Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

Département Mathématiques et Informatique
de la Décision et des Organisations

Mathématiques

Calcul

2. Fonctions réelles usuelles

Poppy RAVEZ

Licence MIDO - 1re année

11 septembre 2025

2 - Fonctions réelles usuelles

Cours

Application 2.3

a. $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq |x|$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^+, |x| = x \geq x \\ \forall x \in \mathbb{R}^-_*, |x| = -x > 0 > x \end{cases}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq |x|$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \iff x = 0$

Par définition : $x = 0 \implies |x| = 0$.
Si $|x| = 0$, les solutions vérifient :

$$\begin{cases} x = |x| = 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}^+ \\ -x = |x| = 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}^-_* \end{cases}$$

Donc $x = 0$
L'implication réciproque $|x| = 0, \implies x = 0$ est donc vraie ce qui démontre l'équivalence.

c. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x|.|y|$

x	y	$\lvert xy\rvert$
$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	$\lvert xy\rvert = xy = \lvert x\rvert.\lvert y\rvert$
$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^-_*$	$\lvert xy\rvert = -xy = x(-y) = \lvert x\rvert.\lvert y\rvert$
$\mathbb{R}^-_*$	$\mathbb{R}^+$	$\lvert xy\rvert = -xy = (-x)y = \lvert x\rvert.\lvert y\rvert$
$\mathbb{R}^-_*$	$\mathbb{R}^-_*$	$\lvert xy\rvert = xy = (-x)(-y) = \lvert x\rvert.\lvert y\rvert$

CQFD

Dans l'absolu et pour coller à la définition, il faudrait distinguer les cas $xy < 0$ et $xy = 0$ quand les deux variables n'ont pas le même signe.

d. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}^+, |x| \leq z \iff -z \leq x \leq z$

Soit $z \in \mathbb{R}^+$ (et donc $-z \leq 0$).
Si $x \in \mathbb{R}^+$ (et donc $|x| = x \geq 0$) :
— $|x| \leq z \implies -z \leq 0 \leq x \leq z \implies -z \leq x \leq z$
— $-z \leq x \leq z \implies -z \leq 0 \leq x \leq z \implies |x| \leq z$

Ce qui démontre l'équivalence sur $\mathbb{R}^+$; l'équivalence sur $\mathbb{R}^-$ en est la conséquence en remplaçant x par $-x$ (les deux inégalités étant invariantes par changement de signe).

Application 2.12

1. $\exp(-\frac{1}{x^2})$

$$\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty \implies \lim_{x \to 0} exp(-\frac{1}{x^2}) = 0 \text{ car } \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$$

2.

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + e^x + x) = +\infty$$

3.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = 1 \text{ car } \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

Application 2.16

$$\begin{aligned} \ln(4 - \sqrt{3}) + \ln(4 + \sqrt{3}) &= \ln((4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})) \\ &= \ln(4^2 - \sqrt{3}^2) \\ &= \ln 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt{x + 1}) &= \ln((x + 1)^{1/2}) \\ &= \frac{\ln(x + 1)}{2} \end{aligned}$$

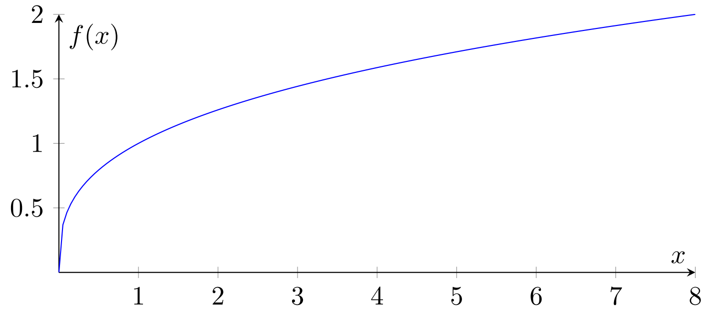
Application 2.17

D'après la définition de la dérivée d'une fonction :

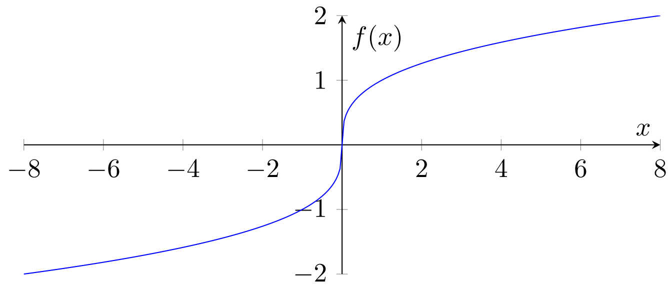
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - \ln(1)}{x} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Application 2.24

Application 2.24.i

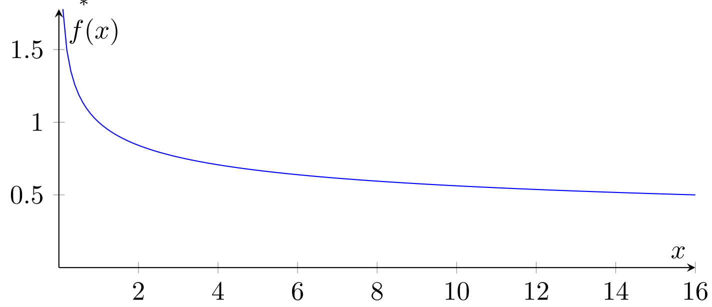


Comme vu dans la proposition 2.22, $p_{1/3}$ est étendue à $\mathbb{R}$ comme la réciproque de p_3 qui est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: la racine cubique. On peut formellement définir $p_{1/3}$ sur $\mathbb{R}^-$ par $\forall x \in \mathbb{R}^-, p_{1/3}(x) = -p_{1/3}(-x)$. On complète donc le graphe par son symétrique par rapport à l'origine.



Application 2.24.ii

$D = \mathbb{R}_*^+$



Application 2.26 - Pour aller plus loin

Cela n'est vrai sur $\mathbb{R}$ que pour les entiers impairs car x^{2k} n'est pas une bijection.

Application 2.32

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \left(x^{\frac{1}{x}}\right)^{x^2+2x} &= x^{\frac{x^2+2x}{x}} \\ &= x^{x+2}\end{aligned}$$

Application 2.34 - Dérivabilité de p_α en 0 avec $\alpha \geq 1$

p_α est définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $p_\alpha(x) = \exp(\alpha \ln(x))$, cependant :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \Longrightarrow \forall \alpha > 0, \lim_{x \to 0^+} p_\alpha(x) = 0$$

On peut donc, si $\alpha > 0$, définir par continuité la fonction p_α en 0 avec la valeur nulle.
On a alors :

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0^+} \frac{p_\alpha(h) - 0}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{\alpha \ln(h)}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{\alpha \ln(h)}}{e^{\ln(h)}} \\ &= \lim_{h \to 0^+} e^{(\alpha-1)\ln(h)} \\ &= 0 \text{ si } \alpha > 1 \text{ car alors } \lim_{h \to 0^+} (\alpha - 1)\ln(h) = -\infty\end{aligned}$$

La fonction p_α prolongée en 0 avec $p_\alpha(0) = 0$ est donc dérivable à droite en 0 si $\alpha > 1$ avec $p'_\alpha(0) = 0$.

Application 2.41 - Limite en 0 de x^x

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0^+} x^x &= \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln(x)} \\ &= 1 \text{ car } \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0 \text{ d'après la proposition 2.39}\end{aligned}$$

Exercices

Exercice 2.1

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{1+(x+h)^2} - \dfrac{1}{1+x^2}}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{1+x^2-1-(x+h)^2}{h(1+(x+h)^2)(1+x^2)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-2xh-h^2}{h(1+(x+h)^2)(1+x^2)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-2x-h}{(1+(x+h)^2)(1+x^2)} \\
&= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}$$

Car la limite du dénominateur est un réel strictement positif.
La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$
On constate de manière évidente que f est paire, strictement positive, atteint son maximum en 0 et que :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0^+$$

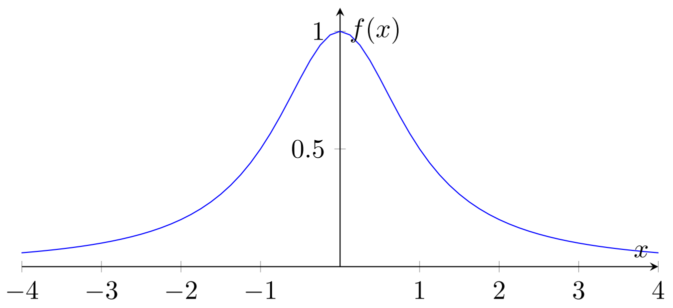
On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Recherchons les points d'inflexion (où elle traverse sa tangente) caractérisés par $f''(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-2(1+x^2)^2 - 2(-2x)(2x)(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \\
&= \frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3} \\
&= 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}
\end{aligned}$$

Les points d'inflexion sont donc $\binom{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{4}}$.



Exercice 2.2

f est impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f(0) = 0$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$$

On peut remarquer que :

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}x\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} f_1(x).$$

La représentation graphique de f_n est donc la transformée de celle de f_1 par l'homothétie ayant pour centre l'origine et de rapport $\frac{1}{\sqrt{n}}$. L'homothétie conservant les directions (et donc les sens de variations, extrema et points d'inflexion, et pentes des tangentes), ll suffit d'étudier f_1.

Cette caractéristique, si elle nous échappe initialement, deviendra évidente durant l'étude de la fonction lorsque l'on constatera l'alignement des points particuliers (extrema et points d'inflexion).

Variations

$$f'(x) = \frac{1 + nx^2 - 2nxx}{(1 + nx^2)^2} = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}$$

$f'(0) = 1$: toutes les courbes en la même tangente à l'origine
Les extrema (où $f'(x) = 0$) sont donc $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$
$f(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$
On constate que $\frac{f(1/\sqrt{n})}{1/\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$, les extrema sont donc tous sur la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$.
Le tableau de variation est donc :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{(n)}}$		0		$+\frac{1}{\sqrt{(n)}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$f(x)$	0^-	$\searrow$	$-\frac{1}{2\sqrt{n}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$	$\searrow$	0^+

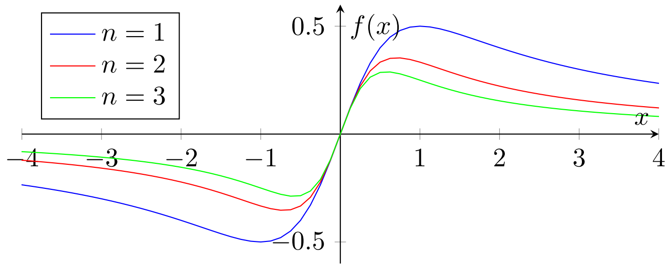
Points d'inflexion

$$f''(x) = \frac{-2nx(1 + nx^2)^2 - 4nx(1 - nx^2)(1 + nx^2)}{(1 + nx^2)^4} = -2nx\frac{1 + nx^2 + 2(1 - nx^2)}{(1 + nx^2)^3} = -2nx\frac{3 - nx^2}{(1 + nx^2)^3}$$

Chaque courbe présente donc 3 points d'inflexion alignés en $-\sqrt{\frac{3}{n}}$, 0 et $\sqrt{\frac{3}{n}}$.

On constate que $\frac{f(\sqrt{\frac{3}{n}})}{\sqrt{\frac{3}{n}}} = \frac{1}{4}$ et que $f'\left(\pm\sqrt{\frac{3}{n}}\right) = -1/8$, ce qui montre que tous les points d'inflexion sont sur la droite $y = x/4$ et que les tangentes en ces points sont toutes parallèles.

Représentation graphique



Exercice 2.3

1.

$$
\begin{aligned}
|\sin^{12}(x) - 2\cos^9(x)| &\leq |\sin^{12}(x)| + |2\cos^9(x)| \text{ (inégalité triangulaire)}\\
&\leq 1 + 2\\
&\leq 3
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
|1 - x^{12} + 4x^3| &\leq |1 - x^{12}| + |4x^3| \text{ (inégalité triangulaire)}\\
&\leq 1 + 4 \text{ car } x \in [-1, 1], 1 - x^{12} \in [0; 1]\\
&\leq 5
\end{aligned}
$$

Exercice 2.4

(a)

Les deux termes étant positifs, on peut élever l'égalité au carré ou raisonner par disjonction de cas en fonction du signe de $x + 1$:

$$
\begin{aligned}
&|x+1| = 2\\
\iff\quad &(x+1)^2 = 4\\
\iff\quad &x^2 + 2x - 3 = 0\\
\iff\quad &(x-1)(x+3) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|x+1| = 2\\
\iff &(x + 1 = 2 \wedge x + 1 \geq 0) \vee (-x - 1 = 2 \wedge x + 1 \leq 0)\\
\iff &(x = 1 \wedge x \geq -1) \vee (x = -3 \wedge x \leq -1)\\
\iff &x = 1 \vee x = -3
\end{aligned}
$$

Donc : $S = \{-3; 1\}$

(b)

Les deux termes étant positifs, on peut élever au carré :

$$\begin{aligned} & |x+3| \leq 4 \\ \iff & (x+3)^2 \leq 16 \\ \iff & (x^2+6x-7) \leq 0 \\ \iff & (x+7)(x-1) \leq 0 \end{aligned}$$

L'ensembe des solutions est donc l'intervalle fermé entre les 2 racines -7 et 1.
Ou par disjonction de cas :

$$\begin{aligned} & |x+3| \leq 4 \\ \iff & (x+3 \leq 4 \wedge x+3 \geq 0) \vee (-x-3 \leq 4 \wedge x+3 \leq 0) \\ \iff & (-3 \leq x \leq 1) \vee (-7 \leq x \leq -3) \\ \iff & -7 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Donc : $S = [-7; 1]$

(c)

Les deux termes étant positifs, on peut élever au carré :

$$\begin{aligned} & |x+1| > 9 \\ \iff & (x+1)^2 > 9 \\ \iff & x^2+2x-8 > 0 \\ \iff & (x+4)(x-2) > 0 \end{aligned}$$

L'ensembe des solutions est donc $\mathbb{R}$ diminué de l'intervalle fermé entre les 2 racines -4 et 2 : $\mathbb{R} \setminus [-4; 2]$
Ou par disjonction de cas :

$$\begin{aligned} & |x+1| > 3 \\ \iff & (x+1 > 3 \wedge x+1 \geq 0) \vee (-x-1 > 3 \wedge x+1 \leq 0) \\ \iff & (x > 2) \vee (x < -4) \end{aligned}$$

Donc : $S =]-\infty; -4] \cup]2; +\infty[$

(d)

Les deux termes étant positifs, on peut élever au carré :

$$\begin{aligned} & |2x-4| = |x+2| \\ \iff & (2x-4)^2 = (x+2)^2 \\ \iff & 3x^2-20x+12 = 0 \\ \iff & (3x-2)(x-6) = 0 \end{aligned}$$

Ou par disjonction de cas :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$\lvert 2x-4\rvert$		$-2x+4$		$-2x+4$		$2x-4$	
$\lvert x+2\rvert$		$-x-2$		$x+2$		$x+2$	
Equation		$-x+6=0$		$-3x+2=0$		$x-6=0$	
S		$\varnothing$	$\cup$	$\left\{\frac{2}{3}\right\}$	$\cup$	$\{6\}$	

Donc : $S=\left\{\frac{2}{3};6\right\}$

(e)

Les deux termes étant positifs, on peut élever au carré :

$$\begin{aligned} & |2x+4| \leq |x+1| \\ \iff & (2x+4)^2 \leq (x+1)^2 \\ \iff & 3x^2+14x+15 \leq 0 \\ \iff & (3x+5)(x+3) \leq 0 \\ \iff & -3 \leq x \leq -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Ou par disjonction de cas :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$\lvert 2x+4\rvert$		$-2x-4$		$2x+4$		$2x+4$	
$\lvert x+1\rvert$		$-x-1$		$-x-1$		$x+1$	
Equation		$-x-3\leq 0$		$3x+5\leq 0$		$x+3\leq 0$	
S		$[-3;-2]$	$\cup$	$[-2;-\frac{5}{3}]$	$\cup$	$\varnothing$	

Donc : $S=\left[-3;-\frac{5}{3}\right]$

(f)

Si $|x|<1$, l'égalité ne peut être vérifiée car le terme de droite est strictement négatif et celui de gauche positif. Considérons donc que $|x|\geq 1$ et élevons au carré :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\backslash]-1;1[, \quad & |x+1| = |x|-1 \\ \iff & (x+1)^2 = (|x|-1)^2 \\ \iff & x = -|x| \\ \iff & x \leq 0 \\ \iff & x \leq -1 \end{aligned}$$

Ou par disjonction de cas :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$		$-x-1$		$x+1$		$x+1$	
$\lvert x\rvert$		$-x$		$-x$		x	
Equation		$0=0$		$2x+2=0$		$2=0$	
S		$]-\infty;-1]$	$\cup$	$\{-1\}$	$\cup$	$\varnothing$	

Donc : $S=]-\infty;-1]$

Exercice 2.5

Par disjonction de cas :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$		$-2x+1$		$-2x+1$		$2x-1$	
$\lvert 3x+1\rvert$		$-3x-1$		$3x+1$		$3x+1$	
Equation		$4x+3=1$		$-8x-1=1$		$-4x-3=1$	
S		$\left\{-\frac{1}{2}\right\}$	$\cup$	$\left\{-\frac{1}{4}\right\}$	$\cup$	$\varnothing$	

Donc : $S=\left\{-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right\}$

Exercice 2.6

$$\begin{aligned}\forall x\in[-3;1], &\begin{cases}0\leq |x+1|\leq 2\\ -1\leq x+2\leq 3\\ 1\leq x^2+1\leq 10\end{cases}\\ &\Longrightarrow\begin{cases}-2\leq |x+1|(x+2)\leq 6\\ 0<\frac{1}{x^2+1}\leq 1\end{cases}\\ &\Longrightarrow -2\leq\frac{|x+1|(x+2)}{x^2+1}\leq 6\end{aligned}$$

Exercice 2.7

Rappel de logique

«A est vraie si et seulement si (ssi) B est vraie» signifie que A et B sont équivalentes ($A\Longleftrightarrow B$).
«A vraie si B vraie » signifie que $B\Rightarrow A$
«A vraie seulement si B vraie » signifie que $\bar{B}\Rightarrow\bar{A}$ soit $A\Rightarrow B$
On démontre une équivalence soit par équivalences successives soit en montrant que $A\Rightarrow B$ et que $B\Rightarrow A$.
Une implication est équivalente à sa contraposée : on peut démontrer que $A\Rightarrow B$ en montrant que $\bar{B}\Rightarrow\bar{A}$ ou $\bar{A}$ est la négation de A.

1. Egalité de l'inégalité triangulaire

L'égalité est évidemment vraie si x et y sont de même signe :

$$xy\geq 0\Longrightarrow |x+y|=|x|+|y|$$

Plutôt que de prouver la réciproque ($|x+y| = |x|+|y| \Longrightarrow xy \geq 0$), démontrons la contraposée : $xy < 0 \Longrightarrow |x+y| \neq |x|+|y|$.

Soient x et y tels que $x < 0 < y$, on alors :

$$|x+y| - |x| - |y| = \begin{cases} x+y-(-x)-y = 2x \neq 0 \text{ si } y \geq -x \\ -x-y-(-x)-y = -2y \neq 0 \text{ si } y \leq -x \end{cases}$$

L'égalité n'est donc pas vérifiée si les 2 variables n'ont pas le même signe ce qui démontre la contraposée et donc l'équivalence.

2. min et max

Les 2 fonctions étant symétriques en x et y (car $|x-y| = |y-x|$]), il suffit de vérifier les égalités pour $x \leq y$ et elles seront vraies pour $x \geq y$.

Supposons $x \leq y$ (et donc $|x-y| = y-x$), alors :

$$\begin{aligned} \frac{x+y+|x-y|}{2} &= \frac{x+y+(y-x)}{2} \\ &= y \\ &= max(x,y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{x+y-|x-y|}{2} &= \frac{x+y-(y-x)}{2} \\ &= x \\ &= min(x,y) \end{aligned}$$

Exercice 2.8

1.

$$\begin{aligned} &\frac{\exp(x^2-1)}{\exp(x+1)} \leq 1 \\ \Longleftrightarrow &\exp(x^2-1-(x+1)) \leq 1 \\ \Longleftrightarrow &\exp((x+1)(x-2)) \leq 1 \\ \Longleftrightarrow &(x+1)(x-2) \leq 0 \\ \Longleftrightarrow &-1 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

Donc : $S = [-1; 2]$

2.

$$\begin{aligned} &e^{2x} + e^x - 6 = 0 \\ \Longleftrightarrow &e^x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \\ \Longrightarrow &e^x = 2 \text{ car } e^x \text{ est strictement positif} \\ \Longrightarrow &x = \ln 2 \end{aligned}$$

Donc : $S = \{\ln 2\}$

3.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}, \ln|x+1| - \ln|x-1| &\le \ln 2\\
&\Longleftrightarrow \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \le \ln 2\\
&\Longleftrightarrow \left|\frac{x+1}{x-1}\right| \le 2 \text{ car ln est croissante sur } \mathbb{R}_*^+\\
&\Longleftrightarrow \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \le 4 \text{ car les 2 termes sont positifs}\\
&\Longleftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 \ge 0\\
&\Longleftrightarrow (3x-1)(x-3) \ge 0\\
&\Longleftrightarrow x \in]-\infty;\frac{1}{3}] \cup [3:+\infty[
\end{aligned}$$

Et donc $S =]-\infty;-1[\cup]-1;\frac{1}{3}] \cup [3;+\infty[$

On aurait également pu étudier la fonction $f(x) = \left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1^-$$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1^+$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$	
$f(x)$	$\frac{x+1}{x-1}$	$-\frac{x+1}{x-1}$	$\frac{x+1}{x-1}$	
$f'(x)$	$-\frac{2}{(x-1)^2}$	$\frac{2}{(x-1)^2}$	$-\frac{2}{(x-1)^2}$	
Variations	1^- ↘ 0	0 ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↘ 1^+	

L'équation $f(x) = 2$ présente donc 1 racine sur l'intervalle $]-1;1[$ et une autre sur $]1;+\infty[$: $\frac{1}{3}$ et 3.
On a donc $S =]-\infty;-1[\cup]-1;\frac{1}{3}] \cup [3;+\infty[$

Exercice 2.9

Soit $f(x) = \frac{xe^x}{x+1}$

Il s'agit du produit de fonctions (x, e^x et $1/(x+1)$) dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, elle est donc dérivable sur ce même domaine.

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(x+1) - xe^x}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(x+1)^2 - x}{(x+1)^2} e^x$$
$$= \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2} e^x$$

Exercice 2.10

Soit $f(x) = e^{\frac{1}{\ln x}}$

exp étant défini sur $\mathbb{R}$ et ln sur $\mathbb{R}_*^+$ mais ne devant pas être nul (car au dénominateur d'une fraction), on a $D = \mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1^-$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

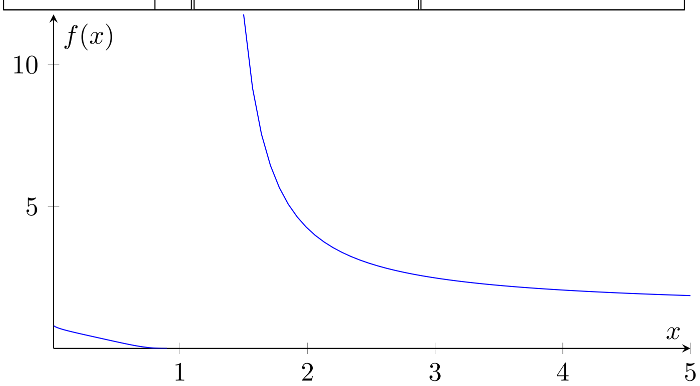
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1^+$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x} e^{\frac{1}{\ln x}} < 0$$

f est donc strictement décroissante sur D.

On peut la prolonger en 0 par continuité avec $f(0) = 1$

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	$-$	‖	$-$	
f	1^-	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	1



Exercice 2.11

1. Montrons que $x \geq \ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}^+$

Soit $f(x) = x - \ln(1+x)$
$f(0) = 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+$$

f est donc croissante et par conséquence positive sur $\mathbb{R}^+$: $x \geq \ln(1+x)$

2. Montrons que $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}^+$

Soit $g(x) = \ln(1+x) + \frac{x^2}{2} - x$
$g(0) = 0$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} + x - 1 = \frac{x^2}{1+x} \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+$$

g est donc croissante et positive sur $\mathbb{R}^+$ soit : $\ln(1+x) \geq -\frac{x^2}{2} + x$

Exercice 2.12

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x-6}}$
Le domaine de définition est le domaine où $x^2 + x - 6$ est strictement positive soit $\mathbb{R}$ diminué de l'éventuel intervalle fermé entre ses racines (-3 et 2).
$D =]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$

Exercice 2.13

1. Dérivabilité de p_α en 0

Soit $\alpha \in]0;1[$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{p_\alpha(x) - p_\alpha(0)}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\alpha \ln(x)}}{e^{\ln x}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{(\alpha-1)\ln(x)} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

p_α n'est donc pas dérivable en 0.

2.

C'est la conséquence du cas précédent $\alpha = \frac{1}{2}$.
On peut calculer :

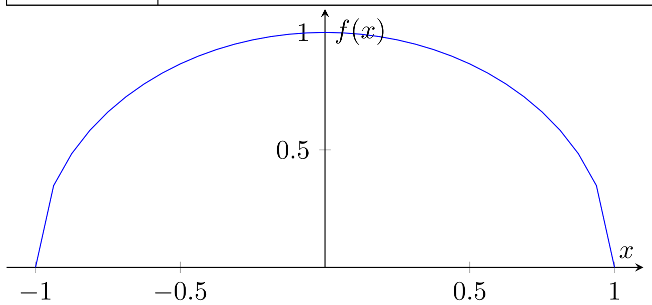
$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} &= \lim_{h\to 0^+} -\frac{\sqrt{h(2-h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} -\sqrt{\frac{(2-h)}{h}} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

f n'est donc pas dérivable en 1.
Le calcul est identique en -1 mais f étant paire la non dérivabilité en -1 est évidente.

Exercice 2.14

Soit $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
Domaine de définition : $D = [-1; 1]$
$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

x	-1		0		1
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



On a : $x^2 + f^2(x) = 1$; la courbe est donc le demi-cercle centré sur l'origine et de rayon 1.

Exercice 2.15

Soient $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \ln x$.

$$D_{f\circ g} = [1; +\infty[$$

$$D_{g\circ f} = \mathbb{R}_*^+$$

Exercice 2.16

1.

$f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-3}$ est continue sur son domaine de définition.
$D = [\frac{3}{2}; +\infty[$
$f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$f(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 2x - 3 \Rightarrow x = 2$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
On en déduit le tableau suivant :

x	$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	

2.

$f(x) = \sqrt{|x-1|} - \sqrt{|2x-3|}$
$D = \mathbb{R}$
$f(x) = 0 \iff (x-1)^2 = (2x-3)^2 \iff 3x^2 - 10x + 8 = 0 \iff (x-2)(3x-4) = 0$
$f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	0	$-$	

3.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3)(2-\sqrt{x})(\sqrt{x^2-2x+1}-4) \\ &= (x^2-3)(2-\sqrt{x})(\sqrt{(x-1)^2}-4) \\ &= (x^2-3)(2-\sqrt{x})(|x-1|-4) \end{aligned}$$

$D = \mathbb{R}^+$
$f(x) = 0 \iff x \in \{\sqrt{3}; 4; 5\}$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

x	0		$\sqrt{3}$		4		5		$+\infty$
x^2-3		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-\sqrt{x}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\lvert x-1\rvert-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

3.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x+3) + \ln(x+2) - \ln(x+11) \\ &= \ln\frac{(x+3)(x+2)}{x+11} \end{aligned}$$

Domaine de définition
ln étant défini sur $\mathbb{R}_*^+$:
$D =]-3;+\infty[\cap]-2;+\infty[\cap]-11;+\infty[=]-2;+\infty[$ (même si la forme rassemblée de f est définie sur $]-11;-3[$)
Valeurs et limites
$\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$f(x) = 0 \iff \frac{(x+3)(x+2)}{x+11} = 1 \iff x^2+4x-5 = 0 \iff x \in [-5;1] \iff x = 1$ sur D.
$f(0) = \ln\frac{6}{11} < 0$
Tableau de signe

x	-2		1		$+\infty$
$f(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

Exercice 2.17

1.a.

$$\lim_{x\to0^+} xe^{-\ln x} = \lim_{x\to0^+} xx^{-1} = 1$$

1.b.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x-1} = -1$$

1.c.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}+1}{2e^{\frac{1}{x^2}}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{1+e^{\frac{-1}{x^2}}}{2-e^{\frac{-1}{x^2}}} = \frac{1}{2} \quad \text{car } \lim_{x\to 0} e^{\frac{-1}{x^2}} = 0$$

2.a.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{|x|}+1}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}}{\frac{x}{\sqrt{|x|}}-\frac{1}{\sqrt{|x|}}} = 0^+$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{|x|}+1}{x-1} = 0^-$$

2.b.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+1}{x^2-1} = -\infty$$

2.c.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^{3x}-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+e^{-2x}}{e^x-e^{-2x}} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^{3x}-1} = -1$$

2.d.

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|-1}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{|x|+1-(|x|-1)}{\sqrt{|x|+1}+\sqrt{|x|-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\sqrt{|x|+1}+\sqrt{|x|-1}} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|-1}\right) = 0$$

2.e.

$$\lim_{x\to +\infty} 2^{-x}e^x = \lim_{x\to +\infty} e^{x(1-\ln 2)} = +\infty \text{ cf. exercice 2.11 ou } e>2 \iff 1>\ln 2$$

$$\lim_{x\to -\infty} 2^{-x}e^x = \lim_{x\to -\infty} e^{x(1-\ln 2)} = 0$$

Exercice 2.18

2.18.1.a

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}}(1-e^{\frac{1}{x^2}}) = -\infty$$

2.18.1.b

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}+\ln|x| = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(1+x^2\ln|x|) = +\infty$$

car $\lim_{x\to 0} x^2\ln|x| = 0$ d'après la proposition 2.39

2.18.1.c

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+e^{-x}}{(e^x-1)^2-|x|\ln|x|} = +\infty$$

car $\lim_{x\to 0}(e^x-1)^2 = 0^+$ et $\lim_{x\to 0}|x|\ln|x| = 0^-$, la limite du dénominateur est donc 0^+

2.18.2.a

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x + xe^{-x}-e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-1+e^{-x}\ln x + xe^{-2x}}{1+e^{-x}} = -1$$

d'après les propriétés de croissance comparée $\lim_{x\to+\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\ln x = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

2.18.2.b

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$$

car $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$

2.18.2.c

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x-\ln x}{xe^x-x^2} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1-e^{-x}\ln x}{x-x^2e^{-x}} = 0$$

2.18.2.d

$$\lim_{x\to +\infty} 1+\frac{\ln(e^{3x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} 1+\frac{3x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Exercice 2.19

2.19.1.a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x-2}{x+1}\\
f'(x) &= \frac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2}\\
&= \frac{3}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

2.19.1.b

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2-2x+1}{x^3+3x+3x+1} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3} \\
f'(x) &= \frac{2(x-1)(x+1)^3-3(x+1)^2(x-1)^2}{(x+1)^6} \\
&= \frac{2(x-1)(x+1)-3(x-1)^2}{(x+1)^4} \\
&= \frac{(x-1)(2x+2-3x+3)}{(x+1)^4} \\
&= \frac{(x-1)(-x+5)}{(x+1)^4}
\end{aligned}$$

2.19.1.c

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{\frac{1}{3}}\ln x \\
f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\ln x + x^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x} \\
&= \left(1+\frac{1}{3}\ln x\right)x^{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

2.19.1.d

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{e^x-2} \\
f'(x) &= \frac{e^x-2-xe^x}{(e^x-2)^2} \\
&= \frac{(1-x)e^x-2}{(e^x-2)^2}
\end{aligned}$$

2.19.1.f

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^x}{x^4+2x^2+1} = \frac{e^x}{(x^2+1)^2} \\
f'(x) &= \frac{e^x(x^2+1)-2\times 2xe^x}{(x^2+1)^3} \\
&= \frac{x^2-4x+1}{(x^2+1)^3}e^x
\end{aligned}$$

2.19.2.a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln^2 x \\
f'(x) &= 2\frac{\ln x}{x}
\end{aligned}$$

2.19.2.b

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-1} = \frac{\sqrt{x+1}}{(x-1)(x+1)} &= \frac{1}{\sqrt{x+1}(x-1)} \\
f'(x) &= -\frac{\frac{x-1}{2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)^2} \\
&= -\frac{3x+1}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}(x-1)^2}
\end{aligned}
$$

2.19.2.c

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{e^{x^3}} \\
f'(x) &= \frac{3x^2 e^{x^3}}{2\sqrt{e^{x^3}}} \\
&= \frac{3}{2}x^2\sqrt{e^{x^3}}
\end{aligned}
$$

Exercice 2.20

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^1 = e$$

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\frac{\ln(1+x)}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sqrt{x}\frac{\ln(1+x)}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sqrt{x}} = 1$$

car $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (cf. dérivée de ln en 1)

Exercice 2.21

$f(x) = x^x = e^{x\ln x}$
Domaine de définition : $D = \mathbb{R}_*^+$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \text{ (cf. croissance comparée de } x \text{ et } \ln x\text{)}$$

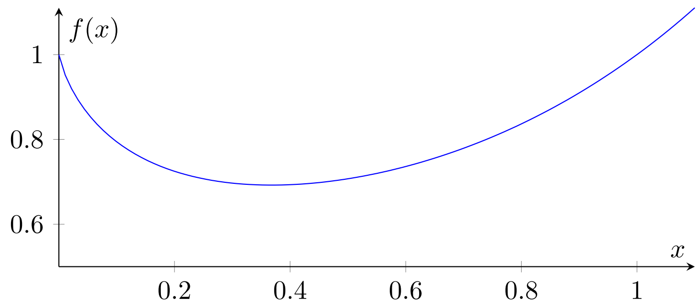
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = (1+\ln x)e^{x\ln x} = (1+\ln x)x^x$$

$$f'(x) = 0 \iff 1+\ln x = 0 \iff x = \frac{1}{e} \approx 0,368$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} \approx 0,692$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	∞



Exercice 2.22

Exercice 2.22.1

$f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = 0$$

e^{-x} décroissante donc $(1 + e^{-x})$ décroissante, donc f_1 est croissante.
$f_1(0) = \frac{1}{2}$

$$f_1'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$$

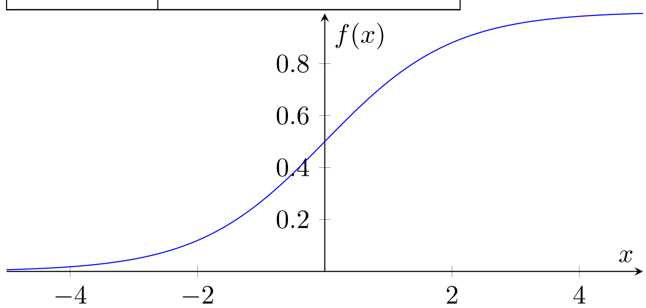
Ce qui confirme que f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$f_1''(x) = \frac{-(1+e^{-x})+2}{(1+e^{-x})^3}e^{-x} = \frac{1-e^{-x}}{(1+e^{-x})^3}e^{-x}$$

f_1 présente donc un point d'inflexion en 0.

On constate que $f_1(x) + f_1(-x) = \frac{1}{2}$ ce qui signifie que la représentation graphique est symétrique par rapport au point $(0; \frac{1}{2})$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		$+$	
f	0^+ $\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$ 1^-



Exercice 2.22.2

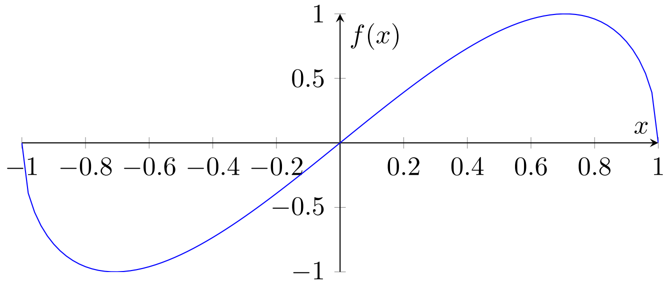
$f_2(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ sur $[-1; 1]$
f_2 est impaire

$$f_2'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + \frac{2x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-x^2)-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

f_2 s'annule donc en $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Exercice 2.22.3

$f_3(x) = \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \exp\left(1 - \frac{2}{x+1}\right)$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

f_3 est strictement positive sur D

$$\lim_{x \to -\infty} f_3(x) = e^+$$

$$\lim_{x \to -1^-} f_3(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f_3(x) = 0$$

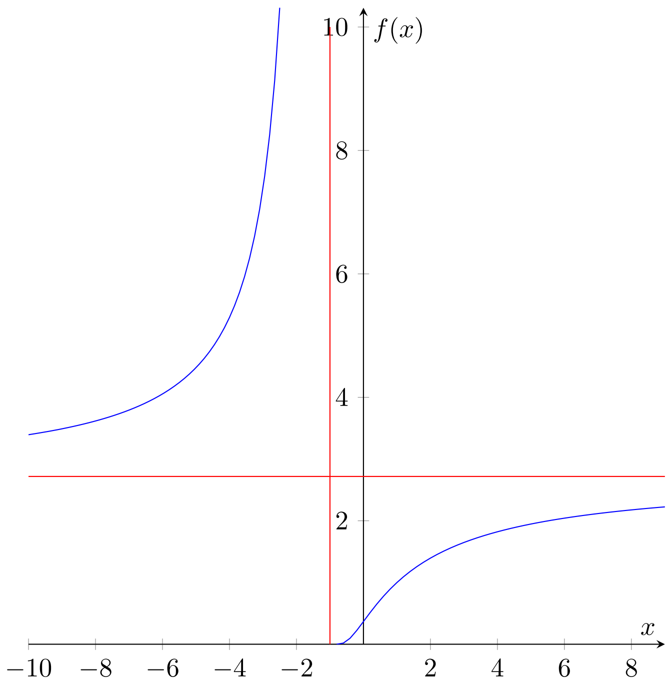
$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = e^-$$

$$f_3'(x) = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}\exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{2}{(x+1)^2}\exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$$

$$f_3''(x) = \left(\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4} + \frac{4}{(x+1)^4}\right)\exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{-4x}{(x+1)^4}\exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

f_3 présente un point d'inflexion en $(0; \frac{1}{e})$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$+$	$\Vert$	$+$	
f	e	$\nearrow$	$+\infty \Vert 0$	$\nearrow$	e



10
8
6
4
2
$f(x)$
x
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8