Tarea 2

Alejandro Vargas Aldaco
Análisis de algoritmos
Facultad de Ciencias, UNAM

27 de febrero de 2019

1. ¿Qué valores para r son devueltos por el siguiente algoritmo?

- $n_1 = 1 \implies r = 3$.
- $n_2 = 2 \implies r = 16$.
  $\vdots$
- $n \implies r = n + n\sum_{i=1}^{n}(i^2+1) = f(n)$.

El tiempo de ejecución ésta dado por $f(n)$. Es un archivo .java por lo cual se puede compilar desde terminal con javac y luego ejecutarse.

2. ¿Son ciertas o falsas las siguientes expresiones?

a) $\log_3 3^n \in \Omega(\log 2^n)$

Pd: $\exists c \in \mathbb{R}^+$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $c * \log_3 3^n \geq \log 2^n \geq 0, \forall n \geq n_0$
Veamos que ambas funciones están definidas $\forall n \geq 0$. Entonces, por propiedades de logaritmos.
$n \log_3 3 \geq n \log 2$ para $n \geq 0$, entonces
$n \log_3 3 + n \log_3 3 \geq n \log 2 + n \log_3 3 \geq n \log 2$
$2n \log_3 3 \geq n \log 2$ (Transitividad)
Por propiedades de logaritmos $\log_3 3 = 1$, y sabemos $2 > \log 2 > 0$,
Entonces $2n \geq n \log 2 \geq 0, \forall n \geq 0$
Por lo tanto $2 \log_3 3^n \geq \log 2^n, \forall n \geq 0$
Sean $n_0 = 0, c = 2$ por lo tanto $\log_3 3^n \in \Omega(\log 2^n)$
Por lo tanto es cierta la expresión $\triangle$.

b) $n^2(1+\sqrt{n}) \in O(n^3)$

Pd: $\exists c \in \mathbb{R}^+$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $0 \leq n^2(1+\sqrt{n}) \leq c * n^3, \forall n \geq n_0$
Veamos que $n^2(1+\sqrt{n}) = n^2 + n^2\sqrt{n} \geq 0$ y $^*\sqrt{n} \leq n, \forall n \geq 0$
Entonces para $n \geq 0$

$0 \leq n^2 + n^2\sqrt{n} \leq n^3 + n^2\sqrt{n}$
Por * $n^2\sqrt{n} < n^2 * n = n^3$
Entonces
$0 \leq n^2 + n^2\sqrt{n} \leq n^3 + n^2\sqrt{n} \leq n^3 + n^3$
$\Rightarrow$
$0 \leq n^2 + n^2\sqrt{n} \leq 2n^3$ (Transitividad)
Sean $n_0 = 0, c = 2$ por lo tanto $n^2(1+\sqrt{n}) \in O(n^3)$
Por lo tanto es cierta la expresión $\triangle$.

3. Sean $f(n), g(n)$ funciones asintóticamente positivas. Demuestra que $g(n) \in o(f(n)) \implies f(n) + g(n) \in \Theta(f(n))$

*Como $f(n)$ y $g(n)$ son asintóticamente positivas $\exists n_0, n_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que para $n \geq n_2 = max\{n_0, n_1\} \implies f(n), g(n) > 0$

**Por otro lado. Sabemos que $\exists n_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tal que $\forall n \geq n_3$, se cumple $0 \leq g(n) < c * f(n)$, $\forall c \in \mathbb{R}^+$

Entonces, sea $n_{max} = max\{n_2, n_3\}, c \in \mathbb{R}^+$ tal que $c \geq 1$
Por * y ** tenemos que $0 \leq g(n) < c * f(n)$, $\forall n \geq n_{max}$
$\Rightarrow 0 < f(n) < f(n) + g(n) < c * f(n) + f(n) < c * f(n) + c * f(n)$
Por transitividad
$0 < f(n) < f(n) + g(n) < 2c * f(n)$
Por definición
$\Rightarrow f(n) + g(n) \in \Theta(f(n))$ $\triangle$.

4. Para cada uno de los siguientes pares de funciones $f(n), g(n)$, determina si $f(n) \in O(g(n))$ ó $g(n) \in O(f(n))$

a) $f(n) = n\log_2 n$; $g(n) = n^3\frac{\sqrt{n}}{2}$

Por definición de logaritmo $\log_2 n < n$ *, y por otro lado* $n \leq n\sqrt{n}, \forall n \geq 0$

Caso $n\log_2 n \in O(n^3\frac{\sqrt{n}}{2})$**:**
Pd: $\exists c \in \mathbb{R}^+$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $0 \leq n\log_2 n \leq c * (n^3\frac{\sqrt{n}}{2}), \forall n \geq n_0$
Sea $n_0 = 0$
Veamos que
$0 \leq n\log_2 n \leq n^2 \leq n^2\sqrt{n} \leq n^3\sqrt{n}$
Por transitividad
$0 \leq n\log_2 n \leq n^3\sqrt{n}$, y $n^3\sqrt{n} = 2n^3\frac{\sqrt{n}}{2}$
Sean $n_0 = 0, c = 2 \implies n\log_2 n \in O(n^3\frac{\sqrt{n}}{2})$

Caso $n^3\frac{\sqrt{n}}{2} \in O(n\log_2 n)$**:**
Pd: $\exists c \in \mathbb{R}^+$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $0 \leq n^3\frac{\sqrt{n}}{2} \leq c * (n\log_2 n), \forall n \geq n_0$

Sea $n_0 = 0$, entonces
Supongamos $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $0 \leq n^3 \frac{\sqrt{n}}{2} \leq c * (n \log_2 n)$
Entonces
$0 \leq 2n^2 n\sqrt{n} \leq 2cn \log_2 n$
$\Rightarrow n^2\sqrt{n} \leq c \log_2 n \leq cn$
Por transitividad
$n^2\sqrt{n} \leq cn \implies n\sqrt{n} \leq c \implies n \leq c$
Entonces
$\lim_{n\to\infty} n \leq c \triangledown$
Por lo tanto $\nexists c \in \mathbb{R}^+$ tal que $0 \leq n^3 \frac{\sqrt{n}}{2} \leq c * (n \log_2 n), \forall n \geq n_0$