Plemelj 公式

squid

2025 年 9 月 13 日

1 Sokhotski-Plemelj 公式

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{x\pm i\epsilon}=\mathcal{P}\frac{1}{x}\mp i\pi\delta(x), \tag{1}$$

或者

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{x\pm i\epsilon}=\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{x}\mp i\pi f(0), \tag{2}$$

其中主值积分的定义为

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{x}=\lim{}_{\delta\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{f(x)\,dx}{x}+\int_{\delta}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{x}\right\}. \tag{3}$$

2 不严格的推导

$$\frac{1}{x\pm i\epsilon}=\frac{x\mp i\epsilon}{x^2+\epsilon^2}, \tag{4}$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{x\pm i\epsilon}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xf(x)dx}{x^2+\epsilon^2}\mp i\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)dx}{x^2+\epsilon^2}. \tag{5}$$

计算第一项

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xf(x)dx}{x^2+\epsilon^2}=\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{xf(x)dx}{x^2+\epsilon^2}+\int_{\delta}^{\infty}\frac{xf(x)dx}{x^2+\epsilon^2}+\int_{-\delta}^{\delta}\frac{xf(x)dx}{x^2+\epsilon^2}. \tag{6}$$

δ 趋于零的时候，第三项积分中的 $f(x)$ 可以近似用 $f(0)$ 来代替，所以

$$\lim{}_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{xf(x)dx}{x^2+\epsilon^2}=f(0)\int_{-\delta}^{\delta}\frac{xdx}{x^2+\epsilon^2}=0, \tag{7}$$

而前两项就是主值积分

$$\lim{}_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{xf(x)dx}{x^2+\epsilon^2}+\int_{\delta}^{\infty}\frac{xf(x)dx}{x^2+\epsilon^2}=\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xf(x)\,dx}{x^2+\epsilon^2}\overset{\epsilon\to 0}{=}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{x}. \tag{8}$$

现在来计算 (5) 式第二项。当 ϵ 趋于零时，被积函数在 $x=0$ 附近的取值起了主导作用，因此

$$\lim_{\epsilon\to 0}i\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)dx}{x^2+\epsilon^2}=\lim_{\epsilon\to 0}if(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=if(0)\arctan x|_{-\infty}^{\infty}=i\pi f(0). \tag{9}$$

于是我们就证明了 (2) 式。

3 一类主值积分

得到主值积分表示的公式之后有时还要继续算下去。一种能算出来的常见的类型是 $\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{f(x)\sin(x)}{x-a}$，$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{f(x)\cos(x)}{x-a}$，其中 $f(x)$ 没有另外的极点。计算过程如下

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{f(x)\sin(x)}{x-a} &= \mathrm{Im}\left(\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{f(x)e^{ix}}{x-a}\right) = \mathrm{Im}\left(\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{f(z)e^{iz}}{z-a}\right)\\
&= \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}}\left[\mathrm{Im}\left(\left(\int_{-R}^{-\epsilon}dz+\int_{\epsilon}^{R}dz\right)\frac{f(z)e^{iz}}{z-a}+\int_{C_\epsilon}dz\frac{f(z)e^{iz}}{z-a}+\int_{C_R}dz\frac{f(z)e^{iz}}{z-a}\right)\right]\\
&\quad -\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}}\left[\mathrm{Im}\left(\int_{C_\epsilon}dz\frac{f(z)e^{iz}}{z-a}+\int_{C_R}dz\frac{f(z)e^{iz}}{z-a}\right)\right]\\
&= \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}}\left[\mathrm{Im}\left(\oint_{C}dz\frac{f(z)e^{iz}}{z-a}-\int_{C_\epsilon}dz\frac{f(z)e^{iz}}{z-a}\right)\right]\\
&= \mathrm{Im}(i\pi f(a)e^{ia})\\
&= \pi f(a)\cos(a)
\end{aligned}\quad , \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{f(x)\cos(x)}{x-a} &= \mathrm{Re}\left(\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{f(x)e^{ix}}{x-a}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{f(z)e^{iz}}{z-a}\right)\\
&= \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}}\left[\mathrm{Re}\left(\left(\int_{-R}^{-\epsilon}dz+\int_{\epsilon}^{R}dz\right)\frac{f(z)e^{iz}}{z-a}+\int_{C_\epsilon}dz\frac{f(z)e^{iz}}{z-a}+\int_{C_R}dz\frac{f(z)e^{iz}}{z-a}\right)\right]\\
&\quad -\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}}\left[\mathrm{Re}\left(\int_{C_\epsilon}dz\frac{f(z)e^{iz}}{z-a}+\int_{C_R}dz\frac{f(z)e^{iz}}{z-a}\right)\right]\\
&= \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}}\left[\mathrm{Re}\left(\oint_{C}dz\frac{f(z)e^{iz}}{z-a}-\int_{C_\epsilon}dz\frac{f(z)e^{iz}}{z-a}\right)\right]\\
&= \mathrm{Re}(i\pi f(a)e^{ia})\\
&= -\pi f(a)\sin(a)
\end{aligned}\quad . \tag{11}$$