ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Д. В. КОЛОМИЕЦ

27 июля 2025 г.

Содержание

1 Общие математические сведения

1.1 $\Rightarrow$

Знак $\Rightarrow$ означает «следует». Например $A \Rightarrow B$ означает из A следует B.

1.2 $\Leftrightarrow$

Знак $\Leftrightarrow$ означает «равносильно». Например $A \Leftrightarrow B$ означает из A равносильно B. Так же, если $A \Leftrightarrow B$ то это то же самое, $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

1.3 Фигурная скобка $\{$

Запись

$$\begin{cases} P_1 \\ P_2 \end{cases}$$

означает, что условия P_1 и P_2 выполняются одновременно (**логическое И**)

1.4 Квадратная скобка $[$

Запись

$$\left[\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \end{array}\right.$$

означает, что хотя бы одно из условий P_1 или P_2 выполняются (**логическое ИЛИ**)

1.5 Декартово произведение

Определение 1. ***Декартовым произведением*** *множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар (x, y) где $x \in X, y \in Y$.*

Обозначение 1.1. $X \times Y$

Декартово произведение можно обобщить для n множеств, так, элементами множества $X_1 \times X_2 \times \ldots X_n$ будут **упорядоченные наборы** или **кортежи** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ где $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n$.

Определение 2. ***Декартовой n-ой степенью*** *множества X называется множество $X^n = X \times X \times \ldots X$*

1.6 Закон контрапозиции

Пусть мы имеем утверждение $A \Rightarrow B$, то эквивалентным утверждением будет $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

Пример 1. Сказать: «фигура A — квадрат $\Rightarrow$ фигура B — прямоугольник» то же самое, что сказать: «фигура A — не прямоугольник $\Rightarrow$ фигура B — не квадрат».

2 Функция

2.1 Определение

Определение 3. ***Функцией, отображением*** $f : X \to Y$ *называется множество упорядоченных пар* (x, y) *где* $x \in X, y \in Y$ *такое, что*

1. *для любого* x *верно* $(x, y) \in f$*;*
2. *для любых* x_1, x_2 *верно* $f(x_1) = f(x_2)$ *(функциональность)*

Множество X *называется* ***областью определения*** f*. Множество* Y *называется* ***областью значений*** f

Пример 2. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{a, b\}$, и мы хотим задать отображение $f : X \to Y$. В первую очередь, для каждого элемента из X нужно указать значение из Y (условие 1 из определения). Допустим, для f верно

$$\begin{cases} f(1) = a \\ f(2) = a \\ f(3) = b. \end{cases} \tag{1}$$

тогда, функция f будет следующим множеством:

$$f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\} \tag{2}$$

Примечание. Если для любых x_1, x_2 верно $f(x_1) = f(x_2)$ (условие 2 из определения), то обратное, не обязательно верно, из того, что $f(1) = f(2)$ не следует, что $1 = 2$.

Примечание. Если для каждого $x \in X$ обязательно, чтобы $(x, y) \in f$ (условие 1 из определения), то необязательно, чтобы для каждого $y \in Y$ было верно $(x, y) \in f$.

Пример 3. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{a, b, c, d, e\}$, то множество

$$f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\} \tag{3}$$

является функцией.

Поскольку не для каждого множества можно выписать его элементы (любые бесконечные множества), возникает необходимость иначе задавать фукнции на таких множествах

Пример 4. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f(x) = 2x$. Тогда функция f является следующим множеством

$$\{(x, 2x) \text{ где } x \in \mathbb{R}\} \tag{4}$$

то есть множеством всех пар $(x, 2x)$ где $x \in \mathbb{R}$.

2.2 Биекции

Отображение переводят одни элементы в другие, по тому же самому принципу они и переводят множества в множества.

Пример 5. Пусть

$$\begin{cases} f(1) = a \\ f(2) = a \\ f(3) = b. \end{cases} \tag{5}$$

тогда $f(\{1, 3\}) = \{a, b\}$.

Грубо говоря, если взять множество A и применить к каждому его элементу функцию f и результаты сложить в одном множестве B, получим образ множества $f(A) = B$.

Дадим строгое определение

Определение 4. *Пусть $f : X \to Y$ и $A \subset X$. **Образом** $f(A)$ называется множество **всех** таких $y \in Y$ что существует $x \in X$ такой, что*

$$f(x) = y.$$

Определение 5. *Функция $f : X \to Y$ называется **сюръекцией**, если $f(X) = Y$*

Примечание. Другими словами, $f(X) = Y$ означает, что для каждого $y \in Y$ найдется $x \in X$ такой, $f(x) = y$.

Определение 6. *Функция $f : X \to Y$ называется **инъекцией** или **однозначной**, если для любых x_1, x_2 верно, что $x_1 \neq x_2$ то верно $f(x_1) \neq f(x_2)$*

Примечание. На языке хэш-функций можно сказать, что инъективность означает отсутствие коллизий.

Получим **эквивалентное** определение, применяя закон контрапозиции.

Определение 7. *Функция $f : X \to Y$ называется **инъекцией** или **однозначной**, если для любых x_1, x_2 верно, что если $f(x_1) = f(x_2)$ то $x_1 = x_2$*

Определение 8. *Если функция **инъективна** и **сюрьективна**, то она называется **биективной** или **взаимно-однозначной***

Примечание. Биекция сопостовляет каждому x **ровно один** y (инъективность) и **для каждого** y найдется x (сюръективность), притом только один (функциональность).

2.3 Упражнения

Упраженение 1. Указать, какие из следующих множеств являются

1. функциями;
2. сюръекциями;
3. инъекциями;
4. биекциями.

$$f : X \to Y$$

где

$$X = \{1, 2, 3\}$$
$$Y = \{4, 6, 7\}$$

1. $\{(1, a), (2, a), (3, b)\}$
2. $\{(1, 4), (2, 7)\}$
3. $\{(1, 4), (2, 1), (3, 7)\}$
4. $\{(1, 4), (2, 7), (3, 6)\}$
5. $\{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$
6. $\{(1, 4), (2, 6), (3, 7), (2, 7)\}$

Упражнение 2. Пусть

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

указать, какие из следующих функций существуют

1. $q(x) = af(x) + bg(x)\ a, b \in \mathbb{R}$
2. $q(x) = f(g(x))$
3. $q(x) = af(x) + bh(x)\ a, b \in \mathbb{R}$
4. $q(x) = g(f(x))$
5. $q(x) = h(f(x))$

3 Линейное пространство $\mathbb{R}^m$

Элементами $\mathbb{R}^m$ являются упорядоченные наборы n вещественных чисел.

Пусть в рамках главы

$$\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$
$$\overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$
$$a \in \mathbb{R}$$

Теорема 1.

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) = (y_1, y_2, \dots, y_m) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \vdots \\ x_m = y_m \end{cases}$$

3.1 Определение

Введем следующие операции над вещественными числами:

1. Сумма:
$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m)$$

2. Умножение на число:
$$a\overline{x} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_m)$$

3.2 Канонический базис и координаты

Определение 9. ***Линейной комбинацией*** *векторов*

$$\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$$

с коэффициентами

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

называется вектор

$$\overline{x} = a_1\overline{x_1} + a_2\overline{x_2}, \dots + a_n\overline{x_n}.$$

Определение 10. ***Каноническим базисом*** *в $\mathbb{R}^m$ называется упорядоченный набор векторов $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_m})$ где*

$$\overline{e_1} = (1, 0, \dots, 0)$$
$$\overline{e_2} = (0, 1, \dots, 0)$$
$$\dots$$
$$\overline{e_m} = (0, 0, \dots, 1)$$

Пояснение. Таким образом, у вектора $\overline{e_i}$ в каноническом базисе на $i-$ой коориднате стоит 1, а на остальных — 0.

Определение 11. *Говорят, что вектор $\overline{x}$ разложен по каноническому базису, если он представлен в виде линейной комбинации*

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2}, \ldots + x_n\overline{e_n}.$$

Пример.

$$(5, 3, 2) = 5\overline{e_1} + 3\overline{e_2} + 2\overline{e_3}$$

Упражнение 3. Вычислить

$$3(\overline{e_1} + \overline{e_2}) + 4(\overline{e_2} + \overline{e_3})$$

4 Линейный оператор $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

4.1 Определение

Определение 12. *Функция $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ называется* ***линейным оператором*** *если выполнены два условия* ***для любых*** $\overline{x}, \overline{y}, a$

1.
$$f(a\overline{x}) = af(\overline{x})$$

2.
$$f(\overline{x} + \overline{y}) = f(\overline{x}) + f(\overline{y})$$

4.2 Общий вид линейных операторов

Теорема 2.

$$f(a_1\overline{x_1} + a_2\overline{x_2}, \ldots + a_n\overline{x_n}) = a_1 f(\overline{x_1}) + a_2 f(\overline{x_2}) + \ldots + a_n f(\overline{x_n}) \tag{6}$$

Исследуем, как выглядят линейные операторы $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Пусть

$$(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_m})$$

— канонический базис, тогда

$$f(\overline{x}) = f(x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2}, \ldots + x_n\overline{e_n}) = x_1 f(\overline{e_1}) + x_2 f(\overline{e_2}) + \ldots + x_n f(\overline{e_n}) \tag{7}$$

Обзначим

$$\overline{a_i} = f(\overline{e_i}) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \ldots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$f(\overline{e_i})$ имеет n координат, потому что f переводит m-мерные векторы в n-мерные векторы. Строки идут от 1 до n а столбец имеет номер i. Преобразуем уравнение (7)

$$x_1 f(\overline{e_1}) + x_2 f(\overline{e_2}) + \ldots + x_n f(\overline{e_n}) =$$
$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \ldots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

Полученные векторы-столбцы пишут подряд, объединяя в матрицу. Далее, введем определение умножение матрицы на вектор так, чтобы

Определение 13.

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Примечание. Так же, матрицу A можно записать на как набор векторов-столбцов
$$A = (\overline{a_1}, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m})$$

Данные рассуждения оформим в качестве теоремы.

Теорема 3. *Линейные операторы $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ имеют вид $f(x) = Ax$, где A — матрица размерности $n \times m$ (m столбцов и n строк). Притом, i—ый вектор-столбец $\overline{a_i}$ матрицы $\overline{a_i} = f(\overline{e_i})$.*

4.3 Умножение матриц

Пусть

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

Тогда $h(x) = g(f(x))$ — линейный оператор.

1. $$h(ax) = g(f(ax)) = g(af(x)) = ag(f(x)) = ah(x)$$

2. $$h(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x)+f(y)) = g(f(x))+g(f(y)) = h(x)+h(y)$$

Пусть
$$A = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_m})$$
— матрица f,
$$B = (\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_n})$$
— матрица g,
$$C = (\overline{c_1}, \overline{c_2}, \dots, \overline{c_m})$$
— матрица h. Тогда используя теорему (3) получим
$$\overline{c_i} = h(\overline{e_i}) = g(f(\overline{e_i})) = g(\overline{a_1}) = B\overline{a_1}$$

Определение 14. *Полученная в результате матрица оператора h называется **произведением** матрицы B на A.*

Примечание. Чтобы вычислить произведение BA нужно последовательно применить матрицу B к столбцам матрицы A и последовательно объединить в матрицу.

Примечание. Произведение матриц в общем случае **некоммутативно**, т.е. $BA \neq AB$.

Пример 6. Вычислим. Обозначим левую матрицу B, правую — A.
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = X$$

Вычислим первый столбец X, применим B к первому столбцу A
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 23 \\ 23 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Вычислим второй столбец X, применим B ко второму столбцу A
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 18 \\ 19 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Получаем в итоге

$$X = \begin{pmatrix} 23 & 18 \\ 23 & 19 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

4.4 Упражнения

Упражнение 4. Доказать теорему (2).

Упражнение 5. Пусть

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

доказать что функция

$$h(x) = af(x) + bg(x)$$

— линейный оператор.

Упражнение 6. Пусть

$$A = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m})$$

— матрица f,

$$B = (\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots, \overline{b_n})$$

— матрица g, используя теорему (3), найти матрицу оператора h.

5 Системы линейных уравнений (СЛАУ)

5.1 Определение

Определение 15. *Система следующего вида называется* ***системой линейных уравнений (СЛАУ)*** *относительно переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_m$. *Данная система содержит* n *уравнений и* m *переменных.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

5.2 Матричное представление

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\overline{x} = \overline{b}$$

Ранее установлено, что умножение матрицы на вектор — есть линейный оператор $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, см. теорема (3). Отсюда получим теорему

Теорема 4. *Решать систему линейных уравнений — то же самое, что решать уравнение $f(\overline{x}) = \overline{b}$, где $\overline{x} \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$ и $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейные оператор.*

Рассмотрим СЛАУ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ей в соответсвтие можно сопоставить матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{array} \right)$$

Примечание. Здесь вертикальная черта не несет в себе никакого математического смысла и просто нужна, чтобы визуально отделить **главную** матрицу СЛАУ и столбец-решение.

Определение 16. *Пусть дана СЛАУ*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Главная матрица системы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Дополненная матрица системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

5.3 Метод гаусса

Определение 17. *Следующие действия с матрицей называются* ***элементарными преобразованиями матрицы****:*

1. *добавление к строке матрицы другой строки;*
2. *умножение строки матрицы на число, отличное от нуля.*

если матрица B получена из A элементарными преобразованиями, то пишут $A \to B$.

Теорема 5. *Пусть A, B — матрицы и $A \to B$. Тогда системы $A\overline{x}$ и $B\overline{x}$ равносильны.*

Примечание. Сложение уравнения с другим уравнением приводит к эквивалентной системе. Умножение уравнения системы на число, отличное от нуля приводит к эквивалентной системе.

Пример 7. Пусть дана система.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

Прибавим к первой строке вторую (это равносильное преобразование)

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

Перепишем эти рассуждения в матричном виде

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Преобразуем эту матрицу так, чтобы **главная матрица системы** стала единичной.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

По итогу, получаем следующее

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Примечание. Таким образом, суть метода Гаусса заключается в том, чтобы элементарными преобразованиями сделать из главной матрицы системы единичную.

Примечание. Последовательность элементарных преобразований **зависит** только от **главной матрицы** и **не зависит** от столбца-решения.

5.4 Упражнения

Упраженение 7. Решить СЛАУ **строго теми же** элементарными преобразованиями, что из примера (7).

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

6 Матричные уравнения

6.1 Определение

Рассмотрим матричное уравнение

$$AX = B, \tag{9}$$

где A, B — известные матрицы, X — неизвестная матрица.

6.2 Пример решения

Пример 8. Решим уравнение

$$AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Для начала определимся с размерами X. По определению произведения матриц, мы будем последовательно применять A к столбцам X, то есть число столбцов X совпадает с числом столбцов B, их 3. Чтобы матрицу A можно было применить к столбцу, его высота должна совпадать с шириной A, её ширина 2. Таким образом, X — матрица 2×3. Перепишем наше уравнение в следующем виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Чтобы решить данную задачу, необходимо решить 3 СЛАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ранее уже обговаривалось, что порядок элементарных преобразований зависит только от **главной матрицы**, поэтому эти 3 системы можно описать одной матрицей, справа от черты размещены все столбцы-решения

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 8 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 7 \end{array} \right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

В итоге получаем результат

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6.3 Упражнения

Упраженение 8. Решить уравнение

$$AX = E$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение 18. *Пусть*

$$AX = E \tag{10}$$

тогда матрица X называется ***обратной*** *к A и обозначается A^{-1}*

7 Базис

7.1 Линейная зависимость

Рассмотрим векторы

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ c = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Упражнение 9. Проверить, что $c = 2a + 3b$

Здесь мы видим, что c можно представить в виде линейной комбинации векторов (см. определение 9) a и b с коэффициентам 2 и 3.

Рассмотрим векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

и линейную комбинацию

$$u = ae_1 + be_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

очевидно, что каковы бы ни были $a, b \in \mathbb{R}$, всегда $u \neq e_3$. Таким образом, e_3 нельзя представить в виде линейной комбинации e_1 и e_2.

Определение 19. *Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m}$ называются* ***линейно зависимыми****, если среди них есть вектор $\overline{a_i}$, который выражается через остальные*

$$\overline{a_i} = \alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \ldots \alpha_{i-1}\overline{a_{i-1}} + \alpha_{i+1}\overline{a_{i+1}} \ldots + \alpha_m\overline{a_m} \tag{13}$$

Определение 20. *Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m}$ называются* ***линейно независимыми****, если они не являются линейно зависимыми.*

Таким образом, набор векторов (11) — линейно зависимый, а (12) — линейно независимый.

7.2 Определение базиса

Определение 21. *Пусть даны векторы линейно независимые $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m}$, если при добавлении любого вектора b эта система становится линейно зависимой, то такой набор называется* ***базисом****.*

Пример 9. Набор векторов e_1, e_2, e_3 (12) является базисом.

Пример 10. Набор векторов e_1, e_2 (12) не является базисом.

Теорема 6. *Если система векторов $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m})$ является* ***базисом*** *то любой вектор $\overline{b}$ можно представить в линейной комбинации*

$$\overline{b} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \ldots + \alpha_m \overline{a_m} \tag{14}$$

числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — называются ***координатами*** *вектора*

Примечание. Уравнение (14) можно переписать в матричном виде

$$(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \tag{15}$$

Определение 22. *Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ из уравнения (14) — называются* ***координатами*** *вектора $\overline{b}$ в базисе $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m})$.*

7.3 Переход к новому базису

Пусть в линейном пространстве имеются два базиса $A = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_m})$ и $B = (\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_m})$. Пусть для любого $\overline{v_i}$ известны координаты в базисе A

$$\overline{v_i} = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_m}) \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{pmatrix}$$

тогда базис B можно выразить через базис A

$$(\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_m}) = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_m}) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mm} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Далее, введем обозначение

$$X = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

Тогда уравнение (16) примет вид

$$(\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_m}) = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_m})X \tag{17}$$

Определение 23. *Матрица X из уравнения (17) называется матрицей перехода от базиса A к базису B.*

7.4 Изменение координат при переходе к новому базису

Теорема 7. *Пусть даны базисы $A = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_m})$, $B = (\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_m})$, X — матрица перехода от базиса A к базису B и в базисе A вектор x имеет координаты*

$$(a_1, a_2 \ldots, a_m)$$

а в базисе B

$$(b_1, b_2 \ldots, b_m)$$

тогда верно следующее соотношение

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = X^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \tag{18}$$

Доказательство. Для вектора $\overline{x}$ верно соотношение

$$\overline{x} = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_m}) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_m}) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

преобразуем уравнение, заменяя B на произведение базиса A на матрицу перехода X

$$(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_m}) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_m})X \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

поскольку в равенстве слева и справа базисы совпадают, то, следовательно, они умножаются на одну и ту же матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

домножим обе части уравнения слева на матрицу X^{-1} и получим уравнение (18)

$$X^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\square$

7.5 Упражнения

Упражнение 10. Пусть, $\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. Найти матрицу перехода от базиса $A = (\overline{u}, \overline{v})$ к $B = (\overline{a}, \overline{b})$

2. Пусть вектор $\overline{x}$ имеет координаты $(2, 5)$ в базисе A, найти его координаты в базисе B.