Содержание

1 Общие математические сведения

1.1 $\Rightarrow$

Знак $\Rightarrow$ означает «следует». Например $A \Rightarrow B$ означает из A следует B.

1.2 $\Leftrightarrow$

Знак $\Leftrightarrow$ означает «равносильно». Например $A \Leftrightarrow B$ означает из A равносильно B. Так же, если $A \Leftrightarrow B$ то это то же самое, $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

1.3 Фигурная скобка {

Запись

$$\begin{cases} P_1 \\ P_2 \end{cases}$$

означает, что условия P_1 и P_2 выполняются одновременно (**логическое И**)

1.4 Квадратная скобка [

Запись

$$\left[\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \end{array}\right.$$

означает, что хотя бы одно из условий P_1 или P_2 выполняются (**логическое ИЛИ**)

1.5 Декартово произведение

Определение 1. ***Декартовым произведением*** *множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар (x, y) где $x \in X, y \in Y$.*

Обозначение. $X \times Y$

Декартово произведение можно обобщить для n множеств, так, элементами множества $X_1 \times X_2 \times \ldots X_n$ будут **упорядоченные наборы** или **кортежи** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ где $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n$.

Определение 2. ***Декартовой n-ой степенью*** *множества X называется множество $X^n = X \times X \times \ldots X$*

2 Функция

2.1 Определение

Определение 3. ***Функцией, отображением*** *$f : X \to Y$ называется множество упорядоченных пар (x, y) где $x \in X, y \in Y$ такое, что*

1. *для любого x верно $(x, y) \in f$;*

2. *для любых x_1, x_2 верно $f(x_1) = f(x_2)$ (функциональность)*

Множество X называется ***областью определения*** *f. Множество Y называется* ***областью значений*** *f*

Пример. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{a, b\}$, и мы хотим задать отображение $f : X \to Y$. В первую очередь, для каждого элемента из X нужно указать значение из Y (условие 1 из определения). Допустим, для f верно

$$\begin{cases} f(1) = a \\ f(2) = a \\ f(3) = b. \end{cases} \tag{1}$$

Тогда, функция f будет следующим множеством:

$$f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\} \tag{2}$$

Важно. Если для любых x_1, x_2 верно $f(x_1) = f(x_2)$ (условие 2 из определения), то обратное, не обязательно верно, из того, что $f(1) = f(2)$ не следует, что $1 = 2$.

Важно. Если для каждого $x \in X$ обязательно, чтобы $(x, y) \in f$ (условие 1 из определения), то необязательно, чтобы для каждого $y \in Y$ было верно $(x, y) \in f$.

Пример. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{a, b, c, d, e\}$, то множество

$$f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\} \tag{3}$$

является функцией.

Поскольку не для каждого множества можно выписать его элементы (любые бесконечные множества), возникает необходимость иначе задавать фукнции на таких множествах

Пример. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f(x) = 2x$. Тогда функция f является следующим множеством

$$\{(x, 2x) \text{ где } x \in \mathbb{R}\} \tag{4}$$

то есть множеством всех пар $(x, 2x)$ где $x \in \mathbb{R}$.

2.2 Биекции

Отображение переводят одни элементы в другие, по тому же самому принципу они и переводят множества в множества. Пусть

$$\begin{cases} f(1) = a \\ f(2) = a \\ f(3) = b. \end{cases} \tag{5}$$

тогда $f(\{1, 3\}) = \{a, b\}$.

Грубо говоря, если взять множество A и применить к каждому его элементу функцию f и результаты сложить в одном множестве B, получим образ множества $f(A) = B$

Дадим строгое определение

Определение 4. *Пусть $f : X \to Y$ и $A \subset X$. **Образом** $f(A)$ называется множество **всех** таких $y \in Y$ что существует $x \in X$ такой, что*

$$f(x) = y.$$

Определение 5. *Функция $f : X \to Y$ называется **сюръекцией**, если $f(X) = Y$*

Определение 6. *Функция $f : X \to Y$ называется **инъекцией** или **однозначной**, если для любых x_1, x_2 верно, что если $f(x_1) = f(x_2)$ то $x_1 = x_2$*

Определение 7. *Если функция **инъективна** и **сюръективна**, то она называется **биективной** или **взаимно-однозначной***

Примечание. Биекция сопостовляет каждому x ровно один y (инъективность) и для каждого y найдется x (сюръективность), притом только один (функциональность).

2.2.1 Упражнение

1. функциями
2. сюръекциями
3. инъекциями
4. биекциями

$$f : X \to Y$$

где

$$X = \{1, 2, 3\}$$

$$Y = \{4, 6, 7\}$$

1. $\{(1, a), (2, a), (3, b)\}$
2. $\{(1, 4), (2, 7)\}$
3. $\{(1, 4), (2, 1), (3, 7)\}$
4. $\{(1, 4), (2, 7), (3, 6)\}$
5. $\{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$
6. $\{(1, 4), (2, 6), (3, 7), (2, 7)\}$

2.2.2 Упражнение

Пусть

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

указать, какие из следующих функций существуют

1. $q(x) = af(x) + bg(x)$
2. $q(x) = f(g(x))$
3. $q(x) = af(x) + bh(x)$
4. $q(x) = g(f(x))$
5. $q(x) = h(f(x))$

3 Линейное пространство $\mathbb{R}^m$

Элементами $\mathbb{R}^m$ являются упорядоченные наборы n вещественных чисел.

Пусть

$$\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$
$$\overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$
$$a \in \mathbb{R}$$

3.1 Определение

Введем следующие операции над вещественными числами:

1. Сумма:
$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m)$$
2. Умножение на число:
$$a\overline{x} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_m)$$

3.2 Канонический базис и координаты

Определение 8. ***Линейной комбинацией*** *векторов*

$$\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$$

с коэффициентами

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

называется вектор

$$\overline{x} = a_1\overline{x_1} + a_2\overline{x_2}, \dots + a_n\overline{x_n}$$

.

Определение 9. ***Каноническим базисом*** *в* $\mathbb{R}^m$ *называется упорядоченный набор векторов* $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_m})$ *где*

$$\overline{e_1} = (1, 0, \ldots, 0)$$
$$\overline{e_2} = (0, 1, \ldots, 0)$$
$$\ldots$$
$$\overline{e_m} = (0, 0, \ldots, 1)$$

Таким образом, у вектора $\overline{e_i}$ в каноническом базисе на $i-$ой коориднате стоит 1, а на остальных — 0.

Определение 10. *Говорят, что вектор* $\overline{x}$ *разложен по каноническому базису, если он представлен в виде линейной комбинации*

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2}, \ldots + x_n\overline{e_n}.$$

Пример.

$$(5, 3, 2) = 5\overline{e_1} + 3\overline{e_2} + 2\overline{e_3}$$

4 Линейный оператор $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

4.1 Определение

Определение 11. *Функция* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *называется* ***линейным оператором*** *если выполнены два условия* ***для любых*** $\overline{x}, \overline{y}, a$

1.
$$f(a\overline{x}) = af(\overline{x})$$

2.
$$f(\overline{x} + \overline{y}) = f(\overline{x}) + f(\overline{y})$$

4.2 Общий вид линейных операторов

4.2.1 Упражнение

Теорема 1.

$$f(a_1\overline{x_1} + a_2\overline{x_2}, \ldots + a_n\overline{x_n}) = a_1f(\overline{x_1}) + a_2f(\overline{x_2}) + \ldots + a_nf(\overline{x_n}) \tag{6}$$

Доказательство. Выполнить самостоятельно.

Исследуем, как выглядят линейные операторы $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Пусть $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_m})$ — канонический базис, тогда

$$f(\overline{x}) = f(x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2}, \ldots + x_n\overline{e_n}) = x_1f(\overline{e_1}) + x_2f(\overline{e_2}) + \ldots + x_nf(\overline{e_n}) \tag{7}$$

Обзначим

$$\overline{a_i} = f(\overline{e_i}) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$f(\overline{e_i})$ имеет n координат, потому что f переводит m-мерные векторы в n-мерные векторы. Строки идут от 1 до n а столбец имеет номер i. Преобразуем уравнение (7)

$$x_1 f(\overline{e_1}) + x_2 f(\overline{e_2}) + \ldots + x_n f(\overline{e_n}) =$$
$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

Полученные векторы-столбцы пишут подряд, объединяя в матрицу. Далее, введем определение умножение матрицы на вектор так, чтобы

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = A\overline{x}$$

Важно. Так же, матрицу A можно записать на как набор векторов-столбцов

$$A = (\overline{a_1}, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m})$$

Данные рассуждения оформим в качестве теоремы:

Теорема 2. *Линейные операторы $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ имеют вид $f(x) = Ax$, где A — матрица размерности $n \times m$ (m столбцов и n строк). Притом, i—ый вектор-столбец $\overline{a_i}$ матрицы $\overline{a_i} = f(\overline{e_i})$.*

4.3 Умножение матриц

Пусть

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

Тогда $h(x) = g(f(x))$ — линейный оператор.

1.
$$h(ax) = g(f(ax)) = g(af(x)) = ag(f(x)) = ah(x)$$

2.
$$h(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x)+f(y)) = g(f(x))+g(f(y)) = h(x)+h(y)$$

Пусть $A = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m})$ — матрица f, $B = (\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots, \overline{b_n})$ — матрица g, $C = (\overline{c_1}, \overline{c_2}, \ldots, \overline{c_m})$ — матрица h. Тогда

$$\overline{c_i} = h(\overline{e_i}) = g(f(\overline{e_i})) = g(\overline{a_1}) = B\overline{a_1}$$

Определение 12. *Полученная в результате матрица оператора h называется* ***произведением*** *матрицы B на A.*

Важно. Чтобы вычислить прозиведение BA нужно последовательно применить матрицу B к столбцам матрицы A и последовательно объединить в матрицу.

4.3.1 Упражнение

Пусть

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

доказать что функция $h(x) = af(x) + bg(x)$ — линейный оператор. Пусть $A = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m})$ — матрица f, $B = (\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots, \overline{b_m})$ — матрица g. Найти матрицу оператора h.

5 Системы линейных уравнений (СЛАУ)

5.1 Определение

Определение 13. *Система следующего вида называется* ***системой линейных уравнений (СЛАУ)*** *относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Данная система содержит n уравнение и m переменных.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

5.2 Матричное представление

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\overline{x} = \overline{b}$$

Ранее установлено, что умножение матрицы на вектор — есть линейный оператор $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Отсюда получим теорему

Теорема 3. *Решать систему линейных уравнений — то же самое, что решать уравнение $f(\overline{x}) = \overline{b}$, где $\overline{x} \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$ и $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейные оператор.*

Рассмотрим СЛАУ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ей в соответсвтие можно сопоставить матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

здесь вертикальная черта не несет в себе никакого математического смысла и просто нужна, чтобы визуально отделить матрицу СЛАУ и столбец-решение.

Определение 14. *Пусть дана СЛАУ*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Главная матрица системы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Дополненная матрица системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

5.3 Метод гаусса

Определение 15. *Следующие действия с матрицей называются* ***элементарными преобразованиями матрицы****:*

1. *добавление к строке матрицы другой строки;*

2. *умножение строки матрицы на число, отличное от нуля.*

если матрица B получена из A элементарными преобразованиями, то пишут $A \to B$.

Теорема 4. *Пусть A, B — матрицы и $A \to B$. Тогда системы $A\overline{x}$ и $B\overline{x}$ равносильны.*

Пример. Пусть дана система.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

Прибавим к первой строке вторую (это равносильное преобразование)

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

Перепишем эти рассуждения в матричном виде

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Определение 16. *содержимое...*

Преобразуем эту матрицу так, чтобы **главная матрица системы** стала единичной.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

По итогу, получаем следующее

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Важно. Таким образом, суть метода Гаусса заключается в том, чтобы элементарными преобразованиями сделать из главной матрицы системы единичную.

Важно. Последовательность элементарных преобразований **зависит** только от **главной матрицы** и **ек зависит** от столбца-решения.

5.3.1 Упражнение

Решить СЛАУ **строго теми же** элементарными преобразованиями, что из примера

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

6 Матричные уравнения