

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Д. В. КОЛОМИЕЦ

26 июля 2025 г.

Содержание

1	Общие математические сведения	2
1.1	\Rightarrow	2
1.2	\Leftrightarrow	2
1.3	Фигурная скобка $\{$	2
1.4	Квадратная скобка $[$	2
1.5	Декартово произведение	2
1.6	Закон контрапозиции	3
2	Функция	3
2.1	Определение	3
2.2	Биекции	4
2.3	Упражнения	5
3	Линейное пространство \mathbb{R}^m	6
3.1	Определение	6
3.2	Канонический базис и координаты	6
4	Линейный оператор $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$	7
4.1	Определение	7
4.2	Общий вид линейных операторов	7
4.3	Умножение матриц	8
4.4	Упражнения	10
5	Системы линейных уравнений (СЛАУ)	10
5.1	Определение	10
5.2	Матричное представление	11
5.3	Метод гаусса	12
5.4	Упражнения	13
6	Матричные уравнения	13
6.1	Определение	13
6.2	Пример решения	14
6.3	Упражнения	14

7	Базис	15
7.1	Линейная зависимость	15
7.2	Определение базиса	16
7.3	Переход к новому базису	16
7.4	Изменение координат при переходе к новому базису	17
7.5	Упражнения	18

1 Общие математические сведения

1.1 \Rightarrow

Знак \Rightarrow означает «следует». Например $A \Rightarrow B$ означает из A следует B .

1.2 \Leftrightarrow

Знак \Leftrightarrow означает «равносильно». Например $A \Leftrightarrow B$ означает из A равносильно B . Так же, если $A \Leftrightarrow B$ то это то же самое, $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

1.3 Фигурная скобка $\{$

Запись

$$\begin{cases} P_1 \\ P_2 \end{cases}$$

означает, что условия P_1 и P_2 выполняются одновременно (**логическое И**)

1.4 Квадратная скобка $[$

Запись

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

означает, что хотя бы одно из условий P_1 или P_2 выполняются (**логическое ИЛИ**)

1.5 Декартово произведение

Определение 1. *Декартовым произведением множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар (x, y) где $x \in X, y \in Y$.*

Обозначение 1.1. $X \times Y$

Декартово произведение можно обобщить для n множеств, так, элементами множества $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ будут **упорядоченные наборы** или **кортежи** (x_1, x_2, \dots, x_n) где $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n$.

Определение 2. *Декартовой n -ой степенью множества X называется множество $X^n = X \times X \times \dots \times X$*

1.6 Закон контрапозиции

Пусть мы имеем утверждение $A \Rightarrow B$, то эквивалентным утверждением будет $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$

Пример 1. Сказать: «фигура A — квадрат \Rightarrow фигура B — прямоугольник» то же самое, что сказать: «фигура A — не прямоугольник \Rightarrow фигура B — не квадрат»

2 Функция

2.1 Определение

Определение 3. *Функцией, отображением $f : X \rightarrow Y$ называется множество упорядоченных пар (x, y) где $x \in X, y \in Y$ такое, что*

1. для любого x верно $(x, y) \in f$;
2. для любых x_1, x_2 верно $f(x_1) = f(x_2)$ (функциональность)

Множество X называется **областью определения** f . Множество Y называется **областью значений** f

Пример 2. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{a, b\}$, и мы хотим задать отображение $f : X \rightarrow Y$. В первую очередь, для каждого элемента из X нужно указать значение из Y (условие 1 из определения). Допустим, для f верно

$$\begin{cases} f(1) = a \\ f(2) = a \\ f(3) = b. \end{cases} \quad (1)$$

тогда, функция f будет следующим множеством:

$$f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\} \quad (2)$$

Примечание. Если для любых x_1, x_2 верно $f(x_1) = f(x_2)$ (условие 2 из определения), то обратное, не обязательно верно, из того, что $f(1) = f(2)$ не следует, что $1 = 2$.

Примечание. Если для каждого $x \in X$ обязательно, чтобы $(x, y) \in f$ (условие 1 из определения), то необязательно, чтобы для каждого $y \in Y$ было верно $(x, y) \in f$.

Пример 3. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{a, b, c, d, e\}$, то множество

$$f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\} \quad (3)$$

является функцией.

Поскольку не для каждого множества можно выписать его элементы (любые бесконечные множества), возникает необходимость иначе задавать функции на таких множествах

Пример 4. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $f(x) = 2x$. Тогда функция f является следующим множеством

$$\{(x, 2x) \text{ где } x \in \mathbb{R}\} \quad (4)$$

то есть множеством всех пар $(x, 2x)$ где $x \in \mathbb{R}$.

2.2 Биекции

Отображение переводят одни элементы в другие, по тому же самому принципу они и переводят множества в множества.

Пример 5. Пусть

$$\begin{cases} f(1) = a \\ f(2) = a \\ f(3) = b. \end{cases} \quad (5)$$

тогда $f(\{1, 3\}) = \{a, b\}$.

Грубо говоря, если взять множество A и применить к каждому его элементу функцию f и результаты сложить в одном множестве B , получим образ множества $f(A) = B$.

Дадим строгое определение

Определение 4. Пусть $f : X \rightarrow Y$ и $A \subset X$. **Образом** $f(A)$ называется множество *всех* таких $y \in Y$ что существует $x \in X$ такой, что

$$f(x) = y.$$

Определение 5. Функция $f : X \rightarrow Y$ называется **сюръекцией**, если $f(X) = Y$

Примечание. Другими словами, $f(X) = Y$ означает, что для каждого $y \in Y$ найдется $x \in X$ такой, $f(x) = y$.

Определение 6. Функция $f : X \rightarrow Y$ называется **инъекцией** или **однозначной**, если для любых x_1, x_2 верно, что $x_1 \neq x_2$ то верно $f(x_1) \neq f(x_2)$

Примечание. На языке хэш-функций можно сказать, что инъективность означает отсутствие коллизий.

Получим эквивалентное определение, применяя закон контрапозиции.

Определение 7. Функция $f : X \rightarrow Y$ называется **инъекцией** или **однозначной**, если для любых x_1, x_2 верно, что если $f(x_1) = f(x_2)$ то $x_1 = x_2$

Определение 8. Если функция *инъективна и сюръективна*, то она называется *биективной* или *взаимно-однозначной*

Примечание. Биекция сопоставляет каждому x **ровно один** y (инъективность) и **для каждого** y найдется x (сюръективность), притом только один (функциональность).

2.3 Упражнения

Упражнение 1. Указать, какие из следующих множеств являются

1. функциями;
2. сюръекциями;
3. инъекциями;
4. биекциями.

$$f : X \rightarrow Y$$

где

$$X = \{1, 2, 3\}$$

$$Y = \{4, 6, 7\}$$

1. $\{(1, a), (2, a), (3, b)\}$
2. $\{(1, 4), (2, 7)\}$
3. $\{(1, 4), (2, 1), (3, 7)\}$
4. $\{(1, 4), (2, 7), (3, 6)\}$
5. $\{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$
6. $\{(1, 4), (2, 6), (3, 7), (2, 7)\}$

Упражнение 2. Пусть

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

указать, какие из следующих функций существуют

1. $q(x) = af(x) + bg(x)$ $a, b \in \mathbb{R}$
2. $q(x) = f(g(x))$
3. $q(x) = af(x) + bh(x)$ $a, b \in \mathbb{R}$
4. $q(x) = g(f(x))$
5. $q(x) = h(f(x))$

3 Линейное пространство \mathbb{R}^m

Элементами \mathbb{R}^m являются упорядоченные наборы n вещественных чисел.

Пусть в рамках главы

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$a \in \mathbb{R}$$

Теорема 1.

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) = (y_1, y_2, \dots, y_m) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \vdots \\ x_m = y_m \end{cases}$$

3.1 Определение

Введем следующие операции над вещественными числами:

1. Сумма:

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m)$$

2. Умножение на число:

$$a\bar{x} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_m)$$

3.2 Канонический базис и координаты

Определение 9. *Линейной комбинацией векторов*

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$$

с коэффициентами

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

называется вектор

$$\bar{x} = a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \dots + a_n\bar{x}_n.$$

Определение 10. *Каноническим базисом в \mathbb{R}^m называется упорядоченный набор векторов $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m)$ где*

$$\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\bar{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

$$\dots$$

$$\bar{e}_m = (0, 0, \dots, 1)$$

Пояснение. Таким образом, у вектора $\overline{e_i}$ в каноническом базисе на i -ой координате стоит 1, а на остальных — 0.

Определение 11. Говорят, что вектор \overline{x} разложен по каноническому базису, если он представлен в виде линейной комбинации

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + \dots + x_n\overline{e_n}.$$

Пример.

$$(5, 3, 2) = 5\overline{e_1} + 3\overline{e_2} + 2\overline{e_3}$$

Упражнение 3. Вычислить

$$3(\overline{e_1} + \overline{e_2}) + 4(\overline{e_2} + \overline{e_3})$$

4 Линейный оператор $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

4.1 Определение

Определение 12. Функция $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **линейным оператором** если выполнены два условия **для любых** $\overline{x}, \overline{y}, a$

1.

$$f(a\overline{x}) = af(\overline{x})$$

2.

$$f(\overline{x} + \overline{y}) = f(\overline{x}) + f(\overline{y})$$

4.2 Общий вид линейных операторов

Теорема 2.

$$f(a_1\overline{x_1} + a_2\overline{x_2} + \dots + a_n\overline{x_n}) = a_1f(\overline{x_1}) + a_2f(\overline{x_2}) + \dots + a_nf(\overline{x_n}) \quad (6)$$

Исследуем, как выглядят линейные операторы $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Пусть

$$(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_m})$$

— канонический базис, тогда

$$f(\overline{x}) = f(x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + \dots + x_n\overline{e_n}) = x_1f(\overline{e_1}) + x_2f(\overline{e_2}) + \dots + x_nf(\overline{e_n}) \quad (7)$$

Обозначим

$$\overline{a_i} = f(\overline{e_i}) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$f(\overline{e_i})$ имеет n координат, потому что f переводит m -мерные векторы в n -мерные векторы. Строки идут от 1 до n а столбец имеет номер i . Преобразуем уравнение (7)

$$x_1 f(\overline{e_1}) + x_2 f(\overline{e_2}) + \dots + x_n f(\overline{e_n}) =$$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

Полученные векторы-столбцы пишут подряд, объединяя в матрицу. Далее, введем определение умножение матрицы на вектор так, чтобы

Определение 13.

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Примечание. Так же, матрицу A можно записать на как набор векторов-столбцов

$$A = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_m})$$

Данные рассуждения оформим в качестве теоремы.

Теорема 3. *Линейные операторы $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеют вид $f(x) = Ax$, где A — матрица размерности $n \times m$ (m столбцов и n строк). Притом, i -ый вектор-столбец $\overline{a_i}$ матрицы $\overline{a_i} = f(\overline{e_i})$.*

4.3 Умножение матриц

Пусть

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

Тогда $h(x) = g(f(x))$ — линейный оператор.

1.

$$h(ax) = g(f(ax)) = g(af(x)) = ag(f(x)) = ah(x)$$

2.

$$h(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x)+f(y)) = g(f(x))+g(f(y)) = h(x)+h(y)$$

Пусть

$$A = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_m})$$

— матрица f ,

$$B = (\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_n})$$

— матрица g ,

$$C = (\overline{c_1}, \overline{c_2}, \dots, \overline{c_m})$$

— матрица h . Тогда используя теорему (3) получим

$$\overline{c_i} = h(\overline{e_i}) = g(f(\overline{e_i})) = g(\overline{a_1}) = B\overline{a_1}$$

Определение 14. Полученная в результате матрица оператора h называется **произведением** матрицы B на A .

Примечание. Чтобы вычислить произведение BA нужно последовательно применить матрицу B к столбцам матрицы A и последовательно объединить в матрицу.

Примечание. Произведение матриц в общем случае **некоммутативно**, т.е. $BA \neq AB$.

Пример 6. Вычислим. Обозначим левую матрицу B , правую — A .

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = X$$

Вычислим первый столбец X , применим B к первому столбцу A

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 23 \\ 23 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Вычислим второй столбец X , применим B ко второму столбцу A

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18 \\ 19 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Получаем в итоге

$$X = \begin{pmatrix} 23 & 18 \\ 23 & 19 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

4.4 Упражнения

Упражнение 4. Доказать теорему (2).

Упражнение 5. Пусть

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ g : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

доказать что функция

$$h(x) = af(x) + bg(x)$$

— линейный оператор.

Упражнение 6. Пусть

$$A = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_m})$$

— матрица f ,

$$B = (\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_n})$$

— матрица g , используя теорему (3), найти матрицу оператора h .

5 Системы линейных уравнений (СЛАУ)

5.1 Определение

Определение 15. Система следующего вида называется **системой линейных уравнений (СЛАУ)** относительно переменных x_1, x_2, \dots, x_m . Данная система содержит n уравнений и m переменных.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

5.2 Матричное представление

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\bar{x} = \bar{b}
\end{aligned}$$

Ранее установлено, что умножение матрицы на вектор — есть линейный оператор $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, см. теорема (3). Отсюда получим теорему

Теорема 4. *Решать систему линейных уравнений — то же самое, что решать уравнение $f(\bar{x}) = \bar{b}$, где $\bar{x} \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$ и $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейные оператор.*

Рассмотрим СЛАУ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ей в соответствии можно сопоставить матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array} \right)$$

Примечание. Здесь вертикальная черта не несет в себе никакого математического смысла и просто нужна, чтобы визуальнo отделить **главную** матрицу СЛАУ и столбец-решение.

Определение 16. Пусть дана СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Главная матрица системы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Дополненная матрица системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array} \right)$$

5.3 Метод гаусса

Определение 17. Следующие действия с матрицей называются **элементарными преобразованиями матрицы**:

1. добавление к строке матрицы другой строки;
2. умножение строки матрицы на число, отличное от нуля.

если матрица B получена из A элементарными преобразованиями, то пишут $A \rightarrow B$.

Теорема 5. Пусть A, B — матрицы и $A \rightarrow B$. Тогда системы $A\bar{x}$ и $B\bar{x}$ равносильны.

Примечание. Сложение уравнения с другим уравнением приводит к эквивалентной системе. Умножение уравнения системы на число, отличное от нуля приводит к эквивалентной системе.

Пример 7. Пусть дана система.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

Прибавим к первой строке вторую (это равносильное преобразование)

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

Перепишем эти рассуждения в матричном виде

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

Преобразуем эту матрицу так, чтобы **главная матрица системы** стала единичной.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

По итогу, получаем следующее

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Примечание. Таким образом, суть метода Гаусса заключается в том, чтобы элементарными преобразованиями сделать из главной матрицы системы единичную.

Примечание. Последовательность элементарных преобразований **зависит** только от **главной матрицы** и **не зависит** от столбца-решения.

5.4 Упражнения

Упражнение 7. Решить СЛАУ **строго теми же** элементарными преобразованиями, что из примера (7).

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

6 Матричные уравнения

6.1 Определение

Рассмотрим матричное уравнение

$$AX = B, \tag{9}$$

где A, B — известные матрицы, X — неизвестная матрица.

6.2 Пример решения

Пример 8. Решим уравнение

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Для начала определимся с размерами X . По определению произведения матриц, мы будем последовательно применять A к столбцам X , то есть число столбцов X совпадает с числом столбцов B , их 3. Чтобы матрицу A можно было применить к столбцу, его высота должна совпадать с шириной A , её ширина 2. Таким образом, X — матрица 2×3 . Перепишем наше уравнение в следующем виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Чтобы решить данную задачу, необходимо решить 3 СЛАУ

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ранее уже обговаривалось, что порядок элементарных преобразований зависит только от **главной матрицы**, поэтому эти 3 системы можно описать одной матрицей, справа от черты размещены все столбцы-решения

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 8 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

В итоге получаем результат

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6.3 Упражнения

Упражнение 8. Решить уравнение

$$\begin{aligned} AX &= E \\ A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Определение 18. Пусть

$$AX = E \quad (10)$$

тогда матрица X называется **обратной** к A и обозначается A^{-1}

7 Базис

7.1 Линейная зависимость

Рассмотрим векторы

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Упражнение 9. Проверить, что $c = 2a + 3b$

Здесь мы видим, что c можно представить в виде линейной комбинации векторов (см. определение 9) a и b с коэффициентам 2 и 3.

Рассмотрим векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

и линейную комбинацию

$$u = ae_1 + be_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

очевидно, что каковы бы ни были $a, b \in \mathbb{R}$, всегда $u \neq e_3$. Таким образом, e_3 нельзя представить в виде линейной комбинации e_1 и e_2 .

Определение 19. Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_m}$ называются **линейно зависимыми**, если среди них есть вектор $\overline{a_i}$, который выражается через остальные

$$\overline{a_i} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \dots + \alpha_{i-1} \overline{a_{i-1}} + \alpha_{i+1} \overline{a_{i+1}} + \dots + \alpha_m \overline{a_m} \quad (13)$$

Определение 20. Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_m}$ называются **линейно независимыми**, если они не являются линейно зависимыми.

Таким образом, набор векторов (11) — линейно зависимый, а (12) — линейно независимый.

7.2 Определение базиса

Определение 21. Пусть даны векторы линейно независимые $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_m}$, если при добавлении любого вектора b эта система становится линейно зависимой, то такой набор называется **базисом**.

Пример 9. Набор векторов e_1, e_2, e_3 (12) является базисом.

Пример 10. Набор векторов e_1, e_2 (12) не является базисом.

Теорема 6. Если система векторов $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_m})$ является **базисом** то любой вектор \overline{b} можно представить в линейной комбинации

$$\overline{b} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \dots + \alpha_m \overline{a_m} \quad (14)$$

числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — называются **координатами** вектора

Примечание. Уравнение (14) можно переписать в матричном виде

$$(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_m}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \quad (15)$$

Определение 22. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ из уравнения (14) — называются **координатами** вектора \overline{b} в базисе $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_m})$.

7.3 Переход к новому базису

Пусть в линейном пространстве имеются два базиса $A = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_m})$ и $B = (\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_m})$. Пусть для любого $\overline{v_i}$ известны координаты в базисе A

$$\overline{v_i} = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_m}) \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{pmatrix}$$

тогда базис B можно выразить через базис A

$$(\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_m}) = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_m}) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Далее, введем обозначение

$$X = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

Тогда уравнение (16) примет вид

$$(\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_m}) = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_m})X \quad (17)$$

Определение 23. Матрица X из уравнения (17) называется матрицей перехода от базиса A к базису B .

7.4 Изменение координат при переходе к новому базису

Теорема 7. Пусть даны базисы $A = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_m})$, $B = (\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_m})$, X — матрица перехода от базиса A к базису B и в базисе A вектор x имеет координаты

$$(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

и в базисе B

$$(b_1, b_2, \dots, b_m)$$

тогда верно следующее соотношение

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = X^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad (18)$$

Доказательство. Для вектора \overline{x} верно соотношение

$$\overline{x} = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_m}) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_m}) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

преобразуем уравнение, заменяя B на произведение базиса A на матрицу перехода X

$$(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_m}) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_m})X \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

поскольку в равенстве слева и справа базисы совпадают, то, следовательно, они умножаются на одну и ту же матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

домножим обе части уравнения слева на матрицу X^{-1} и получим уравнение (18)

$$X^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

□

7.5 Упражнения

Упражнение 10. Пусть, $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, и $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. Найти матрицу перехода от базиса $A = (\bar{u}, \bar{v})$ к $B = (\bar{a}, \bar{b})$
2. Пусть вектор \bar{x} имеет координаты $(2, 5)$ в базисе A , найти его координаты в базисе B .