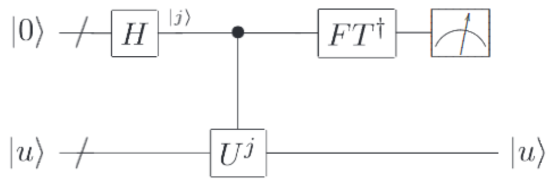
# Phase Estimation

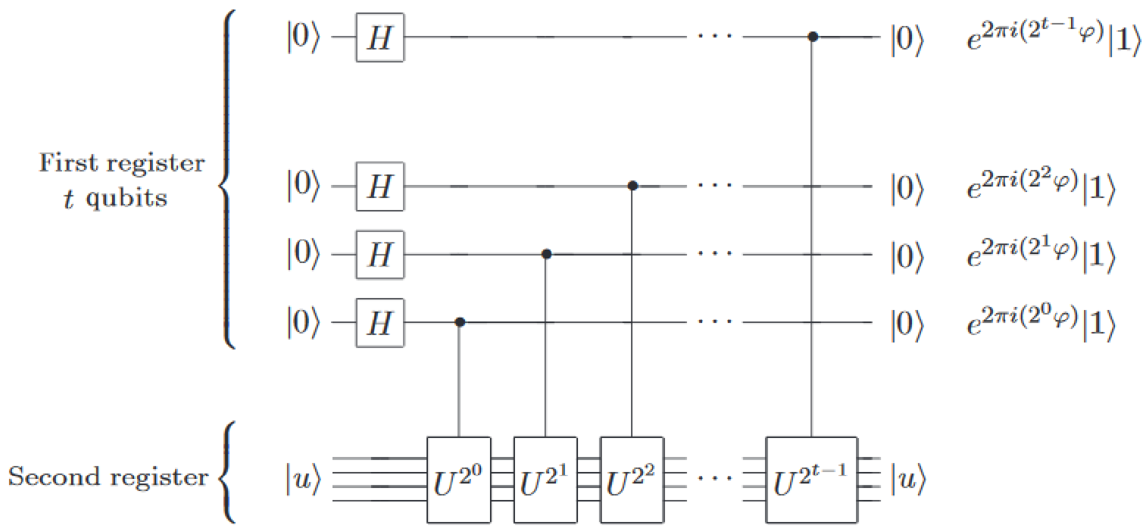
## 1 位相推定問題

$$U|u\rangle = e^{i2\pi\phi}|u\rangle \tag{1}$$

となる $\phi$ を求めたい．
$\phi$ は 2 進数表記で $\phi = 0.\phi_1\phi_2\phi_3...\phi_n$ の形とする．
位相推定問題を解く回路は




この回路の前半部分の詳しい図は下のようになっている．




### 1.1 回路の様子

初期状態は

$$|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes ... \otimes |0\rangle \otimes |u\rangle \tag{2}$$

である．アダマールゲートを通過すると，状態は

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \otimes ... \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |u\rangle \tag{3}$$

となり，また $U^{2^k}|u\rangle = UUU...U|u\rangle = e^{i2\pi 2^k\phi}|u\rangle$ であるから、制御ゲート $U^j$ を通過すると，状態は

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(|0\rangle + e^{i2\pi 2^{n-1}\phi}|1\rangle\right) \otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi 2^{n-2}\phi}|1\rangle\right) \otimes ... \otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi 2^0\phi}|1\rangle\right) \otimes |u\rangle \tag{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.\phi_n}|1\rangle\right) \otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.\phi_{n-1}\phi_n}|1\rangle\right) \otimes ... \otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.\phi_1\phi_2...\phi_n}|1\rangle\right) \otimes |u\rangle \tag{5}$$

となる. これは $\phi$ を量子フーリエ変換した結果 (積表示) となっているので，逆変換を施せば $\phi$ が得られる.

# 2 位数計算

互いに素な $N, x(x < N)$ に対して

$$x^r = 1 \; modN \tag{6}$$

を満たす最小の自然数 $r$ を位数という.

量子コンピュータでこれを解くには

$$U|y\rangle \equiv |xy \; modN\rangle \tag{7}$$

$$|u_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} e^{-i2\pi j \frac{s}{r}} |x^j \; modN\rangle \tag{8}$$

とおくと，位相推定問題

$$U|u_s\rangle = e^{i2\pi \frac{s}{r}} |u_s\rangle \;\; (s = 0, ..., r-1) \tag{9}$$

を解けばよい.

位相推定問題の回路に，$|u_s\rangle = |1\rangle$ をいれる. 制御 $U^k$ ゲートを通ると，

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle \otimes U^k |1\rangle \tag{10}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_k |k\rangle \otimes U^k \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{s=0}^{r-1} |u_s\rangle \tag{11}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{s=0}^{r-1} \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} exp(i2\pi k \frac{\tilde{s}}{r}/N) |k\rangle \right) \otimes |u_s\rangle \tag{12}$$

ここで $\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{s=0}^{r-1} |u_s\rangle = |1\rangle, U|u_s\rangle = e^{i2\pi \frac{s}{r}}, \frac{\tilde{s}}{r} = 2^n \frac{s}{r}$ を用いた. 上式のかっこ内は $\tilde{s}/r$ を量子フーリエ変換したものであるから，逆 QFT で $s/r$ を得られる. 連分数アルゴリズムで $s/r \to r$ を得る.

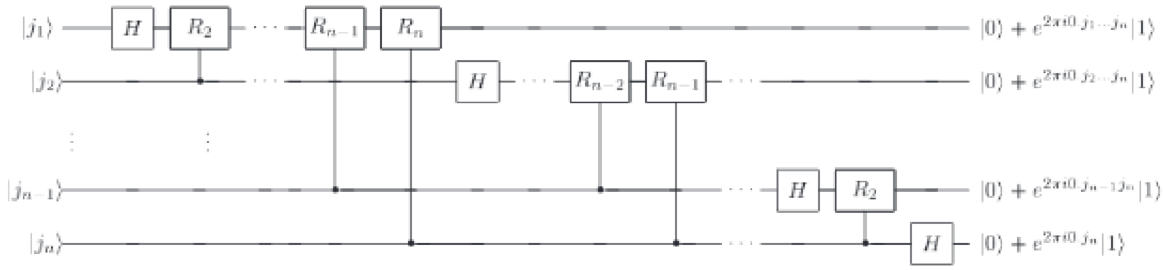
# 3 量子フーリエ変換の積表示

n ビットの計算基底 $|j\rangle = |j_1 j_2 ... j_n\rangle$(このとき $j = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \cdots + j_n 2^0$) に対する量子フーリエ変換は次のように表せる.

$$\begin{aligned}
|j\rangle &\to \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i jk/2^n} |k\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k_1=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0}^{1} e^{2\pi i j (\sum_{l=1}^{n} k_l 2^{-l})} |k_1 \cdots k_n\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k_1=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0}^{1} \otimes_{l=1}^{n} e^{2\pi i j k_l 2^{-l}} |k_l\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \otimes_{l=1}^{n} \left[ \sum_{k_l=0}^{1} e^{2\pi i j k_l 2^{-l}} |k_l\rangle \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \otimes_{l=1}^{n} \left[ |0\rangle + e^{2\pi i j 2^{-l}} |1\rangle \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left( |0\rangle + e^{2\pi i 0.j_n} |1\rangle \right) \otimes \left( |0\rangle + e^{2\pi i 0.j_{n-1} j_n} |1\rangle \right) \otimes \cdots \otimes \left( |0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 \cdots j_n} |1\rangle \right)
\end{aligned}$$

この積表現から量子フーリエ変換の効率的回路が導ける. ここでゲート $R_k$ は次のユニタリ変換を表す.

$$R_k \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^k} \end{bmatrix} \tag{13}$$




- $2^n$ 要素の量子フーリエ変換は $O(n^2)$
- 最良の古典アルゴリズム (高速フーリエ変換) は $\Theta(n2^n)$

n ビットであらわされる N に対して 2n ビットの第一レジスタと n ビットの第二レジスタ