

FRG 视角下的 Efimov 效应

squid

2023 年 5 月 18 日

目录

1 概述	1
2 两体散射	2
2.1 散射长度	2
2.2 散射长度的调控	3
2.3 束缚态	4
3 Efimov 效应	5
3.1 三体薛定谔方程的求解	5
3.2 三个全同玻色子的无穷多三体束缚态	6
3.3 两个重原子一个轻原子的情形	9
4 泛函重整化群 (FRG) 简介	11
4.1 有效作用量	11
4.2 规制函数	12
4.3 重整化流: Wetterich 方程	14
5 FRG 视角下的 Efimov 效应	15
5.1 顶点展开	15
5.2 重整化流	16
5.3 三体束缚态的产生	18
6 总结	20

1 概述

Efimov 效应是一种奇特的量子少体效应。对于具有两体短程作用的三个全同玻色子, 当两体散射达到散射共振时 (散射长度发散), 系统会出现无穷多个三体束缚态, 并且在零能附近这些束缚态的能量呈等比数列, 系统呈现出一种离散标度对称性。

由于重整化与标度变换相关, 不难设想, Efimov 效应所具有的标度上的特性会为系统的重整化流带来新的特点。事实上, Efimov 效应的重整化流是一个极限环, 具有标度变换的对数周期性。这种奇特的标度变换行为就是系统在零能附近无穷多束缚态能量呈等比数列的体现。

不过因为在这里考虑的情形中散射长度发散（耦合长度发散），要看到重整化流的这种行为，我们不能采用通常的微扰重整化群的方法，而应该使用非微扰方法，比如泛函重整化群（FRG）。相比于通常的微扰重整化群，FRG 关注的是有效作用量（或者单粒子不可约顶点的生成泛函），重整化流方程是有效作用量的具有单圈结构的 Wetterich 方程。从有效作用量的重整化流我们便可以导出各个不可约顶点的重整化流。后文中我们将从原子-二聚体顶点的行为分析三体束缚态的出现。

本文组织如下：第 2 节我们回顾低能两体散射的一些概念和结论，如 s 波散射长度、束缚态，指出散射长度或 T 矩阵发散总是伴随着一个束缚态的出现；第 3 节中，我们对原始的三个全同玻色子的情形计算了 Efimov 效应，并在较为简单的两个重原子一个轻原子的情况下导出了原子-二聚体散射长度与原子-原子散射长度之间的关系。无穷多个三体束缚态的出现来源于原子-原子散射长度增至无穷的过程中，原子-二聚体散射长度的无穷多次发散；第 4 节介绍泛函重整化群的基本概念，介绍有效作用量及相关重整化流方程；第 5 节我们考察 FRG 视角下无穷多三体束缚态是如何出现的。与第 3 节的分析相比，FRG 的处理中真实相互作用并没有被调节，但伴随着红外模式的逐渐打开，原子-二聚体顶点随重整化流的对数周期性发散。

2 两体散射

2.1 散射长度

在两体散射中，如果相互作用势是旋转对称的，那么总散射截面可以利用分波法写为不同分波散射截面之和 [1]

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l(k), \quad (1)$$

其中 δ_l 为 l 分波的散射相移。低能情况下，散射相移与 k 有如下关系 [1]

$$\delta_l \sim k^{2l+1}. \quad (2)$$

于是在此情况下， $l > 0$ 的分波对散射截面的贡献趋于零，我们只需考虑 s 波散射。两体散射相对运动的薛定谔方程为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(r) \right] \psi = E\psi, \quad (3)$$

其中 μ 为约化质量。对 ψ 进行分波展开并代入 (3) 式中，保留 s 波成分，可以得到如下径向方程

$$\frac{d^2 R_k}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V(r)) R_k = 0. \quad (4)$$

考虑短程势，即认为在 $r > r_0$ 时， $V(r) = 0$ 。于是在 $r > r_0$ 的区间内， $R_k(r)$ 的解为

$$R_k(r) = A \sin(kr + \delta_s(k)), \quad (5)$$

$\delta_s(k)$ 即为 s 波散射相移，它的取值由短程边界条件决定，与具体相互作用有关。事实上由波函数对数导数连续性

$$\frac{R'_k}{R_k} \Big|_{r \rightarrow r_0^+} = \frac{k}{\tan(kr_0 + \delta_s(k))} = \frac{R'_k}{R_k} \Big|_{r \rightarrow r_0^-}. \quad (6)$$

在低能极限下定义 s 波散射长度

$$a_s = \lim_{k \rightarrow 0} -\frac{\delta_s(k)}{k}, \quad (7)$$

于是上述边界条件可以写为

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\tan(kr_0 + \delta_s(k))} = \frac{1}{r_0 - a_s} = \frac{R'_k}{R_k} \Big|_{r \rightarrow r_0^-}. \quad (8)$$

可以发现低能极限下, r_0 以下的相互作用细节全部被包含到 s 波散射长度这一个参数中。这就是低能物理的普适性, 只要 s 波散射长度相同, 不同的短程的相互作用都有相同的低能物理。

利用散射长度我们可以把 R_k 写成特定的形式

$$R_k(r) \sim \sin(kr + \delta_s(k)) \sim (kr - ka_s) \sim \left(1 - \frac{r}{a_s}\right). \quad (9)$$

此时波函数的形式为

$$\psi(r) \sim \frac{R_k(r)}{r} \sim \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a_s}\right), \quad (10)$$

显然它满足

$$\lim_{r \rightarrow 0} -\frac{1}{r\psi} \frac{\partial}{\partial r}(r\psi) = \frac{1}{a_s}. \quad (11)$$

这被称为 Bethe-Peierls 边界条件 [2]。有相互作用的薛定谔方程不容易求解, 但低能情况下我们可以先在不相互作用的情况下求解, 然后为相对运动波函数加上上述边界条件, 这样就等价地考虑了散射长度为 a_s 的短程作用。

2.2 散射长度的调控

现在我们来考察散射长度随势阱深度的变化 [3]。以球方势阱为例, 假设球方势阱为

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < r_0 \\ 0, & r > r_0 \end{cases}. \quad (12)$$

由于波函数在 $r = 0$ 处具有有限值, 故 $R_k(0) = 0$, 由此容易得到低能极限下 $R_k(r)$ 在 $r < r_0$ 时的解为

$$\lim_{k \rightarrow 0} R_k(r) = \sin\left(\sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2}} r\right). \quad (13)$$

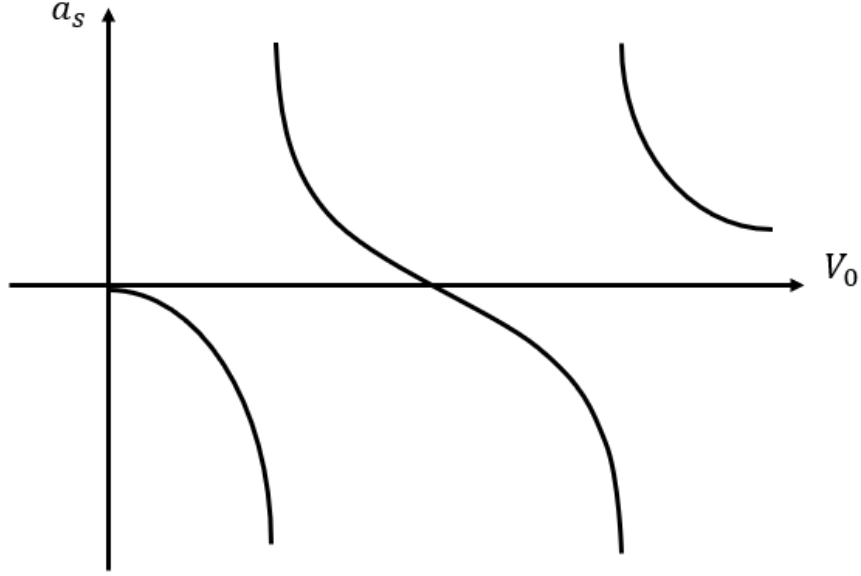
由 (8) 式我们可以得到散射长度满足的方程

$$\frac{1}{r_0 - a_s} = \frac{R'_k}{R_k} \Big|_{r \rightarrow r_0^-} = \frac{\sqrt{2\mu V_0/\hbar^2}}{\tan(\sqrt{2\mu V_0/\hbar^2} r_0)}. \quad (14)$$

从中不难看出, 随着势阱深度从 0 开始加深, 散射长度从 0 开始减小至负无穷, 然后突变为正无穷, 之后继续减小直至又一个负无穷。于是通过调节 V_0 我们便可以在 $(-\infty, +\infty)$ 的范围内调节散射长度, 研究不同散射长度下的低能物理。散射长度与势阱深度的关系大致如图 1 所示。

实验上散射长度的调控通常是通过 Feshbach 共振来实现的。之所以叫做共振是因为它需要开通道散射态和闭通道束缚态之间发生散射共振。考虑低能散射, 调节磁场强度改变开通道散射态和闭通道束缚态 (考虑耦合带来的能移后) 之间的能量差, 当这一能量差为 0 时散射长度发散。在相应的磁场强度附近, 散射长度可以被灵敏地调节。

Feshbach 共振的具体推导较为复杂, 这里不做展示, 不过我们可以注意到上述理论中散射长度的发散需要用到闭通道的束缚态。换个角度我们可以说, 散射长度发散伴随着一个浅束缚态的出现。这其实是一个普遍的结论, 对于简单的球方势阱也是如此。下面我们就来说明这一点。

图 1: 散射长度 a_s 随势阱深度 V_0 变化示意图

2.3 束缚态

对于束缚态, $R_k(r)$ 在 $r > r_0$ 时的解为

$$R_k(r) = e^{-\kappa r}, \quad (15)$$

其中 $\kappa = \sqrt{2\mu(-E)}/\hbar$ 。而在 $r < r_0$ 上, 当 $E \rightarrow 0^-$ 时, $R_k(r)$ 的解与 (13) 式相同。故此时边界条件变为

$$-\kappa = \frac{1}{r_0 - a_s} = \frac{\sqrt{2\mu V_0/\hbar^2}}{\tan(\sqrt{2\mu V_0/\hbar^2} r_0)}. \quad (16)$$

$a_s \rightarrow +\infty$ 时, κ 才能有满足 $\kappa \rightarrow 0^+$ 的解, 相应的浅束缚态能量为

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2\mu} \approx -\frac{\hbar^2}{2\mu a_s^2}. \quad (17)$$

这便是我们要说明的, 散射长度的每一次发散都对应着一个浅束缚态的出现。

当然这只是低能散射情况下利用球方势阱所做的简单论述, 实际上关于束缚态还存在更一般的结论。如果采用如下 Lippman-Schwinger 方程的形式来定义 off-shell 的 T 矩阵

$$T(E) = V + V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T(E), \quad T(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E) = \langle \mathbf{p} | T(E) | \mathbf{q} \rangle, \quad (18)$$

那么可以证明 [4], $T(E)$ 在负实轴上的极点 (从而也是 $S(E)$ 在负实轴上的极点) 就对应束缚态的能量。由于散射振幅正比于 T 矩阵 on-shell 矩阵元, 同时低能散射情况下又正比于散射长度, 于是散射长度发散伴随浅束缚态的出现就对应着 $T(E)$ 在 $E \rightarrow 0^-$ 处有极点的特殊情形。

散射长度的发散以及 $T(E \rightarrow 0^-)$ 的发散是系统存在低能两体束缚态的标志。下文中我们将讨论原子与二聚体之间的散射, 并利用散射长度和 $T(E \rightarrow 0^-)$ 的其他矩阵元来判断束缚态的出现。在这种情形下系统存在低能的原子-二聚体束缚态也就意味着系统出现了低能的三体束缚态。

3 Efimov 效应

3.1 三体薛定谔方程的求解

现在我们用 Bethe-Peierls 边界条件来推导三个全同玻色子短程相互作用的问题 [5]。设三个玻色子的坐标为 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ ，定义雅可比坐标

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i, \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{ij,k} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\mathbf{x}_k - \frac{\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j}{2} \right), \quad (20)$$

其中 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ 。容易发现我们可以定义三套雅可比坐标，如图 2 所示。不同的雅可比坐标不是独

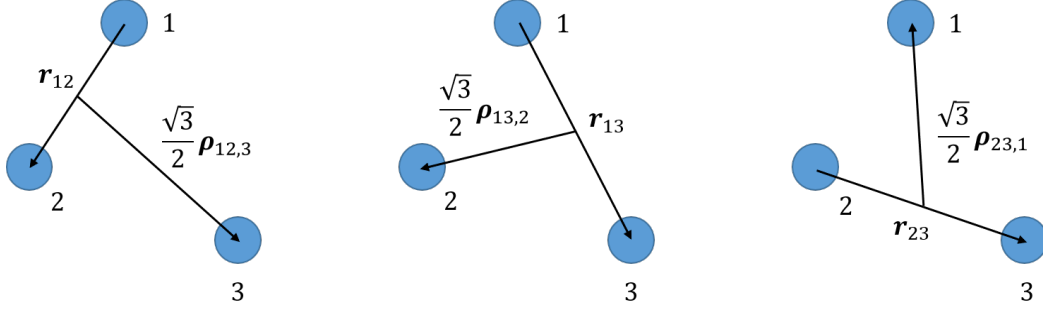


图 2: 不同的雅可比坐标示意图

立的，它们满足如下关系

$$\mathbf{r}_{23} = -\frac{1}{2}\mathbf{r}_{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{\rho}_{12,3}, \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{23,1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{r}_{12} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_{12,3}, \quad (22)$$

$$\mathbf{r}_{31} = -\frac{1}{2}\mathbf{r}_{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{\rho}_{12,3}, \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{31,2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{r}_{12} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_{12,3}. \quad (24)$$

任取一套雅可比坐标，自由的三体薛定谔方程可以被写为

$$(-\nabla_{\mathbf{r}}^2 - \nabla_{\boldsymbol{\rho}}^2 - k^2)\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = 0. \quad (25)$$

波函数 ψ 有三个位矢参数，但相互作用应当不影响质心的运动，假设我们在质心系中讨论， ψ 应当仅由两个位矢参数决定，它可以是任意一套雅可比坐标。考虑到玻色子的交换对称性， ψ 可以分解为

$$\psi = \chi(\mathbf{r}_{12}, \boldsymbol{\rho}_{12,3}) + \chi(\mathbf{r}_{23}, \boldsymbol{\rho}_{23,1}) + \chi(\mathbf{r}_{31}, \boldsymbol{\rho}_{31,2}), \quad (26)$$

这样，每一个 χ 都满足同一个方程

$$(-\nabla_{\mathbf{r}}^2 - \nabla_{\boldsymbol{\rho}}^2 - k^2)\chi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = 0. \quad (27)$$

利用 (24) 式不同雅可比坐标的关系，Bethe-Peierls 边界条件 (11) 现在可以写为

$$\left. \frac{\partial}{\partial r}(r\chi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})) \right|_{r \rightarrow 0} + \chi\left(\frac{\sqrt{3}\boldsymbol{\rho}}{2}, -\frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) + \chi\left(-\frac{\sqrt{3}\boldsymbol{\rho}}{2}, -\frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) = -\frac{r}{a} \left(\chi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) + \chi\left(\frac{\sqrt{3}\boldsymbol{\rho}}{2}, -\frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) + \chi\left(-\frac{\sqrt{3}\boldsymbol{\rho}}{2}, -\frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) \right) \Big|_{r \rightarrow 0} \quad (28)$$

我们只考虑两体 s 波散射, 故 $\chi(\mathbf{r}, \rho)$ 的取值应与位矢参数的方向无关。另一方面, $r \rightarrow 0$ 时 $\chi(r, \rho)$ 发散 (参照 (10) 式), $\chi(\sqrt{3}\rho/2, \rho/2)$ 为一有限值, 于是上述边界条件可以简化为

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} (r\chi(r, \rho)) \right|_{r \rightarrow 0} + 2\chi\left(\frac{\sqrt{3}\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right) = -\frac{r}{a_s}\chi(r, \rho)\Big|_{r \rightarrow 0}. \quad (29)$$

定义新的函数

$$\chi_0(r, \rho) = r\rho\chi(r, \rho), \quad (30)$$

此时方程和 $r \rightarrow 0$ 时的边界条件可以化为

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - k^2\right)\chi_0(r, \rho) = 0, \quad (31)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} (\chi_0(r, \rho)) \right|_{r \rightarrow 0} + \frac{8}{\sqrt{3}\rho}\chi_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho, \frac{1}{2}\rho\right) = -\frac{1}{a_s}\chi_0(0, \rho). \quad (32)$$

另外由于 $\chi(r, 0)$ 为一有限值, 所以存在一个附加的边界条件 $\chi_0(r, 0) = 0$ 。

现在我们定义超球坐标

$$r = R \sin \alpha, \quad \rho = R \cos \alpha, \quad (33)$$

其中 R, α 分别被称为超半径和超角度。在这一坐标下, χ_0 满足的方程化为

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - k^2\right)\chi_0(R, \alpha) = 0 \quad (34)$$

相应地也可得到 $r \rightarrow 0$ 边界条件在超球坐标下的表示。由于

$$R^2 = r^2 + \rho^2 = \frac{2}{3}(r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2), \quad (35)$$

故 $R \rightarrow \infty$ 时, 至少有两个粒子的相对位矢满足 $r_{ij} \rightarrow \infty$ 。我们希望求解三体束缚态 (此时 k 为纯虚数), 故 $R \rightarrow \infty$ 时, χ 应当指数衰减, $\chi_0(R \rightarrow \infty, \alpha) = 0$ 。故边界条件最终有

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} (\chi_0(R, \alpha)) \right|_{\alpha \rightarrow 0} + \frac{8}{\sqrt{3}}\chi_0\left(R, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{R}{a_s}\chi_0(R, 0), \quad \chi_0(R, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad \chi_0(R \rightarrow \infty, \alpha) = 0. \quad (36)$$

3.2 三个全同玻色子的无穷多三体束缚态

注意到在两体散射共振 ($a_s \rightarrow \infty$) 时, 边界条件 (36) 式关于 R, α 是可分的 [5]。事实上, 假设

$$\chi_0(R, \alpha) = F(R)\phi(\alpha), \quad (37)$$

方程 (34) 式可以分离变量

$$-\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\phi(\alpha) = s_n^2\phi(\alpha), \quad (38)$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{s_n^2}{R^2} - k^2\right)F(R) = 0, \quad (39)$$

边界条件现在写为

$$\phi'(0) + \frac{8}{\sqrt{3}}\phi\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad \phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad F(\infty) = 0. \quad (40)$$

可以解得

$$\phi_n(\alpha) = \sin\left(s_n\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right), \quad (41)$$

其中 n 标记不同的本征值, s_n 是满足如下方程的非零解

$$-s_n \cos\left(s_n \frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{\sqrt{3}} \sin\left(s_n \frac{\pi}{6}\right) = 0. \quad (42)$$

对于不同的 s_n , $F(R)$ 的解记为 $F_n(R)$, 它所满足的方程 (39) 式可以进一步化为

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial R^2} + V_n(R)\right) \sqrt{R} F_n(R) = \frac{2mE}{\hbar^2} \sqrt{R} F_n(R), \quad (43)$$

其中

$$V_n(R) = \frac{s_n^2 - 1/4}{R^2}. \quad (44)$$

现在考察方程 (42), 定义如下函数

$$y_1(x) = -x \cos\left(x \frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{\sqrt{3}} \sin\left(x \frac{\pi}{6}\right), \quad y_2(x) = -x \cos\left(ix \frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{\sqrt{3}} \sin\left(ix \frac{\pi}{6}\right) / i. \quad (45)$$

函数曲线如图 3 所示。

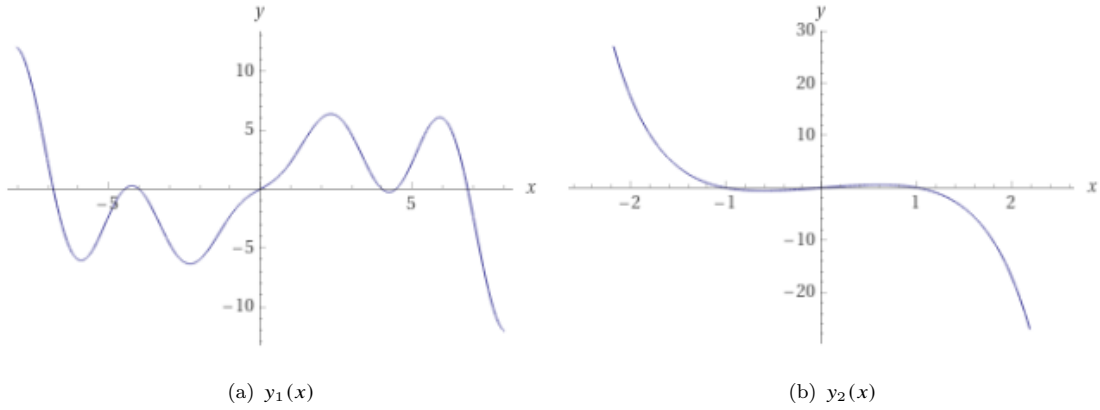


图 3: $y_1(x), y_2(x)$ 的作图

可以发现 s_n 模最小的实数解为 ± 4 , 唯一的纯虚数解为 $\pm 1.00624i$, 记为 s_0 。对于 s_n 为一般复数的情形, 定义如下函数

$$z(x, y) = -(x + iy) \cos\left((x + iy) \frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{\sqrt{3}} \sin\left((x + iy) \frac{\pi}{6}\right), \quad (46)$$

可以得到

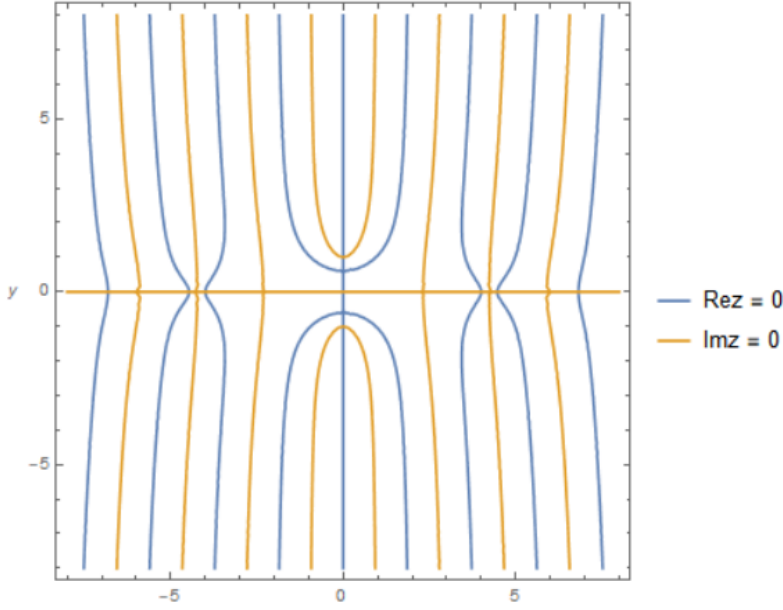
$$\text{Re}z = -x \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cosh\left(\frac{\pi}{2}y\right) - y \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sinh\left(\frac{\pi}{2}y\right) + \frac{8}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) \cosh\left(\frac{\pi}{6}y\right), \quad (47)$$

$$\text{Im}z = -y \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cosh\left(\frac{\pi}{2}y\right) + x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sinh\left(\frac{\pi}{2}y\right) + \frac{8}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) \sinh\left(\frac{\pi}{6}y\right). \quad (48)$$

作出 $\text{Re}z = 0$ 和 $z = 0$ 的曲线如图 4 所示。不难看出, $z(x, y)$ 只有在实轴或虚轴上才有实部虚部同时为零, 所以 s_n 只有上述实数解和纯虚数解。

现在来考察 V_n 。当 s_n 取实数解时, V_n 为正数, 是排斥势; 而 s_n 取纯虚数解 s_0 时, V_n 为吸引势, 可以容纳束缚态。我们希望求解束缚态, 所以我们只考虑 $s_n = s_0$ 的情形。不过 V_0 与常见的吸引势不同, 由于它正比于“距离”的负二次幂, 这将给问题带来一种连续的标度对称性。假设 $F_0^*(R)$ 是方程 (43) 的解, 相应本征值为 E^*

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{s_0^2 - 1/4}{R^2}\right) \sqrt{R} F_0^*(R) = \frac{2mE^*}{\hbar^2} \sqrt{R} F_0^*(R). \quad (49)$$

图 4: 函数 $z(x, y)$ 实部虚部分别为零对应的 (x, y) 曲线

令 $R \rightarrow \lambda R$, 上式可以化为

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{s_0^2 - 1/4}{R^2}\right) \sqrt{\lambda R} F_0^*(\lambda R) = \frac{2m\lambda^2 E^*}{\hbar^2} \sqrt{\lambda R} F_0^*(\lambda R). \quad (50)$$

于是 $F_0^*(\lambda R)$ 也是本征方程的解, 相应的本征值为 $\lambda^2 E^*$ 。如果我们找到了一个 $E^* < 0$ 的解, 标度对称性意味着系统的能量将是没有下界的, 粒子会越靠越近直至重合。这无疑是非物理的。事实上具有反平方势的哈密顿量是非厄米的 (更确切地说, 是非自伴的 [6]), 严格的处理需要做自伴延拓 [6, 7]。不过这里我们并不需要这么做, 因为当距离足够小时, 相互作用的微观细节就会起作用, 有效势将不再是反平方势, 所以我们需要引入一个截断 R_0 , 当 $R > R_0$ 时上述推导才成立, 而 $F_0(R)$ 在 R_0 处则需要额外的一个边界条件, 它与具体的相互作用细节有关。尽管看起来我们是在原问题上增加了边界条件, 但实际上只有考虑这个关于 R 的短程边界条件之后, 结合 (36) 式, 方程 (34) 才成为可以数值求解的问题。

下面我们来考察零能极限下的三体束缚态。 $k \rightarrow 0$ 时, 方程 (39) 写为

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{s_0^2}{R^2}\right) F_0(R) = 0, \quad (51)$$

这个方程可以严格求解, 它的解为

$$F_0(R) = C_1 R^{i|s_0|} + C_2 R^{-i|s_0|} = C_1 e^{i|s_0| \ln R} + C_2 e^{-i|s_0| \ln R} \propto e^{i|s_0| \ln \Lambda R} + e^{-i|s_0| \ln \Lambda R} \propto \cos(|s_0| \ln \Lambda R), \quad (52)$$

其中 C_1, C_2, Λ 是由边界条件确定的常数。从这个解可以看出, 尽管短程边界条件的引入破坏了连续标度对称性, 但系统依然具有离散标度对称性。在 $R \rightarrow \exp(\pi/|s_0|)R = \lambda_0 R$ 的变换下, $F_0(R)$ 保持不变 (差一个常数)。这就是说, 如果靠近零能处 $E < 0$ 是系统的一个本征能量, 那么 E/λ_0^2 也是系统的一个本征能量。系统将具有无穷多个三体束缚态, 并且在靠近零能的位置这些束缚态的能量呈一等比数列, 比值 λ_0^2 与相互作用细节无关。这就是 Efimov 效应。

对于散射长度 a_s 较大但并未达到无穷的情形, 通过数值解方程 (34) 我们可以得到完整的 Efimov 能谱 [5], 如图 5 所示。横轴是 a_s^{-1} , 纵轴是 $\kappa = \text{sgn}(E)\sqrt{2m|E|/\hbar^2}$ 。左下角的能谱就是三体束缚态的能谱,

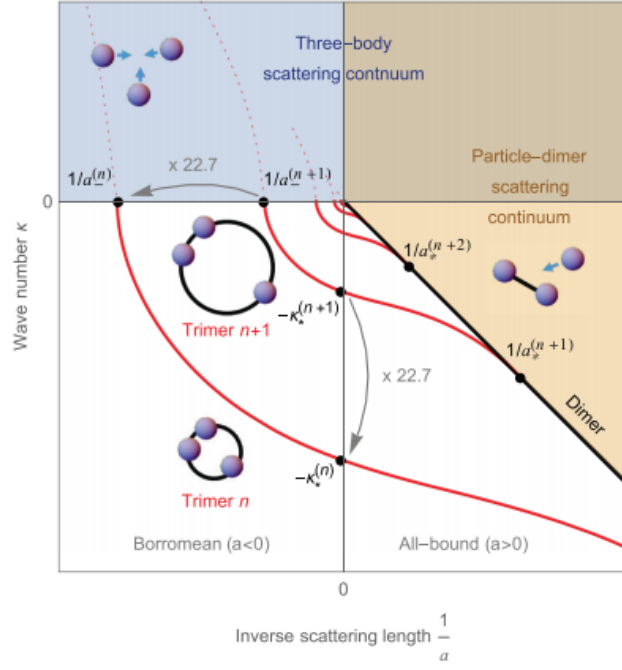


图 5: Efimov 能谱示意图 [5]

第二象限是三体散射区，第四象限黑色直线以上是原子与二聚体散射区，第一象限包含了两种散射。第二象限的黑色直线是按照 (17) 式两体浅束缚态能量画出来的，它的含义是两个原子形成浅束缚态，而另一个原子不与二聚体形成束缚态。这是三体束缚态的一种临界状态，通过这种临界状态我们事实上可以理解无穷多个三体束缚态的来源。不过 Efimov 的原始推导较为复杂，我们下面考虑一种相对简单的情形，即两个重原子与一个轻原子的情形。

3.3 两个重原子一个轻原子的情形

以两个重原子与一个轻原子体系为例 [8] 我们来讨论原子与二聚体的散射。设两个重原子质量为 M ，相对位矢为 \mathbf{R} ，轻原子质量为 m ，相对于重原子连线中点的位矢为 \mathbf{r} 。由于质量 $M \gg m$ ，故我们采取 Born-Oppenheimer 近似，即先让 \mathbf{R} 固定，求解轻原子运动的方程，得到本征能量 $\epsilon(\mathbf{R})$ ，然后将 $\epsilon(\mathbf{R})$ 作为轻原子在两个重原子之间诱导产生的有效势，求解重原子的运动方程。

轻原子在单个重原子附近的束缚态波函数可以写为

$$\psi_1(\mathbf{r}) \sim \frac{\exp(-\kappa(\mathbf{R})|\mathbf{r} - \mathbf{R}/2|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}/2|}, \quad \psi_2(\mathbf{r}) \sim \frac{\exp(-\kappa(\mathbf{R})|\mathbf{r} + \mathbf{R}/2|)}{|\mathbf{r} + \mathbf{R}/2|}, \quad (53)$$

系统有两个重原子的时候，轻原子的波函数可以写为对称或反对称的形式（可以看作是简并微扰的结果）

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\exp(-\kappa(\mathbf{R})|\mathbf{r} - \mathbf{R}/2|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}/2|} \pm \frac{\exp(-\kappa(\mathbf{R})|\mathbf{r} + \mathbf{R}/2|)}{|\mathbf{r} + \mathbf{R}/2|}. \quad (54)$$

其中 $\kappa(\mathbf{R})$ 满足 $\epsilon(\mathbf{R}) = -\hbar^2 \kappa^2(\mathbf{R})/2m$ 。对于对称的情形，在 $\mathbf{r} = -\mathbf{R}/2$ 和 $\mathbf{r} = \mathbf{R}/2$ 处应用 Bethe-Peierls 边界条件 (11) 可以得到

$$\kappa(\mathbf{R}) - \frac{1}{a_s} - \frac{\exp(-\kappa(\mathbf{R})R)}{R} = 0. \quad (55)$$

同理，对于反对称的情形，应用 Bethe-Peierls 边界条件可以得到

$$\kappa(\mathbf{R}) - \frac{1}{a_s} + \frac{\exp(-\kappa(\mathbf{R})R)}{R} = 0. \quad (56)$$

从这些方程中就可以解出 $\epsilon(R)$ 。数值结果表明 [8], 反对称波函数所得的 $\epsilon(R)$ 是排斥势, 而对称波函数得到的 $\epsilon(R)$ 是吸引势, 故下面只考虑对称的情形。 a_s 较大时, (55) 式近似写为

$$\kappa(R)R = \exp(-\kappa(R)R), \quad (57)$$

可以解得

$$\kappa(R) \approx \frac{C}{R}, \quad \epsilon(R) \approx -\frac{\hbar^2 C^2}{2mR^2} \quad (58)$$

其中 C 是方程 $C = \exp(-C)$ 的解。于是我们又得到了正比于距离负二次幂的吸引势。下面我们求解两个重原子的运动。首先写出薛定谔方程

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla_R^2}{M} - \frac{\hbar^2 C^2}{2mR^2} - E \right] \phi(R) = 0. \quad (59)$$

分波展开后保留 s 波成分, 上式可以化为径向方程

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{MC^2}{2mR^2} - \frac{ME}{\hbar^2} \right] \chi(R) = 0. \quad (60)$$

考虑临界状态, 即一个轻原子与一个重原子形成束缚态, 另一个重原子与二聚体的散射能量为零, 此时

$$E = -\frac{\hbar^2}{2ma_s^2}, \quad (61)$$

作变量代换 $R = a_s \tilde{R}$, 此时方程化为

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \tilde{R}^2} - \frac{MC^2}{2m\tilde{R}^2} + \frac{M}{2m} \right] \chi(\tilde{R}) = 0. \quad (62)$$

设方程的两个线性无关解为 $f(\tilde{R})$ 和 $f^*(\tilde{R})$, $\chi(\tilde{R})$ 是它们的线性叠加

$$\chi(\tilde{R}) = Cf(\tilde{R}) + Df^*(\tilde{R}). \quad (63)$$

当 $\tilde{R} \rightarrow 0$ 时, 方程中的 $M/2m$ 可忽略不计, 故对照 (43) 式和 (52) 式可知, 此时 $f(\tilde{R}) = \sqrt{\tilde{R}} \exp(i|s_0| \ln \tilde{R})$, $C = \exp(i|s_0| \ln \tilde{\Lambda})$, $D = \exp(-i|s_0| \ln \tilde{\Lambda})$, 其中 $|s_0| = \sqrt{MC^2/2m - 1/4}$ 。而当 $\tilde{R} \rightarrow \infty$ 时, 由于这是重原子和二聚体的散射问题, $\chi(\tilde{R})$ 会具有形如 $(\tilde{R} - \tilde{a}_{ad})$ 的形式 (参考 (9) 式), $f(\tilde{R})$ 也可以写成 \tilde{R} 的一次函数的形式

$$f(\tilde{R}) = A + B\tilde{R}, \quad f^*(\tilde{R}) = A^* + B^*\tilde{R}. \quad (64)$$

将其代入 $\chi(\tilde{R})$ 的表达式我们就可以导出原子与二聚体散射长度 a_{ad} ($a_{ad} = a_s \tilde{a}_{ad}$, $\tilde{\Lambda} = a_s \Lambda$)

$$\chi(\tilde{R}) = (e^{i|s_0| \ln \tilde{\Lambda}} B + e^{-i|s_0| \ln \tilde{\Lambda}} B^*) \tilde{R} + (e^{i|s_0| \ln \tilde{\Lambda}} A + e^{-i|s_0| \ln \tilde{\Lambda}} A^*) \propto \tilde{R} - \tilde{a}_{ad}, \quad (65)$$

$$a_{ad} = a_s \tilde{a}_{ad} = -\frac{e^{i|s_0| \ln \tilde{\Lambda}} A + e^{-i|s_0| \ln \tilde{\Lambda}} A^*}{e^{i|s_0| \ln \tilde{\Lambda}} B + e^{-i|s_0| \ln \tilde{\Lambda}} B^*} a_s = (\xi + \zeta \tan(-|s_0| \ln(\Lambda a_s) + \delta)) a_s, \quad (66)$$

其中 ξ, ζ, δ 为实数。可以看到, 在 $a_s \rightarrow \infty$ 的过程中, a_{ad} 呈对数周期性发散。由第 2 节的结论可知, a_{ad} 的每一次发散都对应着一个原子与二聚体束缚态 (也就是三体束缚态) 的出现, 故 $a_s \rightarrow \infty$ 的过程中系统就产生了无穷多个三体束缚态。

这里计算的两个重原子和一个轻原子情形下原子与二聚体散射长度 a_{ad} 和两体散射长度 a_s 关系相对简单, 三个全同玻色子的推导要复杂很多, 不过也有类似结论 [9]

$$a_{ad} = (b_1 - b_0 \tan(s_0 \ln(a_s \kappa_*) + \beta)) a_s, \quad (67)$$

其中 b_0, b_1, β 是普适常数, κ_* 与短程相互作用细节有关。可以看出随着 $a_s \rightarrow \infty$, a_{ad} 也是对数周期性发散的, 散射共振时系统就有无穷多个三体束缚态。

4 泛函重整化群 (FRG) 简介

4.1 有效作用量

在介绍泛函重整化群之前我们需要定义有效作用量 [10]。我们只考虑玻色子情形。首先写出生成泛函 $Z[J, J^*]$ ($\hbar = 1$)

$$Z[J, J^*] = \int D\psi^* D\psi \exp \{-S[\psi^*, \psi] + S_J[\psi^*, \psi]\}, \quad (68)$$

其中 $S[\psi^*, \psi]$ 是作用量, $S_J[\psi^*, \psi]$ 是源和场的耦合, 它等于

$$S_J[\psi^*, \psi] = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} (\psi^*(\mathbf{q}, \tau) J(\mathbf{q}, \tau) + J^*(\mathbf{q}, \tau) \psi(\mathbf{q}, \tau)), \quad (69)$$

τ 是虚时。生成泛函 $Z[J, J^*]$ 对源的泛函导数就给出场的期望 (称为平均场或经典场)

$$\phi(\mathbf{q}, \tau) = \langle \psi(\mathbf{q}, \tau) \rangle = \frac{\delta \ln Z}{\delta J^*(\mathbf{q}, \tau)}, \quad \phi^*(\mathbf{q}, \tau) = \langle \psi^*(\mathbf{q}, \tau) \rangle = \frac{\delta \ln Z}{\delta J(\mathbf{q}, \tau)}. \quad (70)$$

定义 Schwinger 泛函 $W[J, J^*] = \ln Z[J, J^*]$, 不难得到它的泛函导数

$$\frac{\delta W[J, J^*]}{\delta J(\mathbf{q}, \tau)} = \langle \psi^*(\mathbf{q}, \tau) \rangle = \phi^*(\mathbf{q}, \tau), \quad \frac{\delta W[J, J^*]}{\delta J^*(\mathbf{q}, \tau)} = \langle \psi(\mathbf{q}, \tau) \rangle = \phi(\mathbf{q}, \tau), \quad (71)$$

$$\frac{\delta^2 W[J, J^*]}{\delta J^*(\mathbf{q}', \tau') \delta J(\mathbf{q}, \tau)} = \langle \psi(\mathbf{q}, \tau) \psi^*(\mathbf{q}', \tau') \rangle - \phi(\mathbf{q}, \tau) \phi(\mathbf{q}', \tau') = G(\mathbf{q}, \tau; \mathbf{q}', \tau'), \quad (72)$$

其中 $G(\mathbf{q}, \tau; \mathbf{q}', \tau')$ 是包含了相互作用的格林函数。对 $W[J, J^*]$ 进行勒让德变换, 我们就得到了有效作用量 $\Gamma[\phi^*, \phi]$ [10]

$$\Gamma[\phi^*, \phi] = -W[J, J^*] + \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} (\phi^*(\mathbf{q}, \tau) J(\mathbf{q}, \tau) + J^*(\mathbf{q}, \tau) \phi(\mathbf{q}, \tau)). \quad (73)$$

$\Gamma[\phi^*, \phi]$ 的一阶泛函导数给出源 J, J^*

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma[\phi^*, \phi]}{\delta \phi(\mathbf{q}, \tau)} &= - \int_0^\beta d\tau' \int d\mathbf{q}' \left\{ \frac{\delta J^*(\mathbf{q}', \tau')}{\delta \phi(\mathbf{q}, \tau)} \frac{\delta W[J, J^*]}{\delta J^*(\mathbf{q}', \tau')} + \frac{\delta J(\mathbf{q}', \tau')}{\delta \phi(\mathbf{q}, \tau)} \frac{\delta W[J, J^*]}{\delta J(\mathbf{q}', \tau')} \right\} \\ &\quad + \int_0^\beta d\tau' \int d\mathbf{q}' \left\{ \phi^*(\mathbf{q}, \tau) \frac{\delta J(\mathbf{q}', \tau')}{\delta \phi(\mathbf{q}, \tau)} + \frac{\delta J^*(\mathbf{q}', \tau')}{\delta \phi(\mathbf{q}, \tau)} \phi(\mathbf{q}, \tau) \right\} \\ &\quad + J^*(\mathbf{q}, \tau) = J^*(\mathbf{q}, \tau), \\ \frac{\delta \Gamma[\phi^*, \phi]}{\delta \phi^*(\mathbf{q}, \tau)} &= - \int_0^\beta d\tau' \int d\mathbf{q}' \left\{ \frac{\delta J^*(\mathbf{q}', \tau')}{\delta \phi^*(\mathbf{q}, \tau)} \frac{\delta W[J, J^*]}{\delta J^*(\mathbf{q}', \tau')} + \frac{\delta J(\mathbf{q}', \tau')}{\delta \phi^*(\mathbf{q}, \tau)} \frac{\delta W[J, J^*]}{\delta J(\mathbf{q}', \tau')} \right\} \\ &\quad + \int_0^\beta d\tau' \int d\mathbf{q}' \left\{ \phi(\mathbf{q}, \tau) \frac{\delta J^*(\mathbf{q}', \tau')}{\delta \phi^*(\mathbf{q}, \tau)} + \frac{\delta J(\mathbf{q}', \tau')}{\delta \phi^*(\mathbf{q}, \tau)} \phi^*(\mathbf{q}, \tau) \right\} \\ &\quad + J(\mathbf{q}, \tau) = J(\mathbf{q}, \tau). \end{aligned} \quad (74)$$

$\Gamma[\phi^*, \phi]$ 被称为有效作用量是因为它可以看作作用量的某种平均

$$\exp \{-\Gamma[\phi_0^*, \phi_0]\} = \int D\psi^* D\psi \exp \{-S[\psi^*, \psi]\}, \quad (75)$$

其中 ϕ_0^*, ϕ_0 是源为 0 时的经典场, 由下式决定

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_0^*, \phi_0]}{\delta \phi_0(\mathbf{q}, \tau)} = \frac{\delta \Gamma[\phi_0^*, \phi_0]}{\delta \phi_0^*(\mathbf{q}, \tau)} = 0. \quad (76)$$

我们还可以计算 $\Gamma[\phi^*, \phi]$ 的二阶泛函导数

$$\frac{\delta^2 \Gamma[\phi^*, \phi]}{\delta \phi^*(q, \tau) \delta \phi(q', \tau')} = \frac{\delta J^*(q', \tau')}{\delta \phi^*(q, \tau)} = \left(\frac{\delta \phi^*(q, \tau)}{\delta J^*(q', \tau')} \right)^{-1} = \left(\frac{\delta^2 W[J, J^*]}{\delta J^*(q', \tau') \delta J(q, \tau)} \right)^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma, \quad (77)$$

其中 G_0 是自由格林函数, Σ 是不可约自能函数。故 $\Gamma[\phi^*, \phi]$ 的二阶泛函导数是二阶不可约顶点。事实上更一般地可以证明 [11], $\Gamma[\phi^*, \phi]$ 的 $2n$ 阶泛函导数是 $2n$ 阶单粒子不可约顶点, 于是 $\Gamma[\phi^*, \phi]$ 就是单粒子不可约顶点的生成泛函。

4.2 规制函数

现在我们开始介绍泛函重整化群。泛函重整化群研究的是标度依赖的有效作用量 $\Gamma_k[\phi^*, \phi]$ 在标度变换下的流动, k 是标度参数。假设 Λ 是紫外截断, 在此标度下系统的作用量为 $S[\psi^*, \psi]$, 我们希望有效作用量 $\Gamma_k[\phi^*, \phi]$ 具有这样的性质: 在 $k = \Lambda$ 时, $\Gamma_k[\phi^*, \phi]$ 等于原始的作用量 (或称为微观作用量), $\Gamma_\Lambda = S$; 在 $0 < k < \Lambda$ 的范围内, $\Gamma_k[\phi^*, \phi]$ 在形如 (75) 式的求和中包含了 k 以上的模式, 抑制了 k 以下的模式; 在 $k = 0$ 时, $\Gamma_k[\phi^*, \phi]$ 包含全部的量子涨落, 回到有效作用量 Γ 。所以标度参数 k 从 Λ 到 0 的过程就是红外模式被逐渐打开的过程。

我们可以通过向作用量中添加一项标度依赖的 $\Delta S_k[\psi^*, \psi]$ 来实现上述要求

$$\Delta S_k[\psi^*, \psi] = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} \psi^*(\mathbf{q}, \tau) R_k(\mathbf{q}) \psi(\mathbf{q}, \tau), \quad (78)$$

其中 R_k 称为规制函数, 它具有如下特性 [12]: $k = 0$ 时, $R_0(\mathbf{q}) = 0$; 当 $0 < k < \Lambda$ 时, 对于 $|\mathbf{q}| > k$ 的那些模式, $R_k(\mathbf{q})$ 近似为零不起作用, 而对于 $|\mathbf{q}| < k$ 的那些模式, $R_k(\mathbf{q})$ 非零起抑制作用, 常见的选择是 $R_k(\mathbf{q} \rightarrow 0) \sim k^2$; 当 $k = \Lambda$ 时, $R_\Lambda(\mathbf{q}) \rightarrow \infty$ (或者一个很大的数如 Λ^2)。这样的 R_k 可以满足要求, 不过这依赖于 $\Gamma_k[\phi^*, \phi]$ 定义上的调整 (在勒让德变换的基础上再减去一项), 下面我们就来说明这一点。

标度依赖的 Schwinger 泛函为

$$\exp\{W_k[J, J^*]\} = \int D\psi^* D\psi \exp \left\{ -S[\psi^*, \psi] + S_J[\psi^*, \psi] - \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} \psi^*(\mathbf{q}, \tau) R_k(\mathbf{q}) \psi(\mathbf{q}, \tau) \right\}. \quad (79)$$

由于标度相关项不包含 J, J^* , 故 ϕ, ϕ^* 的定义与 (71) 式相同。现在定义标度依赖的有效作用量

$$\Gamma_k[\phi^*, \phi] = -W_k[J, J^*] + \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} (\phi^*(\mathbf{q}, \tau) J(\mathbf{q}, \tau) + J^*(\mathbf{q}, \tau) \phi(\mathbf{q}, \tau)) - \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} \phi^*(\mathbf{q}, \tau) R_k(\mathbf{q}) \phi(\mathbf{q}, \tau). \quad (80)$$

从这里已经可以看出 $k = 0$ 时所有推导与前文相同, 故 $\Gamma_0 = \Gamma$ 。现在对 $\Gamma_k[\phi^*, \phi]$ 求一阶泛函导数

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi(q, \tau)} &= - \int_0^\beta d\tau' \int d\mathbf{q}' \left\{ \frac{\delta J^*(q', \tau')}{\delta \phi(q, \tau)} \frac{\delta W_k[J, J^*]}{\delta J^*(q', \tau')} + \frac{\delta J(q', \tau')}{\delta \phi(q, \tau)} \frac{\delta W_k[J, J^*]}{\delta J(q', \tau')} \right\} \\ &\quad + \int_0^\beta d\tau' \int d\mathbf{q}' \left\{ \phi^*(q, \tau) \frac{\delta J(q', \tau')}{\delta \phi(q, \tau)} + \frac{\delta J^*(q', \tau')}{\delta \phi(q, \tau)} \phi(q, \tau) \right\} \\ &\quad + J^*(q, \tau) - \phi^*(q, \tau) R_k(q) = J^*(q, \tau) - \phi^*(q, \tau) R_k(q), \\ \frac{\delta \Gamma_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi^*(q, \tau)} &= - \int_0^\beta d\tau' \int d\mathbf{q}' \left\{ \frac{\delta J^*(q', \tau')}{\delta \phi^*(q, \tau)} \frac{\delta W[J, J^*]}{\delta J^*(q', \tau')} + \frac{\delta J(q', \tau')}{\delta \phi^*(q, \tau)} \frac{\delta W[J, J^*]}{\delta J(q', \tau')} \right\} \\ &\quad + \int_0^\beta d\tau' \int d\mathbf{q}' \left\{ \phi(q, \tau) \frac{\delta J^*(q', \tau')}{\delta \phi^*(q, \tau)} + \frac{\delta J(q', \tau')}{\delta \phi^*(q, \tau)} \phi^*(q, \tau) \right\} \\ &\quad + J(q, \tau) - R_k(q) \phi(q, \tau) = J(q, \tau) - R_k(q) \phi(q, \tau). \end{aligned} \quad (81)$$

于是我们得到源的表达式

$$J^*(\mathbf{q}, \tau) = \frac{\delta \Gamma_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi(\mathbf{q}, \tau)} + \phi^*(\mathbf{q}, \tau) R_k(\mathbf{q}), \quad J(\mathbf{q}, \tau) = \frac{\delta \Gamma_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi^*(\mathbf{q}, \tau)} + R_k(\mathbf{q}) \phi(\mathbf{q}, \tau). \quad (82)$$

将源的表达式代入 $\Gamma_k[\phi^*, \phi]$ 便可以得到

$$\begin{aligned} \exp\{-\Gamma_k[\phi^*, \phi]\} &= \int D\psi^* D\psi \exp\left\{-S[\psi^*, \psi] + S_J[\psi^*, \psi] - \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} \psi^*(\mathbf{q}, \tau) R_k(\mathbf{q}) \psi(\mathbf{q}, \tau)\right\} \\ &\cdot \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} (\phi^*(\mathbf{q}, \tau) J(\mathbf{q}, \tau) + J^*(\mathbf{q}, \tau) \phi(\mathbf{q}, \tau)) + \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} \phi^*(\mathbf{q}, \tau) R_k(\mathbf{q}) \phi(\mathbf{q}, \tau)\right\} \\ &= \int D\psi^* D\psi \exp\left\{-S[\psi^*, \psi] + S_J[\psi^*, \psi] - \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} \psi^*(\mathbf{q}, \tau) R_k(\mathbf{q}) \psi(\mathbf{q}, \tau)\right\} \\ &\cdot \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} \left[\phi^*(\mathbf{q}, \tau) \frac{\delta \Gamma_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi^*(\mathbf{q}, \tau)} + \frac{\delta \Gamma_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi(\mathbf{q}, \tau)} \phi(\mathbf{q}, \tau) + \phi^*(\mathbf{q}, \tau) R_k(\mathbf{q}) \phi(\mathbf{q}, \tau)\right]\right\} \\ &= \int D\psi^* D\psi \exp\left\{-S[\psi^*, \psi] - \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} [\psi^*(\mathbf{q}, \tau) - \phi^*(\mathbf{q}, \tau)] R_k(\mathbf{q}) [\psi(\mathbf{q}, \tau) - \phi(\mathbf{q}, \tau)]\right\} \\ &\cdot \exp\left\{\int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} \left[(\psi^*(\mathbf{q}, \tau) - \phi^*(\mathbf{q}, \tau)) \frac{\delta \Gamma_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi^*(\mathbf{q}, \tau)} + (\psi(\mathbf{q}, \tau) - \phi(\mathbf{q}, \tau)) \frac{\delta \Gamma_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi(\mathbf{q}, \tau)}\right]\right\}. \end{aligned} \quad (83)$$

由于 $k = \Lambda$ 时 $R_\Lambda(\mathbf{q}) \rightarrow \infty$, 故此时 [12]

$$\exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} [\psi^*(\mathbf{q}, \tau) - \phi^*(\mathbf{q}, \tau)] R_\Lambda(\mathbf{q}) [\psi(\mathbf{q}, \tau) - \phi(\mathbf{q}, \tau)]\right\} \sim \delta(\psi - \phi) \delta(\psi^* - \phi^*). \quad (84)$$

可以从离散的角度来理解, 上式左侧是不同格点变量高斯函数的乘积, 当高斯函数无限尖锐时, 它就接近 δ 函数。从而我们有

$$\exp\{-\Gamma_\Lambda[\phi^*, \phi]\} = \exp\{-S[\phi^*, \phi]\}, \quad \Gamma_\Lambda = S. \quad (85)$$

对于 $0 < k < \Lambda$ 的情况我们也有类似讨论: $|\mathbf{q}| < k$ 对应的格点的高斯函数较为尖锐, 抑制较强, 而 $|\mathbf{q}| > k$ 对应的格点的高斯函数较为平坦, 抑制较弱。

综合以上我们可以发现, 这样引入的 $R_k(\mathbf{q})$ 确实能满足我们对 $\Gamma_k[\phi^*, \phi]$ 的要求。不过也可以看到, FRG 中的标度参数 k 并不具有很明确的标度的含义, 因为相比于以往的微扰重整化群中对模式的刚性截断, 规制函数 $R_k(\mathbf{q})$ 带来的截断是一种柔性截断, 并且只要 $R_k(\mathbf{q})$ 满足前述的三条要求, 它的选择是自由的。如果我们只需要 $k = 0$ 时的物理, 这一特点并不是什么问题, 我们只选取数值计算中精度比较高的 $R_k(\mathbf{q})$ 即可。但是有时我们希望研究的是 k 从紫外到红外的整个重整化的过程, 比如接下来将要关注的 Efimov 效应, 这种情况下我们就需要选择特定的 $R_k(\mathbf{q})$ 使得 k 具有较为明确的标度含义。一种可能是, 根据自由传播子的形式来设计 $R_k(\mathbf{q})$ 。比如, 如果自由传播子倒数的动量依赖为 $G_0^{-1} \sim q^2$, 那么我们可以选取 Litim 规制函数 [13]

$$R_k(\mathbf{q}) = (k^2 - q^2) \theta(k^2 - q^2). \quad (86)$$

显然当 $|\mathbf{q}| > k$ 时, $R_k(\mathbf{q})$ 没有作用; 而当 $|\mathbf{q}| < k$ 时, 标度依赖的 Schwinger 泛函 (79) 中 “自由传播子” 倒数的动量依赖将从 q^2 变为 $q^2 + k^2 - q^2 = k^2$, 也即频率在 k 以下的自由传播子不会被包含在内。我们下面将会证明 $\Gamma_k[\phi^*, \phi]$ 所满足的重整化流方程与 $W_k[J, J^*]$ 生成的 G_k 有关, 所以如果 $R_k(\mathbf{q})$ 选为 Litim 规制函数, 或许可以认为此时的 $\Gamma_k[\phi^*, \phi]$ 没有包含频率 k 以下的红外模式, 于是 k 有相对明确的标度含义。另一种可能, 我们选取那些导数 $\partial_k R_k(\mathbf{q})$ 在 $k = \mathbf{q}$ 附近非常尖锐的 $R_k(\mathbf{q})$, 此时从重整化流方程可以看出 $\partial_k \Gamma_k[\phi^*, \phi]$ 近似只依赖于 $|\mathbf{q}| \sim k$ 的那些模式。而 $\Gamma_\Lambda[\phi^*, \phi]$ 只包含系统在 Λ 尺度上的信息, 故随着标度从 Λ 到 k , $\Gamma_k[\phi^*, \phi]$ 只积累了 k 以上的高频信息。不过其实也可以选取一些特殊的 $R_k(\mathbf{q})$ 来达到一种更直接的刚性截断的效果, 在下文 Efimov 效应的计算中我们将会用到这样的 $R_k(\mathbf{q})$ [14]。

4.3 重整化流: Wetterich 方程

现在我们来推导有效作用量 $\Gamma_k[\phi^*, \phi]$ 所满足的重整化流方程: Wetterich 方程 [15]。定义 $\tilde{\Gamma}_k[\phi^*, \phi]$

$$\tilde{\Gamma}_k[\phi^*, \phi] = \Gamma_k[\phi^*, \phi] + \Delta S_k[\phi^*, \phi] = -W_k[J, J^*] + \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} (\phi^*(\mathbf{q}, \tau) J(\mathbf{q}, \tau) + J^*(\mathbf{q}, \tau) \phi(\mathbf{q}, \tau)). \quad (87)$$

显然它就是 $W_k[J, J^*]$ 的勒让德变换。 $\tilde{\Gamma}_k[\phi^*, \phi]$ 对 k 求导得到 (以 ϕ, ϕ^* 为宗量, J, J^* 由 (82) 式给出, 与 k 有关)

$$\begin{aligned} \partial_k \tilde{\Gamma}_k[\phi^*, \phi] &= -\frac{\partial W_k}{\partial k}[J, J^*] - \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} \frac{\delta W_k[J, J^*]}{\delta J(\mathbf{q}, \tau)} \frac{\partial J(\mathbf{q}, \tau)}{\partial k} - \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} \frac{\delta W_k[J, J^*]}{\delta J^*(\mathbf{q}, \tau)} \frac{\partial J^*(\mathbf{q}, \tau)}{\partial k} \\ &\quad + \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} (\phi^*(\mathbf{q}, \tau) \frac{\partial J(\mathbf{q}, \tau)}{\partial k} + \frac{\partial J^*(\mathbf{q}, \tau)}{\partial k} \phi(\mathbf{q}, \tau)) \\ &= -\frac{\partial W_k}{\partial k}[J, J^*] = \langle \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} \psi^*(\mathbf{q}, \tau) \partial_k R_k(\mathbf{q}) \psi(\mathbf{q}, \tau) \rangle \\ &= \int_0^\beta d\tau d\tau' \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \partial_k R_k(\mathbf{q}) \delta(\tau - \tau') \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \langle \psi(\mathbf{q}, \tau) \psi^*(\mathbf{q}', \tau') \rangle \\ &= \int_0^\beta d\tau d\tau' \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \partial_k R_k(\mathbf{q}) \delta(\tau - \tau') \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') (G_k(\mathbf{q}, \tau; \mathbf{q}', \tau') + \phi(\mathbf{q}, \tau) \phi^*(\mathbf{q}', \tau')) \\ &= \int_0^\beta d\tau d\tau' \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \partial_k R_k(\mathbf{q}) \delta(\tau - \tau') \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') G_k(\mathbf{q}, \tau; \mathbf{q}', \tau') \\ &\quad + \partial_k \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} \phi^*(\mathbf{q}, \tau) \partial_k R_k(\mathbf{q}) \phi(\mathbf{q}, \tau) \\ &= \int_0^\beta d\tau d\tau' \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \partial_k R_k(\mathbf{q}) \delta(\tau - \tau') \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') G_k(\mathbf{q}, \tau; \mathbf{q}', \tau') + \partial_k \Delta S_k[\phi^*, \phi], \end{aligned} \quad (88)$$

于是 $\Gamma_k[\phi^*, \phi]$ 对 k 的导数为

$$\partial_k \Gamma_k[\phi^*, \phi] = \int_0^\beta d\tau d\tau' \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \partial_k R_k(\mathbf{q}) \delta(\tau - \tau') \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') G_k(\mathbf{q}, \tau; \mathbf{q}', \tau'). \quad (89)$$

由于 $\tilde{\Gamma}_k[\phi^*, \phi]$ 是 $W_k[J, J^*]$ 的勒让德变换, 故类似于 (77) 式我们有

$$\frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi^*(\mathbf{q}, \tau) \delta \phi(\mathbf{q}', \tau')} = \left(\frac{\delta^2 W_k[J, J^*]}{\delta J^*(\mathbf{q}', \tau') \delta J(\mathbf{q}, \tau)} \right)^{-1} = G_k^{-1}, \quad (90)$$

从而 $\Gamma_k[\phi^*, \phi]$ 的二阶泛函导数为

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi^*(\mathbf{q}, \tau) \delta \phi(\mathbf{q}', \tau')} = \frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi^*(\mathbf{q}, \tau) \delta \phi(\mathbf{q}', \tau')} - \frac{\delta^2 \Delta S_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi^*(\mathbf{q}, \tau) \delta \phi(\mathbf{q}', \tau')} = G_k^{-1} - R_k(\mathbf{q}) \delta(\tau - \tau') \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (91)$$

引入如下简化记号

$$\Gamma^{(2)}[\phi^*, \phi] = \frac{\delta^2 \Gamma_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi^*(\mathbf{q}, \tau) \delta \phi(\mathbf{q}', \tau')}, \quad R_k = R_k(\mathbf{q}) \delta(\tau - \tau') \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \quad (92)$$

$\Gamma_k[\phi^*, \phi]$ 的流方程便可以写为

$$\partial_k \Gamma_k[\phi^*, \phi] = \int_0^\beta d\tau d\tau' \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \partial_k R_k(\Gamma_k^{(2)}[\phi^*, \phi] + R_k)^{-1}. \quad (93)$$

注意到这个流方程和 Wetterich 方程 [15] 的积分表达式差一个 1/2 的系数, 这是因为我们这里处理的是复标量场, 实际上对应两个实标量场。如果对场和源做如下变换

$$\psi = \frac{\psi_1 + i\psi_2}{\sqrt{2}}, \quad \psi^* = \frac{\psi_1 - i\psi_2}{\sqrt{2}}, \quad J = \frac{J_1 + iJ_2}{\sqrt{2}}, \quad J^* = \frac{J_1 - iJ_2}{\sqrt{2}}, \quad (94)$$

那么耦合作用量变为

$$S_{J_1 J_2}[\psi_1, \psi_2] = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} (\psi_1(\mathbf{q}, \tau) J_1(\mathbf{q}, \tau) + J_2(\mathbf{q}, \tau) \psi_2(\mathbf{q}, \tau)), \quad (95)$$

由此我们可以得出

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\delta W[J_1, J_2]}{\delta J^*(\mathbf{q}, \tau)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\delta W[J_1, J_2]}{\delta J_1(\mathbf{q}, \tau)} + \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\delta W[J_1, J_2]}{\delta J_2(\mathbf{q}, \tau)} = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}, \\ \phi^* &= \frac{\delta W[J_1, J_2]}{\delta J(\mathbf{q}, \tau)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\delta W[J_1, J_2]}{\delta J_1(\mathbf{q}, \tau)} - \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\delta W[J_1, J_2]}{\delta J_2(\mathbf{q}, \tau)} = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (96)$$

于是此时

$$\Delta S_k[\psi^*, \psi] = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} \psi^*(\mathbf{q}, \tau) R_k(\mathbf{q}) \psi(\mathbf{q}, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} R_k(\mathbf{q}) (\psi_1^2(\mathbf{q}, \tau) + \psi_1^2(\mathbf{q}, \tau)), \quad (97)$$

$$\Delta S_k[\phi^*, \phi] = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} \phi^*(\mathbf{q}, \tau) R_k(\mathbf{q}) \phi(\mathbf{q}, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{q} R_k(\mathbf{q}) (\phi_1^2(\mathbf{q}, \tau) + \phi_1^2(\mathbf{q}, \tau)). \quad (98)$$

相比于 [15], 现在我们有二个贡献相同的场。由于

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi^* \delta \phi} = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \Gamma_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \Gamma_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi_2^2} = \frac{\delta^2 \Gamma_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi_1^2} = \frac{\delta^2 \Gamma_k[\phi^*, \phi]}{\delta \phi_2^2}, \quad (99)$$

所以 (93) 式得到的有效作用量的重整化流多出的系数 2 正是来源于场的个数。不过 [15] 中引入的求迹运算除了代表积分外还包含了对不同场的求和, 故因子 2 可以被吸收到求迹运算中。最终我们得到

$$\partial_k \Gamma_k[\phi^*, \phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \partial_k R_k(\Gamma_k^{(2)}[\phi^*, \phi] + R_k)^{-1} \right\} = \frac{1}{2} \text{Tr} \tilde{\partial}_k \ln \left\{ \Gamma_k^{(2)}[\phi^*, \phi] + R_k \right\}, \quad (100)$$

其中 $\tilde{\partial}_k$ 表示只对 $R_k(\mathbf{q})$ 求导。这就是 Wetterich 方程, 对它求泛函导数我们便得到各阶顶点的重整化流方程。注意到它是一个单圈方程, 这意味着 $2n$ 阶顶点的重整化流中不会包含 $2n+2$ 阶以上顶点的贡献 [16]。通常会引入泛函时间 $t = \ln(k/\Lambda)$, 所以 $\partial_t = k \partial_k$, 此时 Wetterich 方程可以写为

$$\partial_t \Gamma_k[\phi^*, \phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \tilde{\partial}_t \ln \left\{ \Gamma_k^{(2)}[\phi^*, \phi] + R_k \right\}. \quad (101)$$

5 FRG 视角下的 Efimov 效应

5.1 顶点展开

现在我们就在 FRG 的框架下计算 Efimov 效应。 $k = \Lambda$ 时的微观理论是具有两体相互作用的玻色场, 作用量写为

$$S = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \left\{ \psi^* (\partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2M_\psi} - \mu) \psi + \frac{1}{2} \lambda_\psi (\psi^* \psi)^2 \right\}, \quad (102)$$

其中 λ_ψ 是 s 波散射的耦合常数。为讨论方便, 我们令 $2M_\psi = 1$ 。利用 Hubbard-Stratonovich 变换将作用量改写为

$$S = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \left\{ \psi^* (\partial_\tau - \nabla^2 - \mu) \psi - h(\phi^* \psi \psi + \psi^* \psi^* \phi) + \phi^* m_\phi^2 \phi \right\}, \quad (103)$$

其中 ϕ 可以理解为二聚体场, Yukawa 型耦合常数 h 描述两个原子形成两体束缚态以及两体束缚态分解为两个原子的过程。下面我们将通过 Wetterich 方程 (100) 导出原子-二聚体顶点随标度变换的行为。不过其实是否进行 Hubbard-Stratonovich 变换我们都可以进行 FRG 计算, 只有一个波色场的时候我们关

注三个玻色子散射顶点 [17]。但有结论表明 [18] 在这个问题中，引入辅助场后可以减少需要计算的高阶顶点的图，所以下文中我们都是在有辅助场的情况下讨论。

写出有效作用量的顶点展开 [14]

$$\Gamma_k(2) = \int_Q \psi^*(Q) (i\omega_q + \mathbf{q}^2 - \mu_\psi) \psi(Q) + \int_Q \varphi^*(Q) P_\varphi(Q) \varphi(Q), \quad (104)$$

$$\Gamma_k(3) = \frac{h}{2} \int_{Q_1, Q_2, Q_3} [\varphi^*(Q_1) \psi(Q_2) \psi(Q_3) + \varphi(Q_1) \psi^*(Q_2) \psi^*(Q_3)] \delta(Q_1 - Q_2 - Q_3), \quad (105)$$

$$\Gamma_k(4) = - \int_{Q_1, \dots, Q_4} \lambda_3(Q_1, Q_2, Q_3) \varphi(Q_1) \psi(Q_2) \varphi^*(Q_3) \psi^*(Q_4) \delta(Q_1 + Q_2 - Q_3 - Q_4), \quad (106)$$

其中 $\lambda_3(Q_1, Q_2, Q_3)$ 就是标度依赖的原子-二聚体顶点， P_ϕ 是标度依赖的二聚体传播子倒数。注意到我们没有将原子传播子倒数 P_ψ 和耦合常数 h 写为标度依赖的形式，这其实是真空极限 [16, 19, 14] 下的结论。真空极限指的是让系统的密度与温度趋于零，同时保证温度始终在出现多体效应（如 BEC）的临界温度以上，这样系统将保持 $U(1)$ 对称性。对于这里非相对论的情形，形如 $\exp\{iEt\}$ 的相因子将允许我们平移能量零点。而分析表明 [16, 14]，对 P_ψ 和 h 的重整化流有贡献的单圈图中构成圈的传播子均沿着同一个方向，这意味着平移能量零点后，圈频率积分的极点可以全部移到复平面的唯一一个半平面上，于是圈积分为零， P_ψ 和 h 在重整化过程中不会受到影响，与微观理论的取值相同。

值得一提的是，利用类似的判据，Flörcinger 一开始认为，在真空极限、非相对论情形下，低阶顶点的重整化流不会包含高阶顶点，并且将这个结论写进了博士论文 [19]。如果低阶顶点的重整化流之和更低阶顶点有关，那么我们就可以先解出低阶的顶点，再将其代入高阶顶点的重整化流，一级一级解上去。但后来他发现并不是这样， $2n(n \geq 3)$ 阶以上顶点的重整化流方程一般来说都会包含更高阶顶点 [20]。所以低阶顶点的方程并不是闭合的，如果不取近似，先解低阶顶点再解高阶顶点的想法其实没法实现。不过对于这里引入辅助场的情形，我们其实是可以先解出 $P_\phi(Q)$ 再解出 $\lambda_3(Q_1, Q_2, Q_3)$ 的。事实上对 $P_\phi(Q)$ 重整化流有贡献的单圈图只有一个，如图 6 所示。

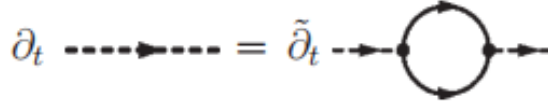


图 6: $P_\phi(Q)$ 的重整化流的图表示 [14]. 实线代表原子传播子，虚线代表二聚体传播子。

可以发现，它只与原子的规制函数有关。此外，有分析表明 [18]，如果我们先积掉原子的规制函数，那么在 $\lambda_3(Q_1, Q_2, Q_3)$ 的重整化流中将不包含更高阶顶点的贡献。所以我们接下来就先求解 $P_\phi(Q)$ ，然后再将它代入 $\lambda_3(Q_1, Q_2, Q_3)$ 的方程中解出 $\lambda_3(Q_1, Q_2, Q_3)$ 。

5.2 重整化流

现在我们来求解 $P_\phi(Q)$ 。写出 $P_\phi(Q)$ 满足的重整化流方程 [14]

$$\partial_t P_\phi(Q) = -\frac{1}{2} \int_L \tilde{\partial}_t \frac{h^2}{(P_\psi(L) + R_\psi(L)) (P_\psi(Q - L) + R_\psi(Q - L))}. \quad (107)$$

注意到关于 $P_\phi(Q)$ 我们只关心它在 $k = 0$ 时的取值，我们可以选择较为方便的原子规制函数 $R_\psi(\mathbf{q}, k) = k^2$ 。可以看到它没有动量依赖，和之前我们对规制函数的一般要求不符，但这并不影响 $k = 0$ 时的结果。

积掉圈频率, (107) 可以化为 [14]

$$\begin{aligned}\partial_t P_\phi(Q) &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \tilde{\partial}_t \frac{h^2}{i\omega_{\mathbf{q}} + l^2 + (1 - \mathbf{q})^2 - 2\mu_\psi + 2R_\psi} \\ &= -\frac{h^2}{2} \partial_t \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{i\omega_{\mathbf{q}} + l^2 + (1 - \mathbf{q})^2 - 2\mu_\psi + 2R_\psi}.\end{aligned}\quad (108)$$

其中 $\tilde{\partial}_t$ 可以改为 ∂_t 是因为原子的传播子倒数 $P_\psi(Q)$ 在重整化过程中不变。对 (108) 式积分我们便可以得到 [14]

$$\begin{aligned}P_\phi^{\text{IR}}(Q) - P_\phi^{\text{UV}}(Q) &= -\frac{h^2}{2} \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{i\omega_{\mathbf{q}} + l^2 + (1 - \mathbf{q})^2 - 2\mu_\psi} - \frac{1}{i\omega_{\mathbf{q}} + l^2 + (1 - \mathbf{q})^2 - 2\mu_\psi + 2\Lambda^2} \right) \\ &= -\frac{h^2}{4} \int \frac{dl}{2\pi^2} \left(\frac{l^2}{l^2 + \left(\frac{i\omega_{\mathbf{q}}}{2} + \frac{\mathbf{q}^2}{4} - \mu_\psi\right)} - \frac{l^2}{l^2 + \left(\frac{i\omega_{\mathbf{q}}}{2} + \frac{\mathbf{q}^2}{4} - \mu_\psi + \Lambda^2\right)} \right) \\ &= -\frac{h^2}{16\pi} \left(\Lambda - \sqrt{\frac{i\omega_{\mathbf{q}}}{2} + \frac{\mathbf{q}^2}{4} - \mu_\psi} \right).\end{aligned}\quad (109)$$

可以发现结果与紫外截断 Λ 有关, 它应当来源于 $P_\phi^{\text{UV}}(Q)$ 。假设 $P_\phi^{\text{UV}}(Q)$ 可以写为 [21]

$$P_\phi^{\text{UV}}(Q) = \delta\nu + \nu(a), \quad (110)$$

其中 $\delta\nu$ 为与紫外 Λ 截断相关的项, $\nu(a_s)$ 为截断无关项, a_s 为散射长度。由 (109) 式可知 $\delta\nu$ 等于

$$\delta\nu = \frac{h^2}{16\pi} \Lambda. \quad (111)$$

此时 $P_\phi^{\text{IR}}(Q)$ 可以写为

$$P_\phi^{\text{IR}}(Q) = \nu(a) + \frac{h^2}{16\pi} \sqrt{\frac{i\omega_{\mathbf{q}}}{2} + \frac{\mathbf{q}^2}{4} - \mu_\psi}. \quad (112)$$

由于 $1/P_\phi^{\text{IR}}(Q)$ 是二聚体的传播子, 它在散射共振附近将正比于两原子散射的 T 矩阵 (从而正比于散射长度 a_s), 于是我们有 [21] (化学势取为零是因为散射共振时原子和二聚体具有相同的能量)

$$-a_s = \frac{1}{16\pi} \frac{h^2}{P_\phi^{\text{IR}}(0, 0, \mu_\phi = 0)}, \quad \nu(a_s) = -\frac{h^2}{16\pi}. \quad (113)$$

由此最终解得 $P_\phi(Q)$ 的表达式

$$P_\phi(Q) = P_\phi^{\text{IR}}(Q) = \frac{h^2}{16\pi} \left(-a^{-1} + \sqrt{\frac{i\omega_{\mathbf{q}}}{2} + \frac{\mathbf{q}^2}{4} - \mu_\psi} \right). \quad (114)$$

现在我们来求解原子-二聚体顶点 $\lambda_3(Q_1, Q_2, Q_3)$ 。方便起见我们在质心系中讨论, 将 $\lambda_3(Q_1, Q_2, Q_3)$ 写为 $\lambda_3(Q_1^\psi, Q_2^\psi; E)$, 其中 Q_1^ψ, Q_2^ψ 为散射前后原子动量, E 为总能量。我们选取二聚体规制函数为 [14]

$$R_\phi(\mathbf{q}, k) = P_\phi(Q) \left(\frac{1}{\theta(|\mathbf{q}| - k)} - 1 \right). \quad (115)$$

这个选择看起来非常特别, 当 $|\mathbf{q}| > k$ 时, $R_\phi(\mathbf{q}, k) = 0$, 不起作用; 当 $|\mathbf{q}| < k$ 时, $R_\phi(\mathbf{q}, k) \rightarrow \infty$, 完全抑制了红外模式的涨落。显然在这一选择下, k 有明确的标度含义。事实上 (115) 式意味着

$$\frac{1}{P_\phi(Q) + R_\phi(\mathbf{q}, k)} = \theta(|\mathbf{q}| - k) \frac{1}{P_\phi(Q)}, \quad (116)$$

故只有 k 以上的高频模式才会起作用。

选定规制函数后, 我们写出原子-二聚体顶点 $\lambda_3(Q_1^\psi, Q_2^\psi; E)$ 的重整化流方程 [14]

$$\begin{aligned} \partial_t \lambda_3(Q_1^\psi, Q_2^\psi; E) = \int_L \frac{\partial_t \theta(|L| - k)}{P_\psi(L) P_\phi(-L + Q)} & \left[\lambda_3(Q_1^\psi, L; E) \lambda_3(L, Q_2^\psi; E) + \frac{h^2}{P_\psi(-L + Q_1^\phi)} \lambda_3(L, Q_2^\psi; E) \right. \\ & \left. + \lambda_3(Q_1^\psi, L; E) \frac{h^2}{P_\psi(-L + Q_2^\phi)} + \frac{h^2}{P_\psi(-L + Q_1^\phi)} \frac{h^2}{P_\psi(-L + Q_2^\phi)} \right]. \end{aligned} \quad (117)$$

其中 $Q = Q_1^\phi + Q_2^\phi = (E, \mathbf{0})$, 对应的图表示如图 7 所示。

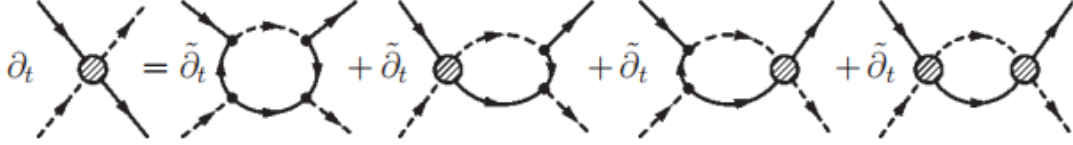


图 7: (117) 式的图表示 [14]. 实心点代表 Yukawa 耦合, 阴影圆代表原子-二聚体顶点。

这个微分-积分方程较为复杂, 不过它可以得到简化。首先, 由于出现在积分中的各传播子倒数中只有一个 $P_\psi(L)$ 的圈动量为正号, 所以对于频率积分, 被积函数在上半平面只有一个极点, 故可以先积掉频率; 然后由于我们关注 s 波散射 [16], 故引入顶点的角度平均 [14]

$$\lambda_3(q_1, q_2, E) \equiv \frac{1}{2h^2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \lambda_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; E), \quad \cos(\theta) = \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{|\mathbf{q}_1| |\mathbf{q}_2|}. \quad (118)$$

此外, 我们只考虑散射共振时的情形, $a_s^{-1} = 0$ 。有这些简化后, 将虚时变回实时, 我们得到 [14]

$$\begin{aligned} \partial_t \lambda_3(q_1, q_2, E) = -\frac{8}{\pi} \frac{k^3}{\sqrt{\frac{3k^2}{4} - \frac{E}{2} - i\epsilon}} & [\lambda_3(q_1, k, E) \lambda_3(k, q_2, E) + \lambda_3(q_1, k, E) G(k, q_2) \\ & + G(q_1, k) \lambda_3(k, q_2, E) + G(q_1, k) G(k, q_2)], \end{aligned} \quad (119)$$

其中 $G(q_1, q_2)$ 定义为

$$G(q_1, q_2) = \frac{1}{4q_1 q_2} \log \frac{q_1^2 + q_2^2 + q_1 q_2 - \frac{E}{2} - i\epsilon}{q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2 - \frac{E}{2} - i\epsilon}. \quad (120)$$

5.3 三体束缚态的产生

现在我们关注 $\lambda_3(q_1, q_2, 0)$ 的行为, 它正比于原子与二聚体的散射 T 矩阵 [9, 14], 它的发散就对应着零能束缚态的出现。定义如下无量纲函数 [14]

$$f_t(t_1, t_2) = 16q_1 q_2 \lambda_3(q_1, q_2, 0), \quad g(t_1, t_2) = 16q_1 q_2 G(q_1, q_2), \quad (121)$$

其中 $t_1 \ln(q_1/\Lambda), t_2 = \ln(q_2/\Lambda)$ 。此时流方程可以写为

$$\begin{aligned} \partial_t f_t(t_1, t_2) &= -\frac{1}{\sqrt{3}\pi} [g(t_1, t) g(t, t_2) + f_t(t_1, t) g(t, t_2) + g(t_1, t) f_t(t, t_2) + f_t(t_1, t) f_t(t, t_2)] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}\pi} (f_t(t_1, t) + g(t_1, t))(f_t(t, t_2) + g(t, t_2)). \end{aligned} \quad (122)$$

由于系统在 $k = \Lambda$ 时 $\lambda_3(q_1, q_2, E) = 0$, 故 f 的初始条件为 $f_{t=0}(t_1, t_2) = 0$ 。我们可以进一步定义

$$\bar{f}_t(t_1, t_2) = f_t(t_1, t_2) + g(t_1, t_2) \quad \bar{f}_{t=0}(t_1, t_2) = g(t_1, t_2). \quad (123)$$

注意到 $g(t_1, t_2)$ 不含 t , 故待解的流方程可以进一步化为如下形式

$$\partial_t \bar{f}_t(t_1, t_2) = -\frac{1}{\sqrt{3}\pi} \bar{f}_t(t_1, t) \bar{f}_t(t, t_2), \quad \bar{f}_{t=0}(t_1, t_2) = g(t_1, t_2). \quad (124)$$

接下来我们定义 $A_t(t_1, t_2) = \delta(t - t_1) \delta(t - t_2)$, 上式可以改写成矩阵乘积的形式

$$\partial_t \bar{f}_t = -\frac{1}{\sqrt{3}\pi} \bar{f}_t \cdot A_t \cdot \bar{f}_t, \quad \bar{f}_{t=0} = g, \quad (125)$$

其中矩阵乘法是对相邻指标的积分。由于

$$\partial_t \bar{f}_t \cdot \bar{f}_t^{-1} + \bar{f}_t \cdot \partial_t \bar{f}_t^{-1} = \partial_t (\bar{f}_t \cdot \bar{f}_t^{-1}) = \partial_t 1 = 0. \quad (126)$$

于是可以写出 \bar{f}_t^{-1} 满足的流方程

$$\partial_t \bar{f}_t^{-1} = -\bar{f}_t^{-1} \cdot \partial_t \bar{f}_t \cdot \bar{f}_t^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} A_t, \quad \bar{f}_{t=0}^{-1} = g^{-1}, \quad (127)$$

显然 \bar{f}_t^{-1} 满足的方程可以直接积分求解。最终我们得到 [14]

$$\bar{f}_t = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \int_0^t ds g \cdot A_s \right)^{-1} \cdot g, \quad (128)$$

从 (128) 式我们就可以数值计算 $\lambda_3(q_1, q_2, 0)$ 。它的结果如图 8 所示。

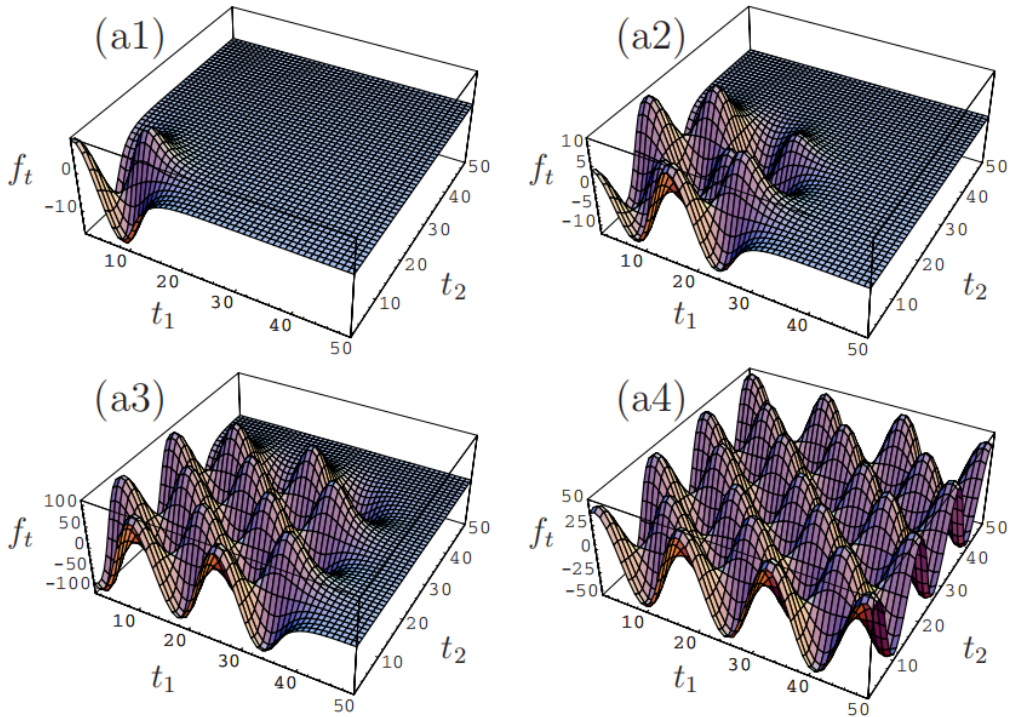


图 8: (128) 式在 50×50 格点上的数值解 [14]

可以看到, 随着“RG 时间” t 的推移, f_t 在 t_1-t_2 平面上逐渐建立起周期行为, f_t 在参数点 (t_1, t_2) 上开始

振荡的时间大致为 $t \sim O(t_1, t_2)$ 。这应该是由所选规制函数 (115) 式的特殊性导致的。正如在论证 $\Gamma_\Lambda = S$ 时所说的那样，二聚体的规制函数 (115) 式在整个重整化过程中都是完全抑制了 k 以下的涨落，所以当 $|t_1| > t, |t_2| > t$ 时， $f_t(t_1, t_2)$ 对应的原子-二聚体顶点应当为微观作用量的原子-二聚体顶点（等于零）。有了这些考虑，我们关注紫外点的行为。紫外点 $f_t(0, 0)$ 的重整化流如图 9 所示。从图 9 中可以看到， f_t 出

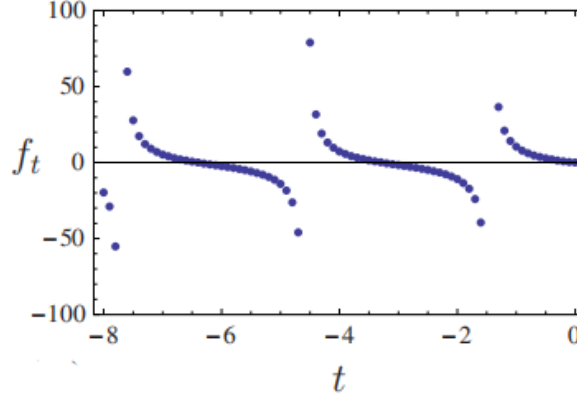


图 9: 紫外点 $f_t(0, 0)$ 的重整化流 [14]

现了关于 t 的周期性，周期为 3.1。于是 $s_0 = \pi/3.1 \approx 1.0$ ，与“精确值” $s_0 = 1.00624$ 较为接近。所以我们就在 FRG 的框架下得到了 Efimov 效应。与前文中原子-二聚体散射长度随两体散射长度发散至无穷而对数周期发散的情况不同，这里我们并没有调节相互作用（两体散射长度），而只是不停地将红外模式包含进有效作用量里，Efimov 束缚态就在这一重整化的过程中源源不断地出现了。

6 总结

本文讨论介绍了泛函重整化群（FRG）视角下的 Efimov 效应。首先在第 2 节中我们回顾了两体散射中的一些结论，介绍了 Bethe-Peierls 边界调节，指出散射长度或 T 矩阵的发散总是伴随束缚态的产生；然后第 3 节我们按照 Efimov 的原始思路，通过解三体薛定谔方程的形式导出了 Efimov 效应，也即两体散射共振时三个全同玻色子在零能附近会形成无穷多个能量呈等比数列的三体束缚态，能量比值为普适常数。我们还在一个轻原子、两个重原子的特殊情形下求解了原子-二聚体散射长度与两体散射长度的关系，当调节两体相互作用至共振（两体散射长度 a_s 趋于无穷），原子-二聚体散射长度会经历无穷多次发散，它们就对应着无穷多三体束缚态的产生；第 4 节我们简要介绍了 FRG，介绍了有效作用量 Γ_k 以及标度依赖的有效作用量 Γ_k ，并推导了 Γ_k 所满足的重整化流方程也即 Wetterich 方程。顶点的重整化流方程可以通过对 Wetterich 方程求泛函导数来导出；最后一节我们在 FRG 的框架下研究了 Efimov 效应，通过一些近似我们得到了原子-二聚体顶点的满足对数周期发散的重整化流。从中导出的 Efimov 参数 s_0 与通过第 3 节中得到的 s_0 很接近。于是我们就在 FRG 的框架下得到了 Efimov 效应。

尽管 FRG 的具体计算较为复杂，但或许我们可以用一种较为直观的方式来理解计算结果。在已知 Efimov 效应的情况下，假如将三个原子置于一个有限大的容器中，容器尺寸自然就提供了一个红外截断。零能附近的 Efimov 态具有很大的尺寸，故有效大尺寸的容器只能容纳有限多个 Efimov 态，而当容器尺寸趋于无穷，容器便能容纳无穷多个 Efimov 态了。换句话说，无穷多个 Efimov 态就在红外模式的不断打开中出现了。

参考文献

- [1] J. J. Sakurai and Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 3 edition, 2020.
- [2] H. Bethe, R. Peierls, and Douglas Rayner Hartree. Quantum theory of the dipton. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences*, 148(863):146–156, 1935.
- [3] Hui Zhai. *Ultracold Atomic Physics*. Cambridge University Press, 2021.
- [4] J.R. Taylor. *Scattering Theory: The Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions*. Dover Books on Engineering. Dover Publications, 2012.
- [5] Pascal Naidon and Shimpei Endo. Efimov physics: a review. *Reports on Progress in Physics*, 80(5):056001, 2017.
- [6] K. Meetz. Singular potentials in nonrelativistic quantum mechanics. *Il Nuovo Cimento*, 34(3):690–708, 1964.
- [7] D M Gitman, I V Tyutin, and B L Voronov. Self-adjoint extensions and spectral analysis in the calogero problem. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(14):145205, mar 2010.
- [8] Dmitry S. Petrov. The few-atom problem. *arXiv e-prints*, arXiv:1206.5752, 2012.
- [9] Eric Braaten and H.-W. Hammer. Universality in few-body systems with large scattering length. *Physics Reports*, 428(5):259–390, 2006.
- [10] H.T.C. Stoof, D.B.M. Dickerscheid, and K. Gubbels. *Ultracold Quantum Fields*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Netherlands, 2008.
- [11] Jean Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Oxford University Press, 06 2002.
- [12] Achim Schwenk and Janos Polonyi. *Renormalization group and effective field theory approaches to many-body systems*, volume 852 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, 2012.
- [13] Daniel F. Litim. Optimized renormalization group flows. *Phys. Rev. D*, 64:105007, Oct 2001.
- [14] S. Moroz, S. Flörchinger, R. Schmidt, and C. Wetterich. Efimov effect from functional renormalization. *Phys. Rev. A*, 79:042705, Apr 2009.
- [15] Jürgen Berges, Nikolaos Tetradis, and Christof Wetterich. Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics. *Physics Reports*, 363(4):223–386, 2002. Renormalization group theory in the new millennium. IV.
- [16] S. Diehl, H. C. Krahle, and M. Scherer. Three-body scattering from nonperturbative flow equations. *Phys. Rev. C*, 78:034001, Sep 2008.
- [17] Yusuke Horinouchi and Masahito Ueda. Onset of a limit cycle and universal three-body parameter in efimov physics. *Phys. Rev. Lett.*, 114:025301, 2015.

- [18] Yuya Tanizaki. Flow equation of functional renormalization group for three-body scattering problems. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2013(11), 11 2013. 113A01.
- [19] Stefan Flörchinger. *Functional Renormalization and Ultracold Quantum Gases*. Springer Theses. Springer Berlin, Heidelberg, 2010.
- [20] Stefan Flörchinger. Few-body hierarchy in non-relativistic functional renormalization group equations and a decoupling theorem. *Nuclear Physics A*, 927:119–133, 2014.
- [21] Stefan Flörchinger, Sergej Moroz, and Richard Schmidt. Efimov physics from the functional renormalization group. *Few-Body Systems*, 51(2-4):153–180, 2011.