高维泰勒展开

squid

2021 年 4 月 25 日

1　一维泰勒展开

$$
\begin{aligned}
f(x+\epsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)\epsilon^n}{n!} = f(x) + f^{(1)}(x)\epsilon + \frac{f^{(2)}}{2!}\epsilon^2 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\epsilon \frac{d}{dx}\right)^n f(x)
\end{aligned}
$$

2　一维泰勒展开的算子形式

算符函数通常采用级数定义，$e^{\epsilon \frac{d}{dx}}$ 的定义为

$$
e^{\epsilon \frac{d}{dx}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\epsilon \frac{d}{dx}\right)^n
$$

一维泰勒展开可写为

$$
f(x+\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\epsilon \frac{d}{dx}\right)^n f(x) = e^{\epsilon \frac{d}{dx}} f(x)
$$

3　对“长度”展开

对于高维函数，取一条曲线，以弧长 s 为参数，可以有相应的一维函数 $f(s)$，$f(s)$ 同样可以展开

$$
f(s+\epsilon) = e^{\epsilon \frac{d}{ds}} f(s)
$$

4　高维泰勒展开

本质上我们只会对长度展开，只要选取了某个方向，就可以对其进行一维展开。注意到 ∇ 算子的如下性质：

$$
\hat{n} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial n}
$$

$\frac{\partial}{\partial n}$ 是沿 $\hat{n}$ 方向的方向导数。从而

$$
f(\vec{x}+\vec{\epsilon}) = e^{\epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon}} f(\vec{x}) = e^{\vec{\epsilon}\cdot\nabla} f(\vec{x})
$$