留数计算积分

squid

2021 年 6 月 29 日

1　粗糙的数学说明

洛朗展开　：

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

在上述展开中，若 $k<0$ 对应的系数 $a_k=0$，z_0 称为可去奇点；若 $a_{-m}\neq 0, m\in N^*$，且 $a_k=0, \forall k<-m$，则 z_0 称为 m 阶极点；若 z_0 既不是可去奇点又不是极点，则 z_0 称为本质奇点。

留数　：

$f(z)$ 的洛朗展开：

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\left(z-z_0\right)^k=\cdots+a_{-m}\cdot\left(z-z_0\right)^{-m}+a_{-m+1}\cdot\left(z-z_0\right)^{-m+1}+\cdots+a_0+a_1\left(z-z_0\right)+\cdots$$

环路积分：

$$\begin{aligned}\oint dz f(z)&=\oint dz\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\left(z-z_0\right)^k\\&=\cdots+\oint a_{-m}\cdot\left(z-z_0\right)^{-m}dz+\oint a_{-m+1}\cdot\left(z-z_0\right)^{-m+1}dz+\\&\quad\cdots+\oint a_0dz+\oint a_1\left(z-z_0\right)dz+\cdots\\&=2\pi i a_{-1}\end{aligned}$$

a_{-1} 在上述积分中被留下来。留数就是 $f(z)$ 的洛朗级数的负一次幂的系数 a_{-1}：

$$Res(f;z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)dz=a_{-1}$$

留数的计算　：

1）若 z_0 是 f 的简单极点，即 $f=\frac{g}{z-z_0}$，g 为解析函数，留数 $Res(f;z_0)$ 等于

$$Res(f;z_0)=g(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot f$$

2）若 z_0 是 f 的 m 阶极点，即 $f=\frac{g}{(z-z_0)^m}$，g 为解析函数，留数 $Res(f;z_0)$ 等于

$$Res(f;z_0)=\frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}=\lim_{z\to z_0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1}(z-z_0)^m\cdot f$$

3）若 $f=\frac{P}{Q}$，且 P,Q 在 z_0 的一个邻域中是解析函数，且 z_0 是 Q 的一阶零点，则留数 $Res(f;z_0)$ 等于

$$Res(f;z_0)=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

由留数的定义，上述几个等式都不难证明。

2 计算积分的应用

留数通常用来计算实积分，三种常见积分，分别是

1）含三角函数的一个周期上的积分，将三角函数换为复数

$$\int_0^{2\pi} R(\text{sint},\ \text{cost}\ )dt=2\pi\sum_{|z|<1}\text{Res}\left\{\frac{1}{z}R\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i},\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right);z\right\}$$

2）$f(x)=\frac{P}{Q}$，P,Q 为多项式，Q 的阶数比 P 高 2 或 2 以上，此时为 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ 加上外圆弧边界，Q 的阶数比 P 高 2 或 2 以上时，外圆弧上积分为 0，故

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{Imz>0}\text{Res}\,(f;z_k)$$

3）$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ix}dx=2\pi i\sum_{Imz>0}\text{Res}\left(f(z)e^{iz};z_k\right)$，其中外圆弧的取法和上面相同，外圆弧上积分为 0 依赖于 $e^{iz}\sim e^{-r\sin\phi}$，故上式容易推广到 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx,\ \alpha>0$。若 $\alpha<0$ 则应换元，使得 e 指数上变元的系数大于 0，此时需注意积分限的变化。当然也可以在下半平面选取一个方向不同 $(-2\pi i)$ 的环路。

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ix}dx=2\pi i\sum_{Imz>0}\text{Res}\left(f(z)e^{iz};z_k\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix}dx=-2\pi i\sum_{Imz<0}\text{Res}\left(f(z)e^{-iz};z_k\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix}dx=-\int_{\infty}^{-\infty}f(-y)e^{iy}dy=2\pi i\sum_{Imz>0}\text{Res}\left(f(-z)e^{iz};z_k\right)$$

4）若对 3）中的结果取实部虚部，即得 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin xdx,\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos xdx$。