Algorytmy Grafowe

dr hab. Bożena Woźna-Szcześniak, prof. UJD

Uniwersytet Jana Długosza w Częstochowie

b.wozna@ujd.edu.pl

Wykład 11 i 12

Spis treści

Spis treści

Cykle i ścieżki Hamiltona - definicje

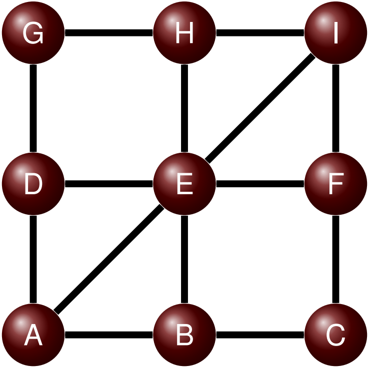
- Ścieżki Eulera i cykle Eulera to ścieżki i krawędzie, które przechodzą przez każdą krawędź grafu.
- Co, jeśli celem jest odwiedzenie każdego wierzchołka zamiast każdej krawędzi?

Ścieżka Hamiltona to ścieżka, która zawiera każdy wierzchołek grafu dokładnie jeden raz.

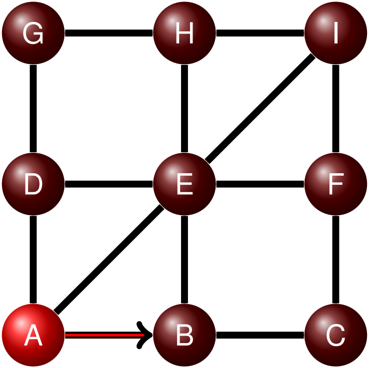
Cykla Hamiltona to cykl, która zawiera każdy wierzchołek grafu dokładnie jeden raz.

Uwaga ! Ścieżka oznacza, że początkowe i końcowe wierzchołki są różne; Cykl oznacza, że są one takie same.

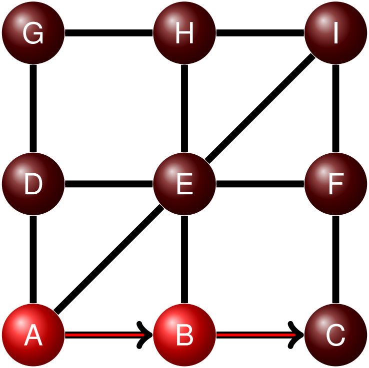
Cykl Hamiltona - przykład



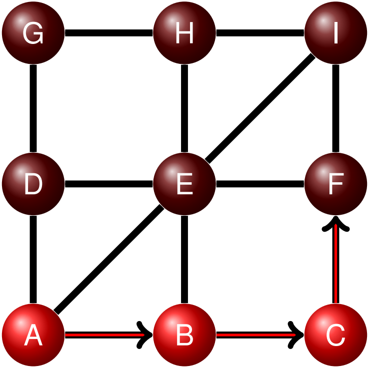
Cykl Hamiltona - przykład I



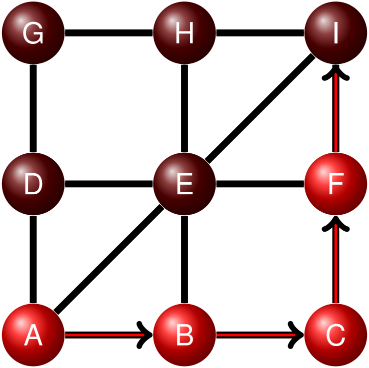
Cykl Hamiltona - przykład II



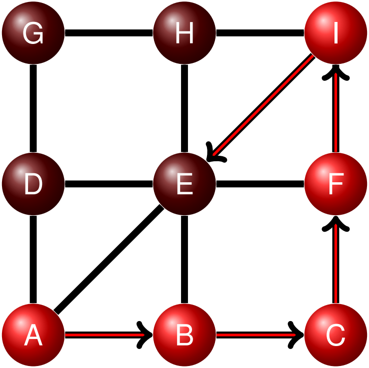
Cykl Hamiltona - przykład III



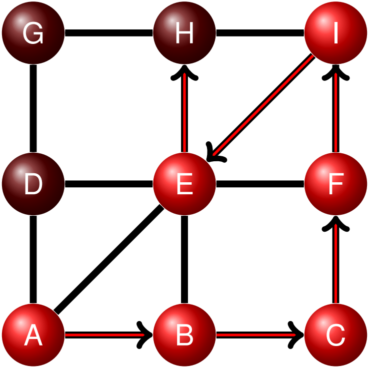
Cykl Hamiltona - przykład IV



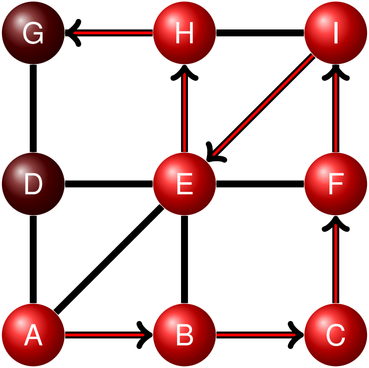
Cykl Hamiltona - przykład V



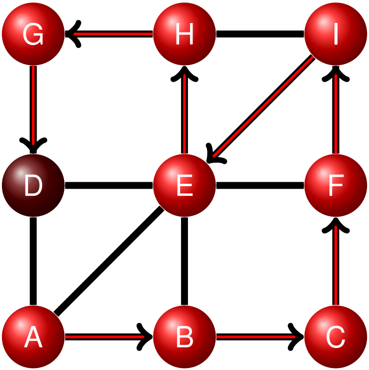
Cykl Hamiltona - przykład VI



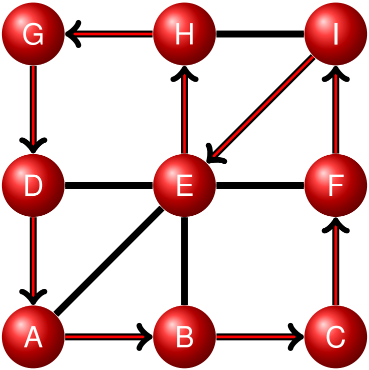
Cykl Hamiltona - przykład VII



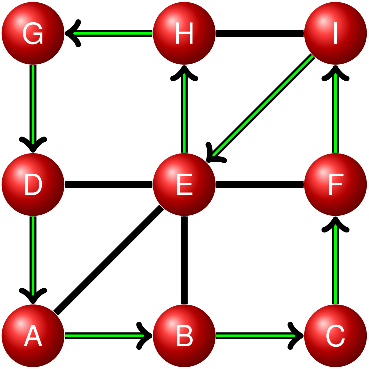
Cykl Hamiltona - przykład VIII



Cykl Hamiltona - przykład IX



Cykl Hamiltona - przykład X



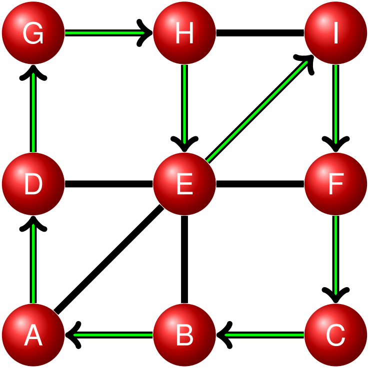
Cykl Hamiltona

Zmiana wierzchołka początkowego nie zmienia cyklu Hamiltona, ponieważ te same krawędzie są odwiedzane w tych samych kierunkach.

- A,B,C,F,I,E,H,G,D,A
- B,C,F,I,E,H,G,D,A,B
- C,F,I,E,H,G,D,A,B,C
- F,I,E,H,G,D,A,B,C,F
- I,E,H,G,D,A,B,C,F,I
- E,H,G,D,A,B,C,F,I,E
- H,G,D,A,B,C,F,I,E,H
- G,D,A,B,C,F,I,E,H,G
- D,A,B,C,F,I,E,H,G,D

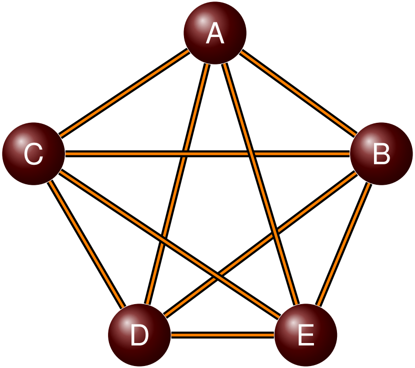
Cykl Hamiltona

Można również odwrócić cykl Hamiltona w jego odbicie lustrzane poprzez odwrócenie kierunku. Obraz lustrzany używa tych samych krawędzi, ale do tyłu, zatem nie jest uważany za taki sam jak oryginalny cykl Hamiltona.



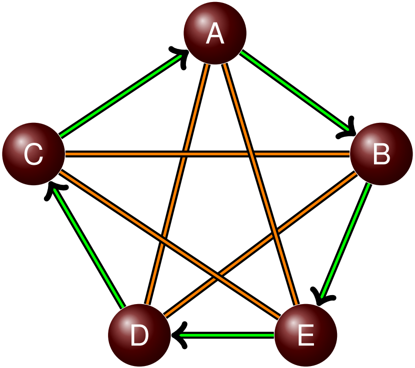
Hamilton vs. Euler I

- Czy graf może posiadać zarówno cykl Hamiltona jak i cykl Eulera?



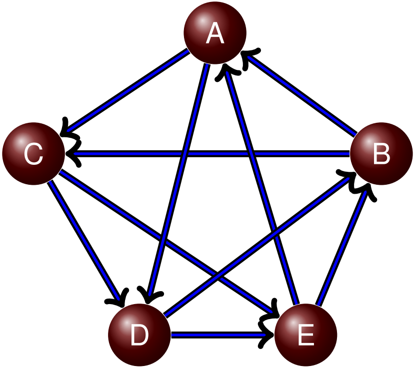
Hamilton vs. Euler II

Cykl Hamiltona: (A,B,E,D,C,A)



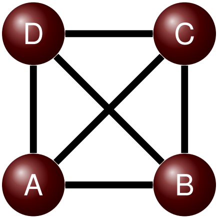
Hamilton vs. Euler III

Cykl Eulera: (A,C,D,E,B,C,E,A,D,B,A)



Hamilton vs. Euler

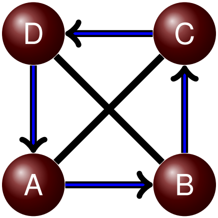
- Czy graf może mieć cykl Hamiltona, ale nie mieć cyklu Eulera?



Hamilton vs. Euler

- Czy graf może mieć cykl Hamiltona, ale nie mieć cyklu Eulera?

Cykl Hamiltona: (A,B,C,D,A)

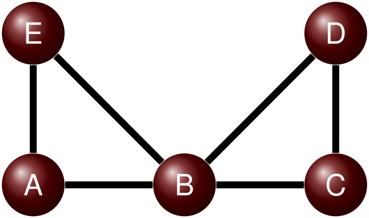


Cykl Eulera: brak – dlaczego ?

stopień (A) = stopień (B) = stopień (C) = stopień (D) =3

Hamilton vs. Euler

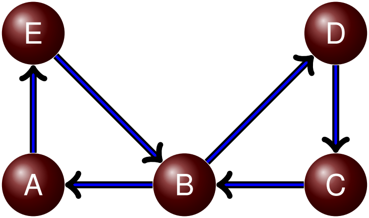
- Czy graf może mieć cykl Eulera, ale nie mieć cyklu Hamiltona?



Hamilton vs. Euler

- Czy graf może mieć cykl Eulera, ale nie mieć cyklu Hamiltona?

Cykl Hamiltona: Brak
Cykl Eulera: A-E-B-D-C-B-A

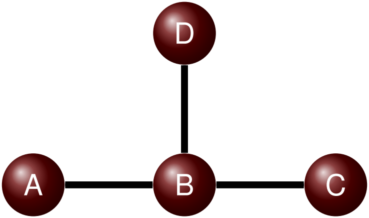


Hamilton vs. Euler

- Czy graf może nie mieć ani cyklu Eulera, ani cyklu Hamiltona?

Hamilton vs. Euler

- Czy graf może nie mieć ani cyklu Eulera, ani cyklu Hamiltona?



Hamilton vs. Euler

Wniosek: to, czy graf zawiera cykl Hamiltona, czy też nie, nie mówi nic o tym, czy graf ten ma cykl Eulera, i odwrotnie. To samo dotyczy ścieżek Hamiltona / Eulera.

Jaki graf posiada cykl Hamiltona ?

- Jak określić, czy graf ma ścieżkę lub cykl Eulera – wystarczy policzyć liczbę wierzchołków o nieparzystym stopniu.

Jaki graf posiada cykl Hamiltona ?

- Jak określić, czy graf ma ścieżkę lub cykl Eulera – wystarczy policzyć liczbę wierzchołków o nieparzystym stopniu.
- Niestety nie ma prostego sposobu na stwierdzenie, czy dany graf zawiera ścieżkę lub cykl Hamiltona.

Jaki graf posiada cykl Hamiltona ?

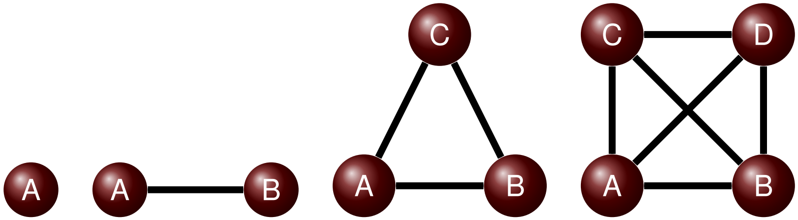
- Jak określić, czy graf ma ścieżkę lub cykl Eulera – wystarczy policzyć liczbę wierzchołków o nieparzystym stopniu.
- Niestety nie ma prostego sposobu na stwierdzenie, czy dany graf zawiera ścieżkę lub cykl Hamiltona.
- Zamiast pytać, czy dany graf ma cykl Hamiltona, lepiej rozważyć grafy z dużą ilością cykli Hamiltona i spróbować znaleźć najkrótszy z nich.

Spis treści

Grafy pełne - definicja

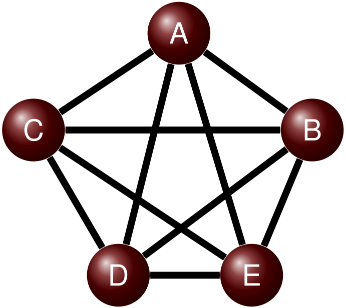
- **Graf pełny** - graf nieskierowany, w którym każda para wierzchołków jest połączona krawędzią.
  - Graf pełny nie zawiera pętli.
  - W grafie pełnym każde dwa wierzchołki współdzielą dokładnie jedną krawędź.
- Graf pełny o n wierzchołkach oznacza się przez K_n.
- Graf pełny o n wierzchołkach posiada $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ krawędzi.

Grafy pełne - przykłady

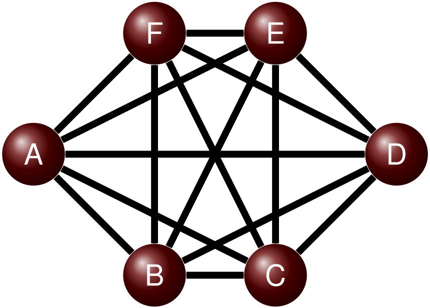


K_1 K_2 K_3 K_4

Grafy pełne - przykłady



K_5



K_6

Ile różnych cykli Hamiltona ma graf K_n? I

- Cykl Hamiltona można przedstawić za pomocą uporządkowanej listy wierzchołków.
  - Pierwszy i ostatni wierzchołek na liście muszą być takie same. Wszystkie pozostałe wierzchołki pojawiają się dokładnie raz.
  - Pierwszy / ostatni wierzchołek nazywany jest **punktem odniesienia**.
- Zmiana punktu odniesienia nie zmienia cyklu Hamiltona, ponieważ te same krawędzie są odwiedzane w tych samych kierunkach. Przykładowo wszystkie poniższe trasy reprezentują ten sam cykl Hamiltona w K_4:

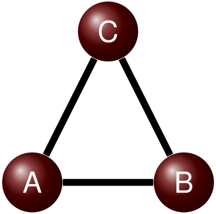
A,C,D,B,A (punkt odniesienia: A)
B,A,C,D,B (punkt odniesienia: B)
D,B,A,C,D (punkt odniesienia: D)
C,D,B,A,C (punkt odniesienia: C)

Ile różnych cykli Hamiltona ma graf K_n? II

- Ponieważ K_n ma n różnych punktów odniesienia, to każdy cykl Hamiltona w K_n może być opisany przez dokładnie n różnych tras.
- Dla każdego $n \geq 3$ liczba cykli Hamiltona w grafie K_n jest:

$$(n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 = (n-1)!$$

- Liczba tras Hamiltona w grafie K_n jest: $n \times (n-1)! = n!$
- Przykładowo, dla K_3 mamy 2 cykle:



(A,B,C,A), (A,C,B,A), ale 6 różnych tras:
(A,B,C,A), (B,C,A,B),(C,A,B,C), (A,C,B,A), (C,B,A,C), (B,A,C,B).

Ile różnych cykli Hamiltona ma graf K_n? III

Wierzchołki n	Krawędzie $n(n-1)/2$	Cykle Hamiltona $(n-1)!$
1	0	
2	1	
3	3	2
4	6	6
5	10	24
6	15	120
7	21	620
...	...	...
16	120	1307674368000

Spis treści

Problem komiwojażera

Problem komiwojażera (ang. travelling salesman problem, TSP):

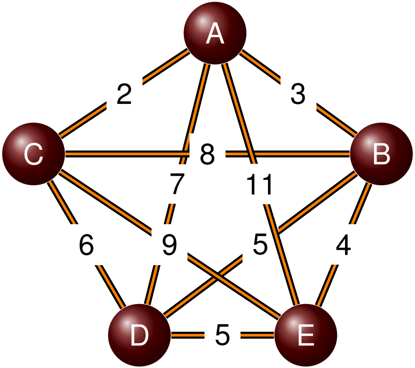
> Franek, akwizytor, musi odwiedzić każde z kilku miast (powiedzmy, wszystkie miasta wojewódzkie w Polsce – tj. 16 miast). Franek chciałby, aby jego podróż był jak najkrótsza. W jakiej kolejności Franek powinien odwiedzić 16 miast wojewódzkich?

TSP pojawia się w wielu innych kontekstach:

- Prom kosmiczny musi sprowadzić z orbity kilka sztucznych satelitów i innych ładunków. Paliwo w kosmosie jest bardzo drogie.
- Gminny autobus szkolny musi dowieźć gimnazjalistów z kilku wiosek do Gimnazjum. Czas przejazdu jest tutaj bardzo istotny.

TSP jako problem grafowy I

- Załóżmy, że mamy graf z funkcją wagi, tzn. graf na którym każda krawędź ma wagę (reprezentującą jego koszt, czas lub odległość).



TSP jako problem grafowy II

- Problem komiwojażera polega na znalezieniu ścieżki lub cyklu, który:
  - zawiera każdy wierzchołek grafu; i
  - całkowita waga ścieżki/cyklu jest najmniejsza z możliwych.
- Innymi słowy:

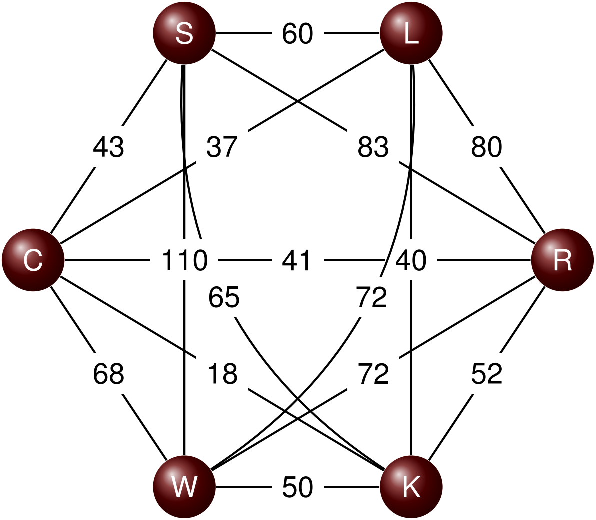
Problem komiwojażera polega na znalezieniu minimalnego **cyklu Hamiltona** w pełnym grafie ważonym.

Problem komiwojażera - Przykład I

Przykład

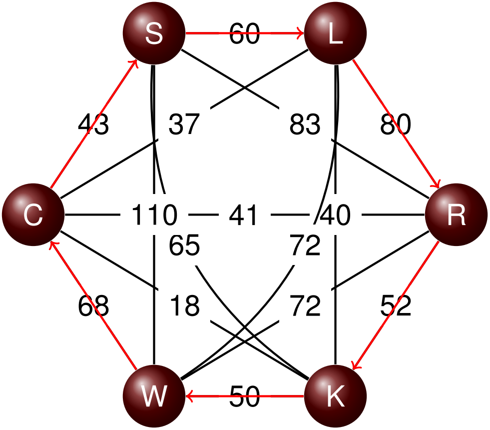
Dany jest zbiór miejscowości (Częstochowa (C), Wieluń (W) Kłobuck(K), Radomsko (R), Siewierz (S), Lubliniec (L)) oraz odległości między nimi. Znaleźć drogę zamkniętą, która ma najkrótszą długość oraz przechodzi przez każdą miejscowość dokładnie jeden raz.

Problem komiwojażera - Przykład II



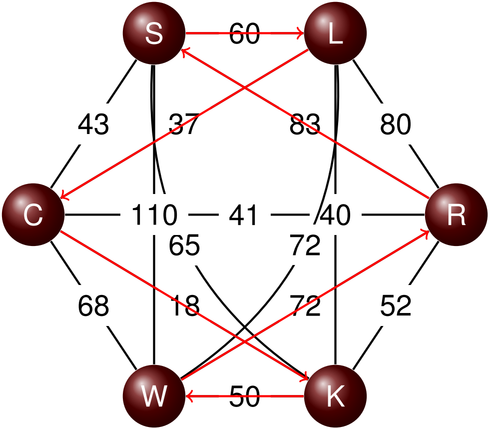
Problem komiwojażera - Przykład III

Cykl Hamiltona: (C,S,L,R,K,W,C).
Odległość: 43+60+80+52+50+68 = 353



Problem komiwojażera - Przykład IV

Cykl Hamiltona: (C,K,W,R,S,L,C).
Odległość:18+50+72+83+60+37=320



Problem komiwojażera - Przykład V

	C	W	K	R	S	L
Częstochowa(C)	0	68	18	41	43	37
Wieluń (W)	68	0	50	72	110	72
Kłobuck(K)	18	50	0	52	65	40
Radomsko (R)	41	72	52	0	83	80
Siewierz (S)	43	110	65	83	0	60
Lubliniec (L)	37	72	40	80	60	0

- Odległość (C,S,L,R,K,W,C): 43+60+80+52+50+68 = 353.
- Odległość (C,K,W,R,S,L,C): 18+50+72+83+60+37=320.
- Odległość (C,S,K,L,W,R,C):43+65+40+72+72+41= 333.
- Liczba wierzchołków (miast) jest 6, zatem **liczba cykli Hamiltona** wynosi: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Problem komiwojażera - Przykład VI

- Można wymienić wszystkie cykle, obliczyć dla nich odległości, a następnie wybrać tę najmniejszą – czyli wykonać **algorytm siłowy**, tzw. Brute-Force.
  - C, W, K, R, L, S, C : 353
  - C, W, K, R, S, L, C : 350
  - C, W, K, L, R, S, C : 364
  - C, W, K, L, S, R, C : 342
  - C, W, K, S, R, L, C : 383
  - C, W, K, S, L, R, C : 364
  - C, W, R, K, L, S, C : 335
  - C, W, R, K, S, L, C : 354
  - C, W, R, L, K, S, C : 368
  - C, W, R, L, S, K, C : 363
  - C, W, R, S, K, L, C : 365
  - C, W, R, S, L, K, C : 341
  - C, W, L, K, R, S, C : 358

Problem komiwojażera - Przykład VII

- C, W, L, K, S, R, C : 369
- C, W, L, R, K, S, C : 380
- C, W, L, R, S, K, C : 386
- C, W, L, S, K, R, C : 358
- C, W, L, S, R, K, C : 353
- C, W, S, K, R, L, C : 412
- C, W, S, K, L, R, C : 404
- C, W, S, R, K, L, C : 390
- C, W, S, R, L, K, C : 399
- C, W, S, L, K, R, C : 371
- C, W, S, L, R, K, C : 388
- C, K, W, R, L, S, C : 323
- C, K, W, R, S, L, C : 320
- C, K, W, L, R, S, C : 346
- C, K, W, L, S, R, C : 324
- C, K, W, S, R, L, C : 378

Problem komiwojażera - Przykład VIII

- C, K, W, S, L, R, C : 359
- C, K, R, W, L, S, C : 317
- C, K, R, W, S, L, C : 349
- C, K, R, L, W, S, C : 375
- C, K, R, L, S, W, C : 388
- C, K, R, S, W, L, C : 372
- C, K, R, S, L, W, C : 353
- C, K, L, W, R, S, C : 328
- C, K, L, W, S, R, C : 364
- C, K, L, R, W, S, C : 363
- C, K, L, R, S, W, C : 399
- C, K, L, S, W, R, C : 341
- C, K, L, S, R, W, C : 341
- C, K, S, W, R, L, C : 382
- C, K, S, W, L, R, C : 386
- C, K, S, R, W, L, C : 347

Problem komiwojażera - Przykład IX

- C, K, S, R, L, W, C : 386
- C, K, S, L, W, R, C : 328
- C, K, S, L, R, W, C : 363
- C, R, W, K, L, S, C : 306
- C, R, W, K, S, L, C : 325
- C, R, W, L, K, S, C : 333
- C, R, W, L, S, K, C : 328
- C, R, W, S, K, L, C : 365
- C, R, W, S, L, K, C : 341
- C, R, K, W, L, S, C : 318
- C, R, K, W, S, L, C : 350
- C, R, K, L, W, S, C : 358
- C, R, K, L, S, W, C : 371
- C, R, K, S, W, L, C : 377
- C, R, K, S, L, W, C : 358
- C, R, L, W, K, S, C : 351

Problem komiwojażera - Przykład X

- C, R, L, W, S, K, C : 386
- C, R, L, K, W, S, C : 364
- C, R, L, K, S, W, C : 404
- C, R, L, S, W, K, C : 359
- C, R, L, S, K, W, C : 364
- C, R, S, W, K, L, C : 361
- C, R, S, W, L, K, C : 364
- C, R, S, K, W, L, C : 348
- C, R, S, K, L, W, C : 369
- C, R, S, L, W, K, C : 324
- C, R, S, L, K, W, C : 342
- C, L, W, K, R, S, C : 337
- C, L, W, K, S, R, C : 348
- C, L, W, R, K, S, C : 341
- C, L, W, R, S, K, C : 347
- C, L, W, S, K, R, C : 377

Problem komiwojażera - Przykład XI

- C, L, W, S, R, K, C : 372
- C, L, K, W, R, S, C : 325
- C, L, K, W, S, R, C : 361
- C, L, K, R, W, S, C : 354
- C, L, K, R, S, W, C : 390
- C, L, K, S, W, R, C : 365
- C, L, K, S, R, W, C : 365
- C, L, R, W, K, S, C : 347
- C, L, R, W, S, K, C : 382
- C, L, R, K, W, S, C : 372
- C, L, R, K, S, W, C : 412
- C, L, R, S, W, K, C : 378
- C, L, R, S, K, W, C : 383
- C, L, S, W, K, R, C : 350
- C, L, S, W, R, K, C : 349
- C, L, S, K, W, R, C : 325

Problem komiwojażera - Przykład XII

- C, L, S, K, R, W, C : 354
- C, L, S, R, W, K, C : 320
- C, L, S, R, K, W, C : 350
- C, S, W, K, R, L, C : 372
- C, S, W, K, L, R, C : 364
- C, S, W, R, K, L, C : 354
- C, S, W, R, L, K, C : 363
- C, S, W, L, K, R, C : 358
- C, S, W, L, R, K, C : 375
- C, S, K, W, R, L, C : 347
- C, S, K, W, L, R, C : 351
- C, S, K, R, W, L, C : 341
- C, S, K, R, L, W, C : 380
- C, S, K, L, W, R, C : 333
- C, S, K, L, R, W, C : 368
- C, S, R, W, K, L, C : 325

Problem komiwojażera - Przykład XIII

- C, S, R, W, L, K, C : 328
- C, S, R, K, W, L, C : 337
- C, S, R, K, L, W, C : 358
- C, S, R, L, W, K, C : 346
- C, S, R, L, K, W, C : 364
- C, S, L, W, K, R, C : 318
- C, S, L, W, R, K, C : 317
- C, S, L, K, W, R, C : 306
- C, S, L, K, R, W, C : 335
- C, S, L, R, W, K, C : 323
- C, S, L, R, K, W, C : 353

- Algorytm Brute-Force jest **optymalny**: gwarantuje znalezienie rozwiązania.
  - C, S, L, K, W, R, C : 306
  - C, R, W, K, L, S, C : 306

Problem komiwojażera - Przykład XIV

- Algorytm Brute-Force jest **nieefektywny**: musi sprawdzić **wszystkie** cykle Hamiltona, tj. $(n-1)!$, a to może zająć dużo czasu, gdyż wartości funkcji silnia dla kolejnych n rosną bardzo szybko:

n	n!
1	1
5	120
10	3 628 800
15	1 307 674 368 000=1,307674368$\cdot 10^{12}$
50	3 041 409 320 $\cdot 10^{64}$

Problem komiwojażera - Przykład XV

Używając komputera wykonującego 10^9 **operacji na sekundę** oraz **algorytmu typu Brute-Force** wyznaczającego najkrótszą trasę dla problemu komiwojażera, rozwiązanie dla przypadku, gdy komiwojażer chce odwiedzić **16 miast wojewódzkich** – wszystkich możliwych wyborów jest 15! – zajęłoby około 21 min.

- Czy istnieje lepszy sposób rozwiązania problemu komiwojażera?
- To znaczy, czy istnieje optymalny algorytm, który również jest wydajny?

Problem komiwojażera bez algorytmu siłowego I

Algorytm najbliższego sąsiada.

Idea: Na każdym etapie podróży należy wybrać najbliższy wierzchołek, który nie był jeszcze odwiedzony.

	C	W	K	R	S	L
Częstochowa(C)	0	68	18	41	43	37
Wieluń (W)	68	0	50	72	110	72
Kłobuck(K)	18	50	0	52	65	40
Radomsko (R)	41	72	52	0	83	80
Siewierz (S)	43	110	65	83	0	60
Lubliniec (L)	37	72	40	80	60	0

Problem komiwojażera bez algorytmu siłowego II

	C	W	K	R	S	L
Częstochowa(C)	0	68	18	41	43	37
Wieluń (W)	68	0	50	72	110	72
Kłobuck(K)	18	50	0	52	65	40
Radomsko (R)	41	72	52	0	83	80
Siewierz (S)	43	110	65	83	0	60
Lubliniec (L)	37	72	40	80	60	0

- Jeśli komiwojażer wyrusza z Częstochowy, to najbliższym celem jest Kłobuck.
- Może zatem cykl Hamiltona powinien zacząć się od (C,K)

Problem komiwojażera bez algorytmu siłowego III

	C	W	K	R	S	L
Częstochowa(C)	0	68	18	41	43	37
Wieluń (W)	68	0	50	72	110	72
Kłobuck(K)	18	50	0	52	65	40
Radomsko (R)	41	72	52	0	83	80
Siewierz (S)	43	110	65	83	0	60
Lubliniec (L)	37	72	40	80	60	0

- Najbliższym kolejnym nieodiwedzonym celem z Kłobucka jest Lubliniec: (C,K,L)

Problem komiwojażera bez algorytmu siłowego IV

	C	W	K	R	S	L
Częstochowa(C)	0	68	18	41	43	37
Wieluń (W)	68	0	50	72	110	72
Kłobuck(K)	18	50	0	52	65	40
Radomsko (R)	41	72	52	0	83	80
Siewierz (S)	43	110	65	83	0	60
Lubliniec (L)	37	72	40	80	60	0

- Najbliższym kolejnym nieodiwedzonym celem z Lublinca jest Siewierz: (C,K,L,S)

Problem komiwojażera bez algorytmu siłowego V

	C	W	K	R	S	L
Częstochowa(C)	0	68	18	41	43	37
Wieluń (W)	68	0	50	72	110	72
Kłobuck(K)	18	50	0	52	65	40
Radomsko (R)	41	72	52	0	83	80
Siewierz (S)	43	110	65	83	0	60
Lubliniec (L)	37	72	40	80	60	0

- Najbliższym kolejnym nieodiwedzonym celem z Siewierza jest Radomsko: (C,K,L,S,R)

Problem komiwojażera bez algorytmu siłowego VI

	C	W	K	R	S	L
Częstochowa(C)	0	68	18	41	43	37
Wieluń (W)	68	0	50	72	110	72
Kłobuck(K)	18	50	0	52	65	40
Radomsko (R)	41	72	52	0	83	80
Siewierz (S)	43	110	65	83	0	60
Lubliniec (L)	37	72	40	80	60	0

- Najbliższym kolejnym nieodiwedzonym celem z Radomska jest Wieluń: (C,K,L,S,R,W)
- A potem już tylko powrót do Częstochowy: (C,K,L,S,R,W,C):
  - Odległość wygenerowanego cyklu Hamiltona: 341
  - Odległość optymalna: 306
  - Odległość średnia: **356,4**

Algorytm najbliższego - pseudokod I

Nearest-neighbor-algorithm ($G = (V, E)$, $v \in V$):

Input: Graf reprezentowany przez macierz sąsiedztwa z wagami o rozmiarze $n \times n$ oraz indeks wierzchołka początkowego v.

Output: Lista odwiedzonych wierzchołków.

```
for i = 2 to n do
  visited[i] = false;
end for
lista_int path = v;
visited[v] = true;
current = v;
for i = 2 to n do
  Znajdź najmniejszy nieodwiedzony element w wierszu current
  oraz kolumnie i.
```

Algorytm najbliższego - pseudokod II

    `current = i;`
    `visited[i] = true;`
    Dodaj `i` na koniec listy `path`.
end for
Dodaj `v` na koniec listy `path`.
return `path`.

Złożoność czasowa: $O(n^2)$.

Algorytm najbliższego sąsiada vs algorytm siłowy

- Algorytm Brute-Force jest optymalny, ale nieefektywny.
    - Gwarantuje znalezienie optymalnego rozwiązania, ale może to zająć zbyt długi czas.
- Algorytm najbliższego sąsiada jest wydajny, ale nieoptymalny.
    - Jest szybki i łatwy w implementacji, ale nie zawsze znajduje cykl Hamilton o najmniejszej wadze.