微分几何入门小结

*根据梁书《微分几何入门与广义相对论》（第二版）前五章。

*小结中记录了框架和要点。

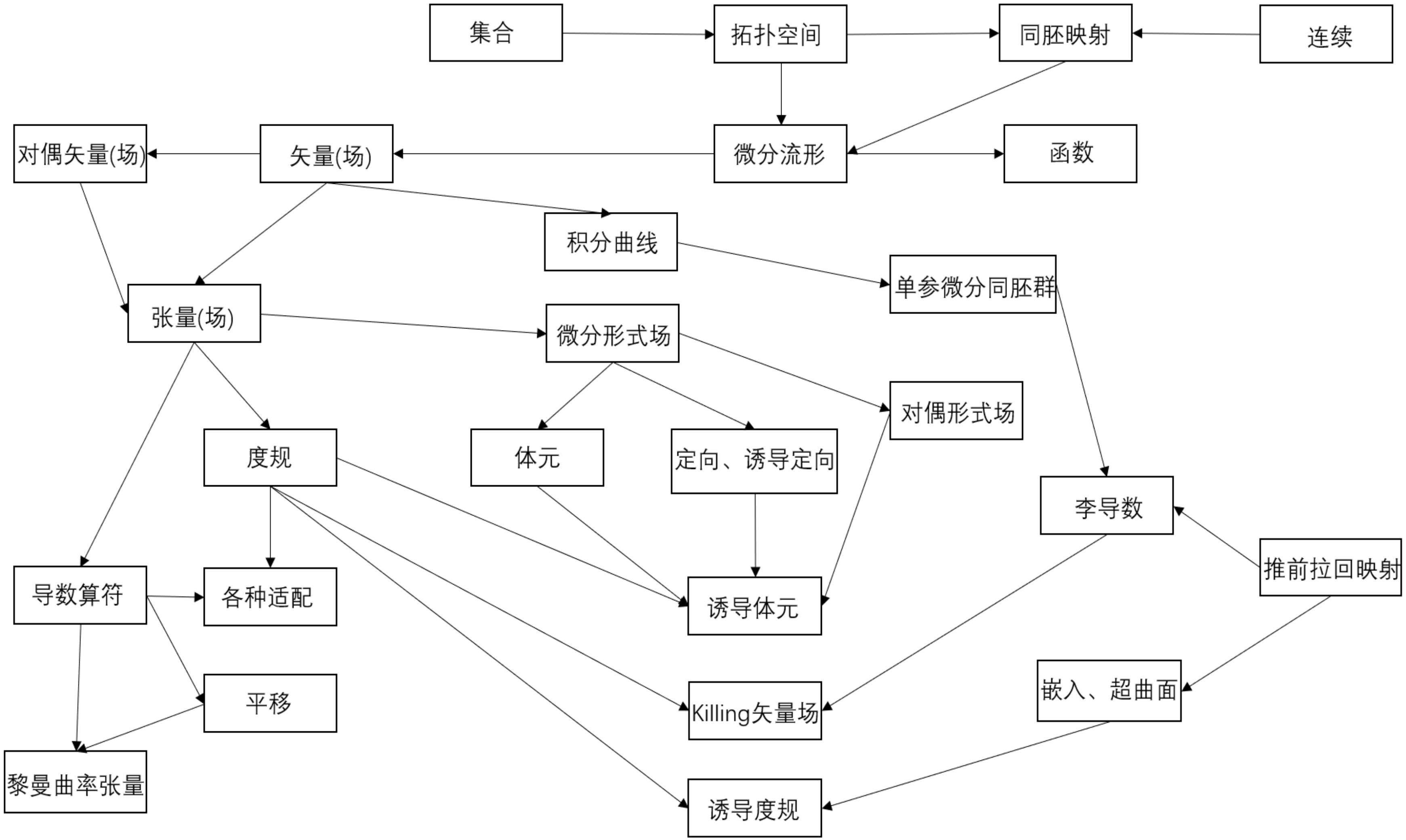
*书上有部分定理留作习题、或者作者提了一下没打算证、或者指路另一本书，有些我自己证的不能保证正确性，会作标记。"我猜"的浓度单调递增。。。

*有些地方我没明白，会做标记。

*一些之前学过的没有细讲。

*一些我觉得和主线关系不大的没有写进来。

目录：


集合
拓扑空间
同胚映射
连续
微分流形
函数
对偶矢量(场)
矢量(场)
积分曲线
单参微分同胚群
张量(场)
微分形式场
对偶形式场
度规
体元
定向、诱导定向
李导数
推前拉回映射
导数算符
各种适配
诱导体元
平移
Killing矢量场
嵌入、超曲面
黎曼曲率张量
诱导度规

1. 拓扑空间简介[集合，为套娃而生]

1.1 集论初步

集合的一些基本概念：
1） 集合；元素；子集；真子集。
2） 并集；交集；差集：$A - B := \{x|\ x \in A, x \notin B\}$；补集：若$A \subset X$，则$A$的补集$-A := X - A$。

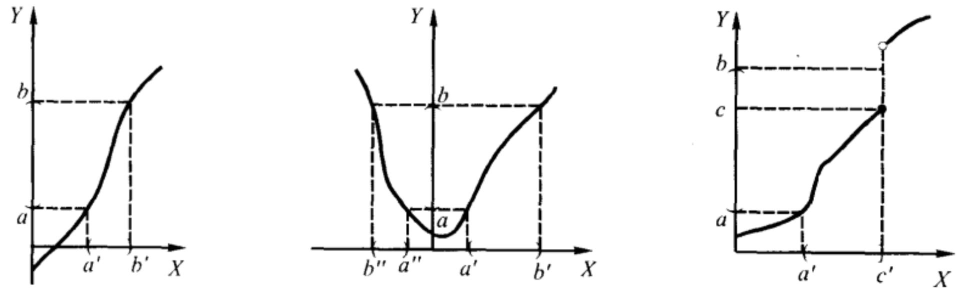
集的运算律：
1） 交换律：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
2） 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3） 分配律：$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
4） $De\ Morgan$律：$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C), A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
(由定义证明)

卡氏积$X \times Y$：
1） $X \times Y := \{(x, y)|\ x \in X,\ y \in Y\}$
2） 多个集合的卡氏积类似定义。
3） 卡氏积满足结合律。
4） 对于实数集R，$R^2 := R \times R$，$R^n := R \times \cdots \times R$ 。
5） R^n中的元素是 n 个实数的有序对，称为R^n的自然坐标。

映射相关概念：
1） 映射；像；原像（逆像）；定义域；值域。
2） 映射相等：$\forall x \in X, f(x) = f'(x)$。
3） 对于映射 $f: X \to Y$，一一映射指 $\forall y \in Y$，有不多于一个逆像；到上映射指$\forall y \in Y$，均有逆像。其他书上可能称为单射，满射。
4） 当映射为一一到上时，存在逆映射。其他书上一一到上叫双射。
（证明在科斯特利金《代数学引论》第一卷上有）
5） 复合映射。

记号$f[A]$，$f^{-1}[B]$：
1） 若$f: X \to Y, A \subset X$，则$f[A] \coloneqq \{y|\exists x,\ y = f(x)\}$。
2） 若$f: X \to Y, B \subset Y$，则$f^{-1}[B] \coloneqq \{f(x) \in B\}$。注意，逆映射不存在时，这个记号仍然可以定义。这个符号代表集合的“逆像”，也是一个集合，与元素的逆像不同。

从开区间过渡到开子集，连续性的重新考量：
1） 一元函数连续性的定义（$\epsilon - \delta$定义）
2） 一元函数连续性的依赖开区间的另一种定义：$f: X \to Y$为连续的，若Y中任一开区间的“逆像”都是X的开区间之并（或空集）。
3） 两种定义等价性书上图示（未严格证明）：



(a) f连续，任一开区间 (a,b) 的逆像是开区间 (a',b').

(b) f连续，任一开区间 (a,b) 的逆像是开区间之并 $(a',b')\cup(b'',a'')$.

(c) f 在 $c'\in X$ 不连续，存在开区间 (a,b)，其逆像 $(a',c']$ 不是开区间之并.

4） 连续性的$\epsilon-\delta$定义需要距离的定义，许多集合没有这一定义。故考虑把开区间推广到任意集合，定义开子集。
5） R中开区间的性质：(a)R、$\emptyset$都是开区间；(b)有限个开区间的交仍是开区间；(c)任意个开区间的并仍是开区间。
（性质 b 中的“有限个“的要求，我猜可能是无限个的交某些情况下可能变成单个数？）

1.2 拓扑空间

开子集与拓扑：
1) 对于任一非空集合X，可以自行指定某些子集是开的，但指定得到的开子集需满足类似于开区间的三个性质：(a)X、$\emptyset$都是开子集；(b)有限个开子集的交仍是开子集；(c)任意个开子集的并仍是开子集。
2) 每种满足要求的指定给集合增加了附加结构，称为拓扑结构。
3) 定义了拓扑结构的集合X的全体开子集构成一个集合$\mathcal{T}$，称为X的一个拓扑。
4) 定义了拓扑$\mathcal{T}$的集合X称为拓扑空间，记作$(X,\ \mathcal{T})$。

一些拓扑：
1) 离散拓扑：$\mathcal{T}$为X全部子集的集合。
2) 凝聚拓扑：$\mathcal{T}=\{X,\ \emptyset\}$。
3) 通常拓扑：若$X\in R$，$\mathcal{T}_u:=$\{空集或能表为开区间之并的子集\}；若$X\in R^n$，$\mathcal{T}_u:=$\{空集或能表为开球之并的子集\}。开球指的是$\{x\in R^n|\ |x-x_0|<r\}$。对R^n若无说明，均为通常拓扑。
4) 乘积拓扑：若$(X_1,\ \mathcal{T}_1)$和$(X_2,\ \mathcal{T}_2)$为拓扑空间，令$X=X_1\times X_2$（卡氏积），则定义X的拓扑为$\mathcal{T}:=\{O\subset X|O$可表为形如$O_1\times O_2$的子集之并，$O_1\in\mathcal{T}_1, O_2\in\mathcal{T}_2\}$。
5) 更多次卡氏积也可以类似定义乘积拓扑。

诱导拓扑：
1） $(X,\ \mathcal{T})$是拓扑空间，A为X的非空子集，A是集合也可以指定拓扑$\mathcal{S}$。希望子集的拓扑和原先的拓扑有密切联系，定义诱导拓扑。
2） 诱导拓扑：$(X,\ \mathcal{T})$是拓扑空间，A为X的非空子集，定义$\mathcal{S}:=\{V\subset A|\exists O\in\mathcal{T}, V=A\cap O\}$。
3） $(A,\ \mathcal{S})$称为$(X,\ \mathcal{T})$的拓扑子空间。

4） 书上的一个例子，平面上的开圆盘诱导出圆周上的开线段：

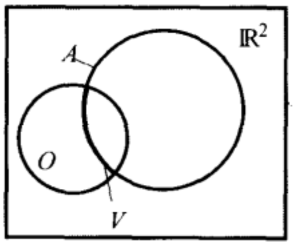


图 1-4 粗线段(不含端点)是 A 的子集 V，因 V 可看作 $O \subset \mathscr{T}_u$ 与 A 之交，由式(1-2-1)可知 $V \in \mathscr{S}$.

用开子集定义连续：

1） 定义 1：$(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$为拓扑空间，映射$f: X \to Y$称为连续的，若$\forall O \in \mathcal{T}, f^{-1}[O] \in \mathcal{S}$。
2） 定义 2：$(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$为拓扑空间，映射$f: X \to Y$称为在$x$点连续的，若$\forall$满足$f(x) \in G'$的$G'$，$\exists G \in \mathcal{T}$使得$x \in G$且$f[G] \subset G'$。若在任意点连续，则映射称为连续。
3） 在实数集R的情形下，这两个定义对应之前的两个定义。
4） 两个定义是等价的。
   （证明留作习题了。。。我没什么想法。。。不过好在还比较容易接受）

同胚映射：

1） 拓扑空间$(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$称为互相同胚，若$\exists f: X \to Y$，满足(a)$f$是一一到上的；(b)$f$及$f^{-1}$都连续。$f$称为从$(X, \mathcal{T})$到$(Y, \mathcal{S})$的同胚映射，简称同胚。
2） 从纯拓扑的角度看，两个互相同胚的拓扑空间“像得不能再像，可视为相等。
3） 任意开区间$(a, b) \subset R$与R同胚。”
   （我猜：用满足经典连续定义的单调函数即可。）
4） 书上一个同胚映射的例子：$f: (S^1 - \{a\}) \to R$

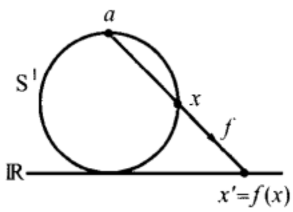


图 1-5 除 a 外任一点 $x \in S^1$ 都可用图示方法定义在 $\mathbb{R}$ 的像 x'

闭集

1） $C \subset X$称为闭集，若$-C \in \mathcal{T}$。
2） 闭集性质：(a)任意个闭集的交是闭集；(b)有限个闭集的并是闭集；(c)X和$\emptyset$是闭集。
   （由开集定义和$De\ Morgan$律证明）

连通

1) 拓扑空间$(X, \mathcal{T})$称为连通的，若它除了X和$\emptyset$没有又开又闭的子集。
2) 书上对不连通的例子：A, B是R上开区间，$A \cap B = \emptyset$，令$X = A \cup B$，$\mathcal{T}$为R上通常拓扑在X上的诱导拓扑。A, B在诱导拓扑下是开的，而A, B互为补集，故也是闭的。从而除了$X, \emptyset$以外还有又开又闭的子集，故不连通。

邻域：
1）$N \subset X$称为$x \in X$的一个邻域，若$\exists O \in \mathcal{T}$使$x \in O \subset N$，自身是开集的邻域称为开邻域。
2）$A \subset X$是开子集，当且仅当$\forall x \in A$，A是x的邻域。
(从左到右显然成立；从右到左：已知$\forall x \in A, \exists O_x$满足$x \in O_x \subset A$，令$O = \cup_{x \in A} O_x$，有$O \subset A$。而从反证法已知不存在$x$满足$x \in A, x \notin O$，从而$A = O$。而$O$显然为开集。)

闭包，内部，边界：
1) 闭包：$\bar{A} \coloneqq \cap_\alpha C_\alpha$，其中$A \subset C_\alpha, C_\alpha$为闭集。
2) 内部：$i(A) \coloneqq \cup_\alpha O_\alpha$，其中$A \subset O_\alpha, O_\alpha$为开集。
3) 边界：$\dot{A} \coloneqq \bar{A} - i(A)$。边界也记为$\partial A$。
4) 边界是闭集，$X - \partial A = X - \left(\bar{A} - i(A)\right) = (X - \bar{A}) \cup i(A)$，由于$\bar{A}$为闭集，故$(X - \bar{A})$为开集，而$i(A)$也为开集，故$X - \partial A$为开集，$\partial A$为闭集。

开覆盖：
1）X的开子集的集合$\{O_\alpha\}$叫$A \subset X$的一个开覆盖，若$A \subset \cup_\alpha O_\alpha$。
2）也可说$\{O_\alpha\}$覆盖A。

2. 流形与张量场[没想到吧，这也是映射]

2.1 微分流形

微分流形：
1）拓扑空间M称为 n 维微分流形（简称 n 维流形），若M有开覆盖$\{O_\alpha\}$，满足(a)$\forall O_\alpha$，$\exists$同胚映射 $\psi_\alpha : O_\alpha \to V_\alpha$($V_\alpha$是$R^n$用通常拓扑衡量的开子集)；(b)若$O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$，则复合映射 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$是$C^\infty$的。图示：

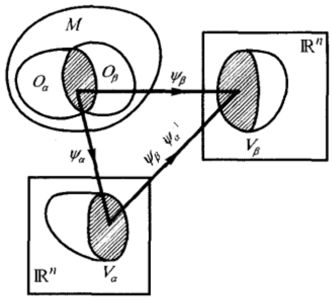


图 2-1　流形定义用图. $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ 是 ψ_α^{-1}(先)和 ψ_β(后)的复合映射.

2） $\forall p \in O_\alpha$， $\psi_\alpha(p) \in R^n$，O_α中的点通过ψ_α获得了坐标。
3） (O_α, ψ_α)构成一个局域坐标系，O_α称为为坐标域。(O_β, ψ_β)构成另一个局域坐标系，O_β为另一坐标域。若$O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$，其中的点有两套坐标。$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$是坐标变换。
4） 能用一个坐标域覆盖的流形，称为平凡流形。如R^n。
5） M, N为流形，则$M \times N$(卡氏积)也可定义为流形。

相容性:
1） 坐标系(O_α, ψ_α)在数学上叫图。满足流形定义条件的全体图的集合$\{(O_\alpha, \psi_\alpha)\}$叫图册。
2） 流形定义条件(b)又称相容性条件。
3） 同一拓扑空间可由不同的图册$\{(O_\alpha, \psi_\alpha)\}$,$\{(O'_\beta, \psi'_\beta)\}$定义为流形。
4） 若$O_\alpha \cap O'_\beta \neq \emptyset$，且在交集处不满足定义条件(b)，则两个图册不相容，并说两个图册把M定义为两个不同的微分流形，两个图册代表两种不同的微分结构。
5） 若两图册相容，可以合为一个。

流形间映射的连续性(C^r):
1） $f: M \to M'$为一连续映射(拓扑空间连续性定义), $\forall p \in M$, 取坐标系(O_α, ψ_α)使得$p \in O_\alpha$，同时取坐标系(O'_β, ψ'_β)使得$f(p) \in O'_\beta$，则可通过$\psi_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}$的$C^r$性定义$f$的$C^r$性。

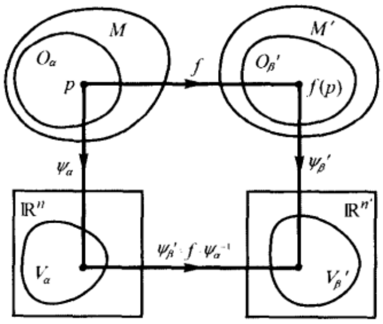


图 2-2 映射 $\psi'_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}$ 对应于 n' 个 n 元函数, 其 C^r 性用以定义 f 的 C^r 性.

2） 同一图册中各图相容，故f的C^r性与坐标系选择无关。
3） 微分流形M和M'称为互相微分同胚，若$\exists f: M \to M'$，满足(a)f是一一到上的；(b)f, f^{-1}是C^∞的。此时f称为微分同胚映射，简称微分同胚。
4） 两流形互相微分同胚映射的必要条件是维数相等。
（没有证明，感觉是这样。）

流形上的函数:
1） $f: M \to R$称为M上的函数或M上的标量场。
2） 若f为C^∞，则称为M上的光滑函数。M上光滑函数集合记为$\mathcal{F}_M$。
3） f与坐标系结合得到一个 n 元函数$F = f \circ \psi_\alpha^{-1}$，$F$是坐标系依赖的。

2.2 切矢和切矢场

矢量空间（线性空间）:
1） 集合V配以两个映射：加法 $V \times V \to V$；数乘 $R \times V \to V$。
2） 集合中的元素满足学过的线性空间的那些性质。
3） 集合中的任一元素都叫矢量。

把矢量从欧氏空间推广到流形上：
1） p为 3 维欧氏空间的一点，V_p是从p出发的各个方向箭头的集合，V_p是一个矢量空间。
2） 直线段、方向、长度不方便推广，用方向导数推广。
3） 映射$v \coloneqq \mathcal{F}_M \to R$称为点$p \in M$的一个矢量，若$\forall f, g \in \mathcal{F}_M$，$\alpha, \beta \in R$，成立(a)线性性：$v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g)$；(b)莱布尼兹律：$v(fg) = f|_p v(g) + g|_p v(f)$。
(这里的矢量和以前学的不一样，不过以前的矢量除了内积以外不会有别的作用，这里的矢量若不考虑对函数的作用和以前还是相似的)
(这里定义的矢量空间定义在一个点上)
4） 矢量的一个定理：

定理 2-2-1 设$f_1, f_2 \in \mathscr{F}_M$在点$p \in M$的某邻域$N$内相等，即$f_1|_N = f_2|_N$，则对$p$的任一矢量$v$有$v(f_1) = v(f_2)$.

证明 先证两个引理.

引理 1 若$f \in \mathscr{F}_M$是零值函数，即$f|_p = 0\ \forall p \in M$，则对$p$点的任一矢量$v$有$v(f) = 0$.

引理 1 证明 $\forall g \in \mathscr{F}_M$有$f + g = g$，由$v$作用的线性性得
$$v(g) = v(f+g) = v(f) + v(g),$$
故$v(f) = 0$. □

引理 2 若$f \in \mathscr{F}_M$在$p \in M$的某邻域N内为零，即$f|_N = 0$，则对p点的任一矢量v有$v(f) = 0$.

引理 2 证明 令$h \in \mathscr{F}_M$满足$h|_{M-N} = 0$, $h|_p \neq 0$，则$fh|_M = 0$，由引理 1 可得$v(fh) = 0$. 另一方面，由莱布尼茨律又得$v(fh) = f|_p v(h) + h|_p v(f) = h|_p v(f)$，故$h|_p v(f) = 0$. 注意到$h|_p \neq 0$，便有$v(f) = 0$. □

现在就可证明定理 2-2-1. 令$f \equiv f_1 - f_2$，则$f|_N = 0$，由引理 2 知$v(f) = 0$. 另一方面，由线性性又知$v(f) = v(f_1 - f_2) = v(f_1) - v(f_2)$，于是$v(f_1) = v(f_2)$. □

(图中划红线的部分我猜大概是用类似于$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}, x > 0; f(x) = 0, x < 0$的函数。)

矢量空间的基：
1） 设(O, ψ)是坐标系，坐标为x^μ，$f \in \mathcal{F}_M$与坐标系结合得到 n 元函数F，定义矢量X_μ满足$X_\mu(f) \coloneqq \frac{\partial F(x^1, \cdots, x^n)}{\partial x^\mu}|_p$。（可验证此映射满足矢量定义。）有时候简记为$X_\mu(f) \coloneqq \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}|_p$。
(我猜：虽然矢量是按方向导数理解的，但在矢量的定义中，并没有显含这个要求。而且矢量空间定义在某个点上，看上去各个点的矢量空间没有什么关联。但这里表明坐标求导属于矢量后，结合下面一条，同一坐标域不同点的矢量空间在坐标系下看起来就没有原来那样没有关联。(并不是有关联，只是看上去都能用坐标基矢展开，但不同点的坐标基矢依然没有可比性）后面讲到的联络可使不同点矢量有关联。)
2） V_p维度与M维度相等，X_μ是V_p的一组基。

(用F为坐标函数x^ν来证明X_μ线性无关，再由泰勒展开(?)证明任一矢量可表为X_μ线性组合（Wald R M. 1984. General Relativity. Chicago: The University of Chicago Press. P.16））

3) $\{x^\mu\},\{x'^\nu\}$为两个坐标系，p在坐标域交集上，$v \in V_p$，$\{v^\mu\},\{v'^\nu\}$为在两个系中v的分量，则$v'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} v^\mu$。、

(先证$X_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} X'_\nu$)

曲线：

1) 曲线也定义为映射。
2) $I \in R$，定义C^r类映射$C: I \to M$称为M上的一条C^r类曲线，$\forall t \in I, \exists$唯一的$C(t) \in M$与之对应。后面讨论的均为C^∞类曲线。
3) t称为曲线的参数。C, C'为不同映射时，为不同曲线。映射的像相同时，一条曲线称为另一条曲线的重参数化。
4) 曲线一词有时指映射有时指像。
5) 结合坐标系(O,ψ)，由$\psi \circ C$可有曲线的参数方程$x^\mu = x^\mu(t)$。
6) 结合坐标系(O,ψ)，坐标线x^μ: $\{p \in O | x^\nu = Const,\ \nu \neq \mu\}$可以当作以$x^\mu$为参数的曲线。

曲线的切矢：

1) 切矢是一个矢量，表示沿切线方向的方向导数。
2) $C(t_0)$的切矢定义为$T(f) \coloneqq \frac{d(f \circ C)}{dt}|_{t_0}, \forall f \in \mathcal{F}_M$。
3) T有时也写为$\frac{\partial}{\partial t}|_{C(t_0)}$。
4) 切矢与重参数化后的曲线切矢的关系：$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{dt'}{dt}\frac{\partial}{\partial t'}$。
5) X_μ是之前定义的坐标线的切矢，故X_μ也可记为$\frac{\partial}{\partial x^\mu}|_p$。
6) 切矢在基底展开：$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{dx^\mu(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$。

   (我猜：$f \circ C = f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ C = F \circ \psi \circ C = F\big(x^1(t), \cdots, x^n(t)\big)$)

切矢与切空间：

1) 任给一曲线经过p，可有切矢。
2) 任给p点的一个矢量$v = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$，取参数式$x^\mu(t) = x^\mu|_p + v^\mu t$，即为过$p$点且切矢为$v$的曲线。参数式取法不唯一。
3) 故p点的任一矢量也称为切矢，V_p也称为切空间。

流形上的矢量场：

1) $A \in M$，若给A上每点指定一个矢量，就得到一个定义在A上的矢量场。
2) p点的矢量把f变为一个数，A上的矢量场把f变为一个函数。
3) 矢量场v称为C^r的，若v作用于C^r类函数的结果是C^r类函数。后面讨论均为C^∞矢量场。
4) M上矢量场v是C^r类的充要条件是它在任一坐标基底的分量v^μ为C^r类函数。

(我猜：应该可以从作用到C^∞的f上的效果看出来)

5） 对易子：$[u,v](f) \coloneqq u\big(v(f)\big) - v\big(u(f)\big), \forall f \in \mathcal{F}_M$。$[\partial/\partial x^\mu, \partial/\partial x^\nu\ ] = 0$。

积分曲线：

1） 曲线$C(t)$叫矢量场v的积分曲线，若其上每点的切矢等于该点的v值。

2） v为M上光滑矢量场，则$\forall p \in M$，存在唯一的过p的v的积分曲线满足$C(0) = p$。

(选定初值后$\frac{dx^\mu(t)}{dt} = v^\mu(x^1(t), \cdots, x^n(t))$ 存在唯一解)

群：

1） 一个群是一个集合G配上满足以下条件的映射$G \times G \to G$（群乘法，元素g_1, g_2的乘积记为$g_1 g_2$）：(a)结合律：$(g_1 g_2) g_3 = g_1(g_2 g_3)$；(b)恒等元：$\forall g \in G, \exists e \in G, eg = ge = g$；(c)逆元：$\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G, gg^{-1} = g^{-1} g = e$。

2） 将沿x轴平移的操作（$\sigma(x,y,z) \to \sigma(x+a, y, z)$），构成集合$G$。其中元素由$a$索引，记为$\phi_a$。定义乘法$\phi_a \phi_b \coloneqq \phi_{a+b}, \forall \phi_a, \phi_b \in G$。容易验证$G$是一个群。群中每个元素可由$a$表征，故称为单参数群。

单参微分同胚群：

1） C^∞映射$\phi: R \times M \to M$，称为单参微分同胚群，若满足(a)$\forall t \in R, \phi_t: M \to M$是微分同胚；(b)$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}, \forall t, s \in R$。
(群指的是$\{\phi_t | t \in R\}$)

2） $\forall p \in M, \phi_p: R \to M$，是过$p$点的一条光滑曲线。称为单参微分同胚群过$p$点的轨道。把曲线在$\phi_p(0)$的切矢记为$v|_p$，则得到$M$上的一个光滑矢量场$v$。

3） 已知M上一个光滑矢量场，情况比较好时(t可以取遍R)，可以用矢量场的积分曲线定义ϕ_t（$\phi_t(p)$把p点映为过p的积分曲线上参数为t的点）。

2.3 对偶矢量场

对偶空间：

1） V为有限维矢量空间，线性映射$\omega: V \to R$称为V上的对偶矢量，V上全部对偶矢量的集合称为V的对偶空间，记为V^*。
(类似于行矢量列矢量矩阵乘法)

2） 对V^*定义加法数乘零元，成为矢量空间。

3） dimV^*=dim$V$。
(设$\{e_\mu\}$是V的一组基矢，定义线性映射$e^{1*}, \cdots, e^{n*}$满足$e^{\mu*}(e_\nu) = \delta^\mu{}_\nu$，易知$e^{\mu*} \in V^*$，进一步容易证明它们线性无关。而$\forall \omega \in V^*$，可以发现$\omega$和$\omega\big(e_\mu\big) e^{\mu*}$作用到任意$v \in V$上给出相同结果，从而定义的 n 个映射是对偶空间的基，且维数相等)

4） V^*为矢量空间，也可定义对偶空间V^{**}。用$v \in V$中矢量可以定义$v^{**} \in V^{**}$，v^{**}对$\omega \in V^*$的作用为$v^{**}(\omega) = \omega(v)$。这个映射是自然的同构映射，$V$和$V^{**}$可视为同一空间，故不管取多少次对偶，有用的只有$V, V^*$。
(两个矢量空间称为同构，若两者存在一一到上的映射。这种映射称为同构映射。两矢量空间同构的充要条件为维数相等，故V, V^*同构。构造V, V^*的同构映射需要用到基矢（从而与基矢有关），而自然同构大概指的是构造同构映射不需要用到基矢。)

5） 基底变换：若矢量空间V中有一基底变换为$e'_\mu = A^\nu{}_\mu e_\nu$，则相应的对偶基底的变换为$e'^{\mu *} = (\tilde{A}^{-1})_\nu{}^\mu e^{\nu *}$。
(比较线代)
6） 类似矢量场可以定义对偶矢量场，若$\forall$光滑矢量场v，$\omega(v) \in \mathcal{F}_M$，则$\omega$称为光滑的。

微分：
1） 若$f \in \mathcal{F}_M$，f可以自然诱导出M上的一个对偶矢量场，记为df。
2） $df|_p$的定义如下：$df|_p(v) \coloneqq v(f), \forall v \in V_p$。
3） 借助坐标系(O,ψ)，坐标x^μ可看作O上的函数，从而dx^μ是定义在O上的对偶矢量场。从而有$dx^\mu|_p \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu$，故$dx^\mu$即为之前所选的对偶坐标基底。
4） df用基底展开为$df = \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} dx^\mu, \forall f \in \mathcal{F}_O$。
(作用到同一$\partial/\partial x^\nu$ 上有同一结果)
5） 两个坐标系$\{x^\mu\},\{x'^\nu\}$的坐标域交集中的一点p上的一个对偶矢量$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \omega'_\nu dx'^\nu$，分量的变换关系为$\omega'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\omega_\mu$。
(与之前类似)

2.4 张量场

张量：
1） 矢量空间上V上的一个(k,l)型张量是一个多重线性映射$T: V^* \times \cdots \times V^* \times V \times \cdots \times V \to R$。卡氏积中$V^*$有$k$个，$V$有$l$个。
2） 从而$v \in V$是一个$(1,0)$型张量，$v^* \in V^*$是一个$(0,1)$型张量。
3） 用$\mathcal{T}_V(k,l)$表示V上全体(k,l)型张量的集合。故$V = \mathcal{T}(1,0)$，$V^* = \mathcal{T}(0,1)$。
4） 设$T \in \mathcal{T}_V(1,1)$，则$T: V^* \times V \to R$，$T(\omega\,;\cdot): V \to R$，$T(\cdot\,;\,v): V^* \to R$。
5） 张量场和矢量场类似定义。

张量积：
1） V上的(k,l)和(k',l')型张量T,T'的张量积$T \otimes T'$是一个$(k+k', l+l')$型张量，具体定义为 $T \otimes T'\left(\omega^1,\cdots,\omega^k,\omega^{k+1},\cdots,\omega^{k+k'},v^1,\cdots,v^l,v^{l+1},\cdots,v^{l+l'}\right)$
$$\coloneqq T(\omega^1,\cdots,\omega^k,v^1,\cdots,v^l)T'(\omega^1,\cdots,\omega^{k'},v^1,\cdots,v^{l'})$$
2） 若$u,v \in V, \omega,\mu \in V^*$，则$\omega \otimes v(\mu\,;\,u) = \omega(u)v(\mu) = v(\mu)\omega(u) = v \otimes \omega(\mu\,;u)$。但通常交换律不成立，如$u \otimes v \neq v \otimes u, \omega \otimes \mu \neq \mu \otimes \omega$。
3） V为 n 维矢量空间，则 $\dim\mathcal{T}_V(k,l) = n^{k+l}$。
(考虑$e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_k} \otimes e^{\nu_1 *} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_l *}$为基)
4） 张量写为分量形式为$T = T^{\mu\nu}{}_\sigma e_\mu \otimes e_\nu \otimes e^{\sigma *}$，其中$T^{\mu\nu}{}_\sigma = T(e^{\mu *},\ e^{\nu *};\ e_\sigma)$。

缩并：
1） (1,1)型张量T在不同坐标下的分量变换$T'^\mu{}_\nu = (A^{-1})^\mu{}_\rho T^\rho{}_\sigma A^\sigma{}_\nu = (A^{-1}TA)^\mu{}_\nu$。
(比较线代)

2） $T'^{\mu}{}_{\mu}=(A^{-1})^{\mu}{}_{\rho}T^{\rho}{}_{\sigma}A^{\sigma}{}_{\mu}=A^{\sigma}{}_{\mu}(A^{-1})^{\mu}{}_{\rho}T^{\rho}{}_{\sigma}=\delta^{\sigma}{}_{\rho}T^{\rho}{}_{\sigma}=T^{\rho}{}_{\rho}$，与基底无关。
(相似变换迹不变)

3） 缩并定义为：$C^i_jT\coloneqq T(\cdot,\cdots,e^{\mu *},\cdots,\cdot;\cdot,\cdots,e_\mu,\cdots,\cdot)\in\mathcal{T}_V(k-1,l-1)$，其中$e^{\mu *}$处在第$i$个$V^*$上，$e_\mu$处在第$j$个$V$上。

4） 类似可证C^i_jT与基底无关。

5） “作用就是缩并”的三个例子：

(1) $v(\omega)=\omega(v)=\omega_\mu v^\mu=\mathrm{C}(v\otimes\omega)$ (其中 v^μ, ω_μ 是 v, ω 在同一基底的分量). (2-4-5)

提示：注意 $v\otimes\omega\in\mathscr{T}_V(1,1)$，按定义写出 $\mathrm{C}(v\otimes\omega)$ 的表达式并用张量积的定义推出 $\mathrm{C}(v\otimes\omega)=v^\mu\omega_\mu$.

(2) 设 $T\in\mathscr{T}_V(0,2)$, $v\in V$，则

$$T(\bullet,v)=\mathrm{C}^1_2(T\otimes v). \tag{2-4-6}$$

(3) 设 $T\in\mathscr{T}_V(2,1)$, $\omega\in V^*$，则

$$T(\bullet,\ \omega;\ \bullet)=\mathrm{C}^2_2(T\otimes\omega). \tag{2-4-7}$$

还有许多类似等式. 这些等式是如下规律的表现：“T 对ω(或v)作用就是先求 T 与ω(或v)的张量积再缩并”，或者粗略地说，“作用就是先积后并”. 对两个张量先求张量积再缩并的操作常又简称为对它们作缩并, 因此上述粗略提法也可改为“作用就是缩并”.

分量变换：

1） $T=T^{\mu\nu}{}_{\sigma}e_\mu\otimes e_\nu\otimes e^{\sigma *}$取$\partial/\partial x^\mu,\partial/\partial x^\nu,dx^\sigma$为基时，$T=T^{\mu\nu}{}_{\sigma}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\otimes\frac{\partial}{\partial x^\nu}\otimes\ dx^\sigma$，其中$T^{\mu\nu}{}_{\sigma}=T(dx^\mu,\ dx^\nu;\partial/\partial x^\sigma)$。

2） (k,l)型张量在两个坐标系中的分量的变换关系为$T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}=\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_l}}{\partial x'^{\nu_l}}T^{\rho_1\cdots\rho_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}$。
(由$dx^\mu,\partial/\partial x^\sigma$在不同坐标的分量变换关系以及张量的线性性)

2.5 度规张量场

度规：

1） 矢量空间V上的一个度规g是V上一个(0,2)型张量，满足条件(a)对称：$g(u,v)=g(v,u)$，$\forall u,v\in V$；(b)非退化：$\forall u\in V,g(v,u)\Rightarrow v=0\in V$。

2） 由V的基底得到g的“矩阵元”，可以证明g非退化等价于g对应的矩阵可逆。

3） $g(v,u)$不是内积，$g(v,v)$可以小于 0。

4） $v\in V$的长度定义为$|v|\coloneqq\sqrt{|g(v,v)|}$。

5） 正交：矢量$v,u\in V$，若$g(v,u)=0$，则u,v称为相互正交的。

6） 故由度规可以定义正交归一。

7） 若任二基矢正交且每一基矢满足$g(e_\mu,e_\mu)=\pm1$，则基底称为正交归一基。
(我猜：由于在任一组基底下g对于的矩阵为实对称阵，故可作正交相似对角化，从而正交归一基底存在)

8） 度规g在正交归一基底的”矩阵”为对角阵，对角线上为±1。

9） 由$g:V\times V\to R$，$\forall v\in V$，$g(v,\cdot)\in V^*$，故g也可以理解为从矢量空间到对偶空间的映射：$g:V\to V^*$。这是一个同构映射，且不依赖基底，故有度规时V与V^*也自然认同。

(我猜：可以看出此映射是一一的，而此映射也是到上的，可由分量证明，故两矢量空间存在同构映射。而虽证明或许用到分量，但映射本身与基底无关，故为自然认同。)

度规分类：

1）对角元全为 1 的度规称为正定的或黎曼的。对角元全为-1 的称为负定的，其他的称为不定的。
2）只有一个对角元为-1 的不定度规称为洛伦兹的。
3）对角元之和称为号差。

度规张量场：

1）类似张量场可以定义度规张量场。
2）这里只考虑号差处处一样的度规场。
(我猜：由之前所猜的不同点的矢量空间并不是定义看上去那样没有关联(同一坐标域内可以表达为同一组坐标线切矢的线性组合)，故“处处一样”、“号差处处一样”中的“一样”是有意义的。)

线长：

1）T为$C(t)$的切矢，若g为正定度规，$C(t)$的线长定义为：$l \coloneqq \int \sqrt{g(T,T)}dt$。
2）带洛伦兹度规g的矢量空间V中的元素可分为三类：(a) $g(v,v) > 0$的称为类空矢量；(b) $g(v,v) < 0$的称为类时矢量；(c) $g(v,v) = 0$的称为类时矢量。
3）若曲线的切矢全都类空，则为类空曲线。同样有类时、类光曲线。
4）若g为洛伦兹度规，类时/类空/类光曲线$C(t)$的线长定义为：$l \coloneqq \int \sqrt{|g(T,T)|}dt$。
5）类空类时曲线长度为正，类光曲线长度为 0。
6）部分类时部分类光（或其他混合）的曲线没有线长定义。
7）线长与参数化无关。线长定义中未用到坐标系，故与坐标系也无关。
(我猜：由线长的定义式和$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{dt'}{dt}\frac{\partial}{\partial t'}$可证与参数化无关)
8）元线长$dl = \sqrt{|g(T,T)|}dt$通常也写为$dl = \sqrt{|g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu|}$，(这里的微分均代表小量)。定义线元符号$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$，不代表某个数的平方，仅是一个符号。
9）线长参数：由于线长与参数化、坐标系无关，为原参数t的单增函数，故可以用曲线的线长做重参数化。由$dl = \sqrt{|g(T,T)|}dt$可知，此时曲线切矢长度为 1。

一些空间：

1）设流形M上给定度规场g，则(M,g)叫广义黎曼空间。
2）若g为正定，称为黎曼空间；若g为洛伦兹，称为伪黎曼空间，物理上叫时空。
3）$\{x^\mu\}$为R^n自然坐标，$\delta_{\mu\nu}$定义为对角元均为 1，则定义$\delta \coloneqq \delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$，$(R^n,\delta)$称为 n 维欧氏空间，$\delta$称为欧式度规。
4）欧氏空间的其他坐标，若满足$\delta(\partial/\partial x^\alpha, \partial/\partial x^\beta) = \delta_{\alpha\beta}$，则该坐标系称为笛卡尔坐标系。如二维欧氏空间自然坐标的平移转动反射仍是笛卡尔坐标。
5）$\{x^\mu\}$为R^n自然坐标，$\eta_{\mu\nu}$定义为对角元为（-1，1，1，1），则定义$\eta \coloneqq \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$，$(R^n,\eta)$

称为 n 维闵氏空间，η称为闵式度规。

6) 闵氏空间的其他坐标，若满足$\eta(\partial/\partial x^{\alpha}, \partial/\partial x^{\beta}) = \eta_{\alpha\beta}$，则该坐标系称为洛伦兹坐标系。如二维闵氏空间自然坐标的平移、伪转动、反射仍是洛伦兹坐标。
(二维的伪转动指的是把转动中的正余弦换成双曲正余弦)
(欧式/闵氏空间从自然坐标变为笛卡尔/洛伦兹坐标的变换是之后会提到的等度规映射。)

2.6 抽象指标记号

张量表示法：

1） 单个字母T看不出什么，张量积写出来比较麻烦，缩并看着不方便。
2） 彭罗斯首创抽象指标，用上下指标的拉丁字母表示张量类型。
3） 例子：v^a表示矢量，ω_b表示对偶矢量，(k,l)型张量表示为$T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$。
4） 抽象指标中的拉丁字母和分量表示中的希腊字母不同，希腊字母有取值，拉丁字母没有取值，仅仅是记号。
5） $T = T^{\mu\nu}{}_{\sigma} e_\mu \otimes e_\nu \otimes e^{\sigma *}$现在写为$T^{ab}{}_c = T^{\mu\nu}{}_{\sigma}(e_\mu)^a (e_\nu)^b\,(e^\sigma)_c$。(此时不用写星号了)
6） 等号两边指标是“平衡”的。
7） 重复上下两个抽象指标表示求缩并如：$T^{ab}{}_a = T\big(e^{\mu *},\ \cdot\,;\ e_\mu\big)$, $T^a{}_a = T^\mu{}_\mu$。从而$(e_\mu)^a(e_\nu)^b$与$(e_\nu)^b(e_\mu)^a$代表相同的张量，因为哪个和哪个缩并由拉丁字母标识，而不是位置。
8） 这样的规定下张量和张量分量可以写成很对称的形式：
$T^{ab}{}_c = T^{\mu\nu}{}_{\sigma}(e_\mu)^a(e_\nu)^b\,(e^\sigma)_c$，　　　$T^{\mu\nu}{}_{\sigma} = T^{ab}{}_c (e^\mu)_a (e^\nu)_b (e_\sigma)^c$
9） 从抽象指标表示容易看出：$u^a = T^a{}_b v^b \in V$，$\mu_b = T^a{}_b \omega_a \in V^*$。

$\delta^a{}_b$：

1） $\delta^a{}_b$表示从V到V的恒等映射，$\delta^a{}_b v^b \coloneqq v^a \in V$。
(抽象指标只表示张量类型和与谁缩并)
2） 由于$\delta^a{}_b v^b \coloneqq v^a \in V$，$\delta^a{}_b \omega_a v^b = \delta^a{}_b v^b \omega_a = v^a \omega_a = \omega_b v^b, \forall v^b \in V$，故$\delta^a{}_b$也是从$V^*$到$V^*$的恒等映射。$\delta^a{}_b \omega_a = \omega_b, \in V^*$。
3） 类似方法可证明$\delta^a{}_b$作用于一般张量上，是将其抽象指标中的a换为b，或b换为a。
4） 若V有基底$\{(e_\mu)^a\}$，对偶空间V^*有基底$\{(e^\mu)_a\}$，可以验证$\delta^a{}_b = (e_\mu)^a (e^\mu)_b$。即$\delta^a{}_b$写为分量形式为$\delta^a{}_b = \delta^\mu{}_\nu (e_\mu)^a (e^\nu)_b$，其中$\delta^\mu{}_\nu$与克罗内克符号取值相同。

升降指标：

1） 度规张量$g \in \mathcal{T}_V(0,2)$，故记为g_{ab}。
2） $g_{ab} v^b \in V^*$。有度规时，V, V^*自然认同，$g_{ab} v^b$为v^a在这个自然同构映射下的像，由于与v^a有比较自然的关系，部分将$g_{ab} v^b$定义为v_a。
3） $g: V \to V^*$为自然同构映射, 故存在逆映射, 易知为(2,0)型张量$(g^{-1})^{ab}$, 通常简记为g^{ab}。
4） 故$v_a = g_{ab} v^b, \omega^a = g^{ab} \omega_b$。故一般张量的升降指标可以定义。
5） $\omega^a = g^{ab}\omega_b = g^{ab} g_{bc} \omega^c = \delta^a{}_c \omega^c$，故$g^{ab} g_{bc} = \delta^a{}_c$。
(由于抽象指标表示时张量和张量分量可以写成很对称的形式，故可快速写出分量关系：$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu{}_\nu$，这对应着度规矩阵乘上它的逆为单位阵)
6） 升降指标对分量而言是一样的，$g_{\mu\nu} v^\nu = g_{ab}(e_\mu)^a (e_\nu)^b v^\nu = g_{ab} v^b (e_\mu)^a = v_a (e_\mu)^a = v_\mu$。
7） 作用到坐标基矢上：$g_{ab}(\partial/\partial x^\mu)^b = g_{\mu\nu}(dx^\nu)_a$，$g^{ab}(dx^\mu)_b = g^{\mu\nu}(\partial/\partial x^\nu)$。
(容易验证得到)

对称性：

1） (0,2)型张量T称为对称的，若$T(u,v)=T(v,u)$。用抽象指标表示为$T_{ab}u^a v^b=T_{ba}u^a v^b$，故$T_{ab}=T_{ba}$。
   (虽然张量积中在用抽象指标表示时基矢可以换位置，只要抽象指标跟着，但这里和下面的T_{ab}变为T_{ba}表示基矢位置不变，抽象指标位置调整。$(0,l)$型也一样考虑)
2） 对(0,2)型张量T_{ab}而言，对称部分和反对称部分分别定义为：$T_{(ab)}\coloneqq\frac{1}{2}(T_{ab}+T_{ba})$，

   $T_{[ab]}\coloneqq\frac{1}{2}(T_{ab}-T_{ba})$。

3） 一般的，$(0,l)$型张量$T_{a_1\cdots a_l}$的对称和反对称部分分别定义为：$T_{(a_1\cdots a_l)}=\frac{1}{l!}\sum_\pi T_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(l)}}$，

   $T_{[a_1\cdots a_l]}=\frac{1}{l!}\sum_\pi \delta_\pi T_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(l)}}$。

   (其中的π代表置换或者说一个排列，可参考科斯特利金《代数学引论》第一卷相关部分。δ_π取值为±1，奇置换为负，偶置换为正。δ_π也等于-1 的逆序数次。)
4） (0,2)型张量可以表示为对称部分和反对称部分的和，但一般的不行。
5） 若$T_{a_1\cdots a_l}=T_{(a_1\cdots a_l)}$，称为全对称的。若$T_{a_1\cdots a_l}=T_{[a_1\cdots a_l]}$，称为全反对称的。
6） 若$T_{a_1\cdots a_l}=T_{(a_1\cdots a_l)}$，则$T_{a_1\cdots a_l}=T_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(l)}}$,$\pi$为任一置换。

   (由于圆括号把所有排列取了平均，故$T_{a_1\cdots a_l}=T_{(a_1\cdots a_l)}=T_{(a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(l)})}=T_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(l)}}$。)
7） 若$T_{a_1\cdots a_l}=T_{[a_1\cdots a_l]}$，则$T_{a_1\cdots a_l}=\delta_\pi T_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(l)}}$,$\pi$为任一置换。证明类似。
8） 括号的一些定理：

(a) 缩并时括号有“传染性”，即

$$T_{[a_1\cdots a_l]}S^{a_1\cdots a_l}=T_{[a_1\cdots a_l]}S^{[a_1\cdots a_l]}=T_{a_1\cdots a_l}S^{[a_1\cdots a_l]},$$

对圆括号亦然.

(b) 括号内的同种子括号可随意增删，例如

$$T_{[[ab]c]}=T_{[abc]}, \qquad 其中 \quad T_{[[ab]c]}\equiv\frac{1}{2}(T_{[abc]}-T_{[bac]}).$$

(c) 括号内加异种子括号得零，例如

$$T_{[(ab)c]}=0, \qquad T_{(a[bcd])}=0.$$

(d) 异种括号缩并得零，例如

$$T^{(abc)}S_{[abc]}=0.$$

(e)
$$T_{a_1\cdots a_l}=T_{(a_1\cdots a_l)}\Rightarrow T_{[a_1\cdots a_l]}=0,$$
$$T_{a_1\cdots a_l}=T_{[a_1\cdots a_l]}\Rightarrow T_{(a_1\cdots a_l)}=0.$$

对$(k,0)$型(上指标)全对称和全反称张量也有类似结论.

((a)(b)(c)由定义证；(d)由(a)(c)证；我猜：在所有指标都缩并或者全没有缩并时，对序列加括号（圆/方）可以当作一个对序列的线性映射，故(e)可由(c)和加括号来证。)

3. 黎曼（内禀）曲率张量[弹起我心爱的 nabla]

3.1 导数算符

导数算符：

1) 对于通常微积分，∇算子作用到标量场上得梯度，作用到矢量场上得散度旋度。
2) 将其推广至任意流形。
3) M上的导数算符的定义：

定义 1 以$\mathscr{F}_M(k,l)$[或$\mathscr{F}(k,l)$]表示流形M上全部C^∞的(k,l)型张量场的集合.[函数f可看作$(0,0)$型张量场(标量场),故$\mathscr{F}\equiv\mathscr{F}(0,0)$]映射$\nabla:\mathscr{F}(k,l)\to\mathscr{F}(k,l+1)$称为$M$上的(无挠)**导数算符**(derivative operator),[①] 若它满足如下条件：

(a) 具有线性性：

$$\nabla_a(\alpha T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}+\beta S^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l})=\alpha\nabla_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}+\beta\nabla_a S^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}$$
$$\forall T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l},\ S^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}\in\mathscr{F}(k,l),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R};$$

(b) 满足莱布尼茨(Leibnitz)律：

$$\nabla_a(T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}S^{d_1\cdots d_{k'}}{}_{e_1\cdots e_{l'}})=T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}\nabla_a S^{d_1\cdots d_{k'}}{}_{e_1\cdots e_{l'}}+S^{d_1\cdots d_{k'}}{}_{e_1\cdots e_{l'}}\nabla_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}$$
$$\forall\ T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}\in\mathscr{F}(k,l),\ S^{d_1\cdots d_{k'}}{}_{e_1\cdots e_{l'}}\in\mathscr{F}(k',l');$$

(c) 与缩并可交换顺序；

(d) $v(f)=v^a\nabla_a f\qquad\forall f\in\mathscr{F},\ v\in\mathscr{F}(1,0)$；

(e) 具有无挠性：$\nabla_a\nabla_b f=\nabla_b\nabla_a f\qquad\forall f\in\mathscr{F}$.

(后面会说明，满足这些要求的导数算符是存在的，且很多。)

4) 导数算符不是矢量或对偶矢量，但有时表现得更像对偶矢量故记为∇_a。
5) 与缩并交换次序指的是$\nabla_a(v^b\omega_b)=v^b\nabla_a\omega_b+\omega_b\nabla_a v^b$。
   $(\nabla_a(v^b\omega_b)$
   $=\nabla_a(C(v^b\omega_c))=C(\nabla_a(v^b\omega_c))=C(v^b\nabla_a\omega_c+\omega_c\nabla_a v^b)\ =v^b\nabla_a\omega_b+\omega_b\nabla_a v^b)$
6) 由条件(d)知$\nabla_a f=(df)_a$。
7) 局域性：若$T_1,T_2\in\mathcal{T}_M(k,l)$在$p\in M$的某邻域$N$内相等，即$T_1|_N=T_2|_N$，则$\nabla_a T_1|_p=\nabla_a T_2|_p$。(证明与矢量局域性类似)
8) 由$\nabla_a f=(df)_a$知$\nabla_a f=\tilde\nabla_a f=(df)_a$，即导数算符对同一标量场的作用相同。

导数算符对张量的作用：

1) 设$\omega_b,\omega'_b\in\mathcal{T}_M(0,1)$，且有$\omega_b|_p=\omega'_b|_p$，一般来说$\nabla_a\omega_b|_p$，$\nabla_a\omega'_b|_p$并不相同，但有下式成立：$\left[(\tilde\nabla_a-\nabla_a)\omega'_b\right]_p=\left[(\tilde\nabla_a-\nabla_a)\omega_b\right]_p$。

证明 只须证明

$$[\nabla_a(\omega'_b-\omega_b)]_p=[\tilde\nabla_a(\omega'_b-\omega_b)]_p.\tag{3-1-4}$$

设$\Omega_b\equiv\omega'_b-\omega_b$. 选坐标系$\{x^\mu\}$使其坐标域含$p$，则$\omega'_b|_p=\omega_b|_p$导致$\Omega_\mu(p)=0$，其中$\Omega_\mu$是$\Omega_b$的坐标分量. 于是对$p$点有

$$[\nabla_a(\omega'_b-\omega_b)]_p=[\nabla_a\Omega_b]_p=\{\nabla_a[\Omega_\mu(dx^\mu)_b]\}|_p$$
$$=\Omega_\mu(p)[\nabla_a(dx^\mu)_b]_p+[(dx^\mu)_b\nabla_a\Omega_\mu]_p=[(dx^\mu)_b\nabla_a\Omega_\mu]_p,$$

(而不同导数算符作用到标量场上结果相同，故相等。)

2) 由上面证明知$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b$把$\omega_b$变成一个(0,2)型张量，且只依赖于$\omega_b$在一点的值，且为线性映射，故作用效果对应一个(1,2)型张量：$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b|_p = C^c{}_{ab}\omega_c|_p$，即不同的导数算符对$\omega_b$的作用差别为一个(1,2)型张量。$\nabla_a\omega_b = \tilde{\nabla}_a\omega_b - C^c{}_{ab}\omega_c$。
3) $C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba}$：

证明 令 $\omega_b = \nabla_b f = \tilde{\nabla}_b f$，其中 $f \in \mathscr{F}$ [此处用到式(3-1-2)]，则式(3-1-6)给出 $\nabla_a \nabla_b f = \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f - C^c{}_{ab} \nabla_c f$. 交换指标 a, b 可得 $\nabla_b \nabla_a f = \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a f - C^c{}_{ba} \nabla_c f$. 两式相减，注意到无挠性条件(e)，便有 $C^c{}_{ab} \nabla_c f = C^c{}_{ba} \nabla_c f$. 令 $T^c{}_{ab} \equiv C^c{}_{ab} - C^c{}_{ba}$，则 $\forall f \in \mathscr{F}$ 有 $T^c{}_{ab} \nabla_c f = 0$，于是 $T^c{}_{ab}$ 在任一坐标基底的分量 $T^\sigma{}_{\mu\nu} = T^c{}_{ab}(\mathrm{d}x^\sigma)_c(\partial/\partial x^\mu)^a(\partial/\partial x^\nu)^b = 0$ [其中第二步是因为 $T^c{}_{ab}(\mathrm{d}x^\sigma)_c = T^c{}_{ab}\nabla_c x^\sigma = 0$ (把 x^σ 看作 f)]，因而 $T^c{}_{ab} = 0$. □

4) $\nabla_a v^b = \tilde{\nabla}_a v^b + C^b{}_{ac} v^c$。
(由导数算符和缩并的交换性证明)
5) 类似可证明更一般的结论：

$\nabla_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} = \tilde{\nabla}_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} + \sum_i C^{b_i}{}_{ad} T^{b_1\cdots d\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} - \sum_j C^d{}_{ac_j} T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots d\cdots c_l}$

(我猜：类似(4)由$\nabla_a(T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}(\omega_1)_{b_1}\cdots(\omega_k)_{b_k}(v_1)^{c_1}\cdots(v_l)^{c_l})$展开再由不同导数算符对(0,1)型、(1,0)型张量的作用差别证明)
(我猜：这里的C是在导数算符对(0,1)型张量的作用差别中出现的，维数更高的$(0,l)$型张量也可有类似(1)的结论，引出(1,2)型张量D，但导数算符在更低维张量上的作用差别比较不好用D表示出来，故用最低维对应的C。)
6) 两个导数算符的作用差别是$C^c{}_{ab}$，而任给$\tilde{\nabla}_a, C^c{}_{ab}$由对(0,1)型张量的作用定义的$\nabla_a$，可以验证满足导数算符的定义。故只要有一个导数算符，就有很多个。

两个定理：
1) 导数算符和缩并可以交换顺序(定义条件(c))等价于$\nabla_a\delta^b{}_c = 0$。
(从左到右由$\nabla_a v^b = \nabla_a(\delta^b{}_c v^c)$不难证明；从右到左，我猜：用反证法证明从左到右的逆否命题。)
(书上给的从右到左的提示不知道怎么做，在梁书第二版 P61 页)
2) 对易子$[u,v]^a = u^b\nabla_b v^a - v^b\nabla_b u^a$。
$([u,v](f) = u(v(f)) - v(u(f)) = u^b\nabla_b(v^a\nabla_a f) - v^b\nabla_b(u^a\nabla_a f)$
$= \cdots = (u^b\nabla_b v^a - v^b\nabla_b u^a)\nabla_a f)$

普通导数算符：
1) $\{x^\mu\}$是M一个坐标系，在坐标域O上定义映射$\partial_a: \mathcal{T}_O(k,l) \to \mathcal{T}_O(k,l+1)$，满足如下等式：
$\partial_a T^b{}_c \coloneqq (dx^\mu)_a(\partial/\partial x^\nu)^b\,(dx^\sigma)_c\,\partial_\mu T^\nu{}_\sigma$。
2) 此映射满足导数算符的 5 个条件，故为导数算符。
3) 故导数算符存在，而考虑到$C^c{}_{ab}$可知，导数算符有很多个。
4) $\partial_a(\partial/\partial x^\nu)^b = 0, \partial_a(dx^\nu)_b = 0$。
5) $\partial_{[a}\partial_{b]}T^{\cdots}{}_{\cdots} = 0$。
6) 普通导数算符的定义依赖于坐标系。
7) 体现∇_a和∂_a的差别的张量场$C^c{}_{ab}$称为∇_a在该坐标系的克氏符$\Gamma^c{}_{ab}$。克氏符也是定义依赖于坐标系的张量。

逗号与分号:

1） $\partial_a v^b = v^\nu{}_{,\mu}(dx^\mu)_a(\partial/\partial x^\nu)^b$，其中$v^\nu{}_{,\mu}$表示$v^\nu/\partial x^\mu$，不满足张量分量变换律。

2） $\nabla_a v^b = v^\nu{}_{;\mu}(dx^\mu)_a(\partial/\partial x^\nu)^b$，其中$v^\nu{}_{;\mu}$表示$\nabla_a v^b$的分量，满足张量分量变换律。

3） 在这种记号下，有关系：$v^\nu{}_{;\mu} = v^\nu{}_{,\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma}v^\sigma, \omega_{\nu\,;\mu} = \omega_{\nu\,,\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\omega_\sigma$。

3.2 矢量场沿曲线的导数和平移

[写在前面的我猜: 这一节和下一节的内容在理论构造顺序上没问题, 但给我感觉不太自然, 感觉平移、适配导数算符这些在意义的解读上都有点循环论证的感觉，我在网上找了找，有人说，联络是古典微分几何中曲面协变导数的推广，我又找了一下相关内容...... 古典微分几何是在R^3里用熟悉的矢量的定义研究曲线和曲面，曲面上的协变导数是指曲面上的矢量场沿着曲面上一条曲线求导数再投影到曲面在该点的切平面上，由协变导数为 0 定义在曲面上沿某曲线平移。在通常的矢量的意义下，这代表曲面上看矢量是不变的，同时古典微分几何可以证明，这样确定下来的沿曲线平移的两个矢量场的内积、夹角是不变的，符合通常对平移的理解。但这里的曲面上矢量“不变”是要在R^3中考虑的（三维矢量变化率在切平面上的投影），而推广到流形之后，由于希望(我猜)不在更高维的流形上讨论，就多出了对于“不变”的衡量的自由，故导数算符需要选定。]

平移:

1) 给定导数算符∇_a，设T为某曲线切矢，则$T^a\nabla_a f$为标量场沿曲线的方向导数。类似的，$T^b\nabla_b v^a$可以看为矢量场沿曲线的某种”导数”。$T^a\nabla_a f$与导数算符的选择无关，但$T^b\nabla_b v^a$与导数算符有关。
2) 给定导数算符，给定曲线，满足$T^b\nabla_b v^a = 0$的矢量场，称为沿曲线平移的。
3) 若曲线$C(t)$在坐标系$\{x^\mu\}$的坐标域内，则$T^b\nabla_b v^a = (\partial/\partial x^\mu)^a(dv^\mu/dt + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\nu v^\sigma)$。(将$\nabla_a$用普通导数算符和克氏符表示出来即可)
4) 令$T^b\nabla_b v^a = 0$可得$dv^\mu/dt + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\nu v^\sigma = 0$。这是 n 元一阶微分方程组，故由初值可唯一确定一个沿曲线平移的矢量场。
5) 设$p, q \in M$，有一$C(t)$连接这两点，$\forall v^a \in V_p$，由上可知存在唯一的沿$C(t)$的矢量场，可以用其在q点的值定义q点的矢量。这是依赖曲线的映射，不同曲线平移得到的可能不同。
6) ∇_a联系了V_p, V_q，故也称∇_a为联络。(我猜：在前面提过不同点的矢量没有可比性但也不是那么没有关联，不过联络可以让不同点的矢量有真正的关联。)

与度规适配的导数算符:

1) 设u^a, v^a是沿$C(t)$平移的矢量场，为了和熟悉的平移更像，希望曲线上两者内积不变。给定流形的度规后，就可以讨论”内积”。
2) 由$T^c\nabla_c(g_{ab}u^a v^b) = 0$展开成 3 项，因为$u^a, v^b$为平移矢量场，可以得到$T^c\nabla_c g_{ab} = 0$。
3) 若∇_a满足$\nabla_c g_{ab} = 0$，则∇_a称为与度规适配的导数算符。(我猜：导数算符需要选定，与度规适配是一个看上去是个比较自然的选择，而且与度规适配的导数算符在测地线长度为极值的证明里起作用。)

4） 适配导数算符的存在性：

定理 3-2-2 流形 M 上选定度规场 g_{ab} 后，存在唯一的 ∇_a 使 $\nabla_a g_{bc}=0$.

证明 设 $\tilde{\nabla}_a$ 为任一导数算符，欲求适当的 $C^c{}_{ab}$ 使它与 $\tilde{\nabla}_a$ 决定的 ∇_a 满足 $\nabla_a g_{bc}=0$. 由式(3-1-8)有

$$\nabla_a g_{bc}=\tilde{\nabla}_a g_{bc}-C^d{}_{ab}g_{dc}-C^d{}_{ac}g_{bd}=\tilde{\nabla}_a g_{bc}-C_{cab}-C_{bac}.$$

故由 $\nabla_a g_{bc}=0$ 得

$$C_{cab}+C_{bac}=\tilde{\nabla}_a g_{bc}, \tag{3-2-4}$$

同理

$$C_{cba}+C_{abc}=\tilde{\nabla}_b g_{ac}, \tag{3-2-5}$$

$$C_{bca}+C_{acb}=\tilde{\nabla}_c g_{ab}. \tag{3-2-6}$$

式(3-2-4)加式(3-2-5)减式(3-2-6)并利用 $C_{cab}=C_{cba}$，得

$$2C_{cab}=\tilde{\nabla}_a g_{bc}+\tilde{\nabla}_b g_{ac}-\tilde{\nabla}_c g_{ab},$$

或

$$C^c{}_{ab}=\tfrac{1}{2}g^{cd}(\tilde{\nabla}_a g_{bd}+\tilde{\nabla}_b g_{ad}-\tilde{\nabla}_d g_{ab}). \tag{3-2-7}$$

故只要存在任一导数算符，即存在适配导数算符。而普通导数算符是存在的∂_a。

5） 适配导数算符唯一。
(由存在性的证明中，若$\tilde{\nabla}_a$为适配导数算符，则得到$C^c{}_{ab}$为 0，故∇_a与$\tilde{\nabla}_a$没有区别)

6） 欧式空间的笛卡尔系的普通导数算符∂_a与度规适配。$\partial_a\delta_{bc}=0$。

7） 由存在性证明中的$C^c{}_{ab}$知，克氏符$\Gamma^c{}_{ab}=\frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{bd}+\partial_b g_{ad}-\partial_d g_{ab})$。由抽象指标表示和张量分量形式上的对称性易知$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(g_{\nu\rho,\mu}+g_{\mu\rho,\nu}-g_{\mu\nu,\rho})$，其中逗号符号的意义如之前所述。

8） 后面有度规时，一般默认导数算符是适配的。

再论平移：

1） 给定导数算符，定义平移，可以证明有如下等式成立：$T^b\nabla_b v^a|_p=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\tilde{v}^a|_p-v^a|_p}{\Delta t}$，其中$p,q$是曲线上相邻两点，$t(q)-t(p)=\Delta t$，$\tilde{v}^a|_p$是$v^a|_q$沿曲线的从$q$平移至$p$的矢量。

证明[选读] 只须证明如下等价命题：

$$T^b\nabla_b v^a|_t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\psi_{s,t}v(s)]^a\Big|_{s=t}, \tag{3-2-12}$$

其中 $T^b\nabla_b v^a|_t$ 和 $v^a(s)$ 分别是 $T^b\nabla_b v^a|_{C(t)}$ 和 $v^a(C(s))$ 的简写，$\psi_{s,t}$ 是由矢量空间 $V_{C(s)}$ 到 $V_{C(t)}$ 的平移映射(图 3-2). 不难证明(习题) $\psi_{s,t}: V_{C(s)}\to V_{C(t)}$ 是同构映射.

图 3-1 把 $v^a|_q$ 沿曲线平移至 p 点得 $\tilde{v}^a|_p$，便可与 $v^a|_p$ 相减并定义 v^a 沿曲线的导数.

设 $\tilde{v}^a$ 是由 $v^a(s)$ 决定的沿 $C(t)$ 平移的矢量场，则

$$\tilde{v}^a(t)=[\psi_{s,t}v(s)]^a, \tag{3-2-13}$$

$$T^b\nabla_b\tilde{v}^a=0. \tag{3-2-14}$$

式(3-2-13)的坐标分量表述为

$$\tilde{v}^\mu(t) = (\psi_{s,t})^\mu{}_\nu v^\nu(s), \qquad (3\text{-}2\text{-}12')$$

其中 $(\psi_{s,t})^\mu{}_\nu$ 是矩阵 $(\psi_{s,t})$ 的元素. 式(3-2-14)的坐标分量表述为

$$\frac{d\tilde{v}^\mu(t)}{dt} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} T^\sigma v^\nu = 0 .$$

上式又可借助式(3-2-12')写成

$$\frac{d}{dt}[(\psi_{s,t})^\mu{}_\nu v^\nu(s)] + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} T^\sigma (\psi_{s,t})^\nu{}_\rho v^\rho(s) = 0 .$$

把上式用于 $t=s$, 注意到 $\psi_{s,s}$ 是恒等映射, 得

$$\left.\frac{d}{dt}(\psi_{s,t})^\mu{}_\nu\right|_{t=s} = -(\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} T^\sigma)|_s . \qquad (3\text{-}2\text{-}15)$$

另一方面, 由定义知 $\psi_{t,s}$ 是 $\psi_{s,t}$ 的逆映射, 即 $(\psi_{s,t})^\mu{}_\rho (\psi_{t,s})^\rho{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$, 故

$$0 = \left[\frac{d(\psi_{s,t})^\mu{}_\rho}{ds}(\psi_{t,s})^\rho{}_\nu\right]_{s=t} + \left[(\psi_{s,t})^\mu{}_\rho \frac{d(\psi_{t,s})^\rho{}_\nu}{ds}\right]_{s=t}$$

$$= \left.\frac{d(\psi_{s,t})^\mu{}_\nu}{ds}\right|_{s=t} + \left.\frac{d(\psi_{t,s})^\mu{}_\nu}{ds}\right|_{s=t} . \qquad (3\text{-}2\text{-}16)$$

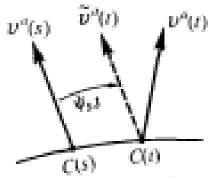


图 3-2　映射 $\psi_{s,t}$ 把 $v^\mu(s)$ 变为 $\tilde{v}^\mu(t)$

现在来证式(3-2-12). 此式右边的第 μ 坐标分量为

$$\left.\frac{d}{ds}[\psi_{s,t} v(s)]^\mu\right|_{s=t} = \left.\frac{d}{ds}[(\psi_{s,t})^\mu{}_\nu v^\nu(s)]\right|_{s=t}$$

$$= \left.\frac{d}{ds}(\psi_{s,t})^\mu{}_\nu\right|_{s=t} v^\nu(t) + (\psi_{s,t})^\mu{}_\nu\Big|_{s=t} \left.\frac{dv^\nu(s)}{ds}\right|_{s=t}$$

$$= -\left.\frac{d}{ds}(\psi_{t,s})^\mu{}_\nu\right|_{s=t} v^\nu(t) + \delta^\mu{}_\nu \left.\frac{dv^\nu(s)}{ds}\right|_{s=t} = (\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} T^\sigma)|_t\, v^\nu(t) + \left.\frac{dv^\mu(s)}{ds}\right|_{s=t}$$

$$= (\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} T^\sigma v^\nu)|_t + \left.\frac{dv^\mu(s)}{ds}\right|_{s=t} = (T^b \nabla_b v^a)^\mu|_t ,$$

其中第三步用到式(3-2-16), 第四步用到式(3-2-15). 上式右边即为式(3-2-11)左边的第 μ 坐标分量, 可见式(3-2-14)成立. □

(证明过程中的$\frac{d}{dt}(\psi_{s,t})^\mu{}_\nu|_{t=s}$, $\frac{d}{ds}(\psi_{t,s})^\mu{}_\nu|_{s=t}$容易看出是相同的)

2) 靠近直观的例子: 在欧氏空间中, 用同一笛卡尔系内矢量分量相等定义欧氏空间的平移。此时用普通导数算符∂_a可以得到:

$T^b\partial_b v^a$ 的第 i 分量 $= (dx^i)_a T^b\partial_b v^a = T^b\partial_b[(dx^i)_a v^a] = T^b\partial_b v^i = T(v^i) = dv^i/dt$;

即$T^b\partial_b v^a = 0$等价于分量不变。

3.3 测地线

测地线:

1) (M,∇_a)上的曲线称为测地线, 若其切矢满足$T^b\nabla_b T^a = 0$。

2) $T^b\nabla_b T^a = 0$称为测地线方程, 分量方程为$\frac{dT^\mu}{dt} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\nu T^\sigma = 0 = \frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\sigma}{dt}$ 。

3) 若流形上有度规, 则(M,g_{ab})的测地线方程中导数算符是与度规适配的导数算符。

4) 欧(闵)氏空间在笛卡尔(洛伦兹)系中的克氏符为 0, 故测地线为“直线”。

5） p点和p点的一个矢量v^a确定唯一一条测地线$\gamma(t)$满足(a)$\gamma(0)=p$；(b)$\gamma(t)$在p点的切矢v^a。

(从上面的二阶微分方程可以看出)

测地线的参数:

1） 对测地线的重参数化的切矢

定理 3-3-1 设$\gamma(t)$为测地线，则其重参数化$\gamma'(t')[=\gamma(t)]$的切矢T'^a满足

$$T'^a\nabla_a T'^b = \alpha T'^b \quad [\alpha \text{ 为 } \gamma(t) \text{ 上的某个函数}]. \tag{3-3-1}$$

证明

$$T^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a = \left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^a \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} T'^a,$$

$$0 = T^a\nabla_a T^b = \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} T'^a \nabla_a\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} T'^b\right) = \left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right)^2 T'^a\nabla_a T'^b + T'^b \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} T'^a \nabla_a\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\text{右边第二项} = T'^b \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right) = T'^b \frac{\mathrm{d}^2 t'}{\mathrm{d}t^2}, \text{故 } T'^a\nabla_a T'^b = -\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2 t'}{\mathrm{d}t^2} T'^b.$$

令$\alpha = -\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2 t'}{\mathrm{d}t^2}$，得证. □

2） 上述定理的逆定理也成立

(我猜：如果上面那个α的方程可以解，应该是可以的，但别的没什么想法。)

3） 能使曲线成为测地线的参数称为该曲线的仿射参数。

4） 若t是某测地线的仿射参数，则另一参数t'也为仿射参数的充要条件为$t'=at+b$，其中a,b为常数。

(令$\alpha=0$，而$\frac{dt}{dt'}\neq 0$(重参数化的要求))

5） (非类光)测地线的线长参数必为仿射参数。

(由于以线长为参数时切矢长度为 1 不变，故$T^c\nabla_c(g_{ab}T^aT^b)=0$，展开后由于导数算符是适配的，可以得到切矢满足测地线方程)

测地线的性质:

1） 设g_{ab}是流形M上的洛伦兹度规场，p,q间的光滑类空(类时)曲线为测地线当且仅当线长为极值。

(对g_{ab}为正定度规的情形也适用。这里的线长取极值指的是对邻近的另一条同类型曲线而言（类时/类空）)

(我猜：书上只对洛伦兹度规和正定度规提出这个定理，但我感觉证明过程中只是需要切矢长度不变号。故我猜：两点之间满足曲线上切矢处处不为 0 的且不变号的曲线为测地线当且仅当这条曲线长度为极值。同样极值指的是和同类型曲线相比。)

2） 具体证明:

证明[选读]

我们借用坐标系给出证明. 设$C(t)$是曲线，$x^\mu(t)$是其在某坐标系的参数表达式，$p\equiv C(t_1)$，$q\equiv C(t_2)$，则由式(2-5-6)知道从p到q的线长可用坐标语言表为

$$l = \int_{t_1}^{t_2}\left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\right)^{1/2}\mathrm{d}t\,. \tag{3-3-3}$$

[默认 $C(t)$ 为类空曲线. 若 $C(t)$ 为类时, 则上式括号内应添一负号, 对结果并无影响.] 设 $C'(t)$ 为一"无限邻近"曲线, 其参数表达式 $x'^{\mu}(t)$ 满足 $x'^{\mu}(t_1)=x^{\mu}(t_1)$, $x'^{\mu}(t_2)=x^{\mu}(t_2)$, 且变分 $\delta x^{\mu}(t)\equiv x'^{\mu}(t)-x^{\mu}(t)$ 为"无限小". 这一变分导致 $g_{\mu\nu}$ 和切矢分量 $\mathrm{d}x^{\mu}/\mathrm{d}t$ 的微小改变依次为

$$\delta g_{\mu\nu}\equiv g_{\mu\nu}[x^{\sigma}(t)+\delta x^{\sigma}(t)]-g_{\mu\nu}[x^{\sigma}(t)]=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\delta x^{\sigma}(t)$$

和

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\right)\equiv\frac{\mathrm{d}(x^{\mu}+\delta x^{\mu})}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\delta x^{\mu})}{\mathrm{d}t},$$

它们又通过式(3-3-3)导致 l 的如下变分:

$$\delta l=\frac{1}{2}\times$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\right)^{-1/2}\left[g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x^{\nu})+g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x^{\mu})+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}(\delta x^{\sigma})\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t.$$

由于线长与曲线的参数化无关, 可选择最便于计算的参数. 定理 3-3-5 表明, 无论曲线原来的参数(暂记作 $\tilde{t}$)如何, 总可选新参数 $t=t(\tilde{t})$ 使曲线上每点的切矢长度归一, 即 $g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}=1$. 再注意到 $g_{\mu\nu}$ 的对称性, 上式便简化为

$$\begin{aligned}\delta l&=\int_{t_1}^{t_2}\left[g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x^{\nu})+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}(\delta x^{\sigma})\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\delta x^{\nu}\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\right)\delta x^{\nu}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}(\delta x^{\sigma})\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{\mu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\right](\delta x^{\sigma})\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中最末一步用到 δx^{σ} 在点 $C(t_1)$ 和 $C(t_2)$ 为零这一前提. 上式表明 δl 对任选的 δx^{σ} 都为零的充要条件是

$$\begin{aligned}0&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{\mu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\\&=-g_{\mu\sigma}\frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

以 $g^{\rho\sigma}$ 缩并上式得

$$\begin{aligned}0&=-\frac{\mathrm{d}^2x^{\rho}}{\mathrm{d}t^2}-g^{\rho\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu}-\tfrac{1}{2}g_{\mu\nu,\sigma})\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\\&=-\frac{\mathrm{d}^2x^{\rho}}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(g_{\sigma\mu,\nu}+g_{\nu\sigma,\mu}-g_{\mu\nu,\sigma})\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\\&=-\frac{\mathrm{d}^2x^{\rho}}{\mathrm{d}t^2}-\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

上式正是测地线定义的坐标表达式[式(3-3-2)]. □

作为思考题, 请读者考虑如果不取 $g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}=1$ 将导致怎样的结果.

(思考题我不会写。。。)

线长为极值的讨论:

1） 对于正定度规，极值没有极大值。若线长为极小值，则为测地线。但测地线不一定线长极小，可以既不极大也不极小。
(书上 p72 页举了一个测地线不为极小的例子，但我看不懂。。)
2） 闵氏时空的测地线为直线，可以过坐标系平移、伪转动变为坐标线（假设为x^0）。由于为类时线，切矢的长度小于 0，故g_{00}为-1，其他对角元为 1。从而沿着坐标线的长度微元和在x^1方向偏离坐标线的长度微元分别为

$$dl=\sqrt{-ds^2}=\sqrt{-[-(dx^0)^2+0]}>\sqrt{-[-(dx^0)^2+(dx^1)^2]}=dl'$$

故类时测地线为最长的类时线。两点之间的类时线为最长线等价于它是测地线。
(书上说类时线没有最短线，因为总可以修改使之更接近类光线)
(我猜：这些结论(测地线最长、不存在最短)也适用于类空)

指数映射:
1） $p\in M$的指数映射是从V_p(或其子集)到流形M的映射，记为$\exp_p$:V_p(或其子集)$\to M$，具体定义为: $\exp_p(v^a)=\gamma(1)$。其中$\gamma(t)$为由(p,v^a)确定的唯一的测地线，且有$\gamma(0)=p$。
2） 指数映射有时性质并不好，但做适当限制后会很好:

$p\in M$ 的**指数映射**(exponential map)是从 V_p(或其子集)到流形 M 的映射，记作

$$\exp_p: V_p(\text{或其子集})\to M,$$

定义如下：$\forall v^a\in V_p$，(p,v^a) 决定唯一的测地线 $\gamma(t)$，选 p 为仿射参数 t 的零点，则 v^a 在 $\exp_p$ 映射下的像定义为测地线上 $t=1$ 的点，即 $\exp_p(v^a):=\gamma(1)$. 设 $\underline{0}$ 是 V_p 的零元. 因为由 $(p,\underline{0})$ 决定的唯一测地线是把 $\mathbb{R}$ (或它的一个区间)的所有点映到 p 点的映射，故 $\exp_p(\underline{0})=p$. 然而，如果从 M 中挖去点 $\gamma(1)$，即以 $M-\{\gamma(1)\}$ 为背景流形(图 3-6)，则 v^a 在 $\exp_p$ 映射下无像. 因此指数映射的定义域可能只是 V_p 的一个子集 $\hat{V}_p$，即 $\exp_p:\hat{V}_p\to M$. 图 3-7 表明由 (p,v^a) 和 (p,v'^a) 决定的两条测地线 $\gamma(t)$ 和 $\gamma'(t)$ 交于 q. 适当选择 v^a 和 v'^a 的长度可使 $q=\gamma(1)=\gamma'(1)$，从而 $q=\exp_p(v^a)=\exp_p(v'^a)$，可见在这种情况下 $\exp_p$ 不是一一映射. 图 3-6 中由于挖去一点，对 q 点而言就不存在 $u^a\in V_p$ 使 $q=\exp_p(u^a)$，可见这种情况下 $\exp_p$ 不是到上映射. 然而可以证明，只要把 $\exp_p$ 的定义域和值域作适当限制，则它不但一一到上，而且是微分同胚. 请看如下定理：

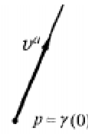


图 3-6 挖去点 $\gamma(1)$，则 v^a 在 $\exp_p$ 下无像.

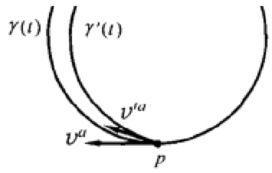


图 3-7 p 与 v^a 和 v'^a 决定的两条测地线交于 q. 选 v^a 和 v'^a 长度使 $q=\gamma(1)=\gamma'(1)$，使可知 $\exp_p$ 不是一一映射.

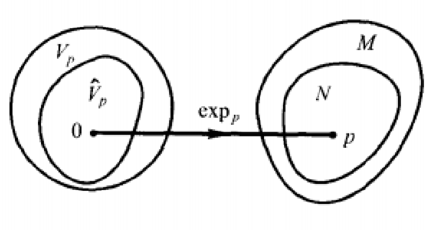


图 3-8 $\exp_p:\hat{V}_p\to N$ 是微分同胚

定理 3-3-7 $\forall p\in M$，总可在其切空间 V_p (看作 n 维流形)内找到含零元的开子集 $\hat{V}_p$，在流形 M 中找到含 p 的开子集 N，使 $\exp_p:\hat{V}_p\to N$ 是微分同胚映射(图 3-8).

证明 可参阅 Hawking and Ellis(1973)P.33-34. □

(我没有查阅。。)

黎曼法坐标:
1） 法邻域：$p\in M$，N为p的领域，若V_p存在开子集使得$\exp_p$:$\hat{V}_p\to N$为微分同胚，则N称为p点的法邻域。

2） 黎曼法坐标：$q \in M$，q点的 n 个坐标定义为$v^a = \exp_p^{-1}(q) \in \hat{V}_p$在基底的 n 个分量，这样定义的坐标系称为黎曼法坐标系，坐标域为N。
3） (N, ψ)为p点黎曼法坐标系，则过p点的任一测地线$\gamma(t)$在ψ映射下为R^n中的直线。
(测地线$\gamma(t)$上参数为t_q的点$q = \gamma(t_q)$对曲线重参数化$t' = t/t_q$后可以变为$q = \gamma'(1)$，此时p点对应的切矢为$\partial/\partial t'|_p = t_q\, \partial/\partial t|_p$，则指数映射满足$\exp_p^{-1}(q) = t_q\, \partial/\partial t|_p$，也即$\exp_p^{-1}(\gamma(t_q)) = t_q \exp_p^{-1}(\gamma(1))$，故测地线$\gamma(t)$在$\psi$映射下为$R^n$中的直线。)
4） 在测地线方程的分量形式中坐标有二阶导数$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + {\Gamma^\mu}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\sigma}{dt} = 0$，若在$p$点法邻域取黎曼法坐标，由于$x^\mu(t)$为直线，故二阶导为 0，${\Gamma^\mu}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\sigma}{dt} = 0$。过$p$点的任一测地线都成立，故${\Gamma^\mu}_{\nu\sigma}|_p = 0$，从而${\Gamma^c}_{ab} = 0$。

3.4 黎曼曲率张量

导数算符的对易子：
1） $(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)$称为$\nabla_a$的对易子。
2） 设$f \in \mathcal{F}, \omega_a \in \mathcal{T}(0,1)$，则$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)(f\omega_c) = f(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\omega_c$。
(等号左边展开，由导数算符无挠性可以得到右边。)
3） 设$\omega_c, \omega'_c \in \mathcal{T}(0,1)$且$\omega'_c|_p = \omega_c|_p$，则$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\omega'_c|_p = (\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\omega_c|_p$。
(在等号两边的张量写成分量相加，则每个分量基矢对应前面的ω_a，分量对应前面的f，由于基矢是一样的，而由条件，分量也是一样的。故两边相等。)
4） $(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)$对$\omega_c$的作用仅与其在$p$点的取值有关，且为线性映射，将(0,1)型张量映射为(0,3)型张量，故$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)$对应于$p$点的一个(1,3)型张量，称为黎曼曲率张量，记为${R_{abc}}^d$。$p$点任意，故可有张量场${R_{abc}}^d$。
5） 严格定义：导数算符的黎曼曲率张量场${R_{abc}}^d$由下式定义：
$$ {R_{abc}}^d\omega_d = (\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\omega_c, \forall\omega_c \in \mathcal{T}(0,1) $$
6） 给定度规时，定义中的导数算符是与度规适配的导数算符。
7） 黎曼张量场为 0 的度规称为平直度规，如欧式度规、闵氏度规。
(∂_a与欧式、闵氏度规适配，由偏导数顺序可交换得到$(\partial_a\partial_b - \partial_b\partial_a) = 0$)

关于黎曼曲率张量的直观演示：
1） 导数算符的对易子与矢量沿闭合曲线平移一周后与原矢量的对比直接相关：
[我感觉他(3.2.7)式前面一段话关于花括号内的小量估计有点奇怪不是很懂，我的理解写在后面的我猜里]

We first show that ${R_{abc}}^d$ is directly related to the failure of a vector to return to its initial value when parallel transported around a small closed curve. We can conveniently construct a small closed loop at $p \in M$ by choosing a two-dimensional surface S through p and choosing coordinates t and s in the surface [with the coordinates of p chosen, for simplicity, to be $(0, 0)$]. Consider the loop formed by moving Δt along the $s = 0$ curve, followed by moving Δs along the $t = \Delta t$ curve, and then moving back by Δt and Δs as illustrated in Figure 3.3. Let v^a be a vector at p (not necessarily tangent to S) and let us parallel transport v^a around this closed

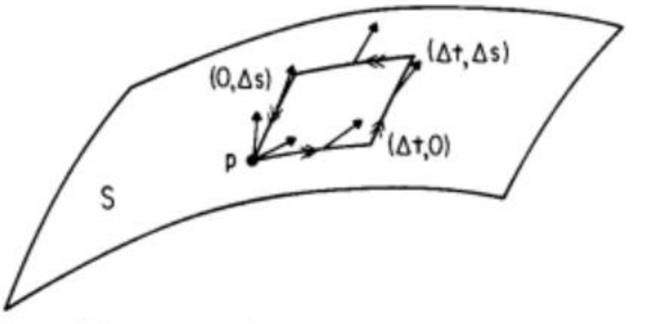


Fig. 3.3. The parallel transport of a vector v^a around a small closed loop. As derived in the text, to second order in Δt and Δs, the change in v^a is governed by the Riemann tensor at p.

loop. It is easiest to compute the change in v^a when we return to p by letting ω_a be an arbitrary dual vector field and finding the change in the scalar $v^a\omega_a$ as we traverse the loop. For small Δt the change, δ_1, in $v^a\omega_a$ on the first leg of the path is

$$\delta_1 = \Delta t \frac{\partial}{\partial t}(v^a\omega_a)\bigg|_{(\Delta t/2,\,0)} \quad , \tag{3.2.4}$$

where, by evaluating the derivative at the midpoint, we have ensured that this expression is accurate to second order in the displacement Δt. We may rewrite δ_1 as

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \Delta t\ T^b\nabla_b(v^a\omega_a)\big|_{(\Delta t/2,\,0)} \quad , \\ &= \Delta t\ v^a T^b\nabla_b\omega_a\big|_{(\Delta t/2,\,0)} \quad ,\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

where T^b is the tangent to the curves of constant s and $T^b\nabla_b v^a = 0$ by equation (3.1.16). Similar expressions hold for the changes δ_2, δ_3, and δ_4 on the other parts of the path. The two "Δt variations," δ_1 and δ_3, combine to yield

$$\delta_1 + \delta_3 = \Delta t\{v^a T^b\nabla_b\omega_a\big|_{(\Delta t/2,\,0)} - v^a T^b\nabla_b\omega_a\big|_{(\Delta t/2,\,\Delta s)}\} \quad , \tag{3.2.6}$$

and δ_2 and δ_4 combine similarly. Since the term in brackets vanishes as $\Delta s \to 0$, this shows that to first order in Δt and Δs, the total change in $v^a\omega_a$ (and thus the total change in v^a) vanishes; i.e., parallel transport *is* path-independent to *first order* in Δt and Δs. To calculate the second order change in $v^a\omega_a$, we need to evaluate the term in brackets in equation (3.2.6) to first order. We do this by the following procedure: We consider the curve $t = \Delta t/2$ and imagine parallel transporting v^a and $T^b\nabla_b\omega_a$ along this curve from $(\Delta t/2, 0)$ to $(\Delta t/2, \Delta s)$. Now to first order in Δs, v^a at $(\Delta t/2, \Delta s)$ equals the parallel transport of v^a at $(\Delta t/2, 0)$ along this curve since, as remarked above, parallel transport is path-independent to first order. On the other hand, to first order, the term $T^b\nabla_b\omega_a$ at $(\Delta t/2, \Delta s)$ will differ from the parallel transport of that quantity from $(\Delta t/2, 0)$ by the amount $\Delta s S^c\nabla_c(T^b\nabla_b\omega_a)$, where S^c is the tangent to the curves of constant t. Hence, the term in brackets is just this quantity contracted with v^a. Thus, to second order in $\Delta t, \Delta s$, we find

$$\delta_1 + \delta_3 = -\Delta t\ \Delta s\ v^a S^c\nabla_c(T^b\nabla_b\omega_a) \quad , \tag{3.2.7}$$

where, to this accuracy, we may evaluate all tensors at p. Adding the similar contribution for δ_2 and δ_4, we find the total change in $v^a\omega_a$ is

$$\begin{aligned}\delta(v^a\omega_a) &= \Delta t\ \Delta s\ v^a\{T^c\nabla_c(S^b\nabla_b\omega_a) - S^c\nabla_c(T^b\nabla_b\omega_a)\}\\ &= \Delta t\ \Delta s\ v^a T^c S^b(\nabla_c\nabla_b - \nabla_b\nabla_c)\omega_a\\ &= \Delta t\ \Delta s\ v^a T^c S^b R_{cba}{}^d\omega_d \quad ; \qquad (3.2.8)\end{aligned}$$

where in the second line we used the fact that the coordinate vector fields T^a and S^b commute (see the end of section 2.2 and eq. [3.1.2]) and we used the definition of the Riemann tensor equation (3.2.3) in the last step. But equation (3.2.8) can hold for all ω_a if and only if the total change in v^a (accurate to second order in Δt and Δs) is

$$\delta v^a = \Delta t\ \Delta s\ v^d T^c S^b R_{cbd}{}^a \quad . \qquad (3.2.9)$$

This is the desired result. It shows that the Riemann tensor indeed directly measures the path dependence of parallel transport.

（Wald R M. 1984. General Relativity. Chicago: The University of Chicago Press. P.37，38）

(基本思路是用任意对偶矢量场作内积，衡量内积变换。中间用到小量估计，但我不是很懂他对花括号内的小量估计，我猜一下我的理解：原文说，沿闭合回路平移一周，作内积的变化量为二阶小量(这个我可以看懂)，注意到括号内也为内积差，是位于$(\frac{\Delta t}{2},0)$的v^a和从这里沿折线平移至$(\frac{\Delta t}{2},\Delta s)$的$v^a$与某对偶矢量场$T^b\Delta_b\omega_a$作内积的差，记为$\delta$。这时考虑$v^a$从$(\frac{\Delta t}{2},0)$沿坐标线直接平移至$(\frac{\Delta t}{2},\Delta s)$，考虑两者与$T^b\Delta_b\omega_a$作内积的差，记为$\delta'$。由前面对闭合回路平移的结论知，$(\delta-\delta')$为二级小量，故可以将花括号内的$\delta$替换为$\delta'$，也即将$(\frac{\Delta t}{2},\Delta s)$的$v^a$理解为从$(\frac{\Delta t}{2},0)$沿坐标线直接平移过去的。这时，如果$T^b\nabla_b\omega^a=g^{ac}T^b\nabla_b\omega_c$(导数算符与度规适配，度规可以拿进拿出)也是沿这条线平移的，那么δ'将变为 0，但$T^b\nabla_b\omega^a$并没有是平移矢量场场的要求，它和平移过来的矢量的差别为$\Delta s S^c\nabla_c(T^b\nabla_b\omega^a)$，进而相应对偶矢量的差别为$\Delta s S^c\nabla_c(T^b\nabla_b\omega_a)$，因此就可以得到(3.2.7)式。原文中的(3.2.8)式用到了矢量对易子的导数算符表示以及坐标基矢的对易子为 0。)

由度规得黎曼曲率张量的分量：

1) M上给定度规g_{ab}，适配的导数算符对应的克氏符为$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(g_{\nu\rho,\mu}+g_{\mu\rho,\nu}-g_{\mu\nu,\rho})$。

2) $R_{abc}{}^d\omega_d=2\nabla_{[a}\nabla_{b]}\omega_c$，用普通导数算符展开$\nabla_a(\nabla_b(\omega_c))$可以得到：

$$\begin{aligned}&\nabla_a(\nabla_b(\omega_c))\\ &=(\partial_a\partial_b\omega_c-\Gamma^e{}_{bc}\partial_a\omega_e-\omega_e\partial_a\Gamma^e{}_{bc})-\Gamma^d{}_{ab}\partial_d\omega_c+\Gamma^d{}_{ab}\Gamma^e{}_{dc}\omega_e-\Gamma^d{}_{ac}\partial_b\omega_d+\Gamma^d{}_{ac}\Gamma^e{}_{bd}\omega_e\end{aligned}$$

由普通导数算符可交换，克氏符关于两个下标对称可以得到：

$$\begin{aligned}&R_{abc}{}^d\omega_d=2\nabla_{[a}\nabla_{b]}\omega_c=2\left(-\Gamma^e{}_{c[b}\partial_{a]}\omega_e-\omega_e\partial_{[a}\Gamma^e{}_{b]c}-\Gamma^d{}_{c[a}\partial_{b]}\omega_d+\Gamma^d{}_{c[a}\Gamma^e{}_{b]d}\omega_e\right)\\ &=-2\omega_e\partial_{[a}\Gamma^e{}_{b]c}+2\Gamma^d{}_{c[a}\Gamma^e{}_{b]d}\omega_e=\left(-2\partial_{[a}\Gamma^e{}_{b]c}+2\Gamma^d{}_{c[a}\Gamma^e{}_{b]d}\right)\omega_e\end{aligned}$$

从而得到$R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho=\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma,\nu}-\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma,\mu}+\Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu}\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}-\Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu}\Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}$。

导数算符对易子在其他张量上的作用：

1) 用类似于求$C^c{}_{ab}$对其他张量的作用来求。
2) 由作内积$v^a\omega_a$和导数算符无挠性和$R_{abc}{}^d\omega_d=(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\omega_c$可以得到作用在矢量上的结果：$(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)v^c=-R_{abd}{}^c v^d, \forall v^c\in\mathcal{T}(1,0)$。
3) 由已有的两个结果，用矢量对偶矢量凑一般张量$T^{c_1\cdots c_k}{}_{d_1\cdots d_l}$的内积，进而得到对易子对一般张量的作用：

$$(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)T^{c_1\cdots c_k}{}_{d_1\cdots d_l}=-\sum_{i=1}^k R_{abe}{}^{c_i}T^{c_1\cdots e\cdots c_k}{}_{d_1\cdots d_l}+\sum_{j=1}^l R_{abd_j}{}^e T^{c_1\cdots c_k}{}_{d_1\cdots e\cdots d_l}$$

黎曼曲率张量的性质：
1) 黎曼曲率张量有下列性质：

定理 3-4-6 曲率张量有以下性质：

1. $R_{abc}{}^d=-R_{bac}{}^d$； (3-4-6)

3. (**比安基恒等式**) $\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e=0$； (3-4-8)

若 M 上有度规场 g_{ab} 且 $\nabla_a g_{bc}=0$，则可定义 $R_{abcd}\equiv g_{de}R_{abc}{}^e$，且 R_{abcd} 还满足

4. $R_{abcd}=-R_{abdc}$； (3-4-9)
5. $R_{abcd}=R_{cdab}$. (3-4-10)

证明

1. 由定义显见.
2. 因 $R_{[abc]}{}^d\omega_d=\nabla_{[a}\nabla_b\omega_{c]}-\nabla_{[b}\nabla_a\omega_{c]}=2\nabla_{[a}\nabla_b\omega_{c]}$，故欲证式(3-4-7)只须证

$$\nabla_{[a}\nabla_b\omega_{c]}=0 \qquad \forall\omega_c\in\mathscr{F}(0,1). \tag{3-4-11}$$

由式(3-1-8)（令其 $\tilde{\nabla}_a=\partial_a$）得

$$\begin{aligned}\nabla_a(\nabla_b\omega_c)&=\partial_a(\nabla_b\omega_c)-\Gamma^d{}_{ab}\nabla_d\omega_c-\Gamma^d{}_{ac}\nabla_b\omega_d\\&=\partial_a(\partial_b\omega_c-\Gamma^e{}_{bc}\omega_e)-\Gamma^d{}_{ab}\nabla_d\omega_c-\Gamma^d{}_{ac}\nabla_b\omega_d\\&=(\partial_a\partial_b\omega_c-\Gamma^e{}_{bc}\partial_a\omega_e-\omega_e\partial_a\Gamma^e{}_{bc})-\Gamma^d{}_{ab}\nabla_d\omega_c-\Gamma^d{}_{ac}\nabla_b\omega_d,\end{aligned} \tag{3-4-12}$$

故

$$\nabla_{[a}\nabla_b\omega_{c]}=\partial_{[a}\partial_b\omega_{c]}-\Gamma^e{}_{[bc}\partial_{a]}\omega_e-\omega_e\partial_{[a}\Gamma^e{}_{bc]}-\Gamma^d{}_{[ab}\nabla_{|d|}\omega_{c]}-\Gamma^d{}_{[ac}\nabla_{|b|}\omega_{d]},$$

下标$[ab|d|c]$中的$|d|$表明 d 不参与反称化. 注意到$\partial_a\partial_b\omega_c=\partial_b\partial_a\omega_c$和$\Gamma^e{}_{bc}=\Gamma^e{}_{cb}$，由全反称号[ ]的定义可知上式右边每项都为零.

3. 欲证式(3-4-8)，只须证 $\omega_e\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e=0 \quad \forall\omega_e\in\mathscr{F}(0,1)$，而

$$\begin{aligned}\omega_e\nabla_a R_{bcd}{}^e&=\nabla_a(R_{bcd}{}^e\omega_e)-R_{bcd}{}^e\nabla_a\omega_e\\&=\nabla_a(\nabla_b\nabla_c\omega_d-\nabla_c\nabla_b\omega_d)-R_{bcd}{}^e\nabla_a\omega_e,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\omega_e\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e&=\nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{c]}\omega_d-\nabla_{[a}\nabla_c\nabla_{b]}\omega_d-R_{[bc|d|}{}^e\nabla_{a]}\omega_e\\&=\nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{c]}\omega_d-\nabla_{[b}\nabla_a\nabla_{c]}\omega_d-R_{[bc|d|}{}^e\nabla_{a]}\omega_e.\end{aligned} \tag{3-4-13}$$

为求右边前二项之和，先写出它们去掉方括号的表达式：

$$\nabla_a\nabla_b\nabla_c\omega_d-\nabla_b\nabla_a\nabla_c\omega_d=(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\nabla_c\omega_d=R_{abc}{}^e\nabla_e\omega_d+R_{abd}{}^e\nabla_c\omega_e,$$

其中第二步用到式(3-4-5). 对下标 a, b, c 作反称化，注意到式(3-4-7)，便有

$$\nabla_{[a}\nabla_b\nabla_{c]}\omega_d-\nabla_{[b}\nabla_a\nabla_{c]}\omega_d=R_{[ab|d|}{}^e\nabla_{c]}\omega_e=R_{[bc|d|}{}^e\nabla_{a]}\omega_e.$$

上式表明式(3-4-13)右边为零，于是 $\omega_e\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e=0$.

4. 把式(3-4-5)用于 g_{cd}，由 $\nabla_a g_{cd}=0$ 得

$$0=(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)g_{cd}=R_{abc}{}^e g_{ed}+R_{abd}{}^e g_{ce}=R_{abcd}+R_{abdc},$$

故式(3-4-9)成立.

5. 留作习题. □

（性质 5 的这个我没证出来。。在网上找了一下，在 https://www.doc88.com/p-9783186965444.html 有用分量相等证明的，不过记号和我们的有点区别，而且计算极其繁琐。。我就不放上来了。）

2) 若流形为 n 维，则满足这些性质的黎曼曲率张量的独立分量个数为$n^2(n^2-1)/12$个。
(梁书说证明在 Bergmann P G. 1976. Introduction to the theory of relativity. New York: W A Benjamin, INC)
(我没有查阅。。)

黎曼曲率张量的缩并：

1) $T^a{}_a = g^{ac}T_{ac}$ 称为$T^a{}_b$的迹，也称为T_{ab}的迹。
2) R_{abcd}有不同的缩并：$g^{ab}R_{abcd}, g^{cb}R_{abcd}, g^{ac}R_{abcd}, g^{bd}R_{abcd}, g^{ad}R_{abcd}, g^{bc}R_{abcd}$，但由之前满足的性质易知，前两个为 0，中间两个相等，最后两个等于中间两个加负号。故只有一个独立，取$g^{bd}R_{abcd} = R_{abc}{}^b$。缩并可以看作某种“迹”。
3) 令$R_{ac} = R_{abc}{}^b$，称为里奇张量。虽然上面过程中用到了度规，但里奇张量的定义不需要度规。由R_{abcd}的性质知，$R_{ac} = R_{ca}$。
4) R_{ac}分量为$R_{\mu\sigma} = R_{\mu\nu\sigma}{}^\nu = \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma^\nu{}_{\nu\sigma,\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu}\Gamma^\nu{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu}\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}$。
5) $R \coloneqq g^{ac}R_{ac} = R^a{}_a$，称为标量曲率。

由曲率张量构造的张量：

1) 迹为 0 的外尔张量和爱因斯坦张量：

定义 2 对维数 $n\geq 3$ 的广义黎曼流形，**外尔张量**(Weyl tensor) C_{abcd} 由下式定义：

$$C_{abcd} := R_{abcd} - \frac{2}{n-2}(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)}Rg_{a[c}g_{d]b}. \tag{3-4-14}$$

定理 3-4-7 外尔张量有以下性质：

(1) $C_{abcd} = -C_{bacd} = -C_{abdc} = C_{cdab}, \quad C_{[abc]d} = 0.$ (3-4-15)

(2) C_{abcd} 的各种迹都为零，例如 $g^{ac}C_{abcd} = 0$.

证明 练习. □

注 式(3-4-14)说明 R_{abcd} 是其无迹部分 C_{abcd} 与有迹部分

$$\frac{2}{n-2}(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) - \frac{2}{(n-1)(n-2)}Rg_{a[c}g_{d]b}$$

之和.

定义 3 **爱因斯坦张量** G_{ab} 由下式定义：

$$G_{ab} := R_{ab} - \tfrac{1}{2}Rg_{ab}. \tag{3-4-16}$$

定理 3-4-8 $\nabla^a G_{ab} = 0 \quad$ (其中 $\nabla^a G_{ab} \equiv g^{ac}\nabla_c G_{ab}$). (3-4-17)

证明 由比安基恒等式(3-4-8)及式(3-4-6)有 $0 = \nabla_a R_{bcd}{}^e + \nabla_c R_{abd}{}^e + \nabla_b R_{cad}{}^e$. 指标 a 同 e 缩并得 $0 = \nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_c R_{abd}{}^a + \nabla_b R_{cad}{}^a = \nabla_a R_{bcd}{}^a - \nabla_c R_{bd} + \nabla_b R_{cd}$. 以 g^{bd} 作用得

$$0 = g^{bd}\nabla_a R_{bcd}{}^a - g^{bd}\nabla_c R_{bd} + g^{bd}\nabla_b R_{cd} = \nabla_a R_c{}^a - \nabla_c R + \nabla_b R_c{}^b = 2\nabla_a R_c{}^a - \nabla_c R. \tag{3-4-18}$$

故 $\nabla^a G_{ab} = \nabla^a R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}\nabla^a R = \nabla_a R_b{}^a - \frac{1}{2}\nabla_b R = 0$，其中第二步用到 $R_{ab} = R_{ba}$，第三步用到式(3-4-18). □

(这部分我都没细看。。)

缩并克氏符：

1) 里奇张量R_{ac}分量中用到缩并克氏符，在$\nabla_a v^a$的表达式中也会遇到，同时可以看出$\nabla_a v^a$

的意义。

2）具体计算：

上式和不少公式中都出现“缩并克氏符” $\Gamma^{\nu}{}_{\nu\sigma}$. 下面推导它的表达式. 为避免关于求和与否的含糊性, 推导中一律加上求和号. 由式(3-4-19)得

$$\sum_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\mu\sigma}=\frac{1}{2}\sum_{\mu,\lambda}g^{\mu\lambda}(g_{\sigma\lambda,\mu}+g_{\mu\lambda,\sigma}-g_{\mu\sigma,\lambda})=\sum_{\mu,\lambda}(\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}g_{\mu\lambda,\sigma}+g^{\mu\lambda}g_{\sigma[\lambda,\mu]})=\frac{1}{2}\sum_{\mu,\lambda}g^{\mu\lambda}g_{\mu\lambda,\sigma},$$

其中最后一步用到 $g^{[\mu\lambda]}=0$. 改写上式为

$$\sum_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\mu\sigma}=\frac{1}{2}\sum_{\mu,\lambda}g^{\mu\lambda}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\sigma}}. \tag{3-4-22}$$

另一方面, 由 $g_{\mu\lambda}$ 组成的矩阵的行列式 g 可借第 ν 行展开为 $g=\sum_{\lambda}g_{\mu\lambda}A^{\mu\lambda}$ ($A^{\mu\lambda}$ 是 $g_{\mu\lambda}$ 的代数余子式), 故 $\partial g/\partial g_{\mu\lambda}=A^{\mu\lambda}$. 于是由逆矩阵元的表达式 $g^{\mu\lambda}=A^{\lambda\mu}/g$ 有

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\lambda}}=gg^{\mu\lambda}. \tag{3-4-23}$$

因 $g_{\mu\lambda}$ 是坐标 x^{σ} 的函数, 故 g 也是, 且

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\sigma}}=\sum_{\mu,\lambda}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\lambda}}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\sigma}}=g\sum_{\mu,\lambda}g^{\mu\lambda}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\sigma}}, \tag{3-4-24}$$

其中最后一步用到式(3-4-23). 式(3-4-22)和(3-4-24)结合给出

$$\sum_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\mu\sigma}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^{\sigma}}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial x^{\sigma}}. \tag{3-4-25}$$

此即为“缩并克氏符”表达式, 除用于求里奇张量的坐标分量外, 矢量场 v^a 的散度 $\nabla_a v^a$ 的计算也是应用例子. $\nabla_a v^a$ (作为标量场)可借任意基底场求得. 借用坐标基底, 由式(3-4-25)和 $\nabla_a v^a=\partial_a v^a+\Gamma^{a}{}_{ab}v^b$ 易得

$$\nabla_a v^a=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}(\sqrt{|g|}\,v^{\sigma})\ (\text{对 }\sigma\text{ 的求和号已略}), \tag{3-4-26}$$

其中 $|g|$ 是 g 的绝对值.

((3-4-26)式的“易得”指的是莱布尼兹公式。这个公式与直角坐标系、球坐标系、柱坐标系的散度相同。)

3.5 内禀曲率和外曲率

[这节就一个]

曲率：

1）3 维欧氏空间中的 2 维面可以讨论是否弯曲，同样，流形镶嵌进入高一维流形定义的曲率称为外曲率。

2）本章定义的黎曼曲率是内禀曲率，不需要更高维的流形。

3）内禀弯曲性的弯曲反应三个等价性质：(a)导数算符非对易性，黎曼曲率张量不为 0；(b)矢量平移的曲线依赖性，沿闭合曲线平移一周不重合；(c)存在初始平行但后来不平行的测地线。

(书上没证明等价性)

4） 在球面上的演示：

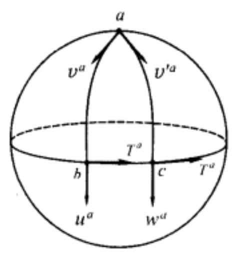


图 3-10 a 点的矢量 v^a 沿球面上闭曲线 $abca$ 平移一周后得 $v'^a \neq v^a$

可见在极点以图中方式移动矢量一圈后并不重合。而两条经线(在球面度规下解测地线方程可以发现测地线为球面上的大圆)在赤道平行，在极点不平行。

(我猜：书上好像没有明确说明在一处测地线平行是什么意思，我猜他可能是这样：选定两条测地线γ_1,γ_2上的两点p,q，用另一条测地线γ_3相连，若将p点γ_1切矢沿γ_3平移至q点，与γ_2切矢平行，则称测地线γ_1,γ_2在一处平行。)

4. 李导数、Killing 场和超曲面[诱导！都可以诱导！]

4.1 流形间的映射

拉回、推前映射：

1） M,N为流形(可以不同维度)，$\phi: M \to N$为光滑映射。$\mathcal{F}_M,\mathcal{F}_N$为$M,N$上光滑函数的集合，由$\phi$可以自然诱导出拉回、推前映射。

2） 具体定义为

定义 1 拉回映射(pull back) $\phi^*: \mathscr{F}_N \to \mathscr{F}_M$ 定义为 $(\phi^* f)|_p := f|_{\phi(p)}\ \forall f \in \mathscr{F}_N,\ p \in M$，亦即 $\phi^* f = f \circ \phi$，见图 4-1.

易见$\phi^*: \mathscr{F}_N \to \mathscr{F}_M$ 是线性的，即

$\phi^*(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha\phi^*(f_1) + \beta\phi^*(f_2)\quad \forall f_1, f_2 \in \mathscr{F}_N,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

定义 2 对 M 中任一点 p 可定义**推前映射**(push forward) $\phi_*: V_p \to V_{\phi(p)}$ 如下：$\forall v^a \in V_p$，定义其像 $\phi_* v^a \in V_{\phi(p)}$ 为

$$(\phi_* v)(f) := v(\phi^* f) \qquad \forall f \in \mathscr{F}_N. \qquad (4\text{-}1\text{-}1)$$

还应证明(习题)这样定义的 $\phi_* v^a$ 满足 §2.2 定义 4 对矢量的两个要求，从而确是 $\phi(p)$ 点的矢量.

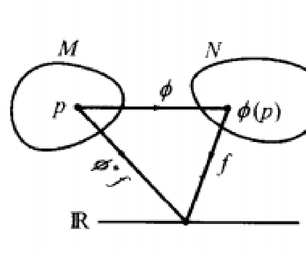


图 4-1 $\phi^* f$ 的定义

(两个要求指线性和莱布尼兹律，线性显然满足；莱布尼兹律我猜：按照拉回映射的定义，对于函数fg，$\phi^*(fg)|_p = fg|_{\phi(p)} = f(\phi(p))g(\phi(p)) = (f\circ\phi(p))(g\circ\phi(p))$，所以应有$\phi^*(fg) = (f\circ\phi)(g\circ\phi) = \phi^*(f)\phi^*(g)$，故$v(\phi^*(fg))$满足莱布尼兹律，进而$\phi_* v$也满足。)

(若$\phi: M \to N, \psi: N \to Q$是光滑映射，由定义不难得到性质如下：

$(\psi\circ\phi)^* f=\phi^*(\psi^* f), \forall f\in\mathcal{F}_Q$，$(\psi\circ\phi)_* v^a=\psi_*(\phi_* v^a), p\in M, v^a\in V_q$ ）

3） 推前映射ϕ_*为线性映射。(和之前$\phi_* v$满足矢量的线性要求不同)
(由定义容易证明)

4） 推前映射将切矢变为切矢。设$C(t)$为M中曲线，T^a为曲线在$C(t_0)$点p的切矢，则$\phi_* T^a$作用到函数上$\phi_* T^a(f)|_{\phi(p)}=T^a(\phi^* f)|_p=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\left(f\circ\phi\circ C(t)\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\left(f\circ\phi(C(t))\right)$，其中$\phi(C(t))$即为以$t$为参数的像曲线，故$\phi_* T^a(f)|_{\phi(p)}$为像曲线在$p$点的切矢。

拉回、推前映射的延拓:

1） 用推前定义拉回的延拓，用拉回的延拓定义推前的延拓:

定义 3 拉回映射可按如下方式推广为 ϕ^* : $\mathscr{F}_N(0,l)\to\mathscr{F}_M(0,l)$:

$\forall T\in\mathscr{F}_N(0,l)$, 定义 $\phi^* T\in\mathscr{F}_M(0,l)$ 为

$$(\phi^* T)_{a_1\cdots a_l}|_p (v_1)^{a_1}\cdots(v_l)^{a_l}:=T_{a_1\cdots a_l}|_{\phi(p)}(\phi_* v_1)^{a_1}\cdots(\phi_* v_l)^{a_l}\quad\forall p\in M, v_1,\cdots v_l\in V_p. \quad (4\text{-}1\text{-}2)$$

定义 4 对 M 中任一点 p，推前映射 ϕ_* 可从 p 点的 $(k,0)$ 型张量按如下定义得到 $\phi(p)$ 点的 $(k,0)$ 型张量：设 T 为 p 点的任一 $(k,0)$ 型张量，则其像 $\phi_* T$ [作为 $\phi(p)$ 点的张量] 定义为

$$(\phi_* T)^{a_1\cdots a_k}(\omega^1)_{a_1}\cdots(\omega^k)_{a_k}:=T^{a_1\cdots a_k}(\phi^*\omega^1)_{a_1}\cdots(\phi^*\omega^k)_{a_k}\quad\forall\omega^1,\cdots,\omega^k\in V^*_{\phi(p)},$$

其中 $(\phi^*\omega)_a$ 定义为 $(\phi^*\omega)_a v^a:=\omega_a(\phi_* v)^a\quad\forall v^a\in V_p$.

2） 延拓了的拉回映射ϕ^*将张量场变为张量场，但延拓了的推前映射ϕ_*需要针对某个点而言，一般不能推广到整个流形上，因为推前映射联系的矢量空间与两个点$p,\phi(p)$有关，可能出现$\phi(p_1)=\phi(p_2)$，或满足$\phi(p)=q$的p可能不存在。 若ϕ为微分同胚映射，则推前映射可以推广到整个流形上，即$\phi_*:\mathcal{T}_M(k,0)\to\mathcal{T}_N(k,0)$。

3）

4） 若ϕ为微分同胚，则ϕ^{-1}存在，ϕ^{-1}诱导的拉回映射$\phi^{-1*}:\mathcal{T}_M(0,l)\to\mathcal{T}_N(0,l)$可以视为$\phi$的某种"推前映射"，故在$\phi$为微分同胚时可对拉回、推前映射进一步延拓。

5） $\phi_*:\mathcal{T}_M(k,l)\to\mathcal{T}_N(k,l)$，

$$(\phi_* T)^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}(\omega^1)_{a_1}\cdots(\omega^k)_{a_k}(v_1)^{b_1}\cdots(v_l)^{b_l}$$
$$:=T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}(\phi^*\omega^1)_{a_1}\cdots(\phi^*\omega^k)_{a_k}(\phi^* v_1)^{b_1}\cdots(\phi^* v_l)^{b_l}$$

其中$(\phi^* v)^b$指的是$(\phi_*^{-1} v)^b$。

$\phi^*:\mathcal{T}_N(k,l)\to\mathcal{T}_M(k,l)$，

$$(\phi^* T)^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}(\omega^1)_{a_1}\cdots(\omega^k)_{a_k}(v_1)^{b_1}\cdots(v_l)^{b_l}$$
$$:=T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}(\phi_*\omega^1)_{a_1}\cdots(\phi_*\omega^k)_{a_k}(\phi_* v_1)^{b_1}\cdots(\phi_* v_l)^{b_l}$$

其中$(\phi_*\omega)_b$指的是$(\phi^{-1*}\omega)_b$。

(在这样的定义下我猜：$(\psi\circ\phi)^*=\phi^*\circ\psi^*, (\psi\circ\phi)_*=\psi_*\circ\phi_*$，依然成立。)

点变换和坐标变换:

1） 微分同胚是点的变换，但也可看作坐标变换。

2） 设$\phi: M\to N$是微分同胚，$\{x^\mu\},\{y^\mu\}$分别是M,N的局部坐标系，相应的坐标域分别为O_1,O_2，若$p\in O_1,\phi(p)\in O_2$，则ϕ在p的邻域$O_1\cap\phi^{-1}[O_2]$可以定义一组新坐标$\{x'^\mu\}$，定义如下：$\forall q\in O_1\cap\phi^{-1}[O_2], x'^\mu(q):=y^\mu(\phi(q))$ 。 从而有坐标变换$x^\mu\to x'^\mu$。

3） 由于推前映射如前所述将曲线切矢变为切矢，故有$\phi_*\left[\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)^a|_q\right]=\left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)^a|_{\phi(q)}$。

(由新坐标的定义式可知，x'^μ坐标线的像曲线即为y^μ坐标线)

4） 由$\phi_*\left[\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\right)^a|_q\right]=\left(\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}\right)^a|_{\phi(q)}$可得$\phi_*\left[(dx'^{\mu})_a|_q\right]=(dy^{\mu})_a|_{\phi(q)}$。

(我猜：$\phi_*\left[(dx'^{\mu})_a|_q\right]\left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu}}\right)^a|_{\phi(q)}=(dx'^{\mu})_a|_q\left(\phi^*\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu}}\right)^a|_{\phi(q)}\right]\right)$

$=(dx'^{\mu})_a|_q\left(\phi_*^{-1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu}}\right)^a|_{\phi(q)}\right]\right)=(dx'^{\mu})_a\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}\right)^a|_q=\delta^{\mu}{}_{\nu}=(dy^{\mu})_a\left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu}}\right)^a|_{\phi(q)}$，故可以推知，要证的等式作用到任意矢量上给出相同结果，故相等。)

(我猜：由这两式又可以证明$\phi^*(dy^{\mu})_a|_{\phi(q)}=(dx'^{\mu})_a|_q,\phi^*\left(\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}\right)^a|_{\phi(q)}=\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\right)^a|_q$，从而在$\phi$为微分同胚时，其诱导的拉回推前映射(延拓后)看上去互为逆映射。)

微分同胚ϕ的主动被动观点：
1) 主动观点：映射造成点变换以及诱导出张量的变换。
2) 被动观点：点和张量没有变，映射诱导出一个坐标变换。
3) 新点$\phi(p)$的新张量ϕ_*T在老坐标系$\{y^{\mu}\}$的分量等于老点的老张量在新坐标系中的分量。$(\phi_*T)^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_{\phi(p)}=T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_p,\forall T\in\mathcal{T}_M(k,l)$。

(我猜：$(\phi_*T)^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_{\phi(p)}=(\phi_*T)^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}|_{\phi(p)}(dy^{\mu_1})_{a_1}\cdots(dy^{\mu_k})_{a_k}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu_1}}\right)^{b_1}\cdots\left(\frac{\partial}{y^{\nu_l}}\right)^{b_l}$

$=T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}|_p(\phi^*[(dy^{\mu_1})])_{a_1}\cdots(\phi^*[(dy^{\mu_k})])_{a_k}\left(\phi^*[\left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu_1}}\right)]\right)^{b_1}\cdots\left(\phi^*[\left(\frac{\partial}{y^{\nu_l}}\right)]\right)^{b_l})$

$=T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}|_p(\phi^*[(dy^{\mu_1})])_{a_1}\cdots(\phi^*[(dy^{\mu_k})])_{a_k}\left(\phi_*^{-1}[\left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu_1}}\right)]\right)^{b_1}\cdots\left(\phi_*^{-1}[\left(\frac{\partial}{y^{\nu_l}}\right)]\right)^{b_l}$

$=T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}|_p(dx'^{\mu_1})_{a_1}\cdots(dx'^{\mu_k})_{a_k}\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\nu_1}}\right)^{b_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\nu_l}}\right)^{b_l}=T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_p$)

4) 一个例子是$u^a=\phi_*v^a\in V_{\phi(p)}$，分量满足$u^{\mu}=v^{\nu}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)|_p$。其中不带撇的分量为老坐标系中的分量。
5) 主动观点和被动观点在这种意义下是等价的。

ϕ的诱导映射与其他运算交换顺序：
1) 与张量积换序：

定理 4-1-4 设$\phi: M\to N$为光滑映射，则$\forall T\in\mathscr{T}_N(0,l)$，$T'\in\mathscr{T}_N(0,l')$有

$$\phi^*(T\otimes T')=\phi^*(T)\otimes\phi^*(T').\tag{4-1-8}$$

□

证明 请读者补上抽象指标后给出证明.

定理 4-1-5 设$\phi: M\to N$为光滑映射，则$\forall T\in\mathscr{T}_{V_p}(k,0)$，$T'\in\mathscr{T}_{V_p}(k',0)$有

$$\phi_*(T\otimes T')=\phi_*(T)\otimes\phi_*(T').\tag{4-1-9}$$

□

证明 请读者补上抽象指标后给出证明.

定理 4-1-6 设$\phi: M\to N$是微分同胚，则$\forall T\in\mathscr{T}_M(k,l)$，$T'\in\mathscr{T}_M(k',l')$有

$$\phi_*(T\otimes T')=\phi_*(T)\otimes\phi_*(T').\tag{4-1-10}$$

注 3 ①上式是N上的张量场等式，而式(4-1-9)只是点$\phi(p)\in N$的张量等式. ②上式的ϕ_*换为ϕ^*也成立，但式中的T和T'应看成N上的张量场，新公式应看作M上的张量场等式. □

证明 练习.

(可以尽情地验证！)

2) 在某点$p \in M$，有下式成立：:

$$\phi_*\left(T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\left(e_{\mu_1}\right)^{a_1}\cdots\left(e_{\mu_k}\right)^{a_k}(e^{\nu_1})_{b_1}\cdots(e^{\nu_l})_{b_l}\right)|_{\phi(p)}$$

$$= T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_p\phi_*\left(\left(e_{\mu_1}\right)^{a_1}\cdots\left(e_{\mu_k}\right)^{a_k}(e^{\nu_1})_{b_1}\cdots(e^{\nu_l})_{b_l}\right)$$

$$= T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_p\phi_*\left(e_{\mu_1}\right)^{a_1}\cdots\phi_*\left(e_{\mu_k}\right)^{a_k}\phi_*(e^{\nu_1})_{b_1}\cdots\phi_*(e^{\nu_l})_{b_l}$$

$$= \phi^{-1*}\left(T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\right)|_{\phi(p)}\phi_*\left(e_{\mu_1}\right)^{a_1}\cdots\phi_*\left(e_{\mu_k}\right)^{a_k}\phi_*(e^{\nu_1})_{b_1}\cdots\phi_*(e^{\nu_l})_{b_l}$$

$$= \phi_*\left(T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\right)|_{\phi(p)}\phi_*\left(e_{\mu_1}\right)^{a_1}\cdots\phi_*\left(e_{\mu_k}\right)^{a_k}\phi_*(e^{\nu_1})_{b_1}\cdots\phi_*(e^{\nu_l})_{b_l}$$

所以有

$$(\phi_*T)^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} = \phi_*\left(T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\right)\phi_*\left(e_{\mu_1}\right)^{a_1}\cdots\phi_*\left(e_{\mu_k}\right)^{a_k}\phi_*(e^{\nu_1})_{b_1}\cdots\phi_*(e^{\nu_l})_{b_l}$$

（书上没讲这个，但它用到了。。）

3) 若ϕ为微分同胚，与缩并交换顺序：$\phi_*(CT) = C(\phi_*T)$。ϕ^*同样有。
(利用上式可以证明。)

4.2 李导数

李导数：

1) M上的光滑矢量场v^a给出一个单参微分同胚群ϕ，ϕ可以诱导出拉回推前映射ϕ_t^*、ϕ_{t*}。
2) 李导数：$\mathcal{L}_v T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} \coloneqq \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\phi_t^* T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} - T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l})$。
3) 由定义知，李导数是从$\mathcal{T}_M(k,l)$到$\mathcal{T}_M(k,l)$的线性映射，且能和缩并交换顺序。
4) $\mathcal{L}_v f = v(f), f \in \mathcal{F}$。
(设$C(t)$是过p的轨道，$\phi_t(p) = C(t)$。由于$C(t)$是积分曲线，满足$C(0) = p$、切矢$T^a|_p = v^a$，可以得到：

$$\mathcal{L}_v f|_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\phi_t^* f - f)\,|_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(\phi_t(p)) - f)\,|_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(C(t)) - f(C(0)))\,|_p)$$

$$= \frac{d}{dt}(f\circ C)|_{t=0} = T^a|_p = v(f)|_p$$

5) 适配坐标系：将李导数用到的矢量场的积分曲线作为x^1坐标线(曲线以x^1为参数)，任意选定能与x^1结合为坐标系的其余坐标。
6) 适配坐标系下的李导数作用到张量上结果的分量：$(\mathcal{L}_v T)^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} = \partial T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}/\partial x^1$

证明 仅以 $n=2,\ k=l=1$ 为例(容易推广至一般情况). 因 $\phi_t{}^* = (\phi_t{}^{-1})_* = \phi_{-t*}$, 式(4-2-1)在任一坐标系的分量式为

$$(\mathscr{L}_v T)^\mu{}_\nu\Big|_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[(\phi_{-t*}T)^\mu{}_\nu\Big|_p - T^\mu{}_\nu\Big|_p\right] \qquad \forall p\in M\,. \tag{4-2-4}$$

令 $q \equiv \phi_t(p)$. 因式(4-2-4)只涉及 p 点附近的情况, 总可认为 p, q 点都在所讨论的适配坐标域内. 对 ϕ_{-t} 而言, q 为老点, p 为新点, 故由式(4-1-5)得

$$(\phi_{-t*}T)^\mu{}_\nu\Big|_p = T'^\mu{}_\nu\Big|_q = \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}T^\rho{}_\sigma\right]_q, \tag{4-2-5}$$

其中 $\{x^\sigma\}$ 为适配坐标(老坐标)，$\{x'^\mu\}$ 是由 ϕ_{-t} 诱导的新坐标，由适配坐标的定义可知 $x^1|_q = x^1|_p + t$，$x^2|_q = x^2|_p$，因而 $x'^1|_q \equiv x^1|_p = x^1|_q - t$，$x'^2|_q \equiv x^2|_p = x^2|_q$，去掉下标 q 便得 $x'^1 = x^1 - t$，$x'^2 = x^2$，故 $\dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} = \delta^\mu{}_\rho$，$\dfrac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} = \delta^\sigma{}_\nu$，式(4-2-5)便成为 $(\phi_{-t*}T)^\mu{}_\nu|_p = T^\mu{}_\nu|_q$，代入式(4-2-4)便得 $(\mathscr{L}_v T)^\mu{}_\nu|_p = \partial T^\mu{}_\nu/\partial x^1|_p$. □

由定理 4-2-2 可知 $\mathscr{L}_v$ 满足莱布尼兹律.

(书上说上述等式不能写为张量形式，我没有很好的原因，书上说等号左边满足张量变换律，右边不满足，可能是说分量指标不能替换抽象指标？)

(莱布尼兹律我猜：

$\mathcal{L}_v(\omega_a v^b) = \mathcal{L}_v(\omega_a v^b)_\nu{}^\mu (dx^\nu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b = \frac{\partial(\omega_\nu v^\mu)}{\partial x^1}\,(dx^\nu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b$

$= \left(\frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^1} v^\mu + \omega_\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^1}\right)(dx^\nu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b = \mathcal{L}_v(\omega_a)v^b + \mathcal{L}_v(v^b)\omega_a$。对一般张量也有类似结论。)

[这段是我猜的$\phi_t^* T$的意义：$(\phi_t^* g_{ab})\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b |_p = g_{ab}(\phi_{t*}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a)(\phi_{t*}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b |_{\phi(p)})$，若$M = N$，且$p, \phi_t(p)$在同一个坐标系$\{x^\mu\}$内，由于$\phi_{t*}$将曲线切矢变为像曲线的切矢，$\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a$为坐标线切矢，在适配坐标系下，$\phi_{t*}$作用在坐标线上像曲线仍是同一坐标线，故$\phi_{t*}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a_p\right] = \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a_{\phi(p)}$。从而有：

$(\phi_t^* g_{ab})_{\nu\mu}|_p = (\phi_t^* g_{ab})\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b |_p = g_{ab}(\phi_{t*}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a)(\phi_{t*}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b |_{\phi(p)}$

$= g_{ab}|_{\phi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a_{\phi(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a_{\phi(p)} = g_{\nu\mu}|_{\phi(p)}$

其他一般张量类似，所以$M = N$时，$\phi_t^* T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$想当于将$t_q - t_p = t$的$q$点上的用适配坐标基底展开的分量，一对一地"移植"到p点相应的坐标基底上，构成新的张量。李导数分量相当于对适配坐标系分量标量场沿积分曲线对求导，与所证得的结论相同。]

李导数与∇_a：

1) $\mathcal{L}_v u^a = [v,u]^a = v^b \nabla_b u^a - u^b \nabla_b v^a, \forall u^a, v^a \in \mathcal{T}(1,0)$，其中$\nabla_a$为任一无挠导数算符。将$\nabla_a$选定为适配坐标系的普通导数算符$\partial_a$，则
   $[v,u]^\mu = (dx^\mu)_a [v,u]^a = (dx^\mu)_a (v^b \partial_b u^a - u^b \partial_b v^a) = v^b \partial_b u^\mu - u^b \partial_b v^\mu$
   由于$v^a = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^a$，故分量为常数，从而$u^b \partial_b v^\mu = 0$。
   则$[v,u]^\mu = v^b \partial_b u^\mu = \partial u^\mu / \partial x^1 = (\mathcal{L}_v u)^\mu$，故$\mathcal{L}_v u^a = [v,u]^a$。
   (有点像哈密顿？)
2) $\mathcal{L}_v \omega_a = v^b \nabla_b \omega_a + \omega_b \nabla_a u^b, \forall v^a \in \mathcal{T}(1,0), \omega_a \in \mathcal{T}(0,1)$，$\nabla_a$为任一无挠导数算符。
   (由$\mathcal{L}_v u^a$，以及$\mathcal{L}_v$与缩并可换序，以及$\mathcal{L}_v$满足莱布尼兹律，以及$\mathcal{L}_v(\omega_a v^a) = v(\omega_a v^a) = v^b \nabla_b(\omega_a v^a)$(因为$\omega_a v^a$为标量场)可以得到)
3) 从此二式类似于前可以证明，对于一般张量，有：

$\mathcal{L}_v T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} = v^c \nabla_c T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} - \sum_{i=1}^k T^{a_1\cdots c\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} \nabla_c v^{a_i} + \sum_{j=1}^l T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots c\cdots b_l} \nabla_{b_j} v^c$

∇_a为任一无挠导数算符。

李导数的对易子：(证明是我猜)

1) 由$\mathcal{L}_v f = v(f)$知，$[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u](f) \coloneqq (\mathcal{L}_v\mathcal{L}_u - \mathcal{L}_u\mathcal{L}_v)(f) = v\big(u(f)\big) - u\big(v(f)\big) = [v,u](f)$，从而$[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u](f) = \mathcal{L}_{[v,u]}(f)$，所以对$\forall f \in \mathcal{F}$，$[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u](f) = \mathcal{L}_{[v,u]}(f)$。
2) 由$\mathcal{L}_v u^a = [v,u]^a$知，$[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u]w^a = \mathcal{L}_v[u,w]^a - \mathcal{L}_u[v,w]^a = \big[v,[u,w]\big]^a - \big[u,[v,w]\big]^a$

   $= -\big[v,[w,u]\big]^a - \big[u,[v,w]\big]^a = \big[w,[u,v]\big]^a = \big[[v,u],w\big]^a = \mathcal{L}_{[v,u]}w^a$，其中倒数第三个等号用到了雅可比恒等式。所以$\forall w^a \in \mathcal{T}(1,0)$，$[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u]w^a = \mathcal{L}_{[v,u]}w^a$。
3) $w^a\xi_a$为标量场，故$[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u](w^a\xi_a) = \mathcal{L}_{[v,u]}(w^a\xi_a)$，由李导数和缩并可交换顺序以及满足莱布尼兹律，等号左边用定义展开，消去一些项后可以化为$w^a[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u]\xi_a + \xi_a[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u]w^a$，而右边可以化为 $\mathcal{L}_{[v,u]}(w^a\xi_a) = w^a\mathcal{L}_{[v,u]}\xi_a + \xi_a\mathcal{L}_{[v,u]}w^a$， 这两式的第二项可以消去，进而得到$w^a\mathcal{L}_{[v,u]}(\xi_a) = w^a[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u]\xi_a$，而$w^a$是任意矢量，所以有下式成立：$[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u]\xi_a = \mathcal{L}_{[v,u]}\xi_a, \forall \xi_a \in T(0,1)$。
4) 由于微分同胚ϕ_t^*和张量积可以换序，有李导数的定义知，李导数可以和张量积换序。则由前面三条可知，$[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u] = \mathcal{L}_{[v,u]}$对于任意张量都成立。

4.3 Killing 矢量场

等度规映射：

1) 之前的讨论不涉及度规，有度规后可以对ϕ有更多要求。
2) 微分同胚$\phi: M \to M$，称为等度规映射，若$\phi^* g_{ab} = g_{ab}$。
   (等式为张量等式。)
3) 由于$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$，故$\phi^* \circ \phi^{-1*} = (\phi^{-1} \circ \phi)^* =$恒等映射，故$\phi^*, \phi^{-1*}$互逆。从而$\phi^* g_{ab} = g_{ab} \Leftrightarrow g_{ab} = \phi^{-1*} g_{ab}$，故$\phi$为等度规映射当且仅当$\phi^{-1}$是等度规映射。
   (ϕ^*, ϕ^{-1*}互逆在之前说ϕ^*, ϕ_*互逆就已经有体现了。)

Killing 矢量场：

1) 给定一个光滑矢量场得到一个单参微分同胚群。
2) (M, g_{ab})上的矢量场ξ^a称为 Killing 矢量场，若它给出的单参微分同胚群是单参等度规群。
3) ξ^a为 Killing 矢量场等价于$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0$。
   (从之前所猜的$\phi_t^* T$的意义易知)
4) ξ^a为 Killing 矢量场等价于ξ^a满足 Killing 方程：$\nabla_a\xi_b + \nabla_b\xi_a = 0$， 其中$\nabla_a$与度规适配。
   (代入$\mathcal{L}_\xi g_{ab}$的∇_a的表达式即得。)
   (等价形式有$\nabla_{[a}\xi_{b]} = 0, \nabla_a\xi_b = \nabla_{[a}\xi_{b]}$。)
   (由方程知，Killing 矢量场的线性组合也是 Killing 矢量场。)
5) 由$[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u] = \mathcal{L}_{[v,u]}$可知，若$v, u$是 Killing 矢量场，则$\mathcal{L}_v g_{ab} = 0, \mathcal{L}_u g_{ab} = 0$，所以可得$[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u] g_{ab} = 0 = \mathcal{L}_{[v,u]} g_{ab}$。故 Killing 矢量场的对易子也是 Killing 矢量场。
6) 若坐标系$\{x^\mu\}$使得g_{ab}的全部分量满足$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1} = 0$(度规分量中不含某坐标)，则$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^a$是坐标域上的 Killing 矢量场。

   (由于$\{x^\mu\}$是$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^a$的适配坐标系，$\mathcal{L}_{\partial/\partial x^1} g_{ab} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1}$。)

7) 若T^a为测地线切矢，则$T^a\nabla_a(T^b\xi_b)=\xi_b T^a\nabla_a T^b+T^a T^b\nabla_a\xi_b=T^a T^b\nabla_a\xi_b=0$。
(最后一步因为$\nabla_a\xi_b=\nabla_{[a}\xi_{b]}$)

决定一个 Killing 矢量场的所需的最多的参数个数：

1) 对于 Killing 矢量场ξ_a，只要确定$\xi_a,\nabla_a\xi_b$在流形上一点p的取值，其余点的取值就可完全确定。n 个参数确定ξ_a，最多 n(n-1)/2 个参数确定$\nabla_a\xi_b$。故确定ξ_a所需的最多参数为 n(n+1)/2 个。
(n(n-1)/2 是因为反对称，最多是因为(我猜)∇_a的选择并不自由从而$\nabla_a\xi_b$ 不是个很自由的二阶反对称张量。)
2) 具体证明：

Another useful formula relates the second derivative of a Killing field to the Riemann tensor. By definition of the Riemann tensor, we have

$$\nabla_a\nabla_b\xi_c-\nabla_b\nabla_a\xi_c=R_{abc}{}^d\xi_d \quad . \tag{C.3.3}$$

On the other hand, by Killing's equation, we can rewrite equation (C.3.3) as

$$\nabla_a\nabla_b\xi_c+\nabla_b\nabla_c\xi_a=R_{abc}{}^d\xi_d \quad . \tag{C.3.4}$$

If we write down the same equation with cyclic permutations of the indices (abc), and then add the (abc) equation to the (bca) equation and subtract the (cab) equation, we obtain

$$\begin{aligned}2\nabla_b\nabla_c\xi_a&=(R_{abc}{}^d+R_{bca}{}^d-R_{cab}{}^d)\xi_d\\&=-2R_{cab}{}^d\xi_d \quad ,\end{aligned} \tag{C.3.5}$$

where the symmetry property (3.2.14) of the Riemann tensor was used in the last equality. Thus, for any Killing field ξ^a, we obtain the formula

$$\nabla_a\nabla_b\xi_c=-R_{bca}{}^d\xi_d \quad . \tag{C.3.6}$$

An important consequence of equation (C.3.6) is that a Killing field, ξ^a, is completely determined by the values of ξ^a and $L_{ab}\equiv\nabla_a\xi_b$ at any point $p\in M$; namely, if we are given (ξ^a, L_{ab}) at p, then (ξ^a, L_{ab}) at any other point q is determined by integration of the system of ordinary differential equations

$$v^a\nabla_a\xi_b=v^aL_{ab} \quad , \tag{C.3.7}$$

$$v^a\nabla_aL_{bc}=-R_{bca}{}^d\xi_d v^a \quad , \tag{C.3.8}$$

along any curve connecting p and q, where v^a denotes the tangent to the curve. Immediate corollaries of this result are (i) if a Killing field and its derivative vanish at a point, then the Killing field vanishes everywhere, and (ii) on a manifold of dimension n, there can be at most $n+n(n-1)/2=n(n+1)/2$ linearly independent Killing fields [and, thus, at most an $n(n+1)/2$ parameter group of isometries], since this is the dimension of the space of initial data for (ξ^a, L_{ab}).

(Wald R M. 1984. General Relativity. Chicago: The University of Chicago Press. P.442，443)

3) 同原文最后几句，由于确定ξ_a所需的最多参数为 n(n+1)/2 个，所以最多有相同个数的线性独立的 Killing 矢量场。
(我猜，确定参数后，通过积分得到点是一种线性映射。)
4) 由于最多有 n(n+1)/2 个线性独立的 Killing 矢量场，所以若猜到了相同个数的线性无关的 Killing 矢量场，就是所有 Killing 矢量场。

Killing 矢量场与对称性：

1) 等度规映射可看成一种保度规的对称变换，所以一个 Killing 矢量场代表(M,g_{ab})的一个对称性。具有 n(n+1)/2 个线性独立的 Killing 矢量场的(M,g_{ab})称为最高对称空间。

2) 二维欧氏空间(R^2,δ_{ab})笛卡尔系有$ds^2=dx^2+dy^2$，度规分量不含x,y，故$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a,\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a$都是 Killing 矢量场。而在极坐标下$ds^2=dr^2+r^2d\varphi^2$，度规分类不含$\varphi$，所以$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a$是 Killing 矢量场。由坐标变换关系$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a=-y\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a+x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a$，容易看出与前两个线性无关。而二维欧氏空间最多 3 个线性独立 Killing 矢量场，故就是以上的。分别对应沿x,y轴平移对称性和旋转对称性。

3) 三维欧氏空间类似，有如下 Killing 矢量场：$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a,\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a,\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a,-y\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a+x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a,$ $-z\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a+y\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a,-x\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a+z\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$，分别对应沿$x,y,z$的平移对称性，绕$z,y,x$轴的旋转对称性。

4）二维闵氏空间(R^2,η_{ab})洛伦兹系有$ds^2=-dt^2+dx^2$，故$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a,\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$是 Killing 矢量场。若作代换$x=\psi ch\eta,t=\psi sh\eta$，可以得到$ds^2=d\psi^2-\psi^2d\eta^2$，所以$\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^a$也是 Killing 矢量场。由坐标变换关系$\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^a=t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a+x\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$，故和前两个线性独立。这种坐标变换称为伪转动。

4) 四维闵氏空间类似，有如下 Killing 矢量场：(a)平移对称性：$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a,\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a,\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a,\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a$; (b)空间转动：$-y\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a+x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a,-z\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a+y\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a,-x\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a+z\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$; (c)空间伪转动：$t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a+x\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a,t\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a+y\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a,t\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a+y\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$。

5) 以上空间都是最高对称空间。

伪转动和洛伦兹变换;

1) 伪转动ξ^a的诱导的单参微分同胚群中的某个元素ϕ_λ诱导的坐标变换即为洛伦兹变换。

2) 在二维闵氏空间的具体证明：

定理 4-3-5 设 $\{x,t\}$ 是 2 维闵氏空间 $(\mathbb{R}^2,\eta_{ab})$ 的洛伦兹坐标系，$\phi_\lambda:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是伪转动 Killing 场 $\xi^a\equiv t(\partial/\partial x)^a+x(\partial/\partial t)^a$ 对应的单参等度规群的一个群元(即以参数 $\lambda\in\mathbb{R}$ 刻画的那个等度规映射)，则由 ϕ_λ 诱导的坐标变换 $\{x,t\}\mapsto\{x',t'\}$ 是洛伦兹变换.

注 3 本定理表明伪转动和洛伦兹变换是同一变换的两种(主动与被动)提法. 类似地，欧氏空间的转动 Killing 场 $-y\,(\partial/\partial x)^a+x\,(\partial/\partial y)^a$ 与坐标变换

$$x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha\,,\qquad y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha$$

也是同一变换的两种提法.

证明 矢量场 $\xi^a\equiv(\partial/\partial\eta)^a$ 的积分曲线的参数方程为 $\mathrm{d}x^\mu(\eta)/\mathrm{d}\eta=\xi^\mu$ $(\mu=0,1)$. 注意到 $\xi^a\equiv t(\partial/\partial x)^a+x(\partial/\partial t)^a$，便得

$$\frac{dx(\eta)}{d\eta}=t(\eta), \qquad \frac{dt(\eta)}{d\eta}=x(\eta). \tag{4-3-4}$$

$\forall p\in\mathbb{R}^2$，设 $C(\eta)$ 是满足 $p=C(0)$ 的积分曲线，即 $x(0)=x_p$，$t(0)=t_p$，则不难证明方程(4-3-4)的特解[即该线的参数式]为

$$x(\eta)=x_p\text{ch}\eta+t_p\text{sh}\eta, \qquad t(\eta)=x_p\text{sh}\eta+t_p\text{ch}\eta. \tag{4-3-5}$$

设 $q\equiv\phi_\lambda(p)$，则 q 就是 $C(\eta)$ 上参数值 $\eta=\lambda$ 的点，即 $q=C(\lambda)$，故由 ϕ_λ 诱导的新坐标 t' 和 x' 满足

$$x'_p\equiv x_q=x_p\text{ch}\lambda+t_p\text{sh}\lambda, \qquad t'_p\equiv t_q=x_p\text{sh}\lambda+t_p\text{ch}\lambda.$$

因 p 点任意，故可去掉下标 p 而写成

$$x'=x\text{ch}\,\lambda+t\,\text{sh}\lambda=\text{ch}\,\lambda\,(x+t\ \text{th}\,\lambda), \quad t'=t\text{ch}\,\lambda+x\,\text{sh}\lambda=\text{ch}\,\lambda\,(t+x\ \text{th}\,\lambda). \tag{4-3-6}$$

令 $v\equiv\text{th}\,\lambda$，$\gamma\equiv(1-v^2)^{-1/2}=\text{ch}\,\lambda$，则

$$x'=\gamma(x+vt), \qquad t'=\gamma(t+vx). \tag{4-3-7}$$

这便是熟知的洛伦兹变换(注意，我们用几何单位制，其中光速 $c=1$.). □

(我猜：所以伪转动体现了闵氏空间的洛伦兹对称性。)

3) 由于变换后$ds'^2=-dt'^2+dx'^2$，故新坐标系仍未洛伦兹系。伪转动对应的等度规映射诱导的坐标变换将洛伦兹系变为洛伦兹系。
4) 更进一步，若已知$\{x^\mu\}$为洛伦兹系，$\{x'^\mu\}$是由ϕ诱导的新坐标，则$\{x'^\mu\}$也为洛伦兹系的充要条件是ϕ是等度规映射。(和下面表述不同，但我猜是这个意思？)

定理 4-3-6 设 $\{x^\mu\}$ 是$(\mathbb{R}^n,\eta_{ab})$的洛伦兹坐标系，则 $\{x'^\mu\}$ 也是洛伦兹坐标系的充要条件是它由 $\{x^\mu\}$ 通过等度规映射 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 诱导而得.

证明 把 η_{ab} 记作 g_{ab}，其在 $\{x^\mu\}$ 和 $\{x'^\mu\}$ 系的分量分别记作 $g_{\mu\nu}$ 和 $g'_{\mu\nu}$.

(A) 设 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是等度规映射，即 $\phi^*g_{ab}=g_{ab}$，$\{x'^\mu\}$ 是由洛伦兹系 $\{x^\mu\}$ 通过 ϕ 诱导而得的坐标系，则 $\forall p\in\mathbb{R}^4$ 有 $g'_{\mu\nu}|_p=(\phi_*g)_{\mu\nu}|_{\phi(p)}=(\phi^{-1*}g)_{\mu\nu}|_{\phi(p)}=g_{\mu\nu}|_{\phi(p)}=\eta_{\mu\nu}$，其中第一步用到式(4-1-5)，第三步是由于 ϕ 为等度规导致 ϕ^{-1} 为等度规(见本节注2)，第四步用到 $\{x^\mu\}$ 的洛伦兹性. 上式说明 p 点的 g_{ab} 在 $\{x'^\mu\}$ 系的分量为 $\eta_{\mu\nu}$，故 $\{x'^\mu\}$ 为洛伦兹系.

(B) 设 $\{x^\mu\}$ 和 $\{x'^\mu\}$ 都是洛伦兹系，$\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是与坐标变换 $\{x^\mu\}\mapsto\{x'^\mu\}$ 对应的微分同胚映射，则 $\forall p\in\mathbb{R}^n$ 有 $(\phi^{-1*}g)_{\mu\nu}|_p=(\phi_*g)_{\mu\nu}|_p=g'_{\mu\nu}|_{\phi^{-1}(p)}=\eta_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}|_p$，其中第二步用到式(4-1-5)，第三、四步用到$\{x'^\mu\}$和 $\{x^\mu\}$ 的洛伦兹性. 上式表明 $\phi^{-1*}g_{ab}=g_{ab}$，故 ϕ^{-1} (因而 ϕ)是等度规映射. □

注 5 本定理也适用于欧氏空间，只须把洛伦兹系改为笛卡儿系.

((B)中新点老点分别是p和$\phi^{-1}(p)$。)

4.4 超曲面

嵌入：

1） M,S为流形，$\dim S\le\dim M=n$，映射$\phi:S\to M$称为嵌入的，若ϕ是一一和C^∞的，且$\forall p\in S$，推前映射$\phi_*:V_p\to V_{\phi(p)}$非退化($\phi_*v^a=0\Rightarrow v^a=0$)。
(我猜：非退化是为了后面矢量的像张成的空间是 $\dim S$维的)
(但我觉得推前映射本身就是非退化的吧，任一非零矢量都可以找到一条曲线经过这点并使此矢量成为曲线切矢，而推前映射把切矢变成切矢，所以像矢量也非零，即上述命题的逆否命题。)
(所以我猜他是想强调非退化？)

2) 嵌入映射使S的拓扑和流形结构可以带到$\phi[S]$上去，使得$\phi: S \to \phi[S]$称为微分同胚映射。(我猜是用S的开集的像定义$\phi[S]$的开集，从而ϕ^{-1}也连续。)

   ($\phi[S]$上本身有M的诱导拓扑，和映射带来的拓扑不一定相同。如果两者相同，则嵌入称为正则嵌入。正则嵌入对ϕ提出了较高要求，这里和书上都没有涉及。后面的嵌入子流形一般指正则嵌入子流形。)
3) 嵌入$\phi: S \to M$称为M的一个嵌入子流形，简称子流形。有时嵌入子流形指的是映射的像$\phi[S]$。
4) 若 dim$S = n - 1$，则$\phi[S] \subset M$称为M的一张超曲面。
5) 一些嵌入：

例 1 设 U 是 M 的一个开子集，把 M 的流形结构限制在 U 上，U 便成为与 M 同维的流形. 把 U 看作定义 1 的 S，令 $\phi: U \to M$ 为恒等映射，则 $U = \phi[U]$ 便是 M 的一个嵌入子流形(同维嵌入).

例 2 设 $M = \mathbb{R}^3$，S 是$\mathbb{R}^3$中的单位球面S^2，则恒等映射 $\phi: S^2 \to \mathbb{R}^3$ 给出$\mathbb{R}^3$的一个嵌入子流形. 注意到S^2比$\mathbb{R}^3$低一维，可知S^2是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个超曲面.

法余矢：

1) 设$\phi[S]$是M的超曲面，$q \in \phi[S] \subset M$，q在M上有 n(=dim$M$)维切空间V_q。若$w^a \in V_q$是过q点且所有点都在$\phi[S]$上的曲线的切矢，就说w^a切于$\phi[S]$。V_q中切于$\phi[S]$的元素构成的子集记为W_q。

   (这里W_q没有直接定义为与ϕ_*相关)
2) 由于ϕ_*把切矢变为切矢，故W_q中的每一个元素，都是V_q的一个像$\phi_*(v^a)$。由于ϕ_*是线性映射，所以$\phi_*\left(v^\mu\left(e_\mu\right)^a\right) = v^\mu\phi_*\left(e_\mu\right)^a$，所以$W_q$中的每个元素都可以表示为$\phi_*\left(e_\mu\right)^a$的线性组合。若$\alpha^\mu\phi_*\left(e_\mu\right)^a = 0$，则$\phi_*\left(\alpha^\mu e_\mu\right)^a = 0$，由非退化性，$\alpha^\mu\left(e_\mu\right)^a = 0$，再有$\left(e_\mu\right)^a$线性独立，得到$\alpha^\mu = 0$。所以$\phi_*\left(e_\mu\right)^a$也线性独立。从而$\phi_*\left(e_\mu\right)^a$是$W_q$的一组基，$W_q$是$V_q$的n-1 维子空间。

   (证明是我猜的，书上只给了结论)

   (对于不是超曲面的嵌入子流形，应该也有 dim$\left(W_q\right)$ =dim$S$。)
3) 没有度规时，无法谈论正交性，但可以定义法余矢。
4) 设$\phi[S]$是超曲面，$q \in \phi[S]$，非零对偶矢量$n_a \in V_q^*$称为$\phi[S]$在q点的法余矢，若有下式成立：$n_a w^a = 0, \forall w^a \in W_q$。

   (易知必然存在(从V中选出与W_q基底线性无关的矢量再考虑其对偶矢量)，且超曲面的不同的法余矢之间只差倍数。)

函数确定的超曲面：

1) 设$f = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$，所以$f = 0$给出$R^3$中的一个超曲面(球面)。
2) 但若$a = 0$，$f = 0$决定的是一个点不是超曲面。此时$df|_{f=0} = 0$。

   (我猜：$df|_{f=0}$指的是满足$f = 0$的任一点上的微分df)

   (作用到任一矢量v^a上可以得到$df|_{f=0}$)
3) 一般结论：只要$df|_{f=c} \neq 0$，$f = c$给出M中的一个超曲面。

   (梁书指路 Chillingworth D. 1976. Differential topology with a view to applications. London:

Pitman Publishing. 但我没找到这本书的线上资源。。)
(而且这个结论觉得有点怪，如果 f是三角函数这种，确定出来的点是一堆不连续的，这样也算超曲面吗？超曲面的并？或者按照我下面猜的，给出一个超曲面指的是局域给出一个超曲面？)
(我猜一个证明：设$p \in O \subset \{q|f(q)=c,\ q \in M\}$，在$M$的坐标系$\{x^\mu\}$中。$(df)_a|_O \neq 0$，令其分别与$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$作缩并，所得结果记为$\omega_\mu$，所以$(df)_a|_O = \omega_\mu (dx^\mu)_a$，由此在$p$附近一个范围内建立新坐标$\{x'^\mu\}$，使得$(df)_a|_O = (dx'^1)_a$。设$T^a$为$\{q|f(q)=c,\ q \in M\}$)上某曲线的切矢，故$(df)_a T^a|_O = \frac{\partial f}{\partial t}|_O = 0$，$T^a|_{p\in O} \in span\{\left(\frac{\partial}{\partial x'^2}\right)^a|_{p\in O},\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x'^n}\right)^a|_{p\in O}\}$。另一方面，$\forall v^a|_{p\in O} \in span\{\left(\frac{\partial}{\partial x'^2}\right)^a|_{p\in O},\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x'^n}\right)^a|_{p\in O}\}$，令$x'^\mu(t) = x^\mu|_p + v^\mu t$为某曲线参数式，则$v^a$为其切矢。而又有$v(f)|_O = \frac{\partial f}{\partial t}|_O = (df)_a v^a|_O = 0$，故$f$沿着该曲线取值不变，都等于$f(p)=c$，进而曲线上的点都属于$\{q|f(q)=c,\ q \in M\}$)。所以$v^a$是该点集上某曲线的切矢。故$v^a|_{p\in O} \in span\{\left(\frac{\partial}{\partial x'^2}\right)^a|_{p\in O},\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x'^n}\right)^a$等价于$v^a$是上述点集上某曲线在$p$点的切矢，所以维数相等为 n-1。而切矢的维数又与点集的维数相等，所以该点集在恒等映射下成为M的一个超曲面。}

4) 若$\phi[S]$为$f=c$确定的超曲面，$q \in \phi[S]$，$\nabla_a f|_q = (df)_a|_q \neq 0$，则$\nabla_a f|_q$是$\phi[S]$在$q$点的法余矢。
(从上面猜的证明中可以看出来)

法矢：

1) 若M上有度规g_{ab},n_a是法余矢。则对于$n^a = g^{ab}n_b$有，$g_{ab}n^a w^b = n_b w^b = 0$。故$n^a$与任意$w^a$($w^a \in W_q$) 正交，称为超曲面$\phi[S]$在$q$点的法矢。
2) 若度规为正定度规，由于$g_{ab}n^a w^b = 0, \forall w^a \in W_q$，所以$n^a \notin W_q$。但若度规不是正定的，如洛伦兹度规，可能出现$n^a \in W_q$。
3) $n^a \in W_q$的充要条件是$n^a n_a = 0$。
(从左到右显然；从右到左：类似法余矢的存在唯一的证明可以看出)
4) 在二维闵氏空间的例子：

例 设 $S=\mathbb{R}$, $M=\mathbb{R}^2$, M 上度规 $g_{ab}=\eta_{ab}$, ϕ: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 为嵌入，则 $\phi[\mathbb{R}]$是2维闵氏时空中的超曲面. 设 t, x 为洛伦兹坐标，讨论以下三种有代表性的情况：

1. $\phi[\mathbb{R}]$与 x 轴平行(图4-6a). $\forall q \in \phi[\mathbb{R}]$, 令 $(e_2)^a = (\partial/\partial x)^a$, 选

$$(e_1)^a = \alpha(\partial/\partial t)^a + \beta(\partial/\partial x)^a, \quad (\alpha, \beta \text{ 可为任意实数, 但 } \alpha \neq 0.)$$

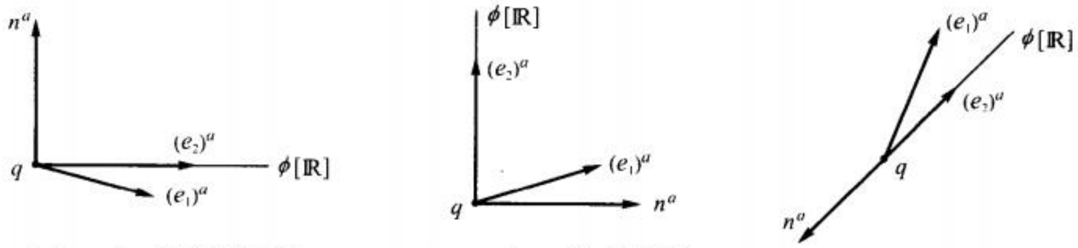
则不难验证 $(e^1)_a = \alpha^{-1}(\mathrm{d}t)_a$. 注意到定理 4-4-1 的证明过程, 可知 $(e^1)_a$ 为法余矢 n_a, 相应的法矢为 $n^a = \alpha^{-1}g^{ab}(\mathrm{d}t)_b = -\alpha^{-1}(\partial/\partial t)^a$, 满足 $n^a \notin W_q$ 且 $n_a n^a < 0$(即 n^a 为类时).

2. $\phi[\mathbb{R}]$与 t 轴平行(图4-6b). $\forall q \in \phi[\mathbb{R}]$, 令 $(e_2)^a = (\partial/\partial t)^a$, 选

$$(e_1)^a = \alpha(\partial/\partial t)^a + \beta(\partial/\partial x)^a, \quad (\alpha, \beta \text{ 可为任意实数, 但 } \beta \neq 0.)$$

则 $(e^1)_a = \beta^{-1}(\mathrm{d}x)_a$. 取 $(e^1)_a$ 为法余矢 n_a, 相应的法矢为 $n^a = \beta^{-1}(\partial/\partial x)^a$, 满足 $n^a \notin W_q$ 且 $n_a n^a > 0$ (即 n^a 为类空).

3. $\phi[\mathbb{R}]$与 x 轴夹 45° 角(按欧氏)(图4-6c). $\forall q \in \phi[\mathbb{R}]$, 令 $(e_2)^a = (\partial/\partial t)^a + (\partial/\partial x)^a$,



(a) $n_a n^a < 0$(类空超曲面) (b) $n_a n^a > 0$(类时超曲面) (c) $n_a n^a = 0$(类光超曲面)

图 4-6 $\mathbb{R}$ 嵌入 $\mathbb{R}^2$ 的 3 种情况

选 $(e_1)^a = \alpha(\partial/\partial t)^a + \beta(\partial/\partial x)^a$，$\alpha \neq \beta$，则 $(e^1)_a = (\alpha-\beta)^{-1}[(\mathrm{d}t)_a - (\mathrm{d}x)_a]$. 取 $(e^1)_a$ 为法余矢 n_a，相应的法矢为

$$n^a = (\alpha-\beta)^{-1} g^{ab}[(\mathrm{d}t)_b - (\mathrm{d}x)_b] = -(\alpha-\beta)^{-1}[(\partial/\partial t)^a + (\partial/\partial x)^a] = -(\alpha-\beta)^{-1}(e_2)^a,$$

满足 $n^a \in W_q$ 且 $n_a n^a = 0$(即 n^a 为类光). 在这种情况下，超曲面的法矢既与面上所有切矢垂直(法矢定义)，本身又是切矢之一!

5) 若超曲面的法矢处处类时/类空/类光，则对应的超曲面称为类空/类时/类光的。(注意顺序)

诱导度规:

1) 设$\phi[S]$为M中的嵌入子流形(不一定是超曲面)，$q \in \phi[S]$，W_q是q点切于$\phi[S]$的切空间，W_q的张量h_{ab}叫做由V_q的度规g_{ab}生出的诱导度规，若h_{ab}满足:
$h_{ab}w_1^a w_2^b = g_{ab}w_1^a w_2^a, \forall w_1^a, w_2^a \in W_q$
2) 诱导度规并不是总是存在，如类光超曲面上没有诱导度规。因为法矢$n^a \in W_q$，所以就有$\exists v^a = n^a \in W_q$，满足$h_{ab}v^a w^b = g_{ab}v^a w^b = 0, \forall w^a \in W_q$，从而$h_{ab}$退化，诱导度规不存在。
3) h_{ab}是定义在W_q上的张量，不能和W_q之外的矢量作用，为了运算简便，通常找$\mathcal{T}_{V_q}(0,2)$中的张量实现相同的效果，即$h_{ab}w_1^a w_2^b = g_{ab}w_1^a w_2^a, \forall w_1^a, w_2^a \in W_q$。
4) 当$\phi[S]$为类时类空超曲面时，$\mathcal{T}_{V_q}(0,2)$中的诱导度规$h_{ab} \coloneqq g_{ab} \mp n_a n_b$，其中$n^a$为归一化法矢，$n^a n_a = \pm 1$，当$n^a n_a = +1$时$h_{ab}$定义式中取负号，$n^a n_a = -1$时$h_{ab}$定义式中取正号。容易验证此时$h_{ab}$满足要求。同时可以验证此时$h_{ab}n^a = 0, h_{ab}n^b = 0$，(我猜：即这样定义的诱导度规看上去最大程度地与$V_q$撇清关系，像是定义在$W_q$上。)
(满足$h_{ab}w_1^a w_2^b = g_{ab}w_1^a w_2^a, \forall w_1^a, w_2^a \in W_q$的$\mathcal{T}_{V_q}(0,2)$中的张量不止一个，但只把诱导度规定义为上述形式是有原因的。考虑集合$\{T_{ab} \in \mathcal{T}_{V_q}(0,2) | T_{ab}n^a = 0 = T_{ab}n^b\}$，容易证明这是一个线性空间，维数为$(n-1)^2$，与$\mathcal{T}_{W_q}(0,2)$维数相同，故存在同构映射。(书上说两者自然同构，我不知道怎么证，可能是由于因为两者的坐标基底本身是同一种东西，所以也算一种与基底无关的同构？)所以这个集合中的元素非常像是定义在W_q上的。而可以证明这个集合中满足$h_{ab}w_1^a w_2^b = g_{ab}w_1^a w_2^a, \forall w_1^a, w_2^a \in W_q$的只有上文定义的那种。我猜的证明如下：$\forall v^a \in V_q$，$v^a$都可以表示为$v^a = \alpha n^a + w^a, w^a \in W_q$，其中$\alpha$为一常数，从而若$T_{ab} \in \mathcal{T}_{V_q}(0,2)$，且满足$T_{ab}w_1^a w_2^b = g_{ab}w_1^a w_2^a, \forall w_1^a, w_2^a \in W_q$ ，令h_{ab}为之前定义的诱导度规，则有:
$(T_{ab} - h_{ab})v_1^a v_2^b = (T_{ab} - h_{ab})(\alpha_1 n^a + w_1^a)(\alpha_2 n^b + w_2^a) = (T_{ab} - h_{ab})w_1^a w_2^b = 0$
由v_1^a, v_2^b的任意性，$T_{ab} = h_{ab}$，所以唯一。)
5) 投影映射：类时类空超曲面的诱导度规$h_{ab} = g_{ab} \mp n_a n_b$，故$h^a{}_b = g^{ac}h_{cb} = \delta^a{}_b \mp n^a n_b$，

则$\forall v^a \in V_q$，$h^a{}_b v^b = v^a \mp n^a n_b v^b \Rightarrow v^a = h^a{}_b v^b \pm n^a n_b v^b$，可以看出$n^a n_b v^b$与法矢平行，称为法向分量。而$n_a h^a{}_b v^b = n_a g^{ac} h_{cb} v^b = h_{cb} n^c v^b = 0$，故$h^a{}_b v^b$与法矢正交，称为切向分量。$h^a{}_b$称为从$V_q$到$W_q$的投影映射。

5. 微分形式及其积分[(反对称+对称反+称反对-反称对-称对反-对反称)/6]

5.1 微分形式

矢量空间上的形式:

1) $\omega_{a_1\cdots a_l} \in \mathcal{T}_V(0,l)$称为$V$上的$l$次形式(简称$l$形式)，若$\omega_{a_1\cdots a_l} = \omega_{[a_1\cdots a_l]}$。有时简记为$\boldsymbol{\omega}$
2) 由抽象指标与分量指标的关系以及之前关于序列的定理容易得到此时$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l} = \omega_{[\mu_1\cdots\mu_l]}$，$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}$是$\omega_{a_1\cdots a_l}$在任意坐标系上的分量。同时不难证明，若$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l} = \omega_{[\mu_1\cdots\mu_l]}$在某坐标系$\{x^\mu\}$上成立，则
   $\omega_{a_1\cdots a_l} = \omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(dx^{\mu_1})_{a_1}\cdots(dx^{\mu_l})_{a_l} = \omega_{[\mu_1\cdots\mu_l]}(dx^{\mu_1})_{a_1}\cdots(dx^{\mu_l})_{a_l}$
   $= \omega_{\mu_1\cdots\mu_l}\left(dx^{[\mu_1}\right)_{a_1}\cdots\left(dx^{\mu_l]}\right)_{a_l} = \omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(dx^{\mu_1})_{[a_1}\cdots(dx^{\mu_l})_{a_l]} = \omega_{[a_1\cdots a_l]}$
   (括号在缩并和爱因斯坦求和上的作用是类似的，因为此时都是哑指标。)
3) 从括号的相关定理中可以得到$\omega_{a_1\cdots a_l} = \delta_\pi \omega_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(l)}}, \omega_{\mu_1\cdots\mu_l} = \delta_\pi \omega_{\mu_{\pi(1)}\cdots\mu_{\pi(l)}}$，$\pi$为一置换。从而若$\mu_1\cdots\mu_l$中有两个取值相等，$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l} = 0$。
   (所以$l > n$时，$\mu_1\cdots\mu_l$中至少有两个取值相等，从而$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l} = 0$，故不存在$l > n$的形式。)
4) V上全体l形式的集合记为$\Lambda(l)$，则$\Lambda(1) = V^*$。约定$\Lambda(0) = R$，即任一实数约定为0形式。
5) $\Lambda(l) \subset \mathcal{T}_V(0,l)$，且易知$\Lambda(l)$是$\mathcal{T}_V(0,l)$的线性子空间。

楔形积:

1) 设$\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\mu}$ **为**l形式和m形式，则其楔形积是$l+m$形式，定义为:
   $$\omega_{a_1\cdots a_l} \wedge \mu_{b_1\cdots b_m} = (\omega\wedge\mu)_{a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m} := \frac{(l+m)!}{l!m!}\omega_{[a_1\cdots a_l}\mu_{b_1\cdots b_m]}$$
2) 容易验证楔形积满足结合律和分配律。
3) 在楔形积的定义下$(dx^1)_{a_1}\wedge\cdots\wedge(dx^l)_{a_l} = \sum_\pi \delta_\pi (dx^1)_{a_{\pi(1)}}\cdots(dx^l)_{a_{\pi(l)}}$，而且再作楔形积这种形式保留:
   $$\left((dx^1)_{a_1}\wedge\cdots\wedge(dx^l)_{a_l}\right)\wedge\left((dx^1)_{a_{n+1}}\wedge\cdots\wedge(dx^m)_{a_{n+m}}\right) = \sum_\pi \delta_\pi (dx^1)_{a_{\pi(1)}}\cdots(dx^{l+m})_{a_{\pi(n+m)}}$$
   (这里$l+m <$dim$V$)
   (楔形积的定义中的奇怪系数大概是为了这个？)
4) 交换：$\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\mu} = (-1)^{lm}\boldsymbol{\mu}\wedge\boldsymbol{\omega}$
   $$(\omega\wedge\mu)_{a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m} T^{a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m} = \frac{(l+m)!}{l!m!}\omega_{[a_1\cdots a_l}\mu_{b_1\cdots b_m]} T^{a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m}$$
   $$= \frac{(l+m)!}{l!m!}\omega_{a_1\cdots a_l}\mu_{b_1\cdots b_m} T^{[a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m]} = \frac{(l+m)!}{l!m!}\omega_{b_1\cdots b_l}\mu_{a_1\cdots a_m} T^{[b_1\cdots b_l a_1\cdots a_m]}$$
   $$= (-1)^{lm}\frac{(l+m)!}{l!m!}\mu_{a_1\cdots a_m}\omega_{b_1\cdots b_l} T^{[a_1\cdots a_m b_1\cdots b_l]} = (-1)^{lm}\frac{(l+m)!}{l!m!}\mu_{[a_1\cdots a_m}\omega_{b_1\cdots b_l]} T^{a_1\cdots a_m b_1\cdots b_l}$$

$= (-1)^{lm}(\mu \wedge \omega)_{a_1\cdots a_m b_1\cdots b_l} T^{a_1\cdots a_m b_1\cdots b_l}$

楔形积作为基底:

1) $\omega_{a_1\cdots a_l} = \omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(e^{\mu_1})_{a_1}\cdots(e^{\mu_l})_{a_l}$，由于$\mu_1\cdots\mu_l$中不能有相等的取值，所以可以每次把$n$个数取出$l$个，让$\mu_1\cdots\mu_l$的重复求和的范围限制在这$l$个数中，再对组合累加。在这种预设下，在取出某$l$个数时，$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(e^{\mu_1})_{a_1}\cdots(e^{\mu_l})_{a_l} = \omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(e^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^{\mu_l})_{a_l}$，等号左边$\mu_1\cdots\mu_l$是用前面限定的求和方式求和，右边$\mu_1\cdots\mu_l$是选定的$l$个数后的任一种排列(不求和)。所以$\omega_{a_1\cdots a_l} = \sum_C \omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(e^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^{\mu_l})_{a_l}$，求和号表示对选择$l$个数的方式的求和，其中的$\mu_1\cdots\mu_l$同样是是选定的$l$个数中的某一种排列，不代表求和。
2) 但也可以继续用爱因斯坦求和约定，所以可以写为$\omega_{a_1\cdots a_l} = \frac{1}{l!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(e^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^{\mu_l})_{a_l}$，

   前面"重复求和的范围限制在这l个数中，再对组合累加"的步骤被自动完成了，而系数$\frac{1}{l!}$

   是由于对于$\mu_1\cdots\mu_l$是选定的l个数中的某一种排列的状况，不同的$\mu_1\cdots\mu_l$取值排列对应的$\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(e^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^{\mu_l})_{a_l}$是相等的，所以重新用爱因斯坦求和约定后，要除以排列数。(这两个式子在梁书第二版 P.106,107，不知道我有没有理解错。。)
3) $\mu_1\cdots\mu_l$的不同的l个数的取值对应的楔形积$(e^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^{\mu_l})_{a_l}$显然是线性无关的，所以$\Lambda(l)$的维数是$C_n^l$。

流形上的形式场:

1) $\forall p \in M$，指定V_p上一个l形式，就得到M上一个l形式场。M上一个光滑的l形式场称为l次微分形式场，也简称作l形式场或l形式。
2) 在坐标系中，$\omega_{a_1\cdots a_l} = \sum_C \omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(dx^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(dx^{\mu_l})_{a_l}$，分量是坐标域上的函数。对于$l=n$的情况，$\omega_{a_1\cdots a_n} = \omega_{\mu_1\cdots\mu_n}(dx^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(dx^{\mu_n})_{a_n} = \omega_{1\cdots n}(dx^1)_{a_1}\wedge\cdots\wedge(dx^n)_{a_n}$，第二个等号是因为等式中间部分的$\mu_1\cdots\mu_n$只需取一个排列即可，不求和。可见，$\Lambda(n)$是一维矢量空间。
3) 用$\Lambda_M(l)$表示M上全体l形式场的集合。

外微分算符:

1) 流形M上外微分算符是一个映射$d: \Lambda_M(l) \to \Lambda_M(l+1)$，$(d\omega)_{ba_1\cdots a_l} := (l+1)\nabla_{[b}\omega_{a_1\cdots a_l]}$，其中$\nabla_b$为任一导数算符。

   (因为不同的导数算符的差别为$-\sum_j C^d{}_{ba_j}\omega_{a_1\cdots d\cdots a_l}$，而$C^c{}_{ab}$的两个下指标对称，故所有

   和$C^c{}_{ab}$上指标缩并的项在反对称化后都为 0，所以任意导数算符给出相同结果)
   (所以在定义外微分前无需指定导数算符)
2) $(df)_a = \nabla_a f$，$(df)_a$就是$f \in \Lambda_M(0)$的外微分。
3) $\omega_{a_1\cdots a_l} = \sum_C \omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(dx^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(dx^{\mu_l})_{a_l}$，由于外微分定义中导数算符任选，故可选择最简单的普通导数算符∂_b，由于普通导数算符"只对分量作用"，可以得到:

   $(d\omega)_{ba_1\cdots a_l} = \sum_C \left(d\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}\right)_b \wedge (dx^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(dx^{\mu_l})_{a_l}$

   (因为若把导数算符看作对偶矢量，则外微分的定义就是导数算符与l形式作楔形积。而普通导数算符作用到一般张量上时，就是微量对应的微分与基底作张量积，再取方括号作反对称化也就是分量微分与基底作楔形积。)
4) 外微分算符连续作用为 0：$d \circ d = 0$。同样将导数算符选定为普通导数算符∂_b，由定义

可得$[d(d\omega)]_{cba_1\cdots a_l}=(l+2)(l+1)\partial_{[c}\partial_{[b}\omega_{a_1\cdots a_l]]}=(l+2)(l+1)\partial_{[[c}\partial_{b]}\omega_{a_1\cdots a_l]}=0$，其中第二个等号用到了括号的定理，第三个等号用到了普通导数算符的性质。

闭形式和恰当形式：
1) 设$\boldsymbol{\omega}$是流形M上的l形式场。若$d\boldsymbol{\omega}=0$，则$\boldsymbol{\omega}$称为闭的。
2) 设$\boldsymbol{\omega}$是流形M上的l形式场。若存在$l-1$形式场$\boldsymbol{\mu}$使得$\boldsymbol{\omega}=d\boldsymbol{\mu}$，则$\boldsymbol{\omega}$称为恰当的。
3) 由于$d\circ d=0$，故恰当形式场必然是闭形式场。
4) 若要使闭形式为恰当形式，需要对流形有一定要求，但书上没说什么要求。书上说平凡流形R^n满足要求，但没证明。
   (Rudin 数学分析原理第三版的定理 10.21, 10.22, 10.23, 10.38, 10.39, 10.40 证明了在R^n中与凸开集之间存在$C^{n>2}$可逆映射的开集上的闭形式场也是恰当形式场。这里凸集指集合中任意两点间的直线上的点都在集合中，开集和多变量里学的一样，每个点都是内点。大致证明思路是: 10.21，定义变量代换T(一个数集的映射)，$\boldsymbol{\omega}_T$；10.22，变量代换T和外微分d可交换，$(d\boldsymbol{\omega})_T=d(\boldsymbol{\omega}_T)$；10.23，连续变量代换，$(\boldsymbol{\omega}_S)_T=\boldsymbol{\omega}_{ST}$；10.38，10.39 的一个引理；10.39，归纳证明凸开集上闭形式场为恰当形式场；10.40，由连续变量代换中取S,T为互逆映射证明结论。)
   (这步是我猜的：一个开超立方体$(0,1)\times\cdots(0,1)$是R^n中的凸开集，而映射$(x^1,\cdots,x^n)\to\left(\tan\left(\pi(x^1-0.5)\right),\cdots,\tan\left(\pi(x^n-0.5)\right)\right)$是从开超立方体到$R^n$的$C^{n>2}$可逆映射，所以$R^n$上闭形式场是恰当形式场。)
5) 而任意流形M都局域平凡(与R^n微分同胚)，故闭形式场在M上至少是局域恰当的。
6) 设R^2上$\omega_a=X(dx)_a+Y(dy)_a$，则ω_a为恰当形式等价于$(d\omega)_{ba}=0$，带入ω_a的表达式为$(dX)_b\wedge(dx)_a+(dY)_b\wedge(dy)_a=\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\wedge dy=0$。从而$\omega_a$为恰当形式等价于$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)=0$。更高维数的$R^n$上的$\omega_a=X_1(dx^1)_a+\cdots+X_n(dx^n)_a$类似可证，$\omega_a$为恰当形式等价于$\left(\frac{\partial X_i}{\partial x^j}-\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)=0$。
   (这里好像比微积分中学的条件要少，应该是因为这里的函数都是C^∞。)

5.2 流形上的积分

流形的定向：
1) 多变量微积分中的面积分要选定曲面的方向，类似的计算任何流形上的积分前应指定流形的"定向"。
2) n 维流形称为可定向的，若其上存在C^0且处处非零的n形式场$\boldsymbol{\epsilon}$。
   (莫比乌斯带是不可定向流形，书上没解释。不过从三维空间看确实是这样，我猜：莫比乌斯带上有连续首尾相接的坐标域坐标系，设定某个点的2形式后，在满足 2 形式C^0且处处非零的条件下沿着莫比乌斯带设定沿途的点的2形式，一周后会发现最早设定2形式的点和周围一些点的2形式符号相反，从而无法不存在C^0且处处非零的n形式场。)
3) 若在n维可定向流形M上选定一个C^0且处处非零的n形式场$\boldsymbol{\epsilon}$，就说M是定向的(表示已经定向的)。设$\boldsymbol{\epsilon_1},\boldsymbol{\epsilon_2}$是两个$C^0$且处处非零的$n$形式场，若存在处处为正的函数$h$使得$\boldsymbol{\epsilon_1}=h\boldsymbol{\epsilon_2}$，就说$\boldsymbol{\epsilon_1},\boldsymbol{\epsilon_2}$给出同一个定向。
4) 右手系、左手系：M上选定定向$\boldsymbol{\epsilon}$后，$O\in M$上的基底场$\{\left(e_\mu\right)^a\}$叫做以$\boldsymbol{\epsilon}$衡量为右手的，

若O上存在处处为正的函数h使得$\boldsymbol{\epsilon} = h(e^1)_{a_1} \wedge \cdots \wedge (e^n)_{a_n}$，否则称为左手的。若坐标基底场为右手的(左手的)，则称相应的坐标系为右手的(左手的)。
(我猜处处为负是左手系？)

5) 我猜：同一定向下确定的右手系之间坐标变换雅可比行列式在共同坐标域任一点为正。下面的证明中省略抽象指标。已知$\boldsymbol{\epsilon} = h(dx^1) \wedge \cdots \wedge (dx^n) = g(dy^1) \wedge \cdots \wedge (dy^n)$，其中$h, g$都是处处为正的函数。而$(dx^1) \wedge \cdots \wedge (dx^n) = \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^{\mu_1}} dy^{\mu_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial x^n}{\partial y^{\mu_n}} dy^{\mu_n}\right)$，(其中的偏导数是在某一点的值，是一个数，可以提出括号)，同一基底微分作楔形积为 0，故有如下推导：

$(dx^1) \wedge \cdots \wedge (dx^n) = \sum_\pi \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^{\pi(1)}} dy^{\pi(1)}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial x^n}{\partial y^{\pi(n)}} dy^{\pi(n)}\right)$

$= \sum_\pi \frac{\partial x^1}{\partial y^{\pi(1)}} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial y^{\pi(n)}} \left(dy^{\pi(1)}\right) \wedge \cdots \wedge \left(dy^{\pi(n)}\right)$

$= \sum_\pi \delta_\pi \frac{\partial x^1}{\partial y^{\pi(1)}} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial y^{\pi(n)}} (dy^1) \wedge \cdots \wedge (dy^n)$

$= \frac{\partial(x^1, \cdots, x^n)}{\partial(y^1, \cdots, y^n)} (dy^1) \wedge \cdots \wedge (dy^n)$

所以$\boldsymbol{\epsilon} = h(dx^1) \wedge \cdots \wedge (dx^n) = h \frac{\partial(x^1, \cdots, x^n)}{\partial(y^1, \cdots, y^n)} (dy^1) \wedge \cdots \wedge (dy^n) = g(dy^1) \wedge \cdots \wedge (dy^n)$，由于$h, g$都是处处为正的函数，故雅可比行列式在共同坐标域内每个点为正。
(书上没有直接提这个，但好像下面的(2)用到了，所以我猜了一下。)

6) 我猜：从前面莫比乌斯带的"我猜"以及上面的行列式，如果一个流形是可定向的，则感觉首尾相接的坐标域在各个相交的区域雅可比行列式应该为正(为负的话与首尾相接的个数有关，好像容易出现意外)。事实上我有些的地方看到对流形可定向的定义就是图册中任意两个交集不为空的坐标域上的交集部分的雅可比为正，而且这种情况下也可以推出梁书上定义的定向。

积分：

1) (O, ψ)是 n 维定向流形M上的右手坐标系，$\boldsymbol{\omega}$是开子集$G \subset O$上的连续n形式场，则$\boldsymbol{\omega}$在G上的积分定义为$\int_G \boldsymbol{\omega} \coloneqq \int_{\psi[G]} \omega_{1\cdots n}(x^1, \cdots, x^n) dx^1 \cdots dx^n$。其中右边为$\omega_{1\cdots n}(x^1, \cdots, x^n)$在$\psi(G)$上的普通积分，$\omega_{1\cdots n}(x^1, \cdots, x^n)$满足$\boldsymbol{\omega} \coloneqq \omega_{1\cdots n}(x^1, \cdots, x^n)(dx^1)_{a_1} \wedge \cdots \wedge (dx^n)_{a_n}$。
(左手系积分的定义多一个负号)

2) 积分是对n形式场定义的，应当与坐标无关。可以证明确实是这样。设共同坐标域G上有两个坐标系$\{x^\mu\}, \{x'^\mu\}$，不妨设为右手系。所以有：

$\int_G \boldsymbol{\omega} = \int_{\psi[G]} \omega_{1\cdots n}(x^1, \cdots, x^n) dx^1 \cdots dx^n$ ，$(\int_G \boldsymbol{\omega})' = \int_{\psi'[G]} \omega'_{1\cdots n}(x'^1, \cdots, x'^n) dx'^1 \cdots dx'^n$

而由张量分量变换律可知：

$\omega'_{1\cdots n} = \frac{\partial x^{\sigma^1}}{\partial x'^1} \cdots \frac{\partial x^{\sigma^n}}{\partial x'^n} \omega_{\sigma^1 \cdots \sigma^n} = \sum_\pi \frac{\partial x^{\pi(1)}}{\partial x'^1} \cdots \frac{\partial x^{\pi(n)}}{\partial x'^n} \omega_{\pi(1)\cdots\pi(n)} = \sum_\pi \delta_\pi \frac{\partial x^{\pi(1)}}{\partial x'^1} \cdots \frac{\partial x^{\pi(n)}}{\partial x'^n} \omega_{1\cdots n}$

$= \frac{\partial(x^1, \cdots, x^n)}{\partial(y^1, \cdots, y^n)} \omega_{1\cdots n}$

所以有$(\int_G \boldsymbol{\omega})' = \int_{\psi'[G]} \omega_{1\cdots n}(x^1, \cdots, x^n) \frac{\partial(x^1, \cdots, x^n)}{\partial(y^1, \cdots, y^n)} dx'^1 \cdots dx'^n$

$$= \int_{\psi'[G]} \omega_{1\cdots n}(x^1,\cdots,x^n) \left|\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}\right| dx'^1 \cdots dx'^n$$

$$= \int_{\psi[G]} \omega_{1\cdots n}(x^1,\cdots,x^n) dx^1 \cdots dx^n = \int_G \boldsymbol{\omega}$$

第二个等号是因为右手系之间雅可比行列式为正。左手系中同样可证。

3) 积分依赖于$\boldsymbol{\epsilon}$给出的定向，若定向改变，则积分的符号改变。
4) 积分定义在$G \in M$上，若要求$\boldsymbol{\omega}$在整个流形上的积分需要局部积分的累加，虽然$\int_G \boldsymbol{\omega}$只与$G, \boldsymbol{\omega}$有关，但是直接累加可能与$M$的"分割"有关。在严格定义里需要用到单位分解的概念。

单位分解：(这个书上没讲，是我搜罗的)

1) 单位分解定理：

定理 3.5(单位分解定理) 设M是光滑流形，α是M的任意一个开覆盖，则存在可数个

$$\lambda_i \in C_c^\infty(M, R), i = 1,2,\cdots,$$

适合条件:

(1) $\{\mathrm{supp}\,\lambda_i\} \prec \alpha$;

(2) $\{\mathrm{supp}\,\lambda_i\}$是局部有限族:

(3) $\lambda_i \geq 0, i = 1,2,\cdots$, 并且$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \equiv 1$.

(其中$C_c^\infty(M,R)$指M上的光滑紧支函数。性质 1 指的是λ_i的支集都是开覆盖中某个O_α的子集。后面用到的是性质 3，其他的可以不管，累加为 1 指的是在流形上任一点取值累加为 1。)

2) $\{\lambda_i\}$称为从属于开覆盖$\{O_\alpha\}$的一个单位分解。
3) 定义n形式在整个流形上的积分：$\int_M \boldsymbol{\omega} \coloneqq \sum_i \int_{O_i} \lambda_i \boldsymbol{\omega}$。
4) 这个定义虽然看上去"少积"了一些东西，但可以发现它确实与开覆盖的选择无关。若$\{f_i\}$，$\{g_j\}$分别是从属于$\{O_i\}$,$\{G_j\}$的单位分解。则可以发现：

   $\sum_i \int_{O_i} f_i \boldsymbol{\omega} = \sum_i \int_{O_i} f_i \sum_j g_j\, \boldsymbol{\omega} = \sum_i \sum_j \int_{O_i \cap G_j} f_i g_j \boldsymbol{\omega}$ ，

   第二个等号是因为g_j的支集是G_j的子集，$f_i g_j$不为零的区域必在$O_i \cap G_j$内。由于所得结果显然关于(f_i, O_i)和(g_j, G_j)对称，故这样定义的积分确实反映了流形整体的性质。
5) 若M为紧致微分流形，则任意单位分解只有有限个光滑函数。(这个是在网上找的。。)
   (紧致：$A \subset X$叫紧致的，若它的任一开覆盖都有有限子覆盖($\{O_\alpha\}$中的有限个元素覆盖A)。)
   (我猜：若N为M的紧致子集，N上可以有单位分解，且单位分解只有有限个光滑函数。后面用到 Stokes 定理的猜测证明上。。)

嵌入子流形上的积分：

1) 设S, M是流形，维数分别为l和$n > l$，$\phi: S \to M$是嵌入。$\phi[S]$是l维子流形，上面可以定义l维形式场。但由于$\phi[S] \in M$，故l维形式场也分为"切于"和"不切于"$\phi[S]$。"切于"指的是$\boldsymbol{\mu}|_q$是W_q(而不是V_q)上的l形式场。

2) 谈及l形式场在$\phi[S]$上的积分时是把$\phi[S]$作为独立流形来看的，所以只有"切于" $\phi[S]$的l形式场$\boldsymbol{\mu}$的积分才有意义。
3) 对于不"切于" $\phi[S]$的l形式场$\mu_{a_1\cdots a_l}$，定义$\mu_{a_1\cdots a_l}$的限制：$\tilde{\mu}_{a_1\cdots a_l}$称为$\mu_{a_1\cdots a_l}$在$\phi[S]$上的限制，若$\tilde{\mu}_{a_1\cdots a_l}|_q(w_1)^{a_1}\cdots(w_l)^{a_l}=\mu_{a_1\cdots a_l}|_q(w_1)^{a_1}\cdots(w_l)^{a_l},\forall q\in\phi[S],(w_1)^{a_1}\cdots(w_l)^{a_l}\in W_q$。以后谈到$\boldsymbol{\mu}$在$\phi[S]$上的积分时指的是$\tilde{\mu}_{a_1\cdots a_l}$在$\phi[S]$上的积分。
(我猜：$\mu_{a_1\cdots a_l}$是M上的l形式，其中的楔形积共C_n^l项，若选定坐标系使得有l个基底矢量张成W_q，$\mu_{a_1\cdots a_l}$的限制$\tilde{\mu}_{a_1\cdots a_l}$相当于选出$C_n^l$项中的由张成$W_q$的$l$个基底矢量组成的楔形积。)

5.3 Stokes 定理(书上没给证明...)

n 维带边流形：
1) 定义R^{n-}：$R^{n-}\coloneqq\{((x^1,\cdots,x^n))\in R^n|x^1\le 0\}$。
2) n 维带边流形N的定义与流形的定义类似，只是把流形定义中的R^n换为R^{n-}，N中的开覆盖$\{O_\alpha\}$的每一元素O_α都同胚于R^{n-}的一个开子集。
3) N中全体被映到$x^1=0$的点组成N的边界，记作∂N，∂N是$n-1$维流形。$i(N)=N-\partial N$是 n 维流形。

诱导定向$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$：
1) n 维定向流形M的定向$\boldsymbol{\epsilon}$将范围限定在 n 维带边流形N上便得到N的定向，仍记为$\boldsymbol{\epsilon}$。
2) n 维带边流形N的定向自然诱导出∂N的定向，构造如下：(a) 设(O_i,ψ_i)是坐标域包含∂N上的点的坐标系。其中∂N上的点满足$x_i^1=0$。设$O_i\cap\partial N=U_i$，故U_i上的对偶基矢为$\left(dx_i^2\right)_a\cdots(dx_i^n)_a$。设$O_i\cap\partial N=U_i$。(b) 若希望在$\partial N$上能定向，则需要交不为空的$U_i$的雅可比行列式大于 0，而已知$N$可定向，故$O_i,O_j$之间的雅可比行列式$\frac{\partial(x_i^1\cdots x_i^n)}{\partial\left(x_j^1\cdots x_j^n\right)}>0$。因为在$\partial N$上不同坐标系的第一个坐标都为 0，不在$\partial N$上的点第一个坐标都小于 0，故由偏导数的意义可知在∂N上有：$\frac{\partial x_i^1}{\partial x_j^2}=\cdots=\frac{\partial x_i^1}{\partial x_j^n}=0,\frac{\partial x_i^1}{\partial x_j^1}>0$。在此基础上展开雅可比行列式可得：$\frac{\partial(x_i^1\cdots x_i^n)}{\partial\left(x_j^1\cdots x_j^n\right)}|_{\partial N}=\frac{\partial x_i^1}{\partial x_j^1}\frac{\partial(x_i^2\cdots x_i^n)}{\partial\left(x_j^2\cdots x_j^n\right)}|_{\partial N}>0$，从而$U_i,U_j$之间的雅可比行列式$\frac{\partial(x_i^2\cdots x_i^n)}{\partial\left(x_j^2\cdots x_j^n\right)}>0$。(c) 假设坐标系$\{x^\mu\}$在$\boldsymbol{\epsilon}$衡量下为右手系，诱导定向$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$需满足去除$x^1$的坐标系在$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$衡量下下仍为右手系。(我觉得书上的意思是中去掉"$dx_i^1\wedge$"即可)。也可以用单位分解构造诱导定向，设$\{F_i\}$是开覆盖$\{U_i\}$的一个单位分解，定义$\partial N$上的定向 $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}=\sum_i F_i\left(dx_i^2\right)_a\wedge\cdots\wedge(dx_i^n)$。可以沿着它满足定向的要求。
(用单位分解构造是在 Wald R M. 1984. General Relativity. Chicago: The University of Chicago Press.的附录 B 里，我猜其中$\left(dx_i^2\right)_a\wedge\cdots\wedge(dx_i^n)$指的是在$U_i$上表示为这个形式的张量场(不止定义在$U_i$上，但考虑到$F_i$的支集是$U_i$的子集，故在$U_i$之外为 0))

Stokes 定理：
1) 设 n 维定向流形M的紧致子集N是个 n 维带边流形，$\boldsymbol{\omega}$是M上的$n-1$形式场(可微性至少为C^1)，则$\int_{i(N)}d\boldsymbol{\omega}=\int_{\partial N}\boldsymbol{\omega}$。

(等式左边取定向$\boldsymbol{\epsilon}$，右边取诱导定向$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$。)
(当$\partial N=\emptyset$时，右边定义为 0)

2) 具体证明：(模仿陈省身《微分几何讲义》P.95~98，但他那里一些定义不太一样。。)
由于N是M的紧致子集，设$\{O_\alpha\}$是N的有限子覆盖，$\{g_\alpha\}$是从属于$\{O_\alpha\}$的单位分解。从而$\boldsymbol{\omega}=\sum_\alpha g_\alpha\boldsymbol{\omega}$，右边求和项为有限项。故$\int_{i(N)}d\boldsymbol{\omega}=\sum_\alpha\int_{i(N)}d(g_\alpha\boldsymbol{\omega})$，$\int_{\partial N}\boldsymbol{\omega}=\sum_\alpha\int_{\partial N}g_\alpha\boldsymbol{\omega}$。

要证$\int_{i(N)}d\boldsymbol{\omega}=\int_{\partial N}\boldsymbol{\omega}$，只需证$\int_{i(N)}d(g_\alpha\boldsymbol{\omega})=\int_{\partial N}g_\alpha\boldsymbol{\omega}$。由于$g_\alpha$在$O_\alpha$外取值为 0，所以积分范围限制在$O_\alpha$和$O_\alpha\cap\partial N$上。现取坐标系$(O_\alpha,\ \psi)$为右手坐标系，为计算方便，考虑设$g_\alpha\boldsymbol{\omega}=\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}a_j dx^1\wedge\cdots dx^{j-1}\wedge dx^{j+1}\cdots\wedge dx^n$，则$d(g_\alpha\boldsymbol{\omega})=\sum_{j=1}^n\frac{\partial a_j}{\partial x^j}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$。
分为两种情况：
(a) $O_\alpha\cap\partial N=\emptyset$时，公式右边为 0，故只需证左边也为 0。取$R^n$中一个超立方体$C:|x^\mu|\le K$，使得$\psi[O_\alpha]$在超立方体内。将函数$a_j$延拓到$C$并使得其在$C-\psi[O_\alpha]$上取值为 0。由于$g_\alpha$的作用，这样延拓$a_j$在$C$上存在且所得延拓后$a_j$连续可微。坐标系为右手系，故可计算左侧积分如下：

$$\int_{i(N)}d(g_\alpha\boldsymbol{\omega})=\int_{O_\alpha}d(g_\alpha\boldsymbol{\omega})=\sum_{j=1}^n\int_C\frac{\partial a_j}{\partial x^j}dx^1\cdots dx^n$$

$$=\sum_{j=1}^n\int_{|x^i|<K,i\neq j}\left(\int_{-K}^{+K}\frac{\partial a_j}{\partial x^j}dx^j\right)dx^1\cdots dx^{j-1}dx^{j+1}\cdots dx^n=0$$

等于 0 是因为上面的延拓以及a_j连续可微。
(b) $O_\alpha\cap\partial N\neq\emptyset$时，取$R^n$中的$C:|x^\mu|\le K,\mu=2,3\cdots n,-K\le x^1\le 0$，使得$\psi[O_\alpha]$位于$C$内部和边界上，并对$a_j$作类似延拓。由于$g_\alpha\boldsymbol{\omega}$是$O_\alpha$上的$n-1$形式场，在$O_\alpha\cap\partial N$上积分时，被积的是$g_\alpha\boldsymbol{\omega}$的限制$g_\alpha\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$。由前面设的$g_\alpha\boldsymbol{\omega}$的形式可知，$g_\alpha\widetilde{\boldsymbol{\omega}}=a_1dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n$。
故右边$\int_{\partial N}g_\alpha\boldsymbol{\omega}=\int_{O_\alpha\cap\partial N}a_1dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n=\int_{|x^\mu|\le K,\mu\neq 1}a_1(0,\ x^2,\cdots,x^n)dx^2\cdots dx^n$。

而左边$\int_{i(N)}d(g_\alpha\boldsymbol{\omega})=\int_{O_\alpha}\sum_{j=1}^n\frac{\partial a_j}{\partial x^j}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\sum_{j=1}^n\int_C\frac{\partial a_j}{\partial x^j}dx^1\cdots dx^n$。其中累加项中$j\neq 1$的项由和前面一样的原因为 0。故左边为：

$$\int_{|x^j|<K,j\neq 1}\left(\int_{-K}^{0}\frac{\partial a_1}{\partial x^1}dx^1\right)dx^2\cdots dx^n=\int_{|x^\mu|\le K,\mu\neq 1}a_1(0,\ x^2,\cdots,x^n)dx^2\cdots dx^n$$

可见左右两边相等。

综上两种情形下都有$\int_{i(N)}d(g_\alpha\boldsymbol{\omega})=\int_{\partial N}g_\alpha\boldsymbol{\omega}$，从而$\int_{i(N)}d\boldsymbol{\omega}=\int_{\partial N}\boldsymbol{\omega}$。

3) 书上 P.114 有格林公式的例子。

5.4 体元

体元：
1) n 维可定向流形M上的任一个C^0而且处处非零的n形式场$\boldsymbol{\epsilon}$称为一个体元。
2) 体元和定向很相似，但差别为一个正的函数的定向是同一定向，不同体元。体元的选择比较任意，但如果有度规，可以规定特殊的体元。

适配体元：

1) 给定度规g_{ab}，选定正交归一基(故度规矩阵为对角阵，对角线上为±1)，$\epsilon_{a_1\cdots a_n}$为任意体元，则$\epsilon^{a_1\cdots a_n}\epsilon_{a_1\cdots a_n} = g^{\nu_1\mu_1}\cdots g^{\nu_n\mu_n}\epsilon_{\nu_1\cdots\nu_n}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_n} = (-1)^s n!\,(\epsilon_{1\cdots n})^2$，其中$s$表示$g_{ab}$在正交归一基底中$-1$的个数，$\epsilon_{1\cdots n}$为$\epsilon_{a_1\cdots a_n}$在正交归一基底的分量。若体元满足$\epsilon_{1\cdots n} = \pm 1$，或等价的$\epsilon^{a_1\cdots a_n}\epsilon_{a_1\cdots a_n} = (-1)^s n$，就称$\epsilon_{a_1\cdots a_n}$为与度规相适配的配体元。度规将体元确定到正负号上，若再要求体元与定向相容，就确定了唯一的体元。
2) 对于三维欧式空间(R, δ_{ab})用3形式场$\boldsymbol{\epsilon} = dx \wedge dy \wedge dz$指定定向，容易看出这也是适配体元。而由积分的定义，$\int_G \boldsymbol{\epsilon} = \int_G dxdydz$即为$G$的体积。
3) 推广至任意带正定度规的定向流形(N, g_{ab})，设$\boldsymbol{\epsilon}$为适配体元，若$\int_G \boldsymbol{\epsilon}$存在，就称它为用$g_{ab}$衡量的体积。
   (这里不知道为什么这里只推广到正定度规，可能正定度规才有比较符号直观的长度以及体积的意义？)
4) 设$\boldsymbol{\epsilon}$为适配体元，其在一般的(未必正交归一)以$\{(e_\mu)^a\}$为基底的坐标系中写为楔形积形式

   有$\epsilon_{a_1\cdots a_n} = \pm\sqrt{|g|}(e^1)_{a_1} \wedge\cdots\wedge (e^n)_{a_n}$，其中$|g|$为度规在此基底下的分量行列式的绝对值，

   右手系取+号，左手系取−号。
   (证明和前面一些涉及行列式的证明类似，都是用到微分形式的反对称和行列式的反对称。)
   (这个与熟悉的直角坐标柱坐标球坐标体积分用到的体元对应，后面在函数积分上可以看出。)
5) 设∇_a和$\boldsymbol{\epsilon}$分别是与度规适配的导数算符和体元，则$\nabla_b\epsilon_{a_1\cdots a_n} = 0$。
   (下面是通过书上 P.117 页讲的思路大致猜的具体过程。)
   (导数算符和度规适配，故$\nabla_b g_{ac} = 0$，而$\nabla_b \delta^a{}_c = 0$，所以$\nabla_b g^{ac} = 0$，所以$g^{ac}$可以放入导数算符，即$\epsilon^{a_1\cdots a_n}\nabla_b\epsilon_{a_1\cdots a_n} = g^{a_1c_1}\cdots g^{a_nc_n}\epsilon_{c_1\cdots c_n}\nabla_b\epsilon_{a_1\cdots a_n} = \epsilon_{c_1\cdots c_n}\nabla_b\epsilon^{a_1\cdots a_n}$，所以有

   $\epsilon^{a_1\cdots a_n}\nabla_b\epsilon_{a_1\cdots a_n} = \epsilon_{a_1\cdots a_n}\nabla_b\epsilon^{a_1\cdots a_n} = \frac{1}{2}\nabla_b\left(\epsilon^{a_1\cdots a_n}\epsilon_{a_1\cdots a_n}\right) = 0$。故$\forall v^b \in \mathcal{T}(1,0)$，都有

   $\epsilon^{a_1\cdots a_n}v^b\nabla_b\epsilon_{a_1\cdots a_n} = 0$。由于$\boldsymbol{\epsilon}$为$n$形式场，故有$\epsilon_{a_1\cdots a_n} = \delta_\pi\epsilon_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(n)}}$。由导数算符的线性性，$\nabla_b\epsilon_{a_1\cdots a_n} = \delta_\pi\nabla_b\epsilon_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(n)}}$，设$\nabla_b\epsilon_{a_1\cdots a_n} = \omega_{\nu\mu_1\cdots\mu_n}(dx^\nu)_b(dx^{\mu_1})_{a_1}\cdots(dx^{\mu_n})_{a_n}$，故$\omega_{\nu\mu_1\cdots\mu_n} = \delta_\pi\omega_{\nu\mu_{\pi(1)}\cdots\mu_{\pi(n)}}$。再设$v^b\nabla_b\epsilon_{a_1\cdots a_n} = \epsilon'_{\mu_1\cdots\mu_n}(dx^{\mu_1})_{a_1}\cdots(dx^{\mu_n})_{a_n}$，从而由前可知$\epsilon'_{\mu_1\cdots\mu_n} = v^\nu\omega_{\nu\mu_1\cdots\mu_n} = \delta_\pi v^\nu\omega_{\nu\mu_{\pi(1)}\cdots\mu_{\pi(n)}} = \delta_\pi\epsilon'_{\mu_{\pi(1)}\cdots\mu_{\pi(n)}}$)，所以$v^b\nabla_b\epsilon_{a_1\cdots a_n}$依然是一个$n$形式场。由于$n$形式场只有一个维度，可设$v^b\nabla_b\epsilon_{a_1\cdots a_n} = h\epsilon_{a_1\cdots a_n}$，其中$h$为一个函数。代入$\epsilon^{a_1\cdots a_n}v^b\nabla_b\epsilon_{a_1\cdots a_n} = 0$，可得$h\epsilon^{a_1\cdots a_n}\epsilon_{a_1\cdots a_n} = h(-1)^s n! = 0$，从而$h = 0$在流形上每点都成立，故$v^b\nabla_b\epsilon_{a_1\cdots a_n} = 0, \forall v^b \in \mathcal{T}(1,0)$。所以$\nabla_b\epsilon_{a_1\cdots a_n} = 0$。

关于体元的几个定理：(引理的证明是猜的)

1) 引理 1(猜的用来证明引理 2 的)：

   $[a_1,\cdots,a_n] = \frac{1}{n}\{a_1[a_2,\cdots,a_n] - a_2[a_1,a_3,\cdots,a_n] + \cdots + (-1)^{n+1}a_n[a_1,\cdots,a_{n-1}]\}$

   (设A为一个 n 维矩阵，每一行都是$(a_1,\cdots,a_n)$，再令这些字母的"乘积"不满足交换律，则由方括号的定义容易看出$\det(A) = n!\,[a_1,\cdots,a_n]$。而又由行列式展开的法则，按第一行展开，结合方括号的定义可知：
   $\det(A) = (n-1)!\,\{a_1[a_2,\cdots,a_n] - a_2[a_1,a_3,\cdots,a_n] + \cdots + (-1)^{n+1}a_n[a_1,\cdots,a_{n-1}]\}$
   两式对比即得引理 1。)

2) 引理 2：$\delta^{[a_j}{}_{a_j}\delta^{a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}=\frac{j}{n-(j-1)}\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$

由引理 1 可知：$\delta^{[a_j}{}_{a_j}\delta^{a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$

$=\frac{1}{n-(j-1)}\{\delta^{a_j}{}_{a_j}\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}-\delta^{a_{j+1}}{}_{a_j}\delta^{[a_j}{}_{b_{j+1}}\delta^{a_{j+2}}{}_{b_{j+2}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}+\cdots+(-1)^{n-j}\delta^{a_n}{}_{a_j}\delta^{[a_j}{}_{b_j}\cdots\delta^{a_{n-1}]}{}_{b_n}\}$

$=\frac{1}{n-(j-1)}\{n\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}-\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\delta^{a_{j+2}}{}_{b_{j+2}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}+\cdots+(-1)^{n-j}\delta^{[a_n}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_{n-1}]}{}_{b_n}\}$

$=\frac{1}{n-(j-1)}\{n\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}-\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\delta^{a_{j+2}}{}_{b_{j+2}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}+\cdots+(-1)^{n-j}(-1)^{n-j-1}\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}\}$

$=\frac{1}{n-(j-1)}\{n\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}-\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\delta^{a_{j+2}}{}_{b_{j+2}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}-\cdots-\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}\}$

$=\frac{j}{n-(j-1)}\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$

故有引理 2 成立。

3) 引理 3：$\delta^{[a_1}{}_{a_1}\cdots\delta^{a_j}{}_{a_j}\delta^{a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}=\frac{(n-j)!j!}{n!}\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$

$\delta^{[a_1}{}_{a_1}\cdots\delta^{a_j}{}_{a_j}\delta^{a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}=\frac{1}{n}\delta^{[a_2}{}_{a_2}\cdots\delta^{a_j}{}_{a_j}\delta^{a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$

$=\frac{1}{n}\frac{2}{n-1}\delta^{[a_3}{}_{a_3}\cdots\delta^{a_j}{}_{a_j}\delta^{a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}=\cdots=\frac{(n-j)!j!}{n!}\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$

故引理 3 得证。

4) $\epsilon^{a_1\cdots a_n}\epsilon_{b_1\cdots b_n}=(-1)^s n!\,\delta^{[a_1}{}_{b_1}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$，$\epsilon_{a_1\cdots a_n}$为适配体元。

由于$\epsilon_{b_1\cdots b_n}$关于下标反对称，易知$\epsilon^{a_1\cdots a_n}=g^{a_1b_1}\cdots g^{a_nb_n}\epsilon_{b_1\cdots b_n}$关于上标也反对称。类似于前面可以知道这样的$T^{a_1\cdots a_n}{}_{b_1\cdots b_n}$的集合是一维矢量空间。而右边$\delta^{[a_1}{}_{b_1}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$显然关于上标反对称，同时关于下标有$\delta^{[a_1}{}_{b_{\pi(1)}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_{\pi(n)}}=\delta^{[a_{\pi^{-1}(1)}}{}_{b_1}\cdots\delta^{a_{\pi^{-1}(n)}]}{}_{b_n}=\delta_\pi\delta^{[a_1}{}_{b_1}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$，故关于下标也反对称，所以$\delta^{[a_1}{}_{b_1}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$关于上下指标都反对称。所以$\epsilon^{a_1\cdots a_n}\epsilon_{b_1\cdots b_n}$和$\delta^{[a_1}{}_{b_1}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$位于同一个一维矢量空间，$\epsilon^{a_1\cdots a_n}\epsilon_{b_1\cdots b_n}=K\delta^{[a_1}{}_{b_1}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$。此式两边同时与$\epsilon_{a_1\cdots a_n}\epsilon^{b_1\cdots b_n}$作缩并，由于$\epsilon_{a_1\cdots a_n}$为适配体元，故左边为$(-1)^s n!\,(-1)^s n!$，而对于右边有$\delta^{[a_1}{}_{b_1}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}\epsilon_{a_1\cdots a_n}\epsilon^{b_1\cdots b_n}=\epsilon_{a_1\cdots a_n}\epsilon^{[a_1\cdots a_n]}=\epsilon_{a_1\cdots a_n}\epsilon^{a_1\cdots a_n}=(-1)^s n!$。两式对比即可得$K=(-1)^s n!$。故得证。

5) $\epsilon^{a_1\cdots a_ja_{j+1}\cdots a_n}\epsilon_{a_1\cdots a_jb_{j+1}\cdots b_n}=(-1)^s(n-j)!\,j!\,\delta^{[a_{j+1}}{}_{b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n}$，$\epsilon_{a_1\cdots a_n}$为适配体元。

由上面的定理和引理 3 即可证明。

5.5 函数在流形上的积分，Gauss 定理

函数积分：

1) 设$\boldsymbol{\epsilon}$为流形M上任一体元，f为M上的C^0函数，则f在M上的积分(记为$\int_M f$)定义为n形式场$f\boldsymbol{\epsilon}$在M上的积分，$\int_M f = \int_M f\,\boldsymbol{\epsilon}$。
2) 函数积分与体元选择有关，若给定度规，积分用的体元是适配体元。
3) (R^3, δ_{ab})上的函数f的积分$\int_{R^3} f = \int_{R^3} f\,\boldsymbol{\epsilon}$，设$F = f \circ \psi^{-1}$，$\int_{R^3} f = \int_{R^3} F(x,y,z)dxdydz$。也可以用球坐标系积分，$\boldsymbol{\epsilon}$为适配体元，由前可知$\boldsymbol{\epsilon} = r^2 \sin\theta\, dr \wedge d\theta \wedge d\phi$，所以积分为$\int_{R^3} f = \int_{R^3} F'(r,\theta,\phi) r^2 \sin\theta\, drd\theta d\phi$。这与多变量中学的一样。

Stokes 定理的一个推论：

1) 设M为 n 维定向流形，N是M中的 n 维紧致带边嵌入子流形，g_{ab}是M上度规，$\boldsymbol{\epsilon}$和∇_a是适配体元和适配导数算符，v^a是M上的$C^{n>1}$矢量场，则$\int_{i(N)} (\nabla_b v^b)\boldsymbol{\epsilon} = \int_{\partial N} v^b \epsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$。
   (Stokes 定理里只要求N是紧致子集，这里我不知道为什么要求是嵌入子流形，还是说不影响？)
2) 具体证明：类似之前所述，$v^b \epsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$是$n-1$形式场，记为$\boldsymbol{\omega}$，故$\boldsymbol{\omega}$的外微分$d\boldsymbol{\omega}$是$n$形式场，$d\boldsymbol{\omega} = n\nabla_{[c}\left(v^b \epsilon_{|b|a_1\cdots a_{n-1})}\right]$。由于$n$形式场只有一个维度，故$d\boldsymbol{\omega} = h\epsilon_{ca_1\cdots a_{n-1}}$。所以$n\nabla_{[c}\left(v^b \epsilon_{|b|a_1\cdots a_{n-1})}\right] = h\epsilon_{ca_1\cdots a_{n-1}}$，两边与$\epsilon^{ca_1\cdots a_{n-1}}$作缩并，则右边等于$(-1)^s hn!$，左边$n\nabla_{[c}\left(v^b \epsilon_{|b|a_1\cdots a_{n-1}]}\right)\epsilon^{ca_1\cdots a_{n-1}} = n\nabla_c\left(v^b \epsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}\right)\epsilon^{[ca_1\cdots a_{n-1}]}$
   $= n\nabla_c\left(v^b \epsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}\right)\epsilon^{ca_1\cdots a_{n-1}} = n\epsilon^{ca_1\cdots a_{n-1}}\epsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}\nabla_c v^b$
   $= n\epsilon^{a_1\cdots a_{n-1}c}\epsilon_{a_1\cdots a_{n-1}b}\nabla_c v^b = (-1)^s n(n-1)!\,\delta^c{}_b \nabla_c v^b = (-1^s)n!\nabla_b v^b$
   倒数第二个等号用到了前面体元的定理。故两式对比可得$h = \nabla_b v^b$，$d\boldsymbol{\omega} = h\boldsymbol{\epsilon}$。而由斯托克斯定理$\int_{i(N)} d\boldsymbol{\omega} = \int_{\partial N} \boldsymbol{\omega}$，代入$\boldsymbol{\omega}$即得$\int_{i(N)} (\nabla_b v^b)\boldsymbol{\epsilon} = \int_{\partial N} v^b \epsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$。

诱导体元：

1) N上的定向$\boldsymbol{\epsilon}$可以得到∂N上的诱导定向$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$。在$\partial N$不是类光超曲面时，$N$上的度规$g_{ab}$可以得到$\partial N$的诱导度规$h_{ab} = g_{ab} \mp n_a n_b$，其中$n^a n_a = \pm 1$。由这两者可以得到$\partial N$上的诱导体元。
   (由h_{ab}的定义易知$h^{ab}\omega_a^1\omega_b^2 = g^{ab}\omega_a^1\omega_b^2, \forall \omega_a^1, \omega_a^2 \in W^*|_q$)
2) 设$\hat{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$为$\partial N$的诱导体元，故应满足(a) 和诱导定向$\bar{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$相容；(b) 与度规$h_{ab}$相适配：$\hat{\epsilon}^{a_1\cdots a_{n-1}}\hat{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}} = (-1)^{s'}(n-1)!$。$s'$是$h_{ab}$在正交归一基底对角元上-1 的个数。
3) 设n^b是∂N的外向单位法矢，则诱导体元$\hat{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}} = n^b \epsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$。证明在 4)，下面三个括号是猜的，作为 4)的铺垫。
   (由于N有内部，故"外向"有意义。具体的定义我猜是将∂N上某点q的矢量v^a看作过这点的某曲线的切矢，若曲线上在q附近且参数$t < t_q$的点都位于$i(N)$内，则称v^a为∂N上指向外向的矢量。)
   (我猜：由于N同胚于$R^{n-} = \{(x^1,\cdots,x^n) \in R^n | x^1 \le 0\}$，故由$x^1 = 0$确定的超曲面的法余矢$n_a = \alpha(dx^1)_a$，其中$\alpha$为一常数。故法矢$n^a = g^{ab}n_b = \alpha g^{ab}(dx^1)_b = \alpha g^{1\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a$，故在此坐标系下只要$\alpha g_{11} > 0$，法矢就是外向法矢。进一步，若已知$n^a$是外向单位法矢，则$n^a n_a = \alpha^2 g^{11} = \pm 1$，所以当$n^a n_a = +1$时，$g_{11} > 0$，从而$\alpha > 0$；反过来$\alpha < 0$。)
   (若已知n^a是∂N的外向单位法矢，则$\forall q \in \partial N$，可选取右手正交归一基底$\{(e_\mu)^a\}$，使得$n^a = (e_1)^a$。而由于$n^a n_a = \pm 1, n_a = \alpha(dx^1)_a$以及上面说的$\alpha$的取值规律可知$(e_1)^a$的对

偶矢量$(e^1)_a$为$|\alpha|(dx^1)_a$, (可用对偶矢量定义验证, 注意基矢的降指标未必是对偶基矢), 即$(e^1)_a$为$(dx^1)_a$的正数倍)

4) 具体证明: (书上证明思路在 P.120 的选读 5-5-1, 下面猜的和书上有点区别。)

   假设$\{x^\mu\}$以$\boldsymbol{\epsilon}$衡量为右手系。$\forall q \in \partial N$, 选取右手正交归一基底$\left\{(e_\mu)^a\right\}$, 使得$n^a = (e_1)^a$。

   N上的适配体元写为$\epsilon_{a_1\cdots a_n} = (e^1)_{a_1} \wedge\cdots\wedge (e^n)_{a_n}$, 由上面的我猜, 将$|\alpha|(dx^1)_{a_1}$代入可知$\epsilon_{a_1\cdots a_n} = |\alpha|(dx^1)_{a_1} \wedge\cdots\wedge (e^n)_{a_n}$。由于$\{(e_2)^a,\cdots,(e_n)^a\}$显然为切于$\partial N$的矢量, 且均为右手系, 由之前的结论知从$\{(dx^2)_a,\cdots,(dx^n)_a\}$到$\{(e^2)_a,\cdots,(e^n)_a\}$的雅可比行列式为正, 从而体元写为$\epsilon_{a_1\cdots a_n} = |\alpha| J(dx^1)_{a_1} \wedge\cdots\wedge (dx^n)_{a_n}$, 可视为$N$的定向。去掉其中的" $(dx^1)_{a_1} \wedge$" 可得∂N的一个诱导定向$\bar{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}} = |\alpha| J(dx^2)_{a_2} \wedge\cdots\wedge (dx^n)_{a_n} = |\alpha|(e^2)_{a_2} \wedge\cdots\wedge (e^n)_{a_n}$。此时考虑$n^b\epsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}} = |\alpha| n^b(dx^1)_b(e^2)_{a_2} \wedge\cdots\wedge (e^n)_{a_n} = (e^2)_{a_2} \wedge\cdots\wedge (e^n)_{a_n}$, 可见其为$\partial N$上的$n-1$形式场且与诱导定向相容。同时有:

   $n^b{\epsilon_b}^{a_1\cdots a_{n-1}} n^c \epsilon_{ca_1\cdots a_{n-1}} = n_b \epsilon^{ba_1\cdots a_{n-1}} n^c \epsilon_{ca_1\cdots a_{n-1}}$
   $= n_b n^c \epsilon^{ba_1\cdots a_{n-1}} \epsilon_{ca_1\cdots a_{n-1}} = n_b n^c \epsilon^{a_1\cdots a_{n-1} b} \epsilon_{a_1\cdots a_{n-1} c}$
   $= n_b n^c \epsilon^{a_1\cdots a_{n-1} b} \epsilon_{a_1\cdots a_{n-1} c} = (-1)^s (n-1)!\, n_b n^c {\delta^b}_c = (-1)^s (n-1)!\, n_b n^b$

   其中s为g_{ab}在正交归一系下对角线上-1 的个数。由诱导度规h_{ab}的定义知, h_{ab}在基底$\{(e^2)_a,\cdots,(e^n)_a\}$(切于$\partial N$)下的矩阵元与$g_{ab}$的 矩阵元相同, 故$s'$与$s$的差别仅在此基底下的第一个对角元, $g_{11} = g_{ab}(e_1)^a(e_1)^b = n^a n_a$。所以当$n^a n_a = 1$时, $s = s'$; 当为-1 时, $s = s' + 1$。这两种情况下均有$n^b{\epsilon_b}^{a_1\cdots a_{n-1}} n^c \epsilon_{ca_1\cdots a_{n-1}} = (-1)^{s'}(n-1)!$。注意式中左边$\boldsymbol{\epsilon}$的后 n-1 个上指标是用$g^{ab}$升上去的, 由体元的表达式以及$\{(e_2)^a,\cdots,(e_n)^a\}$切于$\partial N$可知, 升指标也可由$h^{ab}$来完成。故设$\hat{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}} = n^b \epsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$, 此时前面的等式可以写为: $\hat{\epsilon}^{a_1\cdots a_{n-1}} \hat{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}} = (-1)^{s'}(n-1)!$。由于体元被与定向相容和与度规适配唯一确定, 所以$\hat{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$就是诱导体元。

5) 我猜: 当n^a为内向法矢时, 类似的推导(同样设$n_a = \alpha(dx^1)_a$)也同样成立。只是这时令$(e_1)^a = -n^a$(从而也可得到$(e^1)_a = |\alpha|(dx^1)_a$), $\hat{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}} = -n^b \epsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$(与诱导定向$(e^2)_{a_2} \wedge\cdots\wedge (e^n)_{a_n}$相容与度规适配)。

Gauss 定理:

1) 设M为 n 为定向流形, N是M中的 n 维紧致带边嵌入子流形, g_{ab}是M上的度规, $\boldsymbol{\epsilon}$和∇_a分别为适配体元和适配导数算符, $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$是$\partial N$上的诱导体元, ∂N的外向法矢满足$n^a n_a = \pm 1$, v^a是M上的C^1矢量场, 则$\int_{i(N)} (\nabla_a v^a)\boldsymbol{\epsilon} = \pm \int_{\partial N} v^a n_a \hat{\boldsymbol{\epsilon}}$, 其中$n^a n_a$为正时取正, 为负时取负。

2) 具体证明: (下图中说的$n_b = \pm(e^0)_b$, 可以由前面它们与$(dx^1)_b, \alpha, n^a n_a$的关系得到。)

证明 由定理 5-5-1 知只须证明$\int_{\partial N} v^b \varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}} = \pm \int_{\partial N} v^a n_a \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$. 令$\boldsymbol{\omega} = v^b \varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$, 注意到 §5.2末关于$\int_{\phi[S]} \boldsymbol{\omega} \equiv \int_{\phi[S]} \tilde{\boldsymbol{\omega}}$的讨论, 可知此处的$\int_{\partial N} v^b \varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$ 是指$\int_{\partial N} \tilde{\boldsymbol{\omega}}$, 故只须证明

$$\tilde{\omega}_{a_1\cdots a_{n-1}} = \pm v^b n_b \hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}} \qquad \forall q \in \partial N, \tag{5-5-8}$$

其中n^a为∂N的单位外向法矢. 上式两边都是W_q上的$n-1$形式, 故必有K使

$$\tilde{\omega}_{a_1\cdots a_{n-1}} = K v^b n_b \hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}, \tag{5-5-9}$$

于是只须证明$K = \pm 1$. 设$\{(e_0)^a = n^a, (e_1)^a, \cdots, (e_{n-1})^a\}$是$V_q$的一个右手正交归一基底, 用$(e_1)^{a_1}\cdots(e_{n-1})^{a_{n-1}}$缩并上式, 右边给出

$$K v^b n_b \hat{\varepsilon}_{12\cdots n-1} = \pm K v^b (e^0)_b \hat{\varepsilon}_{12\cdots n-1} = \pm K v^0, \tag{5-5-10}$$

[其中第一步用到$n_b = \pm(e^0)_b$, 第二步用到如下事实: 由诱导定向$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$的定义可以证明

$\{(e_0)^a = n^a, (e_1)^a, \cdots, (e_{n-1})^a\}$ 的右手性(用定向 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 衡量)保证 $\{(e_1)^a, \cdots, (e_{n-1})^a\}$ 的右手性(用 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 衡量), 因而 $\hat{\varepsilon}_{12\cdots n-1} = 1$.] 另一方面, 式(5-5-9)左边缩并结果为

$$\widetilde{\omega}_{a_1\cdots a_{n-1}}(e_1)^{a_1}\cdots(e_{n-1})^{a_{n-1}} = \omega_{a_1\cdots a_{n-1}}(e_1)^{a_1}\cdots(e_{n-1})^{a_{n-1}}$$
$$= v^b \varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}(e_1)^{a_1}\cdots(e_{n-1})^{a_{n-1}} = v^\mu \varepsilon_{\mu 12\cdots n-1} = v^0 \varepsilon_{012\cdots n-1} = v^0, \quad (5\text{-}5\text{-}11)$$

[其中第一步用到式(5-2-7), 第五步用到 $\{(e_0)^a = n^a, (e_1)^a, \cdots, (e_{n-1})^a\}$ 的右手性.] 对比式(5-5-10)和(5-5-11)得 $K = \pm 1$. □

3) 上面都规定n^a为外向法矢。若规定$n^a n_a = 1$时n^a取外向，$n^a n_a = -1$时n^a取内向，则上述公式变为$\int_{i(N)}(\nabla_a v^a)\boldsymbol{\epsilon} = \int_{\partial N} v^a n_a \hat{\boldsymbol{\epsilon}}$

   (由于$n^a n_a = (-n^a)(-n_a)$，所以先得到$n^a n_a$的正负性再取外向内向是合理的。)
   (我猜: $n^a n_a = 1$时，n^a取外向($\alpha g_{11} > 0$)，诱导体元如前定义为$\hat{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}} = n^b \epsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$，由前可知$n^a n_a = 1$时$g_{11} > 0, \alpha > 0$，进而有$n_a = |\alpha|(dx^1)_a = (e^1)_a$(对应于原文中的$n_a = (e^0)_a$)，可以类似原文证得结论；$n^a n_a = -1$时，$n^a$取内向($\alpha g_{11} < 0$)，诱导体元按照前面的猜测取为$\hat{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}} = -n^b \epsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$，类似可知$n^a n_a = -1$时$g_{11} < 0, \alpha > 0$，故同样也有$n_a = |\alpha|(dx^1)_a = (e^1)_a$，最后也可证得$\int_{i(N)}(\nabla_a v^a)\boldsymbol{\epsilon} = \int_{\partial N} v^a n_a \hat{\boldsymbol{\epsilon}}$，只是这里的诱导体元取内向时的诱导体元。)

4) ∂N是类光超曲面时，仍有$\int_{i(N)}(\nabla_a v^a)\boldsymbol{\epsilon} = \int_{\partial N} v^a n_a \hat{\boldsymbol{\epsilon}}$，但$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$要定义为$\frac{1}{n}\epsilon_{a_1\cdots a_n} = n_{[a_1}\hat{\epsilon}_{a_2\cdots a_n]}$。

   (我对这个毫无想法。。)

5.6 对偶微分形式

对偶微分形式:

1) 以$\Lambda_p(l)$代表$p \in M$的全部l形式的集合的集合，$\dim\Lambda_p(l) = C_n^l = C_n^{n-l} = \dim\Lambda_p(n-l)$。由于为线性空间，故维数相同则存在同构映射。
2) 若M为带度规g_{ab}的定向流形，$\boldsymbol{\epsilon}$为适配体元，则可用$\boldsymbol{\epsilon}$及g_{ab}定义$\Lambda_M(l)$和$\Lambda_M(n-l)$之间的同构映射，如下。
3) $\forall \boldsymbol{\omega} \in \Lambda_M(l)$，定义$\boldsymbol{\omega}$的对偶微分形式 ${}^*\boldsymbol{\omega} := \frac{1}{l!}\omega^{b_1\cdots b_l}\epsilon_{b_1\cdots b_l a_1\cdots a_{n-l}}$，其中$\omega^{b_1\cdots b_l}$为$l$形式场的升指标，$\omega^{b_1\cdots b_l} = g^{b_1 c_1}\cdots g^{b_l c_l}\omega_{c_1\cdots c_l}$。
   (定义的$*$称为 Hodge star(霍奇星？)，容易看出$*$是同构映射，而且应该是自然同构？)
4) $f \in \mathcal{F}_M$为 0 形式场，其对偶形式 ${}^*f_{a_1\cdots a_n} = \frac{1}{0!}f\epsilon_{a_1\cdots a_n} = f\epsilon_{a_1\cdots a_n}$，故函数$f$的积分即为其对偶形式场的积分。
5) ${}^*({}^*f) = {}^*(f\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{n!}f\epsilon^{b_1\cdots b_n}\epsilon_{b_1\cdots b_n} = \frac{1}{n!}f(-1)^s n! = (-1)^s f$，在一般的形式场里也有类似的结论。
6) ${}^{**}\boldsymbol{\omega} = (-1)^{s+l(n-l)}\boldsymbol{\omega}$

$${}^{**}\boldsymbol{\omega} = {}^*({}^*\boldsymbol{\omega}) = {}^*\left(\frac{1}{l!}\omega^{b_1\cdots b_l}\epsilon_{b_1\cdots b_l a_1\cdots a_{n-l}}\right) = \frac{1}{(n-l)!}\frac{1}{l!}\,\omega^{b_1\cdots b_l}\epsilon_{b_1\cdots b_l}{}^{c_1\cdots c_{n-l}}\epsilon_{c_1\cdots c_{n-l}a_1\cdots a_l}$$

$$= \frac{1}{(n-l)!}\frac{1}{l!}\,\omega_{b_1\cdots b_l}\epsilon^{b_1\cdots b_l c_1\cdots c_{n-l}}\epsilon_{c_1\cdots c_{n-l}a_1\cdots a_l}$$

$$= (-1)^{l(n-l)} \frac{1}{(n-l)!}\frac{1}{l!}\ \omega_{b_1\cdots b_l}\epsilon^{c_1\cdots c_{n-l}b_1\cdots b_l}\epsilon_{c_1\cdots c_{n-l}a_1\cdots a_l}$$

$$= (-1)^{l(n-l)} \frac{1}{(n-l)!}\frac{1}{l!}\ \omega_{b_1\cdots b_l}(-1)^s(n-l)!\,l!\,\delta^{[b_1}{}_{a_1}\cdots\delta^{b_l]}{}_{a_l}$$

$$= (-1)^{s+l(n-l)}\ \omega_{b_1\cdots b_l}\delta^{[b_1}{}_{a_1}\cdots\delta^{b_l]}{}_{a_l}$$

$$= (-1)^{s+l(n-l)}\ \omega_{[a_1\cdots a_l]} = (-1)^{s+l(n-l)}\ \omega_{a_1\cdots a_l} = (-1)^{s+l(n-l)}\boldsymbol{\omega}$$

矢量场论：

1) 三维欧式空间(R^3, δ_{ab})中，$\Lambda_M(0)$中的元素为R^3上的函数，$\Lambda_M(1)$中的元素为1形式场，用度规可升指标为R^3上的矢量场。同时对于三维空间，$\Lambda_M(0)$与$\Lambda_M(3)$认同，$\Lambda_M(1)$与$\Lambda_M(2)$认同，所以 3 维空间的微分形式场可由函数和矢量场代替。
2) 矢量代数中的点乘$A_aB^a = \delta_{ab}A^aB^b$，叉乘${}^*(A_a \wedge B_b) = \epsilon_{abc}A^aB^b$。(容易验证)
3) 3 维欧氏空间与欧式度规适配的导数算符即为∂_a，矢量代数中涉及$\vec{\nabla}$的公式都可以由∂_a表示，因为∂_a也是对各分量求导。然后就是电动力学刚开始学的那些。
(涉及叉乘后求导的，ϵ_{abc}也可以直接提出，因为是适配体元。这大概对应了 Levi-Civita 符号作为一个数可以直接提出。)
4) 用外微分和对偶形式构造梯度、旋度、散度：设f和$\vec{A}$为 3 维欧氏空间的函数和矢量场，

   则梯度$grad\ f = df$，旋度$curl\ \vec{A} = {}^*dA$，散度$div\ \vec{A} = {}^*d({}^*A)$，其中$A$是矢量场$A^a$的对偶矢量场$A_a$。

   (我猜: 梯度和旋度由前显然。散度写成分量容易证明, 不过也可以用另外的方法, 如下:

   ${}^*A_{a_1a_2} = A^b\epsilon_{ba_1a_2}$，$\big(d({}^*A)\big)_{ca_1a_2} = 3\partial_{[c}A^b\epsilon_{|b|a_1a_2]}$，$\partial_a$对适配体元作用为 0，故只作用在$A^b$上。进一步可以得到：

   $${}^*d({}^*A) = {}^*\big(3\partial_{[c}A^b\epsilon_{a_1a_2]b}\big) = \frac{1}{2}\partial_{[c}A^b\epsilon_{a_1a_2]b}\epsilon^{a_1a_2c} = \frac{1}{2}\partial_{[a_3}A^b\epsilon_{a_1a_2]b}\epsilon^{a_1a_2a_3}$$

   $$= \frac{1}{2}\partial_{[a_1}A^b\epsilon_{a_2a_3]b}\epsilon^{a_1a_2a_3} = \frac{1}{12}\sum_\pi \delta_\pi\partial_{a_{\pi(1)}}A^b\epsilon_{a_{\pi(2)}a_{\pi(3)}b}\epsilon^{a_1a_2a_3}$$

   由于$\epsilon^{a_1a_2a_3}$关于上标反对称，所以$\epsilon^{a_1a_2a_3} = \delta_\pi\epsilon^{a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}a_{\pi(3)}} = \delta_\pi\epsilon^{a_{\pi(2)}a_{\pi(3)}a_{\pi(1)}}$，从而代入有，$\forall\pi, \delta_\pi\partial_{a_{\pi(1)}}A^b\epsilon_{a_{\pi(2)}a_{\pi(3)}b}\epsilon^{a_1a_2a_3} = \delta_\pi\partial_{a_{\pi(1)}}A^b\epsilon_{a_{\pi(2)}a_{\pi(3)}b}\delta_\pi\epsilon^{a_{\pi(2)}a_{\pi(3)}a_{\pi(1)}} = 2!\,\partial_bA^b$，故累加项中的每个都是相同的值$2!\,\partial_bA^b$，而共有$3!$个$\pi$，所以${}^*d({}^*A) = \partial_bA^b$。)

完结撒花~~
2020.7.10