Ex 3.3

Ex. 3.3 Gauss–Markov theorem:

(a) Prove the Gauss–Markov theorem: the least squares estimate of a parameter $a^T\beta$ has variance no bigger than that of any other linear unbiased estimate of $a^T\beta$ (Section 3.2.2).

(b) The matrix inequality $\mathbf{B} \preceq \mathbf{A}$ holds if $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ is positive semidefinite. Show that if $\hat{\mathbf{V}}$ is the variance-covariance matrix of the least squares estimate of β and $\tilde{\mathbf{V}}$ is the variance-covariance matrix of any other linear unbiased estimate, then $\hat{\mathbf{V}} \preceq \tilde{\mathbf{V}}$.

a) Notons que $\tilde{\theta} = c^T y$ une estimation linéaire non biaisée de $a^T\beta$ où $c = a(X^TX)^{-1}X^T + d$

Pour l'espérance $E[c^Ty] = a^T\beta + dX\beta$

On sait que $y = X\beta + \varepsilon$ où $E[\varepsilon] = 0$

donc: $E[c^TY] = c^T E[Y] = c^T X\beta$

En remplaçant c: $E[c^Ty] = (a(X^TX)^{-1}X^T + d)X\beta$

$= a(X^TX)^{-1}X^TX\beta + dX\beta$

$\boxed{= a^T\beta + dX\beta}$

La condition de non-biais implique $dX = 0$, comme indiqué.

Var (c^TY) :

On sait que $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2$

$\mathrm{Var}(c^Ty) = c^T \mathrm{Var}(Y) c$

$$Var(c^T y) = \sigma^2 c^T c$$

On remplace C:

$$Var(c^T y) = \sigma^2 (a(X^T X)^{-1} X^T + d)^T (a(X^T X)^{-1} X^T + d)$$

$$= \sigma^2 (a^T (X^T X)^{-1} a + d^T d)$$

$$\boxed{Var(c^T y) = \sigma^2 (Var(a^T \hat{\beta}) + d^T d)}$$

Cette décomposition montre que la var de l'estimateur est la somme de :

- La variance de l'estimateur des moindres carrés ordinaires ($Var(a^T \beta)$).
- Un terme additionnel ($d^T d$) qui représente la pénalité pour s'écarter de l'estimateur des moindres carrés ordinaires.

b) On a Cy comme estimateur linéaire non biaisé de β où :

- C matrice $p \times N$
- $C = (X^T X)^{-1} X^T + D$
- La condition de non-biais $DX = 0$ doit être satisfaite.

Pour la matrice de var-covar $\tilde{V}$:

On a $\tilde{V} = ((X^T X)^{-1} X^T + D)((X^T X)^{-1} X^T + D)^T$

$$\tilde{V} = (X^T X)^{-1} X^T (X^T X)^{-1} X^T + (X^T X)^{-1} X^T D^T$$
$$+ D (X^T X)^{-1} X^T + D D^T$$

$(X^T X)^{-1} X^T (X^T X)^{-1} X^T = \hat{V}$ (matrice de Var-Covar)

$(X^T X)^{-1} X^T D^T = (DX (X^T X)^{-1})^T = 0^T$ car $DX = 0$

$D (X^T X)^{-1} X^T = (DX (X^T X)^{-1})^T = 0$ " "

Le dernier terme DD^T reste tel quel

Donc on obtient : $\tilde{V} = \hat{V} + DD^T$

Les résultats suivent par ce que DD^T est semi définis positive.