k)(n-k-1)A_kx^{n-k-2}+\dots+2A_{n-2}.$

Дифференцируя равенство k-ый раз, получим:
$n(n-1)\dots(n-k+1)(x+a)^{n-k}=n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}+$
$+A_1(n-1)(n-2)\dots(n-k-2)x^{n-k-1}+\dots+A_k(n-k)!$

n-ое дифференцирование:
$n!=n!A_n,$
$a^n=A_n,\ na^{n-1}=A_{n-1},\ n(n-1)\cdot a^{n-2}=2A_{n-2},\dots,$
$n(n-1)\dots(n-k+1)a^{n-k}=A_k(n-k)!$

$$A_n=a_n,\ A_{n-1}=na^{n-1},\ A_{n-2}=\frac{n(n-1)!}{2}a^{n-2},$$
$$A_k=\frac{n(n-1)(n-k+1)}{(n-k)!}a^{n-k},\ A_k=C_n^{n-k}a^{n-k},$$
$$C_n^{n-k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n-k)!}=C_n^k=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!},$$
$$C_n^{n-1}=\frac{n}{(n-1)!}=n=C_n^1,$$

$(x+a)^n=C_n^0x^na^0+C_n^{n-1}x^{n-1}a^1+\dots+C_n^kx^{n-k}a^k+\dots+C_n^nx^0a^n$

$\boxed{(x+a)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx^{n-k}a^k}$ - бином Ньютона.

§8. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Опр. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на $\left[\alpha,\beta\right],$ ф-ия $x(t)$ монотонна и имеет обратную ф-ию $t(x)$, то сложная ф-ия $F(x)=y\left(t(x)\right)$ наз-ся параметрически заданной ф-ией.
$F(x)=y\left(t(x)\right)$ - параметрически заданная ф-ия.

(1)$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(y)\end{cases},\ t\in\left[\alpha,b\right]$

Т. Если $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы на некотором отрезке, то параметрически заданная функция $y\left(t(x)\right)$ диф-ма и производная ее равна $y'_x=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}$ (2)

□. $y'_x=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{y'_t}{x'_t}$ □.

$$y''_{xx}=\left(y'_x\right)'_x=y''_{xt}\cdot t'_x=\left(y'_x\right)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=$$
$$=\boxed{\frac{y''_{tt}\cdot x'_t-x''_{tt}\cdot y'_t}{\left(x'_t\right)^3}}\ (3)$$

§9. Основные теоремы дифференциального исчисления.

п.1 Теоремы Ролля и Коши

Т.1 (Ролля)

Если $y = f(x)$: 1) определена и непрерна на $[a,b]$, 2) дифференцируема на (a,b), 3) $f(a) = f(b)$, то найдется точка с на (a,b) такая, что $f'(c) = 0$.

Т.2 (Коши)

Если $f(x)$ и $g(x)$:
1) определены и непрерывна на $[a,b]$,
2) дифференцируемы на (a,b), 3) $g(x) \neq 0$ на $[a,b]$,
то существует точка $c \in (a,b)$, такая, что

справедлива формула: $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}}$ (1)

п.2 Теорема Лагранжа и ее геометрический смысл.

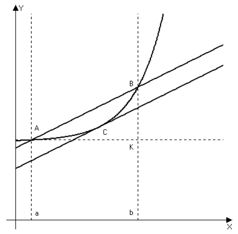
Т. Если $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), то существует точка c, такая, что справедливо:

$\boxed{f(b)-f(a) = f'(c)\cdot(b-a)}$ (2)

□. Рассм. вспомогательную ф-ию $F(x) = f(x) - \lambda x$.
$F(x)$ - определена и непрерывна на $[a,b]$.
$F(x)$ - диф. на (a,b), как разность диф. функций и $F'(x) = f'(x) - \lambda$. Подберем λ так, чтобы $F(a) = F(b)$
$F(a) = f(a) - \lambda a = F(b) = f(b) - \lambda b$,
$\lambda(b-a) = f(b) - f(a)$, $\lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
При найденном λ для ф-ии $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля и по ней существует т.c, в которой $F'(c) = 0$, т.е. $f'(c) - \lambda = 0$, $\lambda = f'(c)$.
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ □.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа.

$C(c, f(c))$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{KB}{AK} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$



§10. Условия постоянства и монотонности функций на интервале.

Т.1 Если $f(x)$ - диф. на (a,b) и $f'(x) \equiv 0$ на (a,b), то $f(x) = const$ ($f(x)$ - постоянная)

□. Пусть $x_1 < x_2$ и $x_1, x_2 \in (a,b)$. Тогда на $[x_1, x_2]$ выполнены все условия Т. Лагранжа, т.е существует точка $c \in (x_1, x_2)$
$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, $f'(c) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$, т.е. $f(x) = const$ □.

Т.2 (условие возрастания (убывания) функции на интервале)

Если $f(x)$ - диф. на (a,b) и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на (a,b).

□. (убывание)

Пусть x_1, x_2 - прозвольные точки принадлежащие (a,b) и $x_1 < x_2$. По условию $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a,b)$, тогда на $[x_1, x_2]$ для $f(x)$ выполнены все условия Т. Лагранжа. Следовательно, $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) < 0$, где $c \in (x_1, x_2) \Rightarrow$ $f(x_2) < f(x_1)$. Т.е $f(x)$ убывает на (a,b) по определению □.

§11. Экстремум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума.

Пусть задана $y = f(x)$ и x_0 - внутренняя точка области определения.

Опр.1 В точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум(минимум) при условии, что $\forall x \in U(x_0, \varepsilon)$ $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$

Максимум и минимум $\equiv$ экстремум

Т.1 (необходимое условие экстремума)

Если $y = f(x)$ имеет экстремум в точку x_0, то $f'(x_0) = 0$ или не существует.

Опр.2 Точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует, называются критическими (станционарными, подозрительными) по экстремуму.

Т.2 (1-ое достаточное условие экстремума)

Пусть $y = f(x)$ - диф. в окрестности критической по экстрему точке, кроме может быть самой этой точки.
Тогда: 1) если при переходе черех точку x_0 $f'(x)$ меняет знак, то в точке x_0 есть экстремум, а именно:
а) максимум, если при $x < x_0$ $f'(x) > 0$ и при $x > x_0$ $f'(x) < 0$,
б) минимум, если при $x < x_0$ $f'(x) < 0$ и при $x < x_0$ $f'(x) > 0$.

□. 1) (минимум) Пусть при переходе через x_0 $f'(x)$ меняет знак $-/+$, тогда по т. Лагранжа:
$x < c < x_0$, $f'(c) < 0 \Rightarrow f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x) < 0$
Значит $f(x_0) < f(x)$,
$x_0 < c < x$, $f'(c) > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) > 0$
Значит $f(x) > f(x_0)$. Следовательно по опр.1 в т.x_0 есть экстремум, а именно минимум.
2) Пусть при переходе через т.x_0 $f'(x) > 0$ постоянно, т.е $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \varepsilon)$ $f'(x) > 0$. Тогда по т. Лагранжа:
$x < c < x_0$, $f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x) > 0 \Rightarrow f(x_0) > f(x)$,
$x_0 < c < x$, $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$.
Следовательно по опр.1 экстремума в т.x_0 НЕТ □.

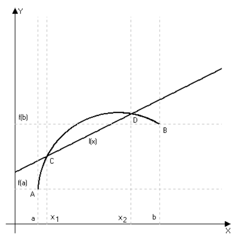
Т.3 (2-ое достаточное условие экстремума)

Если $y = f(x)$ имеет $f'(x)$ и $f''(x)$ в $U(x_0, \varepsilon)$ и $f''(x) \neq 0$, то
1) если $f''(x_0) > 0$, то в т.x_0 - минимум,
2) если $f''(x_0) < 0$, то в т.x_0 - максимум.

§12. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Пусть $y = f(x)$ - непрерывна на $[a,b]$, тогда по 2-ой теореме Вейерштрасса у нее есть на этом отрезке наибольшее и наменьшее значения. Для нахождения наибольшего и наименьшего значения необходимо:
1) найти критические по экстремуму точки из (a,b),
2) вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка $[a,b]$,
3) из полученных значений выбрать самое большое и самое маленькое.

§13. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точка перегиба.



Пусть $y = f(x)$ - непрерывна $[a,b]$, $a < x_1 < x_2 < b$,
$A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(x_1, f(x_1)), D(x_2, f(x_2))$.

Уравнение $CD: \dfrac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$,

$$y = \frac{(x - x_1)(f(x_2) - f(x_1))}{x_2 - x_1} + f(x_1),$$

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1},$$

$$\boxed{l(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}} \quad (1)$$

Опр.1 На (x_1, x_2) график ф-ии $y = f(x)$ имеет выпуклость вверх (вниз), если $\forall x \in (x_1, x_2)$ $l(x) \le f(x)$ $(l(x) \ge f(x))$.

Т.1 Если ф-ия $y = f(x)$ имеет $f'(x)$ и $f''(x)$ на (a,b) и $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$, то на (a,b) ф-ия $f(x)$ имеет выпуклость вниз (вверх).

Опр.2 Точка x_0, при переходе через которую график ф-ии $y = f(x)$ сменяет направление выпуклости, называется точкой перегиба ф-ии $f(x)$, а точка $M_0(x_0, f(x_0))$ - точкой перегиба графика функции.

Т.2 (необходимое условие перегиба)
Если в точке x_0 функция имеет перегиб, то $f''(x) = 0$ или не существует.

Опр.3 Точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует называются критическими по перегибу.

Т.3 (достаточное условие перегиба)
Для того чтобы в точке x_0, критической по перегибу, ф-ия $f(x)$ имела перегиб, достаточно, чтобы при переходе через эту точку $f''(x)$ меняла знак. Если $f''(x)$ знака не меняет, значит в т.x_0 перегиба НЕТ.

§14. Асимптоты графика функции. Полное исследование функции и построение ее графика.

Опр.1 Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика ф-ии $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$.

Опр.2 Прямая $y = kx + b$ - невертикальная асимптота графика функции $y = f(x)$, если $\alpha(x) = f(x) - (kx + b)$ - б.м. функция при $x \to \infty$.

Т. Если $y = kx + b$ - невертикальная асимптота графика ф-ии $y = f(x)$, то $\boxed{k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x},\ b = \lim\limits_{x \to \infty}(f(x) - kx)}$ (1).

Полное исследование функции и построение графика проводится по следующей схеме:
1. Находим ООФ и вертикальные асимптоты.
2. Точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Четность, нечетность, периодичность функции.
4-5. Промежутки монотонности, выпуклости, экстремумы и перегибы.
6. Невертикальные асимптоты графика функции.
7. Построение графика.

§15. Раскрытие неопределенностей. Правила Лопиталя.

п.1 $\left(0/0,\right.$ первое правило Лопиталя$\left.\right)$.

Т.1 Если $f(x)$ и $g(x)$:
1) определены и непрерывны на (a,b),
2) существует предел $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$,
3) $g'(x) \ne 0$ на (a,b),
4) существует $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$,

тогда существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$.

п.2 $\left(\infty/\infty,\right.$ второе правило Лопиталя$\left.\right)$

Т.2 Если $f(x)$ и $g(x)$:
1) определены и непрерывны на (a,b),
2) существует предел $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = \infty$,
3) $g'(x) \ne 0$ на (a,b),
4) существует $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$,

тогда существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$.

п.3 Раскрытие неопределенностей $1^\infty, 0^\infty, \infty^0$

$\lim\limits_{x \to a}(f(x))^{g(x)}$, $y = (f(x))^{g(x)}$,

$\ln y = g(x)\ln f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} \ln y = K \Rightarrow \lim\limits_{x \to a}(f(x))^{g(x)} = e^K$

Неопределенности вида $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ сводятся к неопределенностям $0/0$ или ∞/∞ с помощью алгебраических преобразований.

§1. Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла.

Опр.1 Диф. функция $F(x)$ называется первообразной для ф-ии $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

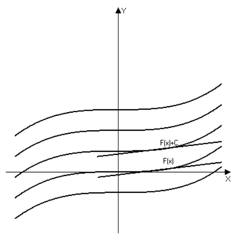
Т.1 1) Если ф-ия $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, то ф-ия $F(x) + C$ также является первообразной для $f(x)$.
2) Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ - первообразные для $f(x)$, то разность $F(x) - \Phi(x) = C$ (постоянная)

□. 1) $(F(x))' = f(x)$, $(F(x) + C)' = f(x) \Rightarrow F(x) + C$ -
- первообразная для $f(x)$,
2) Пусть $\Phi(x)$ - первообразная для $f(x)$
$(F(x) - \Phi(x))' = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$ по условию постоянства функции это означает, что $F(x) - \Phi(x) = C, F(x) = \Phi(x) + C$
□.

Опр.2 Множество всех первообразных функции $f(x)$ есть неопределенный интеграл от этой функции.

Обозн: $\int \underbrace{f(x)dx}_{\text{подынтегральное выражение}} = F(x) + X,\ F'(x) = f(x)$ (1)

Геометрический смысл неопределенного интеграла:



Свойства неопределенных интегралов :

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$

□. По опр.1 $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$,
$d\int f(x)dx = d(F(x) + C) = f(x)dx$ □.

2. $\int d(F(x)) = F(x) + C$

3. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$ (2)

□. Пусть $(F_1(x))' = f_1(x)$, $(F_2(x))' = f_2(x)$, тогда
$\int f_1(x)dx = F_1(x) + C$, $\int f_2(x)dx = F_2(x) + C$,
$F_1(x) + F_2(x)$ - первообразная для $f_1(x) + f_2(x)$.
По определению:
$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = F_1(x) + F_2(x) + C$,
$\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx = F_1(x) + F_2(x) + (C + C) \Rightarrow$
$\Rightarrow \int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$ □.

4. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)$, $C = const$
(доказывается аналогично свойству 3).

§2. Таблица основных интегралов.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq 1$ 2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ \int e^x dx = e^x + C$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ 5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ 7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

□. 1. 1) $x > 0,\ \left(\ln|x| + C\right)' = \left(\ln x + C\right)' = \frac{1}{x}$,

2) $x < 0,\ \left(\ln|x| + C\right)' = \left(\ln(-x) + C\right)' = \frac{1}{x}$.

9. $\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1+x^2/a^2} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2+x^2}$

11. 1) $x + \sqrt{x^2 \pm a^2} > 0$,

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

2) $x + \sqrt{x^2 \pm a^2} < 0$,

$$\left(\ln\left(-x-\sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C\right)' = \frac{1}{-\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)}\left(-1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{-\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)}\cdot\frac{-\left(\sqrt{x^2 \pm a^2} + x\right)}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$ □.

§3. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

Т. Если $u(x)$ и $v(x)$ - диф. и существует интеграл $\int v du$,

то существует интеграл $\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$

□. По правилу дифференцирования произведения:

$d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du,\ \int d(u\cdot v) = \int u dv + \int v du,$

$u\cdot v = \int u dv + \int v du,\ \int u dv = u\cdot v - \int v du$ □.

Рекурентная формула:

$$I_n = \int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)} = \left|\begin{matrix} u = \frac{1}{(x^2+a^2)},\ du = \frac{-n\cdot 2x}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx \\ dv = dx,\ v = x\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int\frac{x^2 dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}} = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} +$$

$$+2n\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} - 2na^2\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}},\ I_{n+1} = \int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}},$$

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{x}{2na^2\left(x^2+a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\cdot I_n} \quad (2)$$

§4. Замена переменной в неопределенном интеграле.

Т. (о замене переменной)

Если $F(x)$ - первообразная ф-ии $f(x)$ на множестве X и $x = \varphi(t)$ - дифференцируемая функция, значение которой принадлежит мн-ву X, то ф-ия $F(\varphi(t))$ - первообразная для ф-ии $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ и интеграл

$\boxed{\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \int f(x)dx}$,

ф-ия $x = \varphi(t)$ называется подстановкой.

□. Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$. Покажем, что

$\left(F(\varphi(t))\right)' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t),$

$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi(t)dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C = \int f(x)dx$ □.

§5 Интегрирование рациональных функций.

п.1 Интегрирование простейших рациональных функций.

Опр.1 Рациональной функцией называется отношение двух многочленов

$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ - многочлен степени m,

$P_m = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m, b_0 \neq 0,$

$Q_n(x)$ - многочлен степени n с $C = 1$ перед x^n,

$Q_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$.

Если $m < n$, то $f(x)$ - неправильная рациональная функция, а если $m \geq n$, то $f(x)$ - неправильная рациональная (дробно-рациональная) функция.

Опр.2 Простейшими рациональными функциями называются правильные рациональные функции следующих видов:

I. $\frac{A}{x-a}\ \left(A, a \in R\right)$ II. $\frac{A}{(x-a)^m}\ \left(m \in N \wedge m > 1\right)$

III. $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\ \left(p, q, c \in R,\ p^2/4 - q < 0\right)$ IV. $\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}$

I. $\int\frac{A}{x-a}dx = A\int\frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$

II. $\int\frac{A}{(x-a)^m}dx = A\int\frac{dx}{(x-a)^m} = A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = \frac{A}{(1-m)x^{m-1}} + C.$

III. Преобразуем $x^2 + px + q = x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} =$

$= \left(x + p/2\right)^2 + q - p^2/4,\ t = x + p/2,\ a^2 = q - p^2/4,\ x^2 + px + q = t^2 + a^2$

$$\Rightarrow x = t - p/2, dx = dt \Rightarrow \int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \int\frac{B\left(t - p/2\right) + C}{t^2+a^2}dt =$$

$$= B\int\frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(C - Bp/2\right)\cdot\int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{B}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \frac{C - Bp/2}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} +$$

$$+C_1 = \frac{B}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{C - Bp/2}{\sqrt{q - p^2/4}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x + p/2}{\sqrt{q - p^2/4}} + C.$$

$$\text{IV. } \int\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx = \int\frac{B\left(t - p/2\right) + C}{\left(t^2+a^2\right)^m}dt = B\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^m} + \left(c - Bp/2\right)\times$$

$$\times\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m} = \frac{B}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \left(C - Bp/2\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}0 \Rightarrow \text{далее}$$

используем рекурентную формулу и возвращаемся к подстановке.

п.2 Интегрирование правильных рациональных функций.

$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},\ m < n,\ Q_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n,$

a_1 - кратности α_1, a_2 - кратности α_2, $\beta_1 \pm \gamma_1 i$ - кратности s_1.

Это означает, что $Q_n(x)$ делится на $\left(x^2 + p_1x + q_1\right)^{s_1}$,

$\beta_2 \pm \gamma_2 i$ - кратности s_2. Тогда $Q_n(x)$ делится на $\left(x^2 + p_2x + q_2\right)^{s_2}$,

$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = n$, тогда

$Q_n(x) = \left(x - a_1\right)^{\alpha_1}\left(x - a_2\right)^{\alpha_2}\left(x^2 + p_1x + q_1\right)^{s_1}\left(x^2 + p_2x + q_2\right)^{s_2}$.

Т.1 Правильная рациональная функция вида

$$\frac{P_m(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}}=\frac{A_1}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+$$
$$+\frac{A_2}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha_1}}{(x-a_1)}+\frac{B_1}{(x-a_2)^{\alpha_2}}+\frac{B_2}{(x-a_2)^{\alpha_2-1}}+\ldots+\frac{B_{\alpha_2}}{(x-a_2)}+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+\ldots+\frac{M_{s_1}x+N_{s_1}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{P_1x+L_1}{(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}}+\ldots+$$
$$+\frac{P_{s_2}x+L_{s_2}}{x^2+p_2x+q_2},$$ где $A_1,\ldots,A_{\alpha_1},B_1,\ldots,B_{\alpha_2},M_1,\ldots,M_{s_1},N_1,\ldots,N_{s_1},P_1,\ldots,P_{s_2}$, $L_1,\ldots,L_{s_1}$ - неопределенные коэффициэнты (метод неопределенных коэффициентов).

Т.2 Правильная рациональная функция имеет первообразные, которые выражены через правильные рациональные функции, логарифмы и арктангенсы.

п.3 Интегрирование неправильных рациональных функций

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},m\ge n,\ f(x)=f_1(x)+\underbrace{\frac{R_{m-n}(x)}{Q_n(x)}}_{\text{прав. рац. ф-ия}},$$

$$\int f(x)dx=\int f_1(x)dx+\underbrace{\int\frac{R_{m-n}(x)}{Q_n(x)}dx}_{\text{метод неопр. коэф.}}.$$

п.4 Метод Остроградского

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},\ m<n,$$

$Q_n(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}$, где

$\alpha_1+\alpha_2+s_1+s_2=n$, $\boxed{\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\underbrace{\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx}_{\text{метод неопр. коэф.}}}$ (1) где

$$Q_1(x)=(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1-1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2-1}$$

$Q_2(x)=\frac{Q_n(x)}{Q_1(x)}$, $P_1(x)$ и $P_2(x)$ - многочлены в степени на 1 меньше чем $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ соответственно. Продифференцируем формулу (1):

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{P_1'\cdot Q_1-P_1Q_1'}{(Q_1(x))^2}.$$

§6 Вычисление интегралов вида:

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

$R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ - рациональное выражение от x и $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Подстановка $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Rightarrow t^n=\frac{ax+b}{cx+d}$, $ct^nx+dt^n=ax+b$,

$$x=\frac{b-dt^n}{ct^n-a},\ dx=\frac{-dn\cdot t^{n-1}(ct^n-a)-cn\cdot t^{n-1}(b-dt^n)}{(ct^n-a)^2}dt=$$
$$=\frac{-nt^{n-1}\left(d(ct^n-a)+c(b-dt^n)\right)}{(ct^n-a)^2}dt=\frac{-nt^{n-1}(bc-ad)}{(ct^n-a)^2}dt,$$
$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=-n\int R\left(\frac{b-dt^n}{ct^n-a},t\right)t^{n-1}\frac{bc-ad}{(ct^n-a)^2}dt.$$

§7. Интегрирование выражений вида $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. Подстановка Эйлера.

1. ax^2+bx+c не имеет действительных корней.

(*) $\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}+t$ - 1-ая подстановка Эйлера.

$ax^2+bx+c=ax^2+2x\sqrt{a}t+t^2$, $x\left(b-2t\sqrt{a}\right)=t^2-c$,

$$x=\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}},\ dx=\frac{2t\left(b-2t\sqrt{a}\right)+(t^2-c)2\sqrt{a}}{\left(b-2t\sqrt{a}\right)^2}dt=$$
$$=\frac{2bt-2t^2\sqrt{a}-2c\sqrt{a}}{\left(b-2t\sqrt{a}\right)^2}dt,\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2-c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}}+t=$$
$$=\frac{bt-\sqrt{a}t^2-c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}},$$ тогда $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=$
$$=\int R\left(\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}},\frac{bt-\sqrt{a}t^2-c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}}\right)\frac{2bt-2t^2\sqrt{a}-2c\sqrt{a}}{\left(b-2t\sqrt{a}\right)^2}dt$$

2. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, x_1,x_2 - корни.

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(x,\sqrt{\frac{a(x-x_1)^2(x-x_2)}{(x-x_1)}}\right)dx=$$
$$=\int R\left(x,(x-x_1)\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right)dx.$$

$t=\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}$, $t^2=\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}$ $(**)$ - 2-ая подстановка

$$xt^2-x_1t^2=ax-ax_2,\ x(t^2-a)=x_1t^2-ax_2,\ x=\frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a},$$
$$x-x_1=\frac{x_1t^2-ax_2-x_1t^2+ax_1}{t^2-a}=\frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a},$$
$$dx=\frac{2x_1t(t^2-a)-2t(x_1t^2-ax_2)}{(t^2-a)^2}dt=\frac{2ta(x_2-x_1)}{(t^2-a)^2}dt,$$
$$\int R\left(x,(x-x_1)\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right)dx=$$
$$=2a\int\left(\frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a},\frac{|a||x_1-x_2|}{|t^2-a|}\cdot t\right)\frac{t(x_2-x_1)}{(t^2-a)}dt$$ - рациональное выражение.

§8 Вычисление интегралов вида

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=P_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ (1),$$

λ - неизвестный коэффициент,

$P_{n-1}(x)$ - многочлен степени $(n-1)$ с неопр. коэффицентами.

Дифференцируем формулу, чтобы получить $P_n(x)$

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=P_{n-1}'(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{P_{n-1}(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}+$$
$$+\frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$
$$2P_n(x)=2P_{n-1}'(x)(ax^2+bx+c)+P_{n-1}(x)(2ax+b)+2\lambda,$$

$$\left.\begin{matrix}x^n\\x^{n-1}\\\ldots\\x^0\end{matrix}\right|\ (n+1)\text{ уравнения с }(n+1)\text{ неизвестными }(*)$$

Решение системы уравнений $(*)$ в (1), в которой последний интеграл - табличный.

§9 Интегрирование тригонометрических функций.

п.1 Вычисление $\int \cos\alpha x \cos\beta x dx,\ \int \sin\alpha x \sin\beta x dx,$
$\int \sin\alpha x \cos\beta x dx$

Преобразуем подынтегральные функции:
$\cos\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos\left((\alpha+\beta)x\right)+\cos\left((\alpha-\beta)x\right)\right],$
$\sin\alpha x\sin\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos\left((\alpha-\beta)x\right)-\cos\left((\alpha+\beta)x\right)\right],$
$\sin\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\sin\left((\alpha+\beta)x\right)+\sin\left((\alpha-\beta)x\right)\right],$
далее вычисления сводятся к табличным интегралам.

п.2 Вычисление $\int \sin^m x\cos^n x dx,\ m,n\in Q$

1) $m=2k+1$ (нечетное), тогда
$\int \sin^m x\cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \sin x \cos^n x dx =$

$$= \int \left(1-\cos^2 x\right)^k \cos^n x \sin x dx = \begin{vmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx \end{vmatrix} = -\int \underbrace{\left(1-t^2\right)t^n}_{\text{рац. выражение}} dt$$

2) $n=2k+1$ (нечетное), тогда $\int \sin^m x\cos^{2k+1} dx =$

$$= \int \sin^m x \cos^{2k} x\cos x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)^k \sin^m x\cos x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos x dx \end{vmatrix} = \int \left(1-t^2\right)^k t^m dt$$ - рац. выражение от t

3) $m=2k,\ n=2s$ (четные), тогда
$\int \sin^{2k} x\cos^{2s} x dx = \frac{1}{2^{k+s}}\int \left(1-\cos 2x\right)^k\left(1+2\cos 2x\right)^s dx,$ далее см. п.1,2,3.

п.3 Вычисление $\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx$**. Универсальная тригонометрическая подстановка.**

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\ (*),\ x=2\operatorname{arctg} t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \cos^2 x\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int R\left(\sin x,\cos x\right)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

§10. Определение интеграла по Риману. Ограниченность интегрируемой функции.

Пусть $f(x)$ определена на $[a,b]$. Разобьем $[a,b]$ на частичные отрезки с помощью точек деления.
Обозн. разбиения: $\tau: a=x_0<x_1<...<x_k<...<x_n=b,$
Длина k-го отрезка $\Delta x_k = x_{k+1}-x_k,\ k=0,1,2,...,(n-1),$
На каждом отрезке выберем точку $C_k\in\left[x_k,x_{k+1}\right]$, тогда

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(C_k)\Delta x_k = f(C_0)\Delta x_0+f(C_1)\Delta x_1+...+f(C_{n-1})\Delta x_{n-1},$$

$\lambda=\max\limits_k \Delta x_k$ - диаметр разбиения τ,
Опр. Конечный предел интегральных сумм σ при $\lambda\to 0$, не зависящий ни от разбиения отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек C_k, называется определенным интегралом от a до b ф-ии $f(x)$, а сама ф-ия - интегрируемой на $[a,b]$. $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma=\int\limits_a^b f(x)dx}$ (2)

Утв.1 Если ф-ия $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то она на этом отрезке ограничена.
Утв.2 Если $f(x)$ - неотрицательная и интегрируемая на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = S_{aABb}$ (площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком $f(x)$, снизу - осью абсцисс, и прямыми $x=a,\ x=b$.

§11. Верхняя и нижняя интегральные суммы и их свойства. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функции по Риману.

Пусть задана $f(x),\ x\in[a,b]$.
Разобьем $[a,b]$ $\tau: a=x_0<x_1<..<x_k<..x_n=b,$
Длина k – го отрезка $\Delta x_k = x_{k+1}-x_k,$
Обозначим $m_k := \inf\limits_{[x_k,x_{k+1}]} f(x),\ M_k := \sup\limits_{[x_k,x_{k+1}]} f(x),$

$$(1)\begin{cases} s=\sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k \\ S=\sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x \end{cases}$$

(1) - нижняя и верхняя интегр. суммы Дарбу,
$C_k\in\left[x_k,x_{k+1}\right],\ (*)\ s\le\sigma\le S,\ \sigma=\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(C_k)\cdot\Delta x_k$
Св.1 Если к фиксированному разбиению τ добавить новые точки, то нижняя сумма Дарбу может только увеличиться, а верхняя только уменьшиться.
Св.2 Нижняя сумма Дарбу не превосходит верхней, даже если эти суммы отвечают разным разбиениям.
Добавим к τ новые точки ($\lambda\to 0$),
$s_1,s_2,...,s_n$ - монотонно возрастает, $s_n\le S_i$,
$S_1,S_2,...,S_n$ - монотонно убывает, $S_n\ge s_i$,
$\underline{I}=\sup s_n,\ \overline{I}=\inf S_n,\ s\le\underline{I}\le\overline{I}\le S\ (**)$
Т. (необходимое и достаточное условие интегрируемости функции по Риману)
Для того чтобы ограниченная на $[a,b]$ ф-ия $f(x)$ была интегрируема на $[a,b]$ по Риману необходимо и достаточно: $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(S-s\right)=0}$ $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to 0}s=\lim\limits_{\lambda\to 0}S=\int\limits_a^b f(x)dx}$

§12. Свойства неопределенного интеграла.

Св.1 $\int\limits_a^a f(x)dx=0$ Св.2 $\int\limits_b^a f(x)dx=-\int\limits_a^b f(x)dx$
Св.3 $\int\limits_a^b\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int\limits_a^b f(x)dx\pm\int\limits_a^b g(x)dx$
Св.4 $\int\limits_a^b Cf(x)dx=C\int\limits_a^b f(x)dx$ (C - постоянная)
Св.5 если $a<c<b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$
(аддитивность определенного интеграла)
Св.6 Если $f(x)\ge g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\ge\int\limits_a^b g(x)dx$
Св.7 Если $f(x)$ - интегрируема на $[a,b]$, то $\left|f(x)\right|$ - интегрируема на $[a,b]$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\le\int\limits_a^b\left|f(x)\right|dx$
Св.8 Если $f(x)$ - интегр. на $[a,b]$ и $m\le f(x)\le M$, то
$\boxed{m\left(b-a\right)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M\left(b-a\right)}$
Теорема о среднем для опр. интеграла.

§13. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства. Основная формула интегрального исчисления.

Пусть $f(x)$ опр. и огран. на $[a,b]$. Возьмем x_k так, что $a<x<b$, на $[a,x]$ - $f(x)$ интегрируема.
(1) $F(x)=\int\limits_a^x f(x)dx$ - интеграл с перем. верхний пределом
Св.1 Если $f(x)$ интегр. на $[a,b]$, то $F(x)$ - непр. на $[a,b]$.
□. Зафикс. $x\in[a,b]$, дадим x приращение Δx,

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(x)dx-\int\limits_a^x f(x)dx=$$

$$=\int\limits_a^x f(x)dx+\int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)dx-\int\limits_a^x f(x)dx=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)dx,$$

По усл. $m\le f(x)\le M$ (св.8), $m\Delta x\le\int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)dx\le M\Delta x,$
разделим на Δx: $\frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)dx=\mu,\ m\le\mu\le M,$

$$\int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)dx=\mu\Delta x,\ \Delta F(x)=\mu\Delta x,\ \Delta x\to 0,\ \Delta F(x)\to 0\Rightarrow$$

$\Rightarrow F(x)$ - непрер. в точке x □.
Св.2 Если $f(x)$ - непр. на $[a,b]$, то $F(x)$ - диф. функция,
$F'(x)=f(x),\ \left(\int\limits_a^x f(x)dx\right)'=f(x)$
□. Фикс. x, даем приращение $\Delta x,\ \Delta F=\mu\Delta x,\ m\le\mu\le M,$
по т. о среднем для непр. ф-ии $f(x)$ сущ. точка $c\in\left[x,x+\Delta x\right]$, такая что $\mu=f(c)\Rightarrow\Delta f(x)=f(c)\Delta x,$
$F'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c)=f(x),$
$\left(\int\limits_a^x f(x)dx\right)'_x=f(x)$ □.
Сл. Непр. на отрезке ф-ия $f(x)$ всегда имеет первообразную, одной из которых является интеграл с переменным верхним пределом.
Т. (Основная формула интегрального исчисления, ф. Ньютона-Лейбница)
Если $f(x)$ - непр. на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a),$
где $\Phi(x)$ - какая-нибудь первообразная $f(x)$,
$\int\limits_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a)=\Phi(x)\Big|_a^b$ (2)
□. $\Phi(x)$ - первообр. $f(x),\ F(x)=\int\limits_a^x f(x)dx$ - первобр. $f(x)$
$\Phi(x)=\int\limits_a^x f(x)dx+C,\ \Phi(a)=C,\ \Phi=\int\limits_a^b f(x)dx+\Phi(a),$
$\int\limits_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a)$ □.

§14. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Т. Если $u(x)$ и $v(x)$ - диф. на $[a,b]$, то
$\boxed{\int\limits_a^b udv=\left(uv\right)\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu}$

§15. Замена переменной в определенном интеграле.

Т. Если $f(x)$ - интегр. на $[a,b]$ и $x=\varphi(t)$ - диф. на $[\alpha,\beta]$, где $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$, то
$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt}$

§16. Вычисление площадей в прямоугольной декартовой системе координат.

Рассм. плоскую фигуру ограниченную сверху графиком ф-ии $y = f(x)$ - непр. на $[a,b]$, а снизу - $y = g(x)$ - непр. на $[a,b]$. Разобъем $[a,b]$:
$\tau : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b$,
$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $k = 0,1,\ldots,(n-1)$, $\lambda = \max\limits_{k} \Delta x_k$,
$m_k = \min\limits_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$, $M_k = \max\limits_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$, $m'_k = \min\limits_{[x_k, x_{k+1}]} g(x)$,
$M'_k = \max\limits_{[x_k, x_{k+1}]} g(x)$.
Рассм. ступенчатую фигуру F из прямоугольников с осн. Δx_k и высотами $h_k = m_k - M'_k$.

$$F \subset ABCD,\ S(F) = \sum_{k=0}^{n-1} (m_k - M'_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} M'_k \Delta x_k = = s_f - S_g,$$

рассм. ступенчатую фигуру F_1 из прямоугольников с осн. Δx_k и высотами $h'_k = M_k - m'_k$.

$$S(F_1) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x(M_k - m'_k) = S_f - s_g$$

Опр.1 Если $\lim\limits_{\lambda\to 0} S(F) = \lim\limits_{\lambda\to 0} S(F_1)$, то плоская фигура $ABCD$ называется квадрируемой, а общее значение этих пределов называется площадью фигуры $ABCD$.

$$\lim_{\lambda\to 0} S(F) = \lim_{\lambda\to 0} s_f - \lim_{\lambda\to 0} S_g = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx =$$

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx\ (*)$$

$$\lim_{\lambda\to 0} S(F_1) = \lim_{\lambda\to 0} S_f - \lim_{\lambda\to 0} s_g = \int_a^b (f(x) - f(x))dx\ (**)$$

Из равенств $(*)$ и $(**)$ $\Rightarrow$ фигура $ABCD$ - квадрируемая и площадь ее в дек. пр. с.к $\boxed{S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx}$ (2)

§17. Вычисление площадей в полярной системе координат.

Формулы перехода из пол. в дек. с.к. $\begin{cases} x = r\sin\varphi \\ y = r\cos\varphi \end{cases}$,
Рассм. плоскую фигуру в пол. с.к. ограниченную 2-мя лучами и графиком непр. на $[a,b]$ функции $r(\varphi)$ ($\varphi_0 \le \varphi \le \Phi$). Разобъем $\varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_k < \varphi_{k+1} < \ldots < \varphi_n = \Phi$. Обозначим: $m_k = \min\limits_{[\varphi_k, \varphi_{k+1}]} r(\varphi)$, $M_k = \max\limits_{[\varphi_k, \varphi_{k+1}]} r(\varphi)$. Рассмотрим круговые сектора, опирающиеся на углы $\Delta\varphi_k$ и ограниченные дугами окружности радиуса m_k.
Площадь каждого кругового сектора $S_{\text{сек}} = \frac{1}{2} R^2 d$,

$s = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \cdot \Delta\varphi_k$ - нижняя сумма Дарбу для ф-ии $\frac{1}{2} r^2(\varphi)$.
Рассмотрим круговые сектора, опирающиеся на углы $\Delta\varphi_k$ и ограниченные дугами окружности радиуса M_k :
$S = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \Delta\varphi_k$ - верхняя сумма Дарбу для ф-ии $\frac{1}{2} r^2(\varphi)$,

$$\lim_{\lambda\to 0} s = \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\Phi} r^2(\varphi)d\varphi,\ \lim_{\lambda\to 0} S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\Phi} r^2(\varphi)d\varphi.$$

$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\Phi} r^2(\varphi)d\varphi}$ (1) - ф. для вычисления площади в пол. с.к

§18. Объем тела вращения.

Рассм. тело V, обладающее следующими свойствами:
1) расположено по одну сторону от плоскости π
2) в сечении тела плоскостями, параллельными пл-ти π, лежат квадрируемые фигуры.
3) площадь сечения, проведенного на расстояние x от пл-ти π, пл-тью парал. π - непр. ф-ия $S(x)$.
4) Если $S(x_2) > S(x_1)$, то проекция фигуры с площадью $S(x_2)$ на пл-ть π содержит проекцию фигуры с с площадью $S(x_1)$ на пл-ть π.
Опр.1 Пространственное тело, обладающее св-ми 1-4 называется регулярным.
Т.1 Регулярное тело кубируемое и объем го вычисляется по формуле $V = \int_a^b S(x)dx$, где $S(x)$ - площадь сечения, проведенного на расстоянии x от пл-ти π,
a - наименьшее расстояние от тела до пл-ти π,
b - наибольшее расстояние от тела до пл-ти π.
Т.2 Если тело V получено вращением криволинейной трапеции ограниченной сверху графиком ф-ии $y = f(x)$, $f(x) \ge 0$, а снизу отрезком $[a,b]$ вокруг оси O_x, то его объем $\boxed{V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx}$ (2)

□. Покажем, что тело V - регулярное.
$x \in [a,b]$, $S(x) = \pi r^2 = \pi(f(x))^2 -$ непр. ф-ия от x,
Все условия (1-4) выполнены $\Rightarrow V$- регулярное тело,
Тогда по ф.(1): $y = f(x)$, $f(x) \ge 0$, $a \le x \le b$,
$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$ □.

Сл. Если криволинейная трапеция вращается вокруг O_y, то объем полученного тела вычисляется по формуле:
$\boxed{V = 2\pi\int_a^b x \cdot f(x)dx}$ (3)

§19. Спрямляемая кривая и ее длина. Вычисление длины кривой.

Рассм. кривую l заданную параметрическим уравнением:
$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, ограниченную $\alpha \le t \le \beta$,
Начало - $A(x(\alpha), y(\alpha))$, конец - $B(x(\beta), y(\beta))$.
Предположим, что $x'(t)$ и $y'(t)$ - непрерывны. Разобьем
$\tau : \alpha = t_0 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_n = \beta$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$,
$x_k = x(t_k)$, $x_{k+1} = x(t_{k+1})$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$,
$y_k = y(t_k)$, $y_{k+1} = y(t_{k+1})$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$,
впишем ломанную в кривую l, $\lambda = \max\limits_{x} \Delta t_k$,

длина кривой $L = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+!} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$

Опр.1 Если множество длин, вписанных в кривую l, ограничены сверху, то кривая (l) - спрямляющаяся, а верхняя грань называется длиной кривой: $\boxed{\sup\{L\} = l}$
$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = x'(c) \cdot \Delta t_k$, $c \in [t_k, t_{k+1}]$,
$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = y'(c_1) \cdot \Delta t_k$, $c_1 \in [t_k, t_{k+1}]$,

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x'(c))^2 + (y'(c_1))^2} \cdot \Delta t_k,$$

$$\lim_{\lambda\to 0} L = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x'(c))^2 + (y'(c_1))^2} \cdot \Delta t_k =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt \quad \boxed{l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt}\ (2)$$

Ф.(2) - длина кривой, заданной параметрически.
Если кривая задана в полярной с.к уравнением $r = r(\varphi)$, причем $\alpha \le \varphi \le \beta$, $x = r\cos\varphi = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi = = r(\varphi)\sin\varphi$, то:
$x' = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$, $y' = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$,

$$(x')^2 + (y')^2 = (r'(\varphi))^2\cos^2\varphi - 2r'(\varphi)\cdot r(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + +(r(\varphi))^2\sin^2\varphi + (r'(\varphi))^2\sin^2\varphi + 2r'(\varphi)\cdot r(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + +(r(\varphi))^2\cos\varphi = (r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2,$$

$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}d\varphi}$ (2)

Если кривая задана функцией $y = f(x)$, $a \le x \le b$, то
$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases} \Rightarrow l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}dx$ (3)

§20. Площадь поверхности вращения.

Пусть кривая l, заданная параметрическими уравнениями $l : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$ вращается вокруг оси O_x. Площадь поверхности вращения $\sigma = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)dt$, тогда:

$\boxed{\sigma = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt}$ (1) ф. поверхности вращения

Частные случаи:
а) $l : \begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$, $a \le b \le b$, $\boxed{\sigma = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}dx}$ (2)
б) $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, $y = r\sin\varphi = r(\varphi)\sin\varphi$. Кривая вращается вокруг полярной оси. Совместим дек. с пол. с.к. и подставим y в (1): $\boxed{\sigma = 2\pi\int_\alpha^\beta r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2 + (r')^2}d\varphi}$ (3)

§21. Применение определенных интегралов к решению физических задач.

п.1 Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоских кривых.

Опр.1 Статическим моментом материальной точки отн-но непересекающей ее прямой называется произведение массы этой точки на расстояние от точки до прямой: $S_l = m \cdot r$

Опр.2 Статическим моментом системы матер. точек отн-но прямой l наз-ся сумма $\sum\limits_{i=1}^{k}$ произведения масс этих точек на расстояния.

$\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \cdot k_i = m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_2 + \ldots + m_k \cdot r_k$, $S = 1$, $m = l =$

$= \int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, масса $m = S$ - площадь, применим разбиение

$\tau : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b,$

$m_k = \min\limits_{[x_k, x_{k+1}]} f(x),\ M_k = \max\limits_{[x_k, x_{k+1}]} f(x),\ m_k \cdot \Delta l_k \le S_x \le M_k \Delta l_k,$

$y(x_k)\Delta l_k \le S_y \le y(x_{k+1})\Delta l_k,\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \Delta l_k \le \sum S_x \le \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \Delta l_k,$

$\sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \Delta l_k \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k \Delta l_k \le \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \Delta l_k,$

$\boxed{S_x = \int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}$ (1) - относительно O_x,

$\boxed{S_y = \int\limits_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx}$ (1′) - относительно O_y,

Опр.3 Центром тяжести плоской материальной фигуры наз-ся точка $c(\bar{x}, \bar{y})$ такая, что если в этой точке сосредоточить всю массу плоской кривой, то статические моменты т. C относительно координат осей будут равны стат-м моментам всей плоской кривой относительнно тех же осей.

$S_x(c) = S_x,\ S_y(c) = S_y,\ S_x(c) = l \cdot \bar{y},\ S_y(c) = l \cdot \bar{x},$

$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{l}\int\limits_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx,\ \bar{y} = \frac{1}{l}\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dy}$ (2)

координаты центра тяжести

п.2 Статические моменты и координаты центра

$S(x,y) = 1,\ S_x = l \cdot dy \cdot y,\ S_x = l\int\limits_0^m y\,dy = \frac{1}{2} l m^2,$

$S_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\,dx$ (1), $S_y = \int\limits_a^b xy\,dx$ (2), $\bar{y} \cdot S = S_x,\ \bar{x} \cdot S = S_y,$

$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{S}\int\limits_a^b xy\,dx,\ \bar{y} = \frac{1}{2S}\int\limits_a^b y^2\,dx}$

п.3 Теорема Гульдина

$C(\bar{x}, \bar{y}),\ l = 2\pi\bar{y},\ \bar{y} = \frac{1}{l}\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx,$

$2\pi\bar{y}l = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx,$ $\boxed{\sigma = 2\pi\bar{y}l}$ - 1-ая т. Гульдина

Т.1 Площадь поверхности, которая получается при вращении плоской прямой вокруг непересекающей ее прямой равна длине кривой на длину окружности которую описывает центр тяжести кривой.

$V = \pi\int\limits_a^b y^2\,dx,\ \bar{y} = \frac{1}{2S}\int\limits_a^b y^2\,dx,\ 2\pi\bar{y}S = \pi\int\limits_a^b y^2\,dx,$

$\boxed{V = 2\pi\bar{y}S}$ - 2-ая т. Гульдина

Т.2 Объем тела, которое получается при вращении плоской фигуры вокруг непересекающей ее прямой - произведение площади фигуры на длину окружн-ти, которую описывает центр тяжести фигуры.

§22. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода.

п.1 Несобственные интегралы 1 - го рода и их сходимость

Пусть $f(x)$ опр. на луче $[a, +\infty)$ и интегр. на любом $[a, b]$, где $b > a$.

Опр.1 $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ (1) . Если интеграл (1) конечен, то он сходящийся и называется несобств. интегралом 1-го рода. Если (1) бесконечен или не сущ. , то он расходится.

Если $f(x)$ опр. на $(-\infty, a]$ и интегр. на любом $[a, b]$, где $b < a$, то $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_b^a f(x)dx$ (2) - несобств. 1-го рода.

(3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_0^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_b^0 f(x)dx +$

$+\lim\limits_{c\to\infty}\int\limits_0^c f(x)dx \Rightarrow$ для сходимости необходима и достаточна сходимость (1) и (2).

п.2 Несобств. интегралы 2 - го рода и их сходимость

Пусть $f(x)$ опр. на $[a, b)$, неогр. в точке b и огр. на любом $[a, c]$ где, $c < b$. Зададим $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $[a, b-\varepsilon]$:

$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0+}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ (1) - несобств. 2-го рода.

Если предел (1) сущ. и конечен, то интеграл сходится, если предел (1) не сущ. или бесконечен, то - расходится.

Пусть $f(x)$ опр. на $(a, b]$ и интегрируема на любом $[c, b]$, $c > a$ и неогр. в точке a.

$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0+}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ (2) - несобств. 2-го рода.

Если предел (2) конечен, то интеграл сходится, если - бесконечен или не сущ., то расходится.

Пусть $f(x)$ неогр. в точке c, причем $a < c < b$, тогда несобств. интеграл 2-го рода от неогр. функции:

$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0+}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx +$

$+\lim\limits_{\delta\to0+}\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx$ (3)

Для сходимости несобств. интеграла (3) необходима и достаточна сходимость несобств. интегралов (1),(2).