# Содержание



# 1 Общие математические сведения

## 1.1 $\Rightarrow$

Знак $\Rightarrow$ означает «следует». Например $A \Rightarrow B$ означает из $A$ следует $B$.

## 1.2 $\Leftrightarrow$

Знак $\Leftrightarrow$ означает «равносильно». Например $A \Leftrightarrow B$ означает из $A$ равносильно $B$. Так же, если $A \Leftrightarrow B$ то это то же самое, $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

## 1.3 Фигурная скобка $\{$

Запись

$$\begin{cases} P_1 \\ P_2 \end{cases}$$

означает, что условия $P_1$ и $P_2$ выполняются одновременно (**логическое И**)

## 1.4 Квадратная скобка $[$

Запись

$$\left[\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \end{array}\right.$$

означает, что хотя бы одно из условий $P_1$ или $P_2$ выполняются (**логическое ИЛИ**)

## 1.5 Декартово произведение

**Определение 1.** ***Декартовым произведением*** *множеств $X$ и $Y$ называется множество всех упорядоченных пар $(x, y)$ где $x \in X, y \in Y$.*

**Обозначение**. $X \times Y$

Декартово произведение можно обобщить для $n$ множеств, так, элементами множества $X_1 \times X_2 \times \dots X_n$ будут **упорядоченные наборы** или **кортежи** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ где $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n$.

**Определение 2.** ***Декартовой $n$-ой степенью*** *множества $X$ называется множество $X^n = X \times X \times \dots X$*

## 1.6 Закон контрапозиции

Пусть мы имеем утверждение $A \Rightarrow B$, то эквивалентным утверждением будет $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$

**Пример**. сказать: «фигура $A$ — квадрат $\Rightarrow$ фигура $B$ — прямоугольник» то же самое, что сказать: «фигура $A$ — не прямоугольник $\Rightarrow$ фигура $B$ — не квадрат».

# 2 Функция

## 2.1 Определение

**Определение 3.** ***Функцией, отображением*** *$f : X \to Y$ называется множество упорядоченных пар $(x, y)$ где $x \in X, y \in Y$ такое, что*

1. *для любого $x$ верно $(x, y) \in f$;*
2. *для любых $x_1, x_2$ верно $f(x_1) = f(x_2)$ (функциональность)*

*Множество $X$ называется **областью определения** $f$. Множество $Y$ называется **областью значений** $f$*

**Пример**. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{a, b\}$, и мы хотим задать отображение $f : X \to Y$. В первую очередь, для каждого элемента из $X$ нужно указать значение из $Y$ (условие 1 из определения). Допустим, для $f$ верно

$$\begin{cases} f(1) = a \\ f(2) = a \\ f(3) = b. \end{cases} \tag{1}$$

Тогда, функция $f$ будет следующим множеством:

$$f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\} \tag{2}$$

**Важно**. Если для любых $x_1, x_2$ верно $f(x_1) = f(x_2)$ (условие 2 из определения), то обратное, не обязательно верно, из того, что $f(1) = f(2)$ не следует, что $1 = 2$.

**Важно**. Если для каждого $x \in X$ обязательно, чтобы $(x, y) \in f$ (условие 1 из определения), то необязательно, чтобы для каждого $y \in Y$ было верно $(x, y) \in f$.

**Пример**. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{a, b, c, d, e\}$, то множество

$$f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\} \tag{3}$$

является функцией.

Поскольку не для каждого множества можно выписать его элементы (любые бесконечные множества), возникает необходимость иначе задавать фукнции на таких множествах

**Пример**. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f(x) = 2x$. Тогда функция $f$ является следующим множеством

$$\{(x, 2x) \text{ где } x \in \mathbb{R}\} \tag{4}$$

то есть множеством всех пар $(x, 2x)$ где $x \in \mathbb{R}$.

## 2.2 Биекции

Отображение переводят одни элементы в другие, по тому же самому принципу они и переводят множества в множества. Пусть

$$\begin{cases} f(1) = a \\ f(2) = a \\ f(3) = b. \end{cases} \tag{5}$$

тогда $f(\{1, 3\}) = \{a, b\}$.

Грубо говоря, если взять множество $A$ и применить к каждому его элементу функцию $f$ и результаты сложить в одном множестве $B$, получим образ множества $f(A) = B$

Дадим строгое определение

**Определение 4.** *Пусть $f : X \to Y$ и $A \subset X$.* ***Образом*** *$f(A)$ называется множество* ***всех*** *таких $y \in Y$ что существует $x \in X$ такой, что*

$$f(x) = y.$$

**Определение 5.** *Функция $f : X \to Y$ называется* ***сюръекцией****, если $f(X) = Y$*

**Пояснение**. Другими словами, $f(X) = Y$ означает, что для каждого $y \in Y$ найдется $x \in X$ такой, $f(x) = y$.

**Определение 6.** *Функция $f : X \to Y$ называется* ***инъекцией*** *или* ***однозначной****, если для любых $x_1, x_2$ верно, что $x_1 \neq x_2$ то верно $f(x_1) \neq f(x_2)$*

**Пояснение**. На языке хэш-функций можно сказать, что инъективность означает отсутствие коллизий.

**Важно**.Получим **эквивалентное** определение, применяя закон контрапозиции

**Определение 7.** *Функция $f : X \to Y$ называется* ***инъекцией*** *или* ***однозначной****, если для любых $x_1, x_2$ верно, что если $f(x_1) = f(x_2)$ то $x_1 = x_2$*

**Определение 8.** *Если функция* ***инъективна*** *и* ***сюръективна****, то она называется* ***биективной*** *или* ***взаимно-однозначной***

**Примечание**. Биекция сопостовляет каждому $x$ **ровно один** $y$ (инъективность) и **для каждого** $y$ найдется $x$ (сюръективность), притом только один (функциональность).

### 2.2.1 Упражнение

Указать, какие из следующих множеств являются

1. функциями;
2. сюръекциями;
3. инъекциями;
4. биекциями.

$$f : X \to Y$$

где

$$X = \{1, 2, 3\}$$
$$Y = \{4, 6, 7\}$$

1. $\{(1, a), (2, a), (3, b)\}$
2. $\{(1, 4), (2, 7)\}$
3. $\{(1, 4), (2, 1), (3, 7)\}$
4. $\{(1, 4), (2, 7), (3, 6)\}$
5. $\{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$
6. $\{(1, 4), (2, 6), (3, 7), (2, 7)\}$

### 2.2.2 Упражнение

Пусть

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

указать, какие из следующих функций существуют

1. $q(x) = af(x) + bg(x)\ a, b \in \mathbb{R}$
2. $q(x) = f(g(x))$
3. $q(x) = af(x) + bh(x)\ a, b \in \mathbb{R}$
4. $q(x) = g(f(x))$
5. $q(x) = h(f(x))$

# 3 Линейное пространство $\mathbb{R}^m$

Элементами $\mathbb{R}^m$ являются упорядоченные наборы $n$ вещественных чисел.

Пусть

$$\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$
$$\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$
$$a \in \mathbb{R}$$

**Теорема 1.**

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \vdots \\ x_m = y_m \end{cases}$$

## 3.1 Определение

Введем следующие операции над вещественными числами:

1. Сумма:
$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_m + y_m)$$

2. Умножение на число:
$$a\overline{x} = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_m)$$

## 3.2 Канонический базис и координаты

**Определение 9.** ***Линейной комбинацией*** *векторов*

$$\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$$

*с коэффициентами*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

*называется вектор*

$$\overline{x} = a_1\overline{x_1} + a_2\overline{x_2}, \ldots + a_n\overline{x_n}.$$

**Определение 10.** ***Каноническим базисом*** *в* $\mathbb{R}^m$ *называется упорядоченный набор векторов* $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_m})$ *где*

$$\overline{e_1} = (1, 0, \ldots, 0)$$
$$\overline{e_2} = (0, 1, \ldots, 0)$$
$$\ldots$$
$$\overline{e_m} = (0, 0, \ldots, 1)$$

**Пояснение**. Таким образом, у вектора $\overline{e_i}$ в каноническом базисе на $i-$ой коориднате стоит 1, а на остальных — 0.

**Определение 11.** *Говорят, что вектор $\overline{x}$ разложен по каноническому базису, если он представлен в виде линейной комбинации*

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2}, \ldots + x_n\overline{e_n}.$$

**Пример**.

$$(5, 3, 2) = 5\overline{e_1} + 3\overline{e_2} + 2\overline{e_3}$$

# 4 Линейный оператор $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

## 4.1 Определение

**Определение 12.** *Функция $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ называется* ***линейным оператором*** *если выполнены два условия* ***для любых*** $\overline{x}, \overline{y}, a$

*1.*

$$f(a\overline{x}) = af(\overline{x})$$

*2.*

$$f(\overline{x} + \overline{y}) = f(\overline{x}) + f(\overline{y})$$

## 4.2 Общий вид линейных операторов

**Теорема 2.**

$$f(a_1\overline{x_1} + a_2\overline{x_2}, \ldots + a_n\overline{x_n}) = a_1f(\overline{x_1}) + a_2f(\overline{x_2}) + \ldots + a_nf(\overline{x_n}) \tag{6}$$

### 4.2.1 Упражнение

Доказать теорему (6).

Исследуем, как выглядят линейные операторы $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Пусть

$$(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_m})$$

— канонический базис, тогда

$$f(\overline{x}) = f(x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2}, \ldots + x_n\overline{e_n}) = x_1f(\overline{e_1}) + x_2f(\overline{e_2}) + \ldots + x_nf(\overline{e_n}) \tag{7}$$

Обзначим

$$\overline{a_i} = f(\overline{e_i}) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \ldots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$f(\overline{e_i})$ имеет $n$ координат, потому что $f$ переводит $m$-мерные векторы в $n$-мерные векторы. Строки идут от 1 до $n$ а столбец имеет номер $i$. Преобразуем уравнение (7)

$$x_1 f(\overline{e_1}) + x_2 f(\overline{e_2}) + \ldots + x_n f(\overline{e_n}) =$$
$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

Полученные векторы-столбцы пишут подряд, объединяя в матрицу. Далее, введем определение умножение матрицы на вектор так, чтобы

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix} = A\overline{x}$$

**Важно**. Так же, матрицу $A$ можно записать на как набор векторов-столбцов
$$A = (\overline{a_1}, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m})$$

Данные рассуждения оформим в качестве теоремы:

**Теорема 3.** *Линейные операторы $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ имеют вид $f(x) = Ax$, где $A$ — матрица размерности $n \times m$ ($m$ столбцов и $n$ строк). Притом, $i-$ый вектор-столбец $\overline{a_i}$ матрицы $\overline{a_i} = f(\overline{e_i})$.*

## 4.3 Умножение матриц

Пусть

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

Тогда $h(x) = g(f(x))$ — линейный оператор.

1. $$h(ax) = g(f(ax)) = g(af(x)) = ag(f(x)) = ah(x)$$

2. $$h(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x)+f(y)) = g(f(x))+g(f(y)) = h(x)+h(y)$$

Пусть $A = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m})$ — матрица $f$, $B = (\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots, \overline{b_n})$ — матрица $g$, $C = (\overline{c_1}, \overline{c_2}, \ldots, \overline{c_m})$ — матрица $h$. Тогда используя теорему (3) получим

$$\overline{c_i} = h(\overline{e_i}) = g(f(\overline{e_i})) = g(\overline{a_1}) = B\overline{a_1}$$

**Определение 13.** *Полученная в результате матрица оператора $h$ называется **произведением** матрицы $B$ на $A$.*

**Важно**. Чтобы вычислить прозиведение $BA$ нужно последовательно применить матрицу $B$ к столбцам матрицы $A$ и последовательно объединить в матрицу.

### 4.3.1 Упражнение

Пусть

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

доказать что функция $h(x) = af(x)+bg(x)$ — линейный оператор. Пусть $A = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m})$ — матрица $f$, $B = (\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots, \overline{b_m})$ — матрица $g$. Используя теорему (3), найти матрицу оператора $h$.

# 5 Системы линейных уравнений (СЛАУ)

## 5.1 Определение

**Определение 14.** *Система следующего вида называется **системой линейных уравнений (СЛАУ)** относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Данная система содержит $n$ уравнений и $m$ переменных.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

## 5.2 Матричное представление

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\overline{x} = \overline{b}$$

Ранее установлено, что умножение матрицы на вектор — есть линейный оператор $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (теорема (3)). Отсюда получим теорему

**Теорема 4.** *Решать систему линейных уравнений — то же самое, что решать уравнение $f(\overline{x}) = \overline{b}$, где $\overline{x} \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$ и $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейные оператор.*

Рассмотрим СЛАУ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ей в соответсвтие можно сопоставить матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

**Пояснение**. Здесь вертикальная черта не несет в себе никакого математического смысла и просто нужна, чтобы визуально отделить **главную** матрицу СЛАУ и столбец-решение.

**Определение 15.** *Пусть дана СЛАУ*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

***Главная матрица системы***

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

***Дополненная матрица системы***

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

## 5.3 Метод гаусса

**Определение 16.** *Следующие действия с матрицей называются* ***элементарными преобразованиями матрицы****:*

1. *добавление к строке матрицы другой строки;*

2. *умножение строки матрицы на число, отличное от нуля.*

*если матрица $B$ получена из $A$ элементарными преобразованиями, то пишут $A \to B$.*

**Теорема 5.** *Пусть $A, B$ — матрицы и $A \to B$. Тогда системы $A\overline{x}$ и $B\overline{x}$ равносильны.*

**Пояснение**. Сложение уравнения с другим уравнением приводит к эквивалентной системе. Умножение уравнения системы на число, отличное от нуля приводит к эквивалентной системе.

**Пример**. Пусть дана система.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

Прибавим к первой строке вторую (это равносильное преобразование)

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

Перепишем эти рассуждения в матричном виде

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Преобразуем эту матрицу так, чтобы **главная матрица системы** стала единичной.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

По итогу, получаем следующее

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

**Важно**. Таким образом, суть метода Гаусса заключается в том, чтобы элементарными преобразованиями сделать из главной матрицы системы единичную.

**Важно**. Последовательность элементарных преобразований **зависит** только от **главной матрицы** и **не зависит** от столбца-решения.

#### 5.3.1 Упражнение

Решить СЛАУ **строго теми же** элементарными преобразованиями, что из примера

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

# 6 Матричные уравнения

## 6.1 Определение

Рассмотрим матричное уравнение

$$AX = B \tag{9}$$

где $A, B$ — известные матрицы, $X$ — неизвестная матрица.

## 6.2 Пример решения

**Пример**. Решим уравнение

$$AX = B$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Для начала определимся с размерами $X$. По определению произведения матриц, мы будем последовательно применять $A$ к столбцам $X$, то есть число столбцов $X$ совпадает с числом столбцов $B$, их 3. Чтобы матрицу $A$ можно было применить к столбцу, его высота должна совпадать с шириной $A$, её ширина 2. Таким образом, $X$ — матрица $2 \times 3$. Перепишем наше уравнение в следующем виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Чтобы решить данную задачу, необходимо решить 3 СЛАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ранее уже обговаривалось, что порядок элементарных преобразований зависит только от **главной матрицы**, поэтому эти 3 системы можно описать одной матрицей, справа от черты размещены все столбцы-решения

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 8 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 7 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

В итоге получаем результат

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 6.2.1 Упражнение

Решить уравнение

$$AX = E$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Определение 17.** *Пусть*

$$AX = E \tag{10}$$

*тогда матрица $X$ называется* ***обратной*** *к $A$ и обозначается $A^{-1}$*