拉格朗日乘子法

squid

2021 年 4 月 22 日

1 问题

求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在约束 $g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, g_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\cdots,g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 下的极值。

2 粗糙的数学说明

函数 f 的微分 $df=\partial_1 f dx_1+\partial_2 f dx_2+\cdots+\partial_n f dx_n=(\partial_1 f,\partial_2 f,\cdots,\partial_n f)\cdot(dx_1,dx_2,\cdots,dx_n)$，当 x_i 的取值无约束时，$(dx_1,dx_2,\cdots,dx_n)$ 可以是任意方向, 极值条件为 $(\partial_1 f,\partial_2 f,\cdots,\partial_n f)$ 为 0 向量。在极值点 $(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$ 应有

$$\partial_i f|_{(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)}=0$$

当有约束条件 g_i 时，$(dx_1,dx_2,\cdots,dx_n)$ 的取向受限制，

$$dg_i=\partial_1 g_i dx_1+\partial_2 g_i dx_2+\cdots+\partial_n g_i dx_n=(\partial_1 g_i,\partial_2 g_i,\cdots,\partial_n g_i)\cdot(dx_1,dx_2,\cdots,dx_n)=0$$

即 $(dx_1,dx_2,\cdots,dx_n)$ 的不同取向需保持与 $(\partial_1 g_i,\partial_2 g_i,\cdots,\partial_n g_i), i=1,\cdots,m$ 垂直。对于极值点，此时仍有 $df=0$，不过由于这时 $(dx_1,dx_2,\cdots,dx_n)$ 取向受限制，$(\partial_1 f,\partial_2 f,\cdots,\partial_n f)$ 不必为 0 向量。事实上，$(\partial_1 f,\partial_2 f,\cdots,\partial_n f)$ 只是在 $(\partial_1 g_i,\partial_2 g_i,\cdots,\partial_n g_i), i=1,\cdots,m$ 的正交补空间内分量为 0，它可以是上述矢量的任意线性组合，即

$$(\partial_1 f,\partial_2 f,\cdots,\partial_n f)=\sum_i \lambda_i(\partial_1 g_i,\partial_2 g_i,\cdots,\partial_n g_i)$$

也就是说，在极值点 $(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$ 应有

$$\partial_i\left(f-\sum_i\lambda_i g_i\right)\bigg|_{(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)}=0$$

3 泛函条件极值问题

求泛函 $\Phi[y]=\int\phi(y,\cdots)dx$ 在约束条件 $\Psi_1[y]=\int\psi_1(y,\cdots)dx=L_1$, $\Psi_2[y]=\int\psi_2(y,\cdots)dx=L_2,\cdots,\Psi_m[y]=\int\psi(y,\cdots)dx=L_m$ 下的极值。

由于泛函 $\Psi[y]$ 可以视为 $y(x_0),y(x_1),\cdots,y(x_N), N\to\infty$ 的函数 (高阶导数可以由高阶差分代替), 故对其应用拉格朗日乘子法即得极值条件

$$\delta\left(\Phi[y]-\sum_i\lambda_i\Psi_i[y]\right)\bigg|_{y^*}=0$$