Département MIDO, première année

# Algèbre 1

## Applications. Ensembles finis - Dénombrement. Nombres complexes. Fonctions polynomiales.
## Année 2024-2025

**Moulka Tamzali-Lafond**

(version du 25 octobre 2024)

*Moulka Tamzali-Lafond*
Université Paris-Dauphine, 75016 Paris, France.
*E-mail :* moulka.tamzali-lafond@dauphine.psl.eu



Ce polycopié a été créé avec LaTeX; pour la mise en forme, nous avons adapté des fichiers de style fournis par la Société Mathématique de France, notamment la classe smfbook.

# ALGÈBRE 1

**Moulka Tamzali-Lafond**

# TABLE DES MATIÈRES

**À propos de ce document** . . . . . . v

**1. Applications** . . . . . . 1
1. Notion d'application d'un ensemble vers un autre ensemble . . . . . . 1
2. Restriction - prolongement . . . . . . 2
3. Composée de deux applications . . . . . . 4
4. Image directe d'une partie de l'ensemble de départ . . . . . . 5
5. Image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée . . . . . . 6
6. Injectivité et surjectivité . . . . . . 7
7. Bijectivité ; bijection réciproque . . . . . . 9
Exercices du chapitre 1 . . . . . . 12

**2. Ensembles finis-Dénombrement** . . . . . . 16
1. Relations sur un ensemble . . . . . . 16
2. Ensembles finis . . . . . . 19
3. Calculs de cardinaux . . . . . . 20
4. Application entre ensembles finis et comparaison des cardinaux . . . . . . 22
5. Dénombrement . . . . . . 24
Exercices du chapitre 2 . . . . . . 28

**3. Nombres complexes** . . . . . . 32
1. Généralités . . . . . . 32
2. Module et argument . . . . . . 35
3. Racines $n$-èmes . . . . . . 40
4. Transformations du plan complexe . . . . . . 43
Exercices du chapitre 3 . . . . . . 46

**4. Fonctions polynomiales** . . . . . . 50
1. Généralités . . . . . . 50
2. Division euclidienne . . . . . . 52
3. PGCD . . . . . . 55
4. Polynômes premiers entre eux . . . . . . 56
5. Racines d'une fonction polynôme . . . . . . 57
6. Polynômes irréductibles ; factorisation . . . . . . 60
Exercices du chapitre 4 . . . . . . 62

# À PROPOS DE CE DOCUMENT

Ce polycopié a été rédigé :

- en reprenant des parties de ceux rédigés par Alexandre Afgoustidis, Anne-Marie Boussion, Juliette Bouhours.
- en tenant compte des échanges avec les collègues : Juliette Bouhours , Denis Pasquignon, Guillaume Carlier.

N'hésitez pas à signaler les erreurs et coquilles.

Je remercie infiniment Denis Pasquignon pour l'aide précieuse et le soutien qu'il m'a apportés.

Et une attention à Dominique Pujal et Geneviève Pons.

# CHAPITRE 1

# APPLICATIONS

## 1. Notion d'application d'un ensemble vers un autre ensemble

**Définition 1.1 – Application**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Une *application $f$ de $E$ dans $F$* est une manière d'associer, à chaque élément $x$ de $E$, un élément $f(x)$ de $F$.

***Remarque 1.2.*** — 
- L'image d'un élément $x$ de $E$ par $f$ est l'élément $f(x)$ de $F$. $f(x)$ est appelé *image de $x$ par $f$* .
- Un antécédent d'un élément $y$ de $F$ est un élément $x$ de $E$ tel que $y = f(x)$.
- Un élément $y$ de $F$ peut n'avoir aucun antécédent par $f$, il peut en avoir un et un seul, il peut en avoir plusieurs...

***Notation.*** — L'ensemble de toutes les applications de $E$ dans $F$ se note $\mathcal{F}(E, F)$.

L'applications $f$ de $E$ dans $F$ se note

$$f\ : E \to F$$

$E$ est *l'ensemble de départ* et $F$ est *l'ensemble d'arrivée*

***Graphe.*** — Soit $f\ : E \to F$. On appelle *graphe de $f$* l'ensemble

$$\Gamma = \{(x, y) \in E \times F \quad / \quad y = f(x)\}$$

On remarquera que si $x$ est un élément de $E$, alors le point $(x, f(x))$ appartient à $\Gamma$.

***Exemple 1.3.*** —

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & f(x, y) = x^2 - 3y + 1 \end{array}$$

À un élément de l'ensemble de départ $\mathbb{R}^2$, donc de la forme $(x, y)$, on lui associe un élément de l'ensemble d'arrivée, qui est un réel.

***Exemple 1.4.*** —

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & n & \mapsto & f(n) = (\sqrt{n}, \exp(n)) \end{array}$$

À un élément de l'ensemble de départ $\mathbb{N}$, donc un entier naturel, on lui associe un élément de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^2$ , donc de la forme $(a, b)$.

***Exemple 1.5.*** —

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (u,v) & \mapsto & f(u,v) = u.v \end{array}$$

À deux vecteurs $u$ et $v$, on associe le produit scalaire. On remarque que $u$ et $v$ sont chacun des éléments de $\mathbb{R}^2$. En posant $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ , on a $f(u,v) = u_1v_1 + u_2v_2$.

**Définition 1.6 – Application identité**

Si $E$ est un ensemble quelconque, on définit application $\mathrm{id}_E$ comme suit :

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{id}_E & : & E & \to & E \\ & & x & \mapsto & x \end{array}$$

(pour tout $x$ de $E$, on a $\mathrm{id}_E(x) = x$).
Son graphe est une partie de $E \times E$ : il s'agit de l'ensemble $\Delta = \{(x,y) \in E \times E \ / \ y = x\}$.

**Définition 1.7 – Fonction indicatrice d'une partie**

Soit $E$ un ensemble non vide et $A$ une partie de $E$.
On appelle fonction indicatrice (ou parfois fonction caractéristique) de $A$, l'application notée $1_A$ de $E$ dans $\{0,1\}$ définie par :

$$\forall x \in E \quad \begin{cases} 1_A(x) = 1 \ si \ x \in A \\ 1_A(x) = 0 \ si \ x \notin A \end{cases}$$

On a en particulier : $1_\emptyset = 0$ et $1_E = 1$.

## 2. Restriction - prolongement

**Définition 1.8 – Restriction d'une application**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
Si $A$ est une partie de l'ensemble de départ $E$, on appelle *restriction de $f$ à $A$*, et on note $f|_A$, l'application

$$\begin{array}{rcccc} f|_A & : & A & \to & F \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

La restriction de $f$ à $A$ n'est donc rien d'autre qu'une version de $f$ où on a « changé l'ensemble de départ ».

***Exemple 1.9.*** — Si on considère

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{5x}{|x|}, \end{array}$$

alors $f$ n'est pas constante. Cependant, la restriction $f|_{\mathbb{R}_+^\star}$ est une fonction constante : il s'agit de la fonction

$$\begin{array}{rcccc} f|_{\mathbb{R}_+^\star} & : & \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 5. \end{array}$$

**Définition 1.10 – Co-restriction d'une application**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
Soit $B$ une partie de l'ensemble d'arrivée $F$ vérifiant la propriété suivante : $\forall x \in E,\ f(x) \subset B$.
On appelle *co-restriction de $f$ à $B$*, et on note $f|^B$, l'application

$$\begin{array}{rccc} f|^B & : & E & \to & B \\ & & x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

La co-restriction de $f$ à $B$ n'est donc rien d'autre qu'une version de $f$ où on a « changé l'ensemble d'arrivée ».

***Exemple 1.11.*** — Considérons la fonction

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^6. \end{array}$$

Comme $f(x)$ est positif pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut considérer la co-restriction $f|^{\mathbb{R}^+}$ : il s'agit simplement de l'application

$$\begin{array}{rcccc} g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \mapsto & x^6. \end{array}$$

Les fonctions $f$ et $g = f|^{\mathbb{R}^+}$ ne sont pas identiques : par exemple, il existe des éléments de l'espace d'arrivée de $f$ n'ayant aucun antécédent par $f$, alors que tout élément de l'espace d'arrivée de $g$ admet au moins un antécédent par $g$.

**Définition 1.12 – Prolongement d'une application**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
Soient $\Omega$ un ensemble contenant $E$ et $g : \Omega \to F$ une application.
On dit que $g$ est un *prolongement de $f$ à $\Omega$* lorsque $g|_E = f$.

***Exemple 1.13.*** — Considérons l'application

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^\pi = e^{\pi \ln(x)}. \end{array}$$

Cette fonction est définie sur $E = \mathbb{R}_+^\star$, et non sur $\Omega = \mathbb{R}$. Cependant, si l'on définit

$$\begin{array}{rcccc} g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} e^{\pi \ln(|x|)} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \end{array}$$

alors on obtient une une application qui prolonge $f$ à $\Omega = \mathbb{R}$.

## 3. Composée de deux applications

**Définition 1.14 – Composée de deux applications**

Soient $E$, $F$, $F'$, $G$ quatre ensembles et deux applications $f : E \to F$ et $g : F' \to G$ . Supposons que l'ensemble d'arrivée $F$ de $f$ soit inclus dans l'ensemble de départ $F'$ de $g$. La *composée de $f$ et $g$*, notée $g \circ f$, est l'application de $E$ dans $G$ définie par

$$\begin{array}{rccc} g \circ f & : & E & \to & G \\ & & x & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$

***Exemple 1.15.*** — Si

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$,
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sin(x)$,

alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin(x)) = (\sin(x))^2 \quad \text{et} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2).$$

***Attention.*** — La notation $g \circ f$ se lit « de droite à gauche » : elle désigne l'application dans laquelle on effectue *d'abord $f$, puis $g$*.

***Exemple 1.16.*** — Considérons les applications

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 - 3x + 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R}_\star^+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(x). \end{array}$$

- La composée $f \circ g$ est bien définie : c'est une application de $\mathbb{R}_\star^+$ dans $\mathbb{R}$, et pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$(f \circ g)(x) = \ln(x)^2 - 3\ln(x) + 1.$$
- La composée $g \circ f$ n'est pas bien définie : il existe des éléments $x$ de l'espace de départ de $f$ pour lesquels il est impossible de définir $g(f(x))$ : c'est le cas, par exemple, de $x = 1$.

Les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ peuvent être très différentes, voire ne pas exister toutes les deux. Il est important de bien regarder les ensembles de départ et d'arrivée.

***Exemple 1.17.*** — Si $f : E \to F$ est une application, alors on a

$$\mathrm{id}_F \circ f = f \quad \text{et} \quad f \circ \mathrm{id}_E = f.$$

***Notation.*** — Soit $f : E \to E$. La composée de $f$ par $f$ est notée $f \circ f$ ou $f^2$ ; ou plus généralement la composée de $f$ par elle-même $p$ fois (pour $p \in \mathbb{N}^*$) notée $f^p$.

**Proposition 1.18 – Associativité de la composition**

*Soient $E$, $F$, $G$, $H$ quatre ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. On a l'égalité*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

*Démonstration.* — Les applications $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ ont même ensemble de départ (à savoir $E$) et même ensemble d'arrivée (à savoir $H$) ; de plus, pour tout $x$ de $E$, on constate que $[h \circ (g \circ f)]\,(x)$ et $[(h \circ g) \circ f]\,(x)$ sont tous les deux égaux à $h\,(g(f(x)))$. Cela prouve l'égalité des deux applications. $\square$

## 4. Image directe d'une partie de l'ensemble de départ

On fixe deux ensembles $E$ et $F$ et une application $f : E \to F$.

**Définition 1.19 – Image directe d'une partie de l'ensemble de départ**

Soit $A$ une partie de $E$. On appelle *ensemble image de $A$ par $f$*, et on note $f(A)$, la partie de $F$ suivante :

$$f(A) = \{y \in F \ / \ \exists x \in A, \quad y = f(x)\}\,.$$

Il s'agit de l'ensemble des éléments de $F$ qui peuvent être obtenus comme image d'un élément de $A$.

Ainsi : $y \in f(A) \iff \exists x \in A,\ y = f(x)$.

***Remarques.*** —
- On a toujours $f(E) \subset F$.
- Soit $A \subset E$. Si $x \in A$ alors $f(x) \in f(A)$.

***Exemple 1.20.*** — Soit l'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

- Si $A = [2, 3]$, alors $f(A) = [4, 9]$.
- Si $A = [-4, 1]$, alors $f(A) = [0, 16]$.
- $f([0, 1]) = [0, 1]$.
- $f([-1, 1]) = [0, 1]$.
- Si $A = \mathbb{R}$, alors $f(A) = \mathbb{R}^+$.

***Remarque 1.21.*** — Ne pas confondre les deux notations suivantes :
- $f(x)$, l'image par $f$ d'un *élément* $x$ de $E$ : c'est un *élément* de l'ensemble d'arrivée $F$.
- $f(A)$, l'image par $f$ d'une *partie* $A$ de $E$ : c'est une *partie* de l'ensemble d'arrivée $F$.

**Proposition 1.22**

*Soit $E$ un ensemble. Soient $A$ et $C$ deux parties de $E$. On a :*

$$A \subset C \implies f(A) \subset f(C)$$

*Démonstration.* — On suppose que $A \subset C$. Montrer que $f(A) \subset f(C)$ revient à montrer que tout élément de $f(A)$ est un élément de $f(C)$. Soit $y \in f(A)$. Par définition, $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or comme par hypothèse $A \subset C$, on a donc $x \in C$, et donc $f(x) \in f(C)$. D'où $y \in f(C)$. $\square$

## 5. Image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée

On fixe deux ensembles $E$ et $F$ et une application $f : E \to F$.

**Définition 1.23 – Image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée**

Soit $B$ une partie de l'ensemble d'arrivée $F$. On appelle *image réciproque de $B$ par $f$*, et on note $f^{-1}(B)$, la partie de l'ensemble de départ $E$ suivante :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \;/\; f(x) \in B\}\,.$$

Il s'agit de l'ensemble des éléments de $E$ dont l'image par $f$ appartient à $B$, c'est à dire l'ensemble de tous les antécédents des éléments de $B$.

Ainsi : $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

***Remarque 1.24.*** — Attention : la notation $f^{-1}$ ne désigne pas l'application notée $f^{-1}$, qui se définit uniquement lorsque l'application $f$ est bijective.

***Exemple 1.25.*** — On considère à nouveau l'application

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

- Si $B = [2,3]$, alors $f^{-1}(B) = [-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.
- Si $B = [-1,9]$, alors $f^{-1}(B) = [-3,3]$.
- $f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$.
- $f^{-1}([-2,-3]) = \emptyset$.
- $f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$.

**Proposition 1.26**

*Soit $F$ un ensemble. Soient $B$ et $C$ deux parties de $F$. On a :*

$$B \subset C \implies f^{-1}(B) \subset f^{-1}(C)$$

*Démonstration.* — On suppose que $B \subset C$. Montrer que $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(C)$ revient à montrer que tout élément de $f^{-1}(B)$ est un élément de $f^{-1}(C)$. Soit $x \in f^{-1}(B)$. Cela est équivalent à $f(x) \in B$. Or comme par hypothèse $B \subset C$, on a donc $f(x) \in C$, et donc $x \in f^{-1}(C)$. $\square$

**Proposition 1.27**

*Soient deux ensembles $E$ et $F$ , une application $f : E \to F$ . On considère $A \subset E$ et $B \subset F$. On a :*

$$A \subset f^{-1}(f(A))$$
$$f(f^{-1}(B)) \subset B$$

*Démonstration.* — 1. Montrons $A \subset f^{-1}(f(A))$. Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$, ce qui est équivalent à $x \in f^{-1}(f(A))$. D"où l'inclusion.

2. Montrons $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Alors $\exists x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Or $x \in f^{-1}(B)$ est équivalent à $f(x) \in B$, d'où on a montré que $y \in B$.

□

***Exemple 1.28.*** — En reprenant l'exemple de la fonction carrée, on montre :
- $f(f^{-1}([-1,1])) = [0,1]$.
- $f^{-1}(f([0,1])) = [-1,1]$.

## 6. Injectivité et surjectivité

### 6.1. Injectivité. —

Soient $E$ et $F$ deux ensembles et une application $f : E \to F$ .

#### 6.1.1. *Définition et exemples.* —

**Définition 1.29 – Injectivité d'une application**

On dit que $f$ est *injective* (ou *une injection*) lorsque tout élément de $F$ admet *au plus un antécédent* dans $E$ par $f$.

**Proposition 1.30 – Injectivité d'une application**

*Pour que $f$ soit injective, il faut et il suffit que la propriété suivante soit vérifiée :*

$$\forall x \in E,\ \forall x' \in E, \quad (\ f(x) = f(x') \implies x = x'\ )\,. \tag{$\star$}$$

***Remarque 1.31.*** — On pourra aussi utiliser la contraposée :

$$f \text{ injective} \iff \forall x \in E, \forall x' \in E, \quad (\ x \neq x' \implies f(x) \neq f(x'))$$

.

***Exemple 1.32.*** — Si $E$ est un ensemble quelconque, alors l'application $\mathrm{id}_E : E \to E$ est injective (on rappelle que l'application $\mathrm{id}_E$ est définie par : $\forall x \in E,\ \mathrm{id}_E(x) = x$).

***Exemple 1.33.*** — Soit l'application :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Montrons qu'elle est injective.

Soient $x$ et $x'$ deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^*$, tels que $f(x) = f(x')$. Alors par définition de $f$, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x'}$ : d'où on obtient $x = x'$.

***Exemple 1.34.*** — La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas injective, car $\sin(0) = \sin(2\pi)$ alors que $0 \neq 2\pi$. On utilise un contre-exemple pour montrer que l'application n'est pas injective.

***Exemple 1.35* (De l'importance de l'ensemble de départ).** — La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $x \mapsto x^2$, n'est pas injective. En revanche, la restriction $h = f|_{\mathbb{R}^+}$, qui est l'application

$$\begin{array}{rccc} h & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2, \end{array}$$

est injective. En effet, pour tout élément $y$ de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$, il existe au plus un élément $x \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $h(x) = y$, puisque selon la valeur de $y$, deux cas peuvent se présenter :

- Si $y < 0$, alors $y$ n'admet aucun antécédent par $h$ ;
- Si $y \geq 0$, alors $y$ admet un et un seul antécédent par $h$ : il s'agit du nombre $x = \sqrt{y}$.

**Proposition 1.36 – Cas des applications strictement monotones dans $\mathbb{R}$**

*Soient $E$ et $F$ deux parties de $\mathbb{R}$ et une application $f : E \to F$ . Si $f$ est strictement monotone, alors $f$ est injective.*

**6.1.2.** *Composition et injectivité.* —

**Proposition 1.37 – Composition et injectivité**

*Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles ; considérons deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.*

1. *Si $f$ et $g$ sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
2. *Si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective (mais on ne peut rien en déduire pour $g$).*

*Démonstration.* —

1. Supposons que $f$ et $g$ soient injectives et montrons que l'application $(g \circ f) : E \to G$ est injective. Utilisons pour cela la Proposition 1.30 : fixons deux éléments $x$, $x'$ de $E$ et supposons qu'on a $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Nous devons montrer que $x = x'$.

   Notre hypothèse peut s'écrire $g(f(x)) = g(f(x'))$, et si nous notons $a = f(x)$ et $a' = f(x')$, on peut la réécrire comme : $g(a) = g(a')$. La fonction $g$ étant injective, on peut en déduire que $a = a'$. Mais dire que $a = a'$, c'est dire que $f(x) = f(x')$ ; comme $f$ est injective, on en déduit $x = x'$.
2. Supposons que $(g \circ f)$ soit injective et montrons que l'application $f : E \to F$ est injective.

   Fixons deux éléments $x$, $x'$ de $E$ et supposons qu'on a $f(x) = f(x')$ ; nous devons montrer que $x = x'$.

   Si $f(x)$ et $f(x')$ sont identiques, alors en composant par $g$, $g(f(x))$ et $g(f(x'))$ sont identiques aussi : on a donc $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Comme $(g \circ f)$ est supposée injective, on en déduit $x = x'$.

□

**6.2. Surjectivité.** —

**6.2.1.** *Définition et exemples.* —

Soient $E$ et $F$ deux ensembles et une application $f : E \to F$.

**Définition 1.38 – Surjectivité d'une application**

On dit que $f$ est *surjective* (ou *une surjection*) lorsque tout élément de $F$ admet *au moins un antécédent* par $f$.

**Proposition 1.39 – Surjectivité d'une application**

$$f \text{ surjective} \iff f(E)=F \iff \forall y\in F\ \exists x\in E \text{ tel que } y=f(x) \iff \forall y\in F, f^{-1}(\{y\})\neq\emptyset$$

***Exemple 1.40.*** — Si $E$ est un ensemble quelconque, alors l'application $\mathrm{id}_E : E\to E$ est surjective.

***Exemple 1.41* (De l'importance de l'espace d'arrivée).** — La fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $x\mapsto x^2$, n'est pas surjective. En effet, l'élément $-3$ de l'espace d'arrivée n'admet aucun antécédent par $f$. En revanche, la co-restriction $h=f|^{\mathbb{R}^+}$, qui est l'application

$$\begin{array}{cccc} h : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & x^2, \end{array}$$

est surjective. En effet, pour tout élément $y$ de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^+$, il existe au moins un élément $x$ de $\mathbb{R}$ vérifiant $x=h(y)$ : on peut choisir $x=\sqrt{y}$.

**6.2.2.** *Composition et surjectivité.* —

**Proposition 1.42 – Composition et surjectivité**

*Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles ; considérons deux applications $f:E\to F$ et $g:F\to G$.*

1. *Si $f$ et $g$ sont surjectives, alors $g\circ f$ est surjective.*
2. *Si $g\circ f$ est surjective, alors $g$ est surjective (mais on ne peut rien en déduire pour $f$).*

*Démonstration.* —

1. Supposons que $f$ et $g$ soient surjectives ; pour vérifier que $(g\circ f):E\to G$ est surjective, nous devons montrer que tout élément de $G$ admet au moins un antécédent par $g\circ f$.

   Soit $z$ un élément de $G$. Comme $g:F\to G$ est surjective, il existe au moins un élément $y$ de $F$ vérifiant $g(y)=z$. Fixons un tel $y$. Comme $f:E\to F$ est surjective, il existe au moins un élément $x$ de $E$ vérifiant $f(x)=y$.

   Mais si nous fixons un tel $x$, alors $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(y)=z$, donc $x$ fournit un antécédent de $z$ par $(g\circ f)$, comme espéré.
2. Supposons $g\circ f$ surjective, et montrons qu'alors $g$ est surjective. Pour cela, considérons un élément $z$ de $G$ et vérifions qu'il admet au moins un antécédent par $g$.

   Comme $(g\circ f):E\to G$ est supposée surjective, il existe au moins un élément $x$ de $E$ vérifiant $(g\circ f)(x)=z$. Mais alors $z=g(f(x))$, et si nous posons $y=f(x)$, nous obtenons un élément $y\in F$ vérifiant $g(y)=z$, comme espéré.

□

## 7. Bijectivité ; bijection réciproque

**7.1. Définition et exemples.** — Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f:E\to F$ une application.

**Définition 1.43 – Bijectivité d'une application**

On dit que $f$ est *bijective* (ou une *bijection*) lorsqu'elle est à la fois injective et surjective, autrement dit, lorsque tout élément de $F$ admet *un et un seul antécédent* par $f$.

**Proposition 1.44 – Bijectivité d'une application**

$$f \text{ bijective } \iff \forall y \in F \text{ l'équation } y = f(x) \text{ admet une solution unique } x \in E$$

***Exemple 1.45.*** —

- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3x+1$, est bijective. Si $y$ est un élément de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}$, alors il existe un et un seul élément $x$ de l'espace de départ $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(x) = y$ : il s'agit du nombre $x = \dfrac{y-1}{3}$.
- La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas bijective, puisqu'elle n'est pas surjective : le nombre $(-3)$ n'admet aucun antécédent par $f$.

**Définition 1.46 – Bijection réciproque d'une application bijective**

Soit $f : E \to F$ une application bijective. On définit la *bijection réciproque* de $f$, notée $f^{-1} : F \to E$.

Si $f$ est bijective, alors pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a : $\quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$.

***Remarque 1.47.*** — Il suffira de démontrer que l'équation $y = f(x)$ admette une solution unique, pour montrer que l'application $f$ est bijective et déterminer l'application réciproque $f^{-1}$. On cherchera à exprimer $x$ en fonction de $y$.

***Exemple 1.48.*** — Soit la fonction

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^\star \\ & & x & \mapsto & 4e^{5x}, \end{array}$$

on veut résoudre pour tout $y \in \mathbb{R}_+^\star$, $y = f(x)$. Donc $y = 4e^{5x}$. D'où $x = \dfrac{1}{5}\ln(\dfrac{y}{4})$. On a un unique $x \in \mathbb{R}$ solution et ainsi, $f$ est bijective ; de plus, sa bijection réciproque est l'application

$$\begin{array}{rcccl} f^{-1} & : & \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ & & a & \mapsto & \dfrac{1}{5}\ln(\dfrac{a}{4}). \end{array}$$

***Attention* (notations : $f^{-1}(B)$ vs $f^{-1}(y)$).** — Dans ce cours, la notation « $f^{-1}$ » a été utilisée dans deux contextes différents, qu'il ne faut pas confondre :

- Si $y$ est un *élément* de $F$, la notation $f^{-1}(y)$ n'a de sens *que si $f$ est bijective* ; elle désigne alors un *élément de $E$*.
- Si $B$ est une *partie* de $F$, la notation $f^{-1}(B)$ a *toujours* un sens, même si $f$ n'est pas bijective : elle désigne alors un *ensemble* inclus dans $E$.

Si $f : E \to F$ est bijective, alors $f^{-1} : F \to E$ l'est aussi et on a $(f^{-1})^{-1} = f$.

### 7.2. Bijectivité et composition. —

**Proposition 1.49 – Composée d'une bijection et de sa réciproque**

*Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application.*
*Si $f$ est bijective, alors la bijection réciproque $f^{-1} : F \to E$ vérifie :*

$$f^{-1} \circ f = id_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = id_F.$$

**Proposition 1.50 – Caractérisation de la bijectivité avec la composition**

*Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application.*
*Pour que $f$ soit bijective, il faut et il suffit qu'il existe une application $g : F \to E$ vérifiant :*

$$g \circ f = id_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = id_F.$$

*Lorsque c'est le cas, l'application $g$ coïncide nécessairement avec la bijection réciproque $f^{-1}$.*

***Exemple 1.51.*** — Soit l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, -y). \end{array}$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(f \circ f)(x, y) = f\,(f(x, y)) = f(x, -y) = (x, -(-y)) = (x, y)$.
Par conséquent, on a $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. On en déduit que :

- l'application $f$ est bijective
- et de plus, la bijection réciproque $f^{-1}$ n'est autre que $f$.

**Définition 1.52 – Application involutive**

On dit qu'une application $f : E \to E$ vérifiant $f \circ f = \mathrm{id}_E$ , est *involutive* ou une *involution.*
On remarque qu'alors toute application $f$ involutive est bijective et que $f^{-1} = f$.

**Proposition 1.53 – Bijection réciproque d'une composée**

*Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles ; considérons deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.*
*Si $f$ et $g$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est donnée par la formule suivante :*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

## Exercices du chapitre 1

*Généralités.* —

***Exercice 1.1.*** — Déterminer l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée des applications $h$ dans les cas suivants :

1. Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, on pose $h(x, y) = (f(x), g(y))$.
2. Si $f : [0, 1] \times [1, 2] \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{N} \to [-1, 2]$
   (a) on pose $h(u, v) = (f(u), g(v))$
   (b) on pose $h(x, y, z) = g(x + y + z)$

***Exercice 1.2.*** — On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} R_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{|x|}. \end{array}$$

Les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles bien définies ?

***Exercice 1.3.*** — On considère les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} ]0, +\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x), \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$$

1. Les applications $f$, $g$, $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles bien définies ?
2. Si elles ne le sont pas, déterminer les ensembles de départ et d'arrivée pour qu'elles le soient.

*Image directe, image réciproque.* —

***Exercice 1.4.*** — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

1. Si $A = [0, 2]$ et $B = [1, 4]$, déterminer graphiquement $f(A)$, $f(B)$, $f(A \cap B)$, $f(A \cup B)$, $f(A) \cap f(B)$ et $f(A) \cup f(B)$.
2. Trouver deux ensembles $A$ et $B$ pour lesquels on a $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

***Exercice 1.5.*** — Soient $E$ un ensemble et $f : E \to E$ une application. On suppose vérifiée l'égalité $f \circ f = f$.

Montrer l'équivalence suivante :

$$\forall x \in E, \quad (x \in f(E) \iff f(x) = x)\,.$$

***Exercice 1.6.*** — Soit $f : E \to F$ . Soient $A$ et $C$ deux parties de $E$.
Montrer

1. $f(A \cap C) \subset f(A) \cap f(C)$.
2. $f(A \cup C) = f(A) \cup f(C)$.

***Exercice 1.7.*** — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

Si $A = [0, 4]$ et $B = [-1, 1]$, que valent $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \cap B)$ et $f^{-1}(A \cup B)$ ?

***Exercice 1.8.*** — Soit $f : E \to F$ . Soient $B$ et $D$ deux parties de $F$. Montrer

1. $f^{-1}(B \cap D) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D)$.

2. $f^{-1}(B \cup D) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(D)$.

***Exercice 1.9.*** — On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) = |x|. \end{array}$$

Déterminer les ensembles :

1. $f(\{-1,2\})$ , $f([-3,-1])$ et $f([-3,1])$
2. $f^{-1}(\{4\})$ , $f^{-1}(\{-1\})$ et $f^{-1}([-1,4])$.

***Exercice 1.10.*** — On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) = \frac{2x}{1+x^2}. \end{array}$$

1. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
2. Donner l'image réciproque par $f$ de $[0,1]$.

***Exercice 1.11.*** — Soient $E$ et $F$ deux ensembles, $f : E \to F$ une application. Soient $A$ une partie de $E$ et $B$ une partie de $F$. Montrer l'égalité suivante :

$$f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B.$$

***Exercice 1.12.*** —
On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f & : & [0,1] \times [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & x+y. \end{array}$$

Déterminer l'ensemble $f([0,1] \times [0,1])$.

***Exercice 1.13.*** — Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & & (n,p) & \mapsto & n+p. \end{array}$$

1. Déterminer les ensembles $f^{-1}(\{3\})$, $f(\mathbb{N} \times \{2\})$.
2. Déterminer l'ensemble $f((2\mathbb{N}) \times (3\mathbb{N}))$ où, pour $a \in \mathbb{N}$, la notation $a\mathbb{N}$ désigne l'ensemble $\{ak,\ k \in \mathbb{N}\}$.

***Exercice 1.14.*** — 1. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & e^x + e^y. \end{array}$$

Déterminer l'image directe $f(\mathbb{R}^2)$.

2. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & e^x - e^y. \end{array}$$

   (a) Déterminer l'image réciproque $g^{-1}(\{0\})$.
   (b) Déterminer l'image directe $g(\mathbb{R}^2)$.

*Injectivité-Surjectivité.* —

***Exercice 1.15.*** — Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & -n \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & (-1)^n \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n \cdot (-1)^n \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n^2 \cdot (-1)^n. \end{array}$$

***Exercice 1.16.*** — On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-x}. \end{array}$$

1. Déterminer si $f$ est injective et si $f$ est surjective.
   (*On pourra utiliser librement des résultats d'analyse : tableau de variations, limites...)*.
2. Déterminer les ensembles $f^{-1}(\{-e\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f(\mathbb{R}_+)$, $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

***Exercice 1.17.*** — Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications. On considère l'application

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (f(x), g(x))\,. \end{array}$$

1. Montrer que si l'une des deux applications $f$, $g$ est injective, alors l'application $h$ est injective.
2. On suppose que $f$ et $g$ sont surjectives. A-t-on nécessairement $h$ surjective ?
3. Montrer que si $h$ est surjective, alors les applications $f$ et $g$ sont nécessairement surjectives.
4. Donner un exemple où $h$ est injective mais où aucune des deux applications $f$, $g$ n'est injective.

***Exercice 1.18.*** — Soient $E, F, G$ trois ensembles ; on considère deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et si $f$ est surjective, alors $g$ est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et si $g$ est injective, alors $f$ est surjective.

***Exercice 1.19.*** — Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soient $A$ une partie de $E$ et $B$ une partie de $F$.

1. Montrer que $f$ *injective* $\iff$ *pour toute partie* $A$ *de* $E$, $f^{-1}(f(A)) = A$.
2. Montrer que $f$ *surjective* $\iff$ *pour toute partie* $B$ *de* $F$, $f(f^{-1}(B)) = B$.

***Exercice 1.20.*** — On considère un ensemble $E$ et une application $f : E \to E$. On suppose vérifiée l'égalité $f \circ f \circ f = f$.

Montrer l'équivalence suivante : $f$ est surjective si et seulement si $f$ est injective.

*Bijectivité.* —

***Exercice 1.21.*** — On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} R_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{|x|}. \end{array}$$

1. Les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles bien définies ?
2. Montrer que $f$ et $g$ sont bijectives et déterminer leurs bijections réciproques.

***Exercice 1.22.*** — On considère les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} ]1, +\infty[ & \to & ]0, +\infty[ \\ x & \mapsto & \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[3]{1-x^3} \end{array}$$

Montrer que $f$ et $g$ sont bijectives et déterminer leurs bijections réciproques.

***Exercice 1.23.*** — On considère des ensembles $E$, $F$, $G$, $H$ et des applications $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$.

Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont toutes les deux bijectives, alors $f$, $g$ et $h$ sont toutes les trois bijectives.

***Exercice 1.24.*** — On considère deux ensembles $E$ et $F$ et une application $f : E \to F$.

1. Montrer qu'il n'y a en général pas d'inclusion systématique entre $f(E \setminus A)$ et $F \setminus f(A)$ pour $A \in \mathcal{P}(E)$.
2. Montrer l'équivalence suivante : $f$ est bijective $\iff \quad \forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f(E \setminus A) = F \setminus f(A) \quad$.

# CHAPITRE 2

# ENSEMBLES FINIS-DÉNOMBREMENT

## 1. Relations sur un ensemble

### 1.1. Généralités sur les relations. —

**Définition 2.1**

Une relation binaire notée $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble $E$ est au choix :
- une propriété qui relie deux éléments $x$ et $y$ de $E$. On note $x \mathcal{R} y$ pour dire que $x$ est en relation avec $y$.
- une partie de $E \times E$. On note $x \mathcal{R} y$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Pour un couple $(x, y) \neq (y, x)$ on distinguera $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$.
Par exemple, dans $\mathbb{R}$, si la relation $\mathcal{R}$ est "$<$" : si l'on a $x < y$, on n'a pas $y < x$.

Les relations binaires couramment utilisées sont :
- les relations sur $\mathbb{R}$ : $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ ;
- la relation sur $\mathbb{Z}$ "$|$" : $a|b$ soit $a$ divise $b$ ;
- les relations sur les droites : "$||$" droites parallèles ou "$\perp$" droites orthogonales.

***Exemple 2.2.*** — Soit $G = \{(x, x)\ /\ x \in E\}$ ; alors $x \mathcal{R} y \iff x = y$.

**Propriétés.** —

Soit $E$ un en ; alors semble et $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur $E$. On dit que :
- $\mathcal{R}$ est réflexive $\iff \forall x \in E,\ x \mathcal{R} x$.
- $\mathcal{R}$ est symétrique $\iff \big(\forall (x, y) \in E^2,\ x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x\big)$.
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique $\iff \big(\forall (x, y) \in E^2,\ x \mathcal{R} y \textit{ et } y \mathcal{R} x \implies x = y\big)$.
- $\mathcal{R}$ est transitive $\iff \big(\forall (x, y, z) \in E^3,\ x \mathcal{R} y \textit{ et } y \mathcal{R} z \implies x \mathcal{R} z\big)$.

***Exemple 2.3.*** — On pose $E = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{R}$ relation de graphe $G = \{(a, b)\}$ .
- $\mathcal{R}$ nest pas réflexive : $\exists a \in E$ tel que $(a, a) \notin G$.
- $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique : $\exists (a, b) \in E^2$ tels que $a \mathcal{R} b$ et $b$ n'est pas en relation avec $a$ car $(b, a) \notin G$.
- $\mathcal{R}$ est transitive.

### 1.2. Relations d'ordre - Relations d'équivalence. —

Soit un ensemble $E$ et $\mathcal{R}$ relation binaire.

**Définition 2.4 – Relation d'ordre**

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre $\iff$ $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemples de relations d'ordre utilisées couramment :
- les relations $\leq$ et $\geq$ sur $\mathbb{R}$ ;
- la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}^*$ (mais pas sur $\mathbb{Z}^*$ !) ;

***Exemple 2.5.*** — L'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$.
Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$. On définit la relation $\mathcal{R}$ : $A \mathcal{R} B \iff A \subset B$.
- On a toujours $A \subset A$ donc $A \mathcal{R} A$ et la relation est réflexive.
- La relation n'est pas symétrique : on peut avoir $A \subset B$ et $B$ non inclus dans $A$ ;
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique : $A \subset B$ *et* $B \subset A \iff A = B$.
- $\mathcal{R}$ est transitive : $A \subset B$ *et* $B \subset C \implies A \subset C$.

**Définition 2.6 – Relation d'équivalence**

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence $\iff$ $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

Relations d'équivalence utilisées couramment :
- la relation d'égalité sur un ensemble $E$.
- La relation "$\equiv [k]$" : congruence modulo $k$ .

***Exemple 2.7.*** — Congruence modulo $2\pi$ On considère : $x \mathcal{R} y \iff x \equiv y[2\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = y + 2k\pi$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $x = x + 0 \times 2\pi$ donc $x \mathcal{R} x$ et $\mathcal{R}$ est réflexive.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \mathcal{R} y$. Alors on a $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + 2k\pi$ et $y = x - 2k\pi = x + 2(-k)\pi$ avec $-k \in \mathbb{Z}$. Donc $y \mathcal{R} x$ et $\mathcal{R}$ est symétrique.
- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$. Alors $\exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x = y + 2k\pi = z + 2k'\pi + 2k\pi = z + 2(k' + k)\pi$. Donc $x \mathcal{R} z$ et $\mathcal{R}$ est transitive.

***Exemple 2.8.*** — Application

Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.
Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $E$ par : $\forall (x, y) \in E^2$, $x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$.

On montre que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence :
- Pour $x \in E$, On a bien $f(x) = f(x)$ donc $x \mathcal{R} x$ et $\mathcal{R}$ est réflexive.
- Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $x \mathcal{R} y$. Donc $f(x) = f(y)$ et alors $y \mathcal{R} x$ car $f(y) = f(x)$. D'où $\mathcal{R}$ est symétrique.
- Soit $(x, y, z) \in E^3$ tel que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$. Alors $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$. Donc $f(x) = f(z)$ e $x \mathcal{R} z$ : $\mathcal{R}$ est transitive.

### 1.3. Partitions-Classes d'équivalence. —

**Définition 2.9 – Partition**

La partition d'un ensemble $E$ est la famille des parties non vides de $E$, disjointes deux à deux et dont l'union est l'ensemble $E$.
$\Longleftrightarrow$ Une partition d'un ensemble $E$ est un ensemble constitué des parties $A_i$ de $E$ vérifiant :
- $A_i \neq \emptyset$, $\forall i \in I$ avec $I$ un ensemble non vide.
- $\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $E = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ .

***Exemple 2.10.*** — Soit l'ensemble $E = \{1,2,3\}$ .
- Les partitions sont : $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3\}\}$, $\{\{1\},\{2,3\}\}$ et $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.
- $\{\emptyset,\{1,3\},\{2\}\}$ ou $\{\{2\},\{3\}\}$ ne sont pas des partitions de $E$.

***Exemple 2.11.*** — $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ n'est pas une partition de $\mathbb{R}$ car 0 est un élément commun.

**Définition 2.12 – Classes d'équivalence**

Soit un ensemble $E$ muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ .
- On appelle classe d'équivalence d'un élément $x$ de $E$ pour la relation $\mathcal{R}$, l'ensemble, noté $Cl(x)$ (ou parfois $\dot{x}$), des éléments de $E$ en relation avec $x$ ; ainsi pour un élément $x$ de $E$ :
$$Cl(x) = \{y \in E \ : \ y \,\mathcal{R}\, x\}.$$
- Les classes d'équivalence forment une partition de $E$.
- L'ensemble des classes d'équivalence de $E$ pour $\mathcal{R}$ est appelé ensemble quotient de $E$ pour $\mathcal{R}$ et est noté $E/\mathcal{R}$.

Remarque : $\forall x \in E$, $Cl(x) \neq \emptyset$ car $x \in Cl(x)$.

***Exemple 2.13.*** — Sur $\mathbb{Z}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $x \,\mathcal{R} y$ *ssi* $x - y$ *est divisible par* 2. Il y a deux classes d'équivalence pour relation : l'ensemble des entiers pairs (la classe de 0), et l'ensemble des entiers impairs (la classe de 1).

***Exemple 2.14.*** — Congruence modulo $2\pi$.
On va déterminer la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$ pour cette relation d'équivalence.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $y$ est un élément de la classe de $x$ si et seulement si $y \,\mathcal{R}\, x$. Soit si $y - x \in 2\pi\mathbb{Z}$ c'est à dire $y \in x + 2\pi\mathbb{Z}$. Ainsi $Cl(x) = \{x + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$.

***Exemple 2.15.*** — Exemple d'application. Soit $f \ : \ E \to E$, $\forall (x,y) \in E^2$, $x \,\mathcal{R}\, y \iff f(x) = f(y)$.
Soit la fonction définie sur $E = \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.
- On a montré dans l'exemple 2.8 que la relation est une relation d'équivalence.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche les éléments $y \in \mathbb{R}$ tels que $y \,\mathcal{R}\, x$. On doit donc résoudre l'équation en $y$ : $\sin(y) = \sin(x)$. Les solutions sont $y = x + 2k\pi$ ou $y = \pi - x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
  Donc $Cl(x) = \{x + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - x + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$.

## 2. Ensembles finis

### 2.1. Définitions. —

**Définition 2.16 – Ensembles équipotents**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles quelconques. On dit que $E$ et $F$ sont équipotents s'il existe une bijection de $E$ sur $F$.

***Exemple 2.17.*** — Soient $X_1, X_2, Y_1, Y_2$ tels que $X_1$ et $Y_1$ sont équipotents et $X_2$ et $Y_2$ sont équipotents. Montrer que $X_1 \times X_2$ est équipotent à $Y_1 \times Y_2$.

**Définition 2.18 – Ensemble dénombrable**

On dit qu'un ensemble $E$ et est dénombrable s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

***Remarque 2.19.*** —
- De façon figurée, un ensemble est dénombrable si l'on peut énumérer ses éléments : son 1er élément est $\cdots$ , son 2ème est $\cdots$
- En particulier, l'ensemble $\mathbb{N}$ est dénombrable.
- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
- Le produit cartésien d'ensembles dénombrables est dénombrable.

**Définition 2.20 – Ensemble fini**

- Un ensemble E est fini s'il est vide ou s'il existe un entier $n \geq 1$ et une bijection de $E$ sur l'ensemble $[\![1, n]\!]$.
- $n$ est unique, c'est le nombre d'éléments de $E$
- On l'appelle cardinal de E et on le note $\mathrm{Card}(E)$ ou $\sharp E$ ou $\mid E \mid$.
- Par convention, $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$.
- On dit qu'un ensemble $E$ est infini s'il n'est pas fini.

***Remarque 2.21.*** — Toute partie majorée de $\mathbb{N}$ est finie.

**Proposition 2.22 – Parties d'un ensemble fini**

*Soient $E$ un ensemble fini, et $A$ une partie de $E$, alors $A$ est fini et* $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(E)$.
*De plus,* $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$ *si et seulement si* $A = E$.

**Proposition 2.23**

*Soient deux ensembles finis $E$ et $F$ tels que* $\mathrm{Card}(E) = n$ *et* $\mathrm{Card}(F) = p$.
- $\mathrm{Card}\,(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.
- $\mathrm{Card}\,(\mathcal{F}(E, F)) = p^n$.

## 3. Calculs de cardinaux

Dénombrer un ensemble fini, c'est déterminer le cardinal de cet ensemble, autrement dit compter ses éléments.
Il est important de choisir une représentation mathématique appropriée qui permettra de caractériser sans ambiguïté les éléments de l'ensemble.

### 3.1. Principe de la somme. —

**Proposition 2.24 – Cardinal d'une réunion disjointe**

*Soient $A$, $B$, $A_i$ $(1 \leq i \leq k)$ des parties finies d'un ensemble $E$.*

- *si $A$ et $B$ sont disjointes, $A \cup B$ est finie et* $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}A + \mathrm{Card}B \quad (1)$ *;*
- *si les $A_i$ sont deux à deux disjointes,* $\mathrm{Card}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Card}(A_i) \quad (2)$ *;*
- *si $E$ est fini alors* $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(A) \ + \ \mathrm{Card}(\overline{A}) \quad (3)$.

*Démonstration.* — • L'égalité (1) est évidente si $A$ ou $B$ est vide.
On se limite donc au cas où $A$ est de cardinal $p \geq 1$ et $B$ de cardinal $q \geq 1$.
Il existe une bijection $f$ de $[\![1, p]\!]$ dans $A$ et une bijection $g$ de $[\![1, q]\!]$ dans $B$.
On considère l'application $h$ définie de $[\![1, p+q]\!]$ dans $A \cup B$ par :

$$h(k) = \begin{cases} f(k) & si\ 1 \leq k \leq p \\ g(k-p) & si\ p+1 \leq k \leq p+q. \end{cases}$$

L'application $h$ est bijective, ce qui permet d'affirmer que $A \cup B$ est fini et que $\mathrm{Card}(A \cup B) = p + q$.

- L'égalité (2) se démontre par récurrence sur $k$ à partir de l'égalité (1).
- L'égalité (3) est un cas particulier de l'égalité (1) avec $B = \overline{A}$.

□

**Lemme 2.25 – Lemme des bergers**

*Soit un ensemble $E$ tel que $E = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ , les sous-ensembles $A_i$ étant deux à deux disjoints et de même cardinal $p$. Alors* $\mathrm{Card}(E) = kp$.

*Démonstration.* — C'est une application immédiate du principe de la somme dans le cas particulier où les $A_i$ sont de même cardinal. Ce lemme peut s'utiliser directement pour calculer $\mathrm{Card}(E)$, mais aussi “à l'envers”, par exemple pour calculer $p$ si $\mathrm{Card}(E)$ et $k$ sont connus.

□

***Remarque 2.26.*** — Pour calculer le cardinal d'un ensemble fini $E$, il peut être judicieux d'écrire cet ensemble comme une union de sous-ensembles deux à deux disjoints dont on sait déterminer les cardinaux (on parle dans ce cas d'union disjointe). Le cardinal de $E$ est alors la somme des cardinaux des sous-ensembles ainsi mis en évidence.
Mais évidemment cela suppose que le recensement des éléments de $E$ permette de faire apparaître “naturellement” une partition de l'ensemble.

**Proposition 2.27 – Cardinal d'une réunion quelconque**

*Si $A$ et $B$ sont deux parties finies d'un ensemble $E$ :*

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

*Démonstration.* — • On a $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. Comme $(B \setminus A) \subset B$ alors $)B \setminus A)$ est fini et $A \cup (B \setminus A)$ est fini.
Les ensembles $A$ et $(B \setminus A)$ étant disjoints, $\mathrm{Card}(A \cup (B \setminus A)) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B \setminus A)$ donc $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B \setminus A)$.
Par ailleurs, $(B \setminus A) \cup (B \cap A) = B$, et $(B \setminus A)$ et $(B \cap A)$ sont disjoints et finis. Donc $\mathrm{Card}(B \setminus A) + \mathrm{Card}(B \cap A) = \mathrm{Card}(B)$. Soit $\mathrm{Card}(B \setminus A) = \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(B \cap A)$.
Ainsi on a bien $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.

□

***Remarque 2.28.*** — Cette formule se généralise ; Elle porte le nom de formule de Poincaré ou formule du crible :
Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq k}$ est une famille finie de parties finies de E, alors

$$\mathrm{Card}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leq k} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}).$$

Elle se démontre par récurrence. Le cas de trois parties est à faire en exercice.

### 3.2. Principe du produit. —

**Proposition 2.29 – Cardinal du produit cartésien d'ensembles finis**

*Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis, de cardinaux respectifs $n$ et $l$.*
- *Le produit cartésien $E \times F$ est fini, et $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$.*
- *Plus généralement, si on a $k$ ensembles finis $E_i$ $(1 \leq i \leq k)$, le produit cartésien $E_1 \times \ldots \times E_k$ est fini, et $\mathrm{Card}(E_1 \times \ldots \times E_k) = \mathrm{Card}(E_1) \times \ldots \times \mathrm{Card}(E_k)$.*
- *En particulier , pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Card}(E^p) = n^p$.*

*Démonstration.* — De manière informelle.
$\mathrm{Card}(E \times F)$ est le nombre d'éléments de $E \times F$. Le nombre d'éléments est le nombre de façons de "faire" un élément. Pour "faire" un élément $(a, b) \in E \times F$, on choisit $a$ dans $n$ éléments et $b$ dans $l$ éléments. □

***Exemple 2.30.*** — Dans une cantine où les étudiants ont à choisir :
- une entrée parmi : carottes râpées, betteraves, oeuf mayonnaise,
- un plat parmi : poulet, poisson,
- un accompagnement parmi : riz, épinards,
- un dessert parmi : banane, yaourt, flan, compote de pommes,

L'ensemble des menus possibles peut être modélisé par un produit cartésien ayant $3 \times 2 \times 2 \times 4 = 48$ éléments.

**Proposition 2.31 – Principe du produit, appelé aussi principe multiplicatif**

*Soit un ensemble non vide $E$ dont chaque élément peut se définir par 2 étapes, la première étape offrant $n$ possibilités et la seconde $m$, quel que soit le choix de la première.*
*Alors,* $\mathrm{Card}(E) = nm$.

***Exemple 2.32.*** — Le nombre de tirages ordonnés possibles lorsqu'on tire deux fois une carte sans remise dans un jeu de 32 est : $32 \times 31 = 992$. (Ce n'est pas un produit cartésien).

***Exemple 2.33.*** — Supposons la cantine de l'exemple 2.30 réorganisée de façon qu'après le choix de l'entrée les étudiants se divisent en deux files :

- la première file propose poulet-riz, puis en dessert au choix banane ou yaourt ;
- la seconde file propose poisson-épinards, puis en dessert flan ou compote.

Il n'y a plus alors que $3 \times 2 \times 2 = 12$ menus possibles.

Dans ces deux exemples, l'ensemble à dénombrer ne peut être modélisé par un produit cartésien, mais le principe du produit s'applique. Attention : ce ne serait pas le cas si dans l'exemple ci-dessus on rajoutait un troisième dessert uniquement à la seconde file.

## 4. Application entre ensembles finis et comparaison des cardinaux

**Proposition 2.34**

*Soient $E$ et $F$ sont deux ensembles et $f$ une application de $E$ dans $F$.*

- *Si $F$ est fini et $f$ injective alors $E$ est fini et* $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$.
- *Si $E$ est fini et $f$ surjective alors $F$ est fini et* $\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(F)$.

*Démonstration.* —

1. On suppose $F$ fini et $f$ injective. Comme $f$ est injective, elle induit une bijection de $E$ sur $f(E)$. Or $f(E) \subset F$ qui est fini donc $f(E)$ est fini et $\mathrm{Card}(f(E)) \leq \mathrm{Card}(F)$. Ainsi $\exists n$ et une bijection de $f(E)$ sur $[\![1, n]\!]$ avec $\mathrm{Card}(f(E)) = n$ . On définit $\phi : E \to f(E) \to [\![1, n]\!]$ ; $\phi$ est bijective comme composée et on a alors une bijection de $E \to [\![1, n]\!]$ ; par définition, $E$ est fini , $\mathrm{Card}(E) = n$ et donc $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$
2. On suppose $E$ fini et $f$ surjective. Donc $F = f(E)$.

   $\forall y \in F$, on note $g(y)$ l'un des antécédents de $y$ par $f$ (toujours possible car $f$ surjective). Cela définit une application $g$ injective de $F$ dans $E$. On applique le résultat précédent avec $g$ injective et $E$ fini d'où $F$ est fini et $\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(F)$.

□

La proposition suivante sera souvent utilisée pour déterminer le cardinal d'un ensemble fini $E$ : plutôt que de construire directement une bijection de $E$ sur un certain intervalle d'entiers $[\![1, n]\!]$, on met en évidence une bijection de $E$ sur un ensemble $F$ dont on connaît le cardinal.

**Proposition 2.35 – Égalité des cardinaux et existence d'une bijection**

*Si $E$ et $F$ sont deux ensembles finis de même cardinal, il existe une bijection de $E$ sur $F$. Réciproquement, si $E$ est un ensemble et si $F$ est un ensemble fini en bijection avec $E$, alors $E$ est aussi un ensemble fini, et* $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

*Démonstration.* —
- Montrons la première implication.
  $E$ et $F$ étant fini et de même cardinal $n$, il existe une bijection $h : E \to [\![1, n]\!]$ et une bijection $g : F \to [\![1, n]\!]$.
  Soit l'application $f : E \to [\![1, n]\!] \to F$. $f$ est alors bijective car composée de deux fonctions bijectives $h$ et $g^{-1}$.
- Montrons la réciproque.
  Soit $f$ une application bijective de $E$ sur $F$. $F$ étant fini et en posant $n = \mathrm{Card}(F)$, il existe une bijection $g : F \to [\![1, n]\!]$. On considère l'application $h : E \to F \to [\![1, n]\!]$. $h$ est bijective comme composée. Ainsi il existe une application bijective de $E$ sur $[\![1, n]\!]$, d'où $E$ est fini de cardinal $n$.

□

**Proposition 2.36 – Application entre ensembles de même cardinal**

*Soient $E$ et $F$ deux ensembles de même cardinal $n \geq 1$, et soit $f$ une application de $E$ dans $F$. Il y a équivalence entre :*
- *$f$ est injective.*
- *$f$ est surjective.*
- *$f$ est bijective.*

*Démonstration.* — On a vu à la proposition 2.35 que l'existence d'une bijection entre $E$ et $F$ exige que $E$ et $F$ aient le même cardinal, l'hypothèse de départ est donc incontournable.

• Montrons d'abord que : $f$ injective $\Rightarrow$ $f$ surjective.
Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. En notant $y_i = f(x_i)$, on a $f(E) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. L'injectivité de $f$ implique que les $y_i$ sont tous distincts, donc $\mathrm{Card}\,(f(E)) = n$. Mais $f(E) \subset F$ et $\mathrm{Card}(F) = n$. D'après la proposition 2.22, ceci n'est possible que si $f(E) = F$, c'est-à-dire si $f$ est surjective.

• Montrons maintenant que : $f$ surjective $\Rightarrow$ $f$ bijective.
Soit $F = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Pour tout $i$, on pose $A_i = f^{-1}(\{y_i\})$.
Puisque $f$ est surjective, les $A_i$ sont des parties de $E$ non vides, d'où : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Card}(A_i) \geq 1$.
Les $A_i$ sont disjointes deux à deux (on ne peut avoir $f(x) = y_i$ et $f(x) = y_j$ avec $y_i \neq y_j$), d'où par le principe de la somme : $\mathrm{Card}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i) \geq n$.
Or $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset E$ et $\mathrm{Card}(E) = n$, d'où , encore d'après la proposition 2.22, $\mathrm{Card}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq n$ .
On en déduit $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i) = n$, ce qui n'est possible que si $\mathrm{Card}(A_i) = 1$ pour tout $i$.
On conclut que chaque $y_i$ de $F$ a un unique antécédent dans $E$, c'est-à-dire que $f$ est bijective.

• La dernière implication : $f$ bijective $\Rightarrow$ $f$ injective, est immédiate.

□

# 5. Dénombrement

## 5.1. p-liste, Arrangement, Permutation. —

Soit $E$ un ensemble fini non vide de cardinal $n$ et $p$ un entier.

**Définition 2.37 – p-liste**

On appelle $p$-liste ou $p$-uplet tout élément de $E^p$, c'est-à-dire tout p-uplet d'éléments de E.

Un $p$-liste est donc une suite *ordonnée* d'éléments de $E$ *dans laquelle le même élément peut apparaître plusieurs fois.*

***Exemple 2.38.*** — Si on note $E$ l'ensemble des lettres de l'alphabet, tout mot peut être considéré comme une p-liste de $E$ :
ANE est une 3-liste, ANANAS est une 6-liste.

**Proposition 2.39 – Nombre de $p$-listes d'un ensemble $E$ de cardinal $n \geq 1$**

*Le nombre de $p$-listes de $E$ est $n^p$.*

*Démonstration.* — Les $p$-listes étant les éléments de $E^p$, la proposition 2.29, sur le cardinal d'un produit cartésien, donne immédiatement $\mathrm{Card}(E^p) = (\mathrm{Card}E)^p = n^p$. □

**Définition 2.40 – Arrangement**

On appelle $p$-arrangement de E tout élément de $E^p$ dont les composantes sont deux à deux distinctes.

Un p-arrangement est une suite *ordonnée* d'éléments de $E$ *tous différents.*

**Proposition 2.41 – Nombre de $p$-arrangements d'un ensemble $E$ de cardinal $n \geq 1$**

- *Le nombre de $p$-arrangements de $E$, noté $A_n^p$, est :*
  $A_n^p = n(n-1)...(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ *si* $1 \leq p \leq n$.
- *Si* $p > n$ $A_n^p = 0$.

***Remarque 2.42.*** —
- En utilisant la convention $0\,! = 1$, $A_0^0 = 1$.
- On a : $A_n^0 = 1$ , $A_n^1 = n$ et $A_n^n = n!$.

*Démonstration.* — Un $p$-arrangement est un $p$-uplet à composantes toutes distinctes ; il peut se définir en $p$ étapes, qui sont les choix successifs de ses composantes.
- Si $p > n$, il est impossible de trouver un tel $p$-uplet.

- Si $p \leq n$, il y a $n$ choix possibles pour la première composante, puis $(n-1)$ choix pour la seconde (car l'élément choisi pour la première composante ne peut réapparaître dans le $p$-uplet), puis $(n-2)$ pour la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la $p$-ième pour laquelle il ne restera que $(n-(p-1)) = (n-p+1)$ possibilités.
  On conclut avec le principe du produit.

□

***Remarque 2.43.*** — Le nombre d'injections d'un ensemble à $p$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments vaut $A_n^p$.

**Définition 2.44 – Permutation**

On appelle permutation d'un ensemble E de cardinal $n \geq 1$ tout $n$-arrangement de E.

**Proposition 2.45 – Nombre de permutations d'un ensemble de cardinal $n \geq 1$**

*Le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n est $n!$.*

***Remarque 2.46.*** — Le nombre de permutations d'un ensemble $E$ est le nombre de bijections sur $E$.

***Exemple 2.47.*** —
- La première phase du championnat de France de rugby , TOP 14 , est le classement des 14 équipes : c'est une permutation de l'ensemble des 14 équipes ; il y 14! classements possibles.
- Les 6 premières équipes sont qualifiées pour la seconde phase : le nombre de classement composés de 6 équipes est un arrangement soit $A_{14}^6 = 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9$.

### 5.2. Combinaison. —

**Définition 2.48 – Combinaison**

On appelle combinaison de $p$ éléments ou une $p$-combinaison, toute partie de $E$ ayant $p$ éléments.
On note $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des $p$-combinaisons de E : c'est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$.

Soit Card$E = n$, on a :
- $\mathcal{P}_0(E) = \{\emptyset\}$,
- $\mathcal{P}_n(E) = \{E\}$ ,
- $\mathcal{P}_1(E)$ est l'ensemble des singletons de E.

***Exemple 2.49.*** — Si $E$ est l'ensemble $\{1,2,3\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ ;
Les $p$-combinaisons sont :
$\mathcal{P}_0(E) = \{\emptyset\}$,
$\mathcal{P}_1(E) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ ,
$\mathcal{P}_2(E) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ ,
$\mathcal{P}_3(E) = \{\{1,2,3\}\}$.

**Proposition 2.50 – Nombre de parties à $p$ éléments d'un ensemble de cardinal $n$**

*Soit* $0 \leq p \leq n$ *;*

*Le nombre de combinaisons de p éléments est :*
$\binom{n}{p} = C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ .
*Autrement dit :* $\forall p \leq n, \mathrm{Card}\left(\mathcal{P}_p(E)\right) = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

*Démonstration.* — La proposition est vraie pour $p = 0$ (y compris si $n = 0$), avec la convention $0\,! = 1$.
Pour $1 \leq p \leq n$, on cherche le nombre d'éléments $c_{n,p}$ de $\mathcal{P}_p(E)$.
Soit $\mathcal{A}_p(E)$ l'ensemble des $p$-arrangements de $E$.
Chaque élément de $\mathcal{A}_p(E)$ peut se définir en 2 étapes :

- le choix sans ordre des $p$ éléments qui figurent dans l'arrangement ;
- la permutation qui ordonne ces $p$ éléments.

Il y a $c_{n,p}$ possibilités pour la première étape et $p!$ pour la seconde.
On applique alors le principe du produit : $\mathrm{Card}(\mathcal{A}_p(E)) = c_{n,p} \times p!$.
Or, $\mathrm{Card}(\mathcal{A}_p(E)) = A_n^p$ .

□

***Remarque 2.51.*** — On rappelle que les $\binom{n}{p}$ ou $C_n^p$ sont appelés coefficients binômiaux.
On a : $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ et $\binom{n}{1} = n$.

***Exemple 2.52.*** — On reprend l'exemple 2.49 avec $E = \{1, 2, 3\}$.

- Le nombre de combinaisons de 2 éléments est $\binom{3}{2} = \mathrm{Card}\left(\mathcal{P}_2(E)\right) = 3$.
- L'ensemble $E$ est la seule combinaison de 3 éléments soit $\binom{3}{3} = 1$.
- L'ensemble $\emptyset$ est la seule combinaison de 0 éléments : on a $\binom{3}{0} = 1$.

***Attention.*** — Il faut bien faire la différence entre $p$-arrangement et $p$-combinaison : dans les deux cas il s'agit de $p$ éléments distincts de $E$, mais pour les arrangements il y a un ordre alors que pour les combinaisons il n'y en a pas : pour l'exemple ci-dessus, $(1, 2)$ et $(2, 1)$ sont des 2-arrangements (des couples) de E distincts : $(1, 2) \neq (2, 1)$, alors que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

**Proposition 2.53 – Propriétés des coefficients binômiaux**

- *Si* $0 \leq p \leq n$*, on a :* $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ *;*
- *Si* $1 \leq p \leq n-1$*, on a :* $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ ***(relation du triangle de Pascal)*** *;*

*Démonstration.* —
- La première égalité vient du fait que choisir $p$ éléments parmi $n$ revient à choisir les $n - p$ qu'on ne prend pas.
- On démontre la relation du triangle de Pascal par la méthode "combinatoire" c'est à dire à l'aide d'un argument de dénombrement.
  On part d'un ensemble $E$ à $n$ éléments : $\binom{n}{p}$ est le nombre de combinaison ou de parties à $p$ éléments de $E$.
  On considère un élément $x$ de $E$. Pour constituer une partie à $p$ éléments, il y a deux façons :

— Soit cette partie contient $x$, il y a alors $\binom{n-1}{p-1}$ façons de choisir les $p-1$ autres éléments parmi les $n-1$ restants.
— Soit cette partie ne contient pas $x$ : il y a alors $\binom{n-1}{p}$ façons de choisir $p$ éléments parmi les $n-1$ restants.

Au total, on a bien la relation de Pascal : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

$\square$

## Exercices du chapitre 2

*Relations.* —

***Exercice 2.1.*** — Dire (en justifiant) si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives :

1. $E = \mathbb{Z}$ et $x \mathcal{R} y \iff x = -y$.
2. $E = \mathbb{R}$ et $x \mathcal{R} y \iff cos^2(x) + sin^2(y) = 1$.

***Exercice 2.2.*** — Montrer que la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}^*$ est une relation d'ordre , mais pas dans $\mathbb{Z}^*$.

***Exercice 2.3.*** — 1. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. On définit la relation $\mathcal{R}$ : "... a le même reste que...quand on divise par 3". Déterminer les classes d'équivalence.

2. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation : $x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y$.
   (a) Montrer qu'on a une relation d'équivalence.
   (b) Donner la classe d'équivalence d'un élément $x$ de $\mathbb{R}$.

*Ensemble dénombrable - Ensemble fini - Cardinal.* —

***Exercice 2.4.*** — 1. Montrer que , $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $[\![1, n]\!]$ et $[\![n+1, 2n]\!]$ sont équipotents .

2. Montrer que les ensembles $2\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}+1$ sont équipotents.
3. Montrer que l'ensemble des entiers pairs est dénombrable.
4. Montrer que l'ensemble $\{2^n,\ n \geq 0\}$ est dénombrable.

***Exercice 2.5.*** — Justifier que chaque ensemble ci-dessous est fini et donner son cardinal :

1. $E = [\![-5, 52]\!]$
2. $F = \{e^k\ ,\ k \in [\![5, 25]\!]\}$
3. $G = \{k \in \mathbb{Z}\ :\ |k-3| < 10\}$

***Exercice 2.6.*** — Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$ fini.

1. Montrer que $\mathrm{Card}(A \setminus B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.
2. En déduire que si $B \subset A$ alors $\mathrm{Card}(A \setminus B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(B)$.

***Exercice 2.7.*** — Formule de Poincaré.
Soient $A$, $B$ et $C$ trois parties d'un ensemble $E$ fini. Montrer que :

$$\mathrm{Card}(A\cup B\cup C) = \mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)+\mathrm{Card}(C)-\mathrm{Card}(A\cap B)-\mathrm{Card}(A\cap C)-\mathrm{Card}(B\cap C)+\mathrm{Card}(A\cap B\cap C).$$

***Exercice 2.8.*** — Déterminer le nombre de couples $(i, j)$ de $[\![1, n]\!]^2$ tels que $i > j$.

Indication : on note $E$ l'ensemble de ces couples et on écrit $E = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, où $A_i$ est l'ensemble des éléments de $E$ dont la première composante est $i$.

*Arrangement - Permutation - Combinaison ? —*

***Exercice 2.9.*** — 1. Un code PIN est constitué de 4 chiffres. Combien de codes PIN différents peut-on former ?

2. A l'entrée en première, un élève doit choisir 3 spécialités dans une liste de 9 proposées. Combien y a t'il de possibilités différentes ?
3. Un tiercé est le classement des trois premiers chevaux arrivés d'une course de 10 chevaux ; Combien y a t'il de tiercés possibles ?
4. Dans un jeu de 32 cartes, combien de "mains" de 4 cartes (ensemble de 4 cartes) peut-on former ?
5. Combien un village doit-il avoir d'habitants pour qu'on soit sûr qu'au moins deux d'entre eux auront les mêmes initiales ?
6. Combien y a-t-il de nombres de 6 chiffres exactement qui soient des multiples de 5 ?

***Exercice 2.10.*** — 1. De combien de façons deux personnes peuvent-elles occuper 6 sièges alignés ?

2. De combien de façons deux personnes peuvent-elles occuper 6 sièges en cercle ?
3. De combien de façons peut-on placer 18 personnes autour d'une table ronde ?

***Exercice 2.11.*** — Un comité comprend 11 membres.

1. De combien de façons peut-on choisr un-e président-e, un-e vice-président-e et un-e secrétaire ?
2. De combien de façons peut-on choisir trois membres parmi les 11 sans distinguer les fonctions qu'auront ces trois membres ?

***Exercice 2.12.*** — Il pleut et vous n'avez que deux parapluies à prêter à cinq personnes.
Combien y a-t-il de prêts possibles :

- si les deux parapluies sont identiques ?
- si les deux sont différents ?

*Dénombrement. —*

***Exercice 2.13.*** — Une cantine scolaire fonctionne sous forme de self. Les élèves peuvent choisir entre quatre entrées, trois plats et cinq desserts différents.

1. Normalement, un élève choisit une entrée, un plat et un dessert. Sous ces conditions, combien de menus différents peut-on constituer ?
2. Si un élève ne prend pas de dessert, il peut prendre , pour compenser, deux entrées. Combien de possibilités a-t-'il pour constituer son menu ?
3. Deux élèves décident de s'organiser ainsi : ils choisissent des entrées, plats et desserts différents et se les partagent ensuite. Combien ont-ils de menus possibles ?

***Exercice 2.14.*** — De combien de façons différentes peut-on disposer quatre pions , numérotés de 1 à 4 , sur trois cases numérotées de 1 à 3, de telles sorte que :

1. une case au moins soit vide ;
2. aucune case ne soit vide.

***Exercice 2.15.*** — Une urne contient cinq boules bleues et huit boules rouges. On suppose toutes les boules distinctes. On tire successivement et avec remise quatre boules dans l'urne. Quel est le nombre de tirages vérifiant chacune des conditions suivantes :

- Au moins une boule bleue a été tirée.
- Une boule rouge au plus a été tirée.
- Trois boules rouges et une boule bleue ont été tirées.
- Deux boules rouges et deux boules bleues ont été tirées.

***Exercice 2.16.*** — Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. Les boules numérotées de 1 à 4 sont rouges et celles de 5 à 10 sont noires.

1. On tire 5 boules simultanément de l'urne.
   (a) Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages donnent deux boules rouges et trois boules noires ?
   (c) Combien de tirages donnent au moins une boule rouge ?
2. On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.
   (a) Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages donnent deux boules rouges et trois boules noires ?
   (c) Combien de tirages donnent au moins une boule rouge ?

***Exercice 2.17.*** — Une assemblée est constituée de 200 membres. Elle doit élire une commission constituée de trois parlementaires (chaque membre vote donc pour trois personnes). On s'intéresse au nombre de membres ayant voté pour au moins un parmi trois candidats qu'on désignera par $A$, $B$ et $C$ (et qui ne sont pas les seuls candidats). On sait que :
- 112 membres ont voté pour $A$,
- 67 pour $A$ et $B$,
- 32 pour $A$ et $C$,
- 12 pour $A$, $B$ et $C$,
- 5 pour $B$ et $C$ mais pas pour $A$,
- 56 pour pour $C$ mais pas pour $A$ ni $B$,
- 22 pour $B$ mais par pour $A$.

1. Combien ont voté pour $A$ mais pas pour $B$ ?
2. Combien ont voté pour $C$ ?
3. Combien n'ont voté pour aucun des candidats ?
4. Combien ont voté uniquement pour $A$ ?

***Exercice 2.18.*** — On prend 6 cartons identiques. Sur chaque carton on écrit une (et une seule) des 6 lettres du mot FRANCE. On place ces cartons dans une urne ; on les extrait au hasard un à un , et on note les lettres obtenues dans l'ordre de leur apparition.

1. Calculer dans l'hypothèse où ces 6 tirages se font sans remise :
   (a) le nombre de mots de 6 lettres ;
   (b) on obtient dans l'ordre de leur apparition les trois premières lettres FRA et les autres lettres dans le désordre.
2. Reprendre les questions précédentes lorsque les six tirages s'effectuent en remettant à chaque fois dans l'urne le carton obtenu.

***Exercice 2.19.*** — Combien d'anagrammes différentes peut-on composer avec le mot MATHS ? Avec le mot SEINE (indication : on numérotera les E) ?

***Exercice 2.20.*** — Montrer à l'aide d'argument de dénombrement les égalités suivantes :

1. $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}.$$
2. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

***Exercice 2.21.*** — 1. Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ (à 12 éléments).

(a) Dénombrer les parties de $E$ à 5 éléments qui contiennent :
- $a$ et $b$ ;
- $a$ mais pas $b$ ;
- $b$ mais pas $a$ ;
- ni $a$ ni $b$.

(b) En déduire la relation : $\binom{12}{5} = \binom{10}{3} + 2\binom{10}{4} + \binom{10}{5}$.

2. Montrer, en utilisant la méthode "combinatoire" (argument de dénombrement) que, pour $2 \leq p \leq n-2$ :
$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$$
.

# CHAPITRE 3

# NOMBRES COMPLEXES

## 1. Généralités

### 1.1. Définitions. —

**Définition 3.1 – Nombre complexe**

On appelle *nombre complexe* $z$ toute expression de la forme $z = x + iy$, où $x$ et $y$ sont des réels et où $i$ est un nombre tel que $i^2 = -1$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

***Vocabulaire.*** — Pour tout élément $z$ de $\mathbb{C}$, il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $z = x + iy$.

- L'écriture $z = x + iy$ s'appelle *la forme algébrique* du nombre complexe $z$.
- $x$ est la *partie réelle* de $z$ et que $y$ est la *partie imaginaire* de $z$,
  et on note $x = \mathfrak{Re}(z)$ et $y = \mathfrak{Im}(z)$.
- Lorsque $\mathfrak{Im}(z) = 0$, on dit que le complexe $z$ est *réel*,
  et lorsque $\mathfrak{Re}(z) = 0$, on dit que $z$ est *imaginaire pur*. On note parfois $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

***Exemple 3.2.*** —
- Le nombre $i$ a pour *partie réelle* 0 et pour *partie imaginaire* 1.
- On définit le nombre $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

***Interprétation géométrique.*** — On considère le plan dans le repère orthonormé $(O, I, J)$. Soit $z = x+iy$ un nombre complexe.

- *Le point d'affixe* $z$ est le point $M$ du plan de coordonnées $(x, y)$.
- A tout point $M$ du plan, de cordonnées $(x, y)$, on peut associer le nombre complexe $z = x + iy$. Le point $M$ a pour *affixe* $z$.

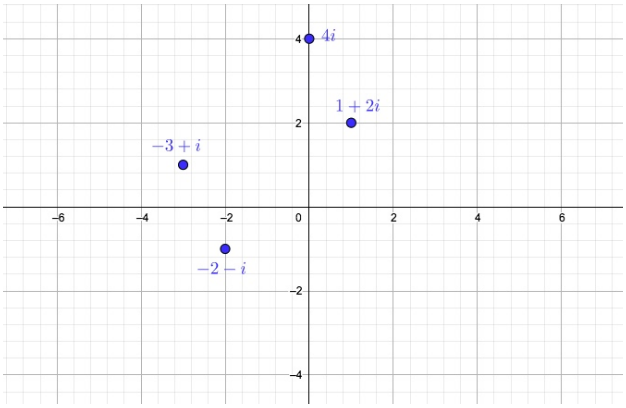


FIGURE 1. Si $z = x + iy$ est un nombre complexe, on peut le représenter par le point du plan dont les coordonnées cartésiennes sont données par le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

**Proposition 3.3**

*On dit que deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont égaux si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales :*

$$z = z' \iff x = x' \text{ et } y = y'$$

**Définition 3.4 – Somme et produit de deux complexes**

Soient deux nombres complexes $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$. Dans $\mathbb{C}$ on définit les opérations suivantes :

- Addition : la somme $z + z'$ est le nombre complexe défini par
$$z + z' = (x + x') + i(y + y').$$
- Produit : le produite $z.z'$ est le nombre complexe défini par
$$z.z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

**Proposition 3.5 – Propriétés de l'addition**

*Soient trois nombres complexes $z$, $z'$ et $z''$.*

- *Commutativité :* $z + z' = z' + z$.
- *Associativité :* $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$.
- *Existence d'un élément neutre : le nombre 0 est l'élément neutre pour l'addition,* $0+z = z+0 = z$.
- *Existence d'un opposé : si* $z = x + iy$ , l'oppposé *de* $z$ *est le nombre* $-z = (-x) + i(-y)$. *On a alors* $z + (-z) = 0$.

**Proposition 3.6 – Propriétés du produit**

*Soient trois nombres complexes $z$, $z'$ et $z''$. Alors*
- *Commutativité :* $z.z' = z'.z$.
- *Associativité :* $z.(z'.z'') = (z.z').z''$.
- *Distributivité :* $z.(z' + z'') = z.z' + z.z''$.
- *Existence d'un élément neutre : le nombre 1 est l'élément neutre pour le produit :* $1.z = z.1 = z$.
- *Existence d'un inverse : tout nombre complexe non nul $z$ admet* un inverse , *noté* $\frac{1}{z}$. *On a alors* $z.\frac{1}{z} = 1$
- $0$ *est un élément absorbant :* $0.z = z.0 = 0$.

***Remarque 3.7.*** — L'ensemble $\mathbb{C}$ est *intègre* :
Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes. Si $z.z' = 0$ alors soit $z = 0$ soit $z' = 0$.

**1.2. Conjugué.** —

**Définition 3.8 – Conjugué d'un nombre complexe**

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On appelle conjugué de $z$, et on note $\overline{z}$, le nombre complexe

$$\overline{z} = x - iy.$$

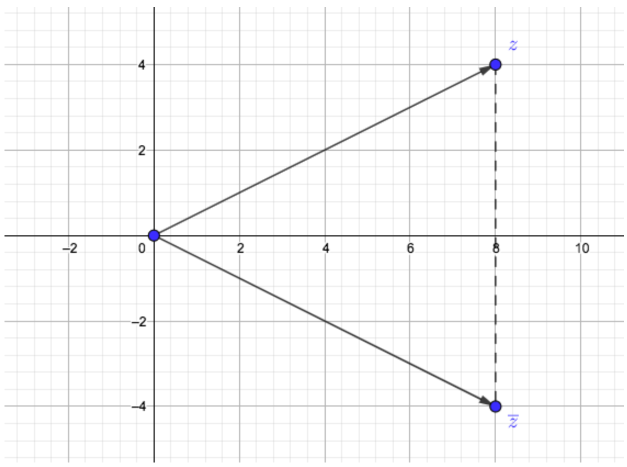


Figure 2. Si $z = x + iy$ est un nombre complexe, le point d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique du point d'affixe $z$ par rapport à l'axe des abscisses.

**Proposition 3.9**

*Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes.*

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
- $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.
- $z$ *est un nombre réel* $\iff \overline{z} = z$.
- $z$ *est un imaginaire pur* $\iff \overline{z} = -z$.
- $\mathfrak{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ *et* $\mathfrak{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

## 2. Module et argument

### 2.1. Le module d'un nombre complexe. —

**Définition 3.10 – Module d'un nombre complexe**

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On appelle *module de $z$*, et on note $|z|$, le nombre réel positif :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

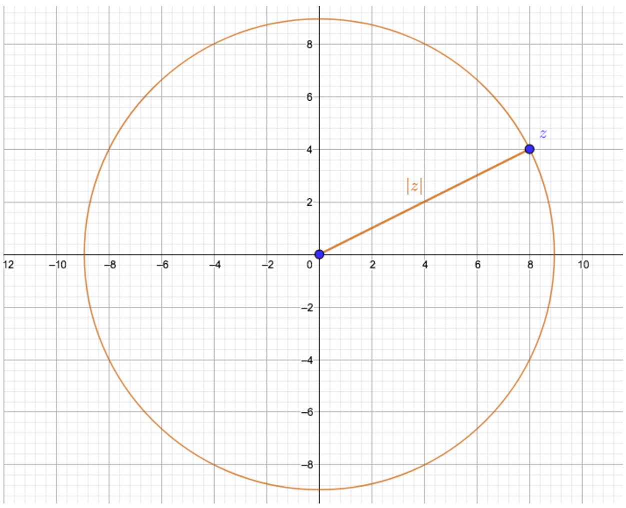


FIGURE 3. Si $z$ est un nombre complexe, le réel positif $|z|$ donne la distance de $z$ à l'origine, soit le rayon du cercle.

***Remarque 3.11.*** — Interprétation du module.

- On dit que le point $M$ d'affixe $z$ appartient au cercle de centre 0 et de rayon $|z|$.

- Soit un point $M_0$ du plan, d'affixe $z_0$, on remarque que poser $|z - z_0| = r$ revient à dire que le point $M$ d'affixe $z$ appartient au cercle de centre $M_0$ et de rayon $r$.

***Notation : le cercle unité $\mathbb{U}$.*** — *Compte tenu de l'interprrétation du module , on appelle* cercle unité *de $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes de module* 1*, et on le note $\mathbb{U}$ :*

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}.$$

***Exemple 3.12.*** — Les nombres $i$ et $j$ sont des éléments de $\mathbb{U}$.

**Proposition 3.13 – Module et conjugué**

1. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *on a* $|\bar{z}| = |z|$.
2. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *on a* $z\bar{z} = |z|^2$.
3. *Si* $z$ *est un nombre complexe de module* $1$, *alors* $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

**Proposition 3.14 – Module et produit**

1. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *et* $z' \in \mathbb{C}$, *on a* $|zz'| = |z||z'|$.
2. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *on a* $|-z| = |z|$.
3. *Si* $z$ *est un nombre complexe non nul, on a* $|1/z| = 1/|z|$.

***Exemple 3.15.*** — Montrer :

1. Si $z$ et $z'$ sont deux complexes appartenant à $\mathbb{U}$, alors $z.z'$ aussi.
2. Si $z \in \mathbb{U}$ non nul, alors $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.
3. Si $z \in \mathbb{C}*$, alors $\dfrac{z}{\bar{z}} \in \mathbb{U}$.

**Proposition 3.16 – Inégalités entre module et partie réelle et imaginaire :**

1. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *on a* $|\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$, *avec égalité si et seulement si* $z$ *est un nombre réel.*
2. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *on a* $|\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|$, *avec égalité si et seulement si* $z$ *est imaginaire pur.*

**Proposition 3.17 – Module et somme/différence**

1. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *et* $z' \in \mathbb{C}$, *on a* $|z + z'| \leq |z| + |z'|$,
   *avec égalité si et seulement s'il existe un nombre* $\alpha \in \mathbb{R}$ *vérifiant :* $\alpha$ *est positif et* $z = \alpha z'$.
2. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *et* $z' \in \mathbb{C}$, *on a* $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$,
   *avec égalité si et seulement s'il existe un nombre* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *vérifiant* $z = \alpha z'$.

### 2.2. Arguments d'un complexe non nul. —

L'étude de l'argument d'un nombre complexe repose sur la notion d'angle dans le plan.

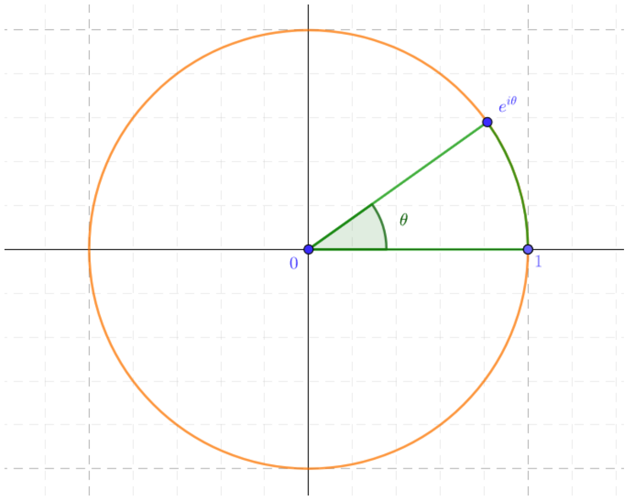


FIGURE 4. Si $\theta$ est un nombre réel, le point du plan d'affixe $e^{i\theta}$ est situé sur le cercle unité : il est obtenu en parcourant à partir du point d'affixe 1 un angle $\theta$ dans le sens direct.

**Théorème et définition 3.18 – Argument principal d'un nombre complexe -forme exponentielle**

Soit $z$ est un nombre complexe non nul, sous forme algébrique $z = x + iy$, alors il existe un unique nombre réel $\theta \in ]-\pi, \pi]$ , appelé *argument principal* de $z$, vérifiant :

$$z = |z|\ (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

avec $\cos(\theta) = \frac{x}{|z|}$ *et* $\sin(\theta) = \frac{y}{|z|}$

On définit l'exponentielle complexe

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Le nombre $z$ s'écrit alors sous forme exponentielle

$$z = |z|\ e^{i\theta}.$$

***Remarque 3.19.*** —
- Un nombre complexe non nul admet toujours une infinité d'arguments différents.
- Si $z \in \mathbb{C}^\star$ et si $\theta$ et $\theta'$ sont deux arguments de $z$, alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2k\pi$.

On peut exprimer tout nombre complexe sous forme algébrique ou forme exponentielle :

$$z = x + iy \iff \exists\ \theta \in \mathbb{R}\ tel\ que\ z = |z|\ e^{i\theta}$$

***Remarque 3.20.*** — On emploie aussi le terme « forme trigonométrique ».

***Exemple 3.21.*** — Soit le nombre $z = 1 + i$. Le module de $z$ est $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Pour trouver un argument de $z$, on écrit $z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. On cherche un argument $\theta$ tel que $\cos(\theta) = \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On reconnaît $\dfrac{\pi}{4}$, donc une écriture de $z$ sous forme exponentielle est

$$z = \sqrt{2}\ e^{i\dfrac{\pi}{4}}.$$

***Exemple 3.22.*** — Soit le nombre $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Son module est 1. On cherche un argument $\theta$ tel que $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On reconnaît $\dfrac{2\pi}{3}$, donc une écriture de $j$ sous forme exponentielle est

$$j = e^{\dfrac{2i\pi}{3}}.$$

$$i = e^{i\dfrac{\pi}{2}}$$
$$i^2 = -1 = e^{i\pi}$$
$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\dfrac{2i\pi}{3}}$$

### 2.3. Formules. —

**Proposition 3.23 – L'exponentielle complexe transforme les sommes en produits**

*Si $z$ et $z'$ sont deux nombres complexes, alors $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.*

**Proposition 3.24 – Formules d'Euler : expression de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ à l'aide de $e^{i\theta}$.**

*Pour tout réel $\theta$, on a*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \textit{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

**Proposition 3.25 – Formules de Moivre pour exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.**

*Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $\theta$, on a*

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n.$$

En utilisant la formule du binôme et en séparant parties réelle et imaginaire, on peut alors trouver un lien entre $\cos(n\theta)$ et les puissances de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

***Exemple 3.26.*** — Expression de $\cos(3\theta)$ à l'aide de la formule de Moivre.

Soit $\theta$ un nombre réel. On a $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ : on remarque que $\cos(3\theta)$ est la partie réelle de $e^{i3\theta}$. Et $e^{i3\theta} = (e^{i\theta})^3 = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3$.

On développe avec la formule du binôme :

$$\begin{aligned} e^{3i\theta} &= \cos(\theta)^3 + 3\cos(\theta)^2 \times (i\sin(\theta)) + 3\cos(\theta) \times (i\sin(\theta))^2 + (i\sin(\theta))^3 \\ &= \cos(\theta)^3 + 3i\cos(\theta)^2\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2 - i\sin(\theta)^3 \\ &= \left[\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2\right] + i\left[3\cos(\theta)^2\sin(\theta) - \sin(\theta)^3\right] \end{aligned}$$

Par identification de la partie réelle, on obtient l'expression suivante :

$$\cos(3\theta) = \cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2.$$

**Proposition 3.27**

*Soit un réel $\theta$ et soient les nombres complexes conjugués : $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et $\bar{z} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$. On a :*

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

*et pour tout entier $n$ :*

$$\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(n\theta) = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right).$$

***Exemple 3.28.*** — "Linéarisation" : Soit à linéariser $y = \cos(x)\sin^4(x)$.

On pose $z = \cos(x) + i\sin(x) = e^{ix}$.
On obtient successivement :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\frac{1}{2^4 i^4}\left(z - \frac{1}{z}\right)^4 \\ &= \frac{1}{2^5}\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^4 - 4z^2 + 6 - \frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4}\right) \\ &= \frac{1}{2^5}\left[\left(z^5 + \frac{1}{z^5}\right) - 3\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + 2\left(z + \frac{1}{z}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2^4}\left(\cos(5x) - 3\cos(3x) + 2\cos(x)\right) \end{aligned}$$

**2.4. Méthode de l'angle moitié.** — On cherche à déterminer le module et l'argument du nombre complexe $z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ avec $\alpha$ et $\beta$ deux réels.

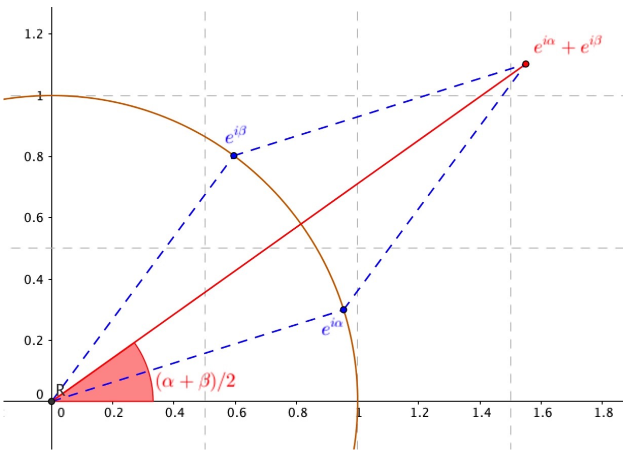


FIGURE 5. Illustration de la méthode de l'angle moitié : si $A$ est le point d'affixe $e^{i\alpha}$ et $B$ le point d'affixe $e^{i\beta}$, alors la droite qui passe par 0 et par $z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

On factorise dans l'écriture de $z$, par $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$. On obtient

$$\begin{aligned} z &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left[e^{i\left(\alpha - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right] \\ &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left[e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}\right] \\ &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left[2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

On vérifie si on a bien trouvé le module et un argument de $z$.

Sachant qu'un module est réel positif, on doit voir si $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ est positif.

- Si $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) > 0$, on conclut que le module de $z$ est égal à $2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, et que $\theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$ est un argument .
- Si $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) < 0$, on écrit alors :

$$\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = -(-\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)) = i^2(-\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right))$$

Or $-1 = i^2 = e^{i\pi}$, on a

$$\begin{aligned} z &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left[2e^{i\pi}(-\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right))\right] \\ &= \left[-2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]e^{i\pi}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \\ &= \left[-2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2}+\pi)} \end{aligned}$$

On obtient donc que le module de $z$ est égal à $-2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, et que $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\pi\right)$ est un argument.

## 3. Racines $n$-èmes

Dans toute cette partie, $n$ désigne un entier naturel non nul.

### 3.1. Racines $n$-èmes d'un nombre complexe quelconque. —

**Définition 3.29 – Racine $n$-ème de $a$**

Soit $a$ un nombre complexe. non nul.
On dit qu'un nombre complexe $z$ est une racine $n$-ème de $a$ lorsque

$$z^n = a.$$

On a toujours $n$ racines $n$-èmes d'un nombre.

**Proposition 3.30 – Déterminer les racines $n$-èmes de $a$ à l'aide du module et de l'argument**

*Soit $a$ un nombre complexe non nul, d'écriture exponentielle $a = re^{i\theta}$ (avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$).*
*Les racines $n$-èmes de $a$ sont :*

$$w_k = r^{1/n} \cdot e^{(i\frac{\theta}{n}+\frac{2ik\pi}{n})} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!].$$

L'ensemble des racines $n$-èmes de $a$ est

$$\left\{r^{1/n} \cdot e^{(i\frac{\theta}{n})},\ r^{1/n} \cdot e^{(i\frac{\theta}{n}+\frac{2i\pi}{n})},\ r^{1/n} \cdot e^{(i\frac{\theta}{n}+\frac{4i\pi}{n})}, \dots,\ r^{1/n} \cdot e^{(i\frac{\theta}{n}+\frac{2i(n-1)\pi}{n})}\right\}$$

Il comporte exactement $n$ éléments.

***Remarque : autre écriture.*** — Soit connu $w_0 = r^{1/n}e^{i\theta/n}$ une racine $n$-ème de $a$. L'ensemble des racines $n$-èmes de $a$ peut s'écrire aussi

$$\left\{w_0 \cdot e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, n-1]\!]\right\} = \left\{w_0, \quad w_0 \cdot e^{\frac{2i\pi}{n}}, \quad w_0 \cdot e^{\frac{4i\pi}{n}}, \ldots, \quad w_0 \cdot e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\right\}.$$

***Exemple 3.31.*** — On cherche les racines quatrièmes du nombre $a = i$.

On sait que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. On applique la proposition 3.30 en posant $r = 1$, $n = 4$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. Les racines sont de la forme :

$$w_k = 1^{1/4} \cdot e^{(i\frac{\pi}{8} + \frac{2ik\pi}{4})} \textit{ avec } k \in [\![0, 3]\!].$$

On obtient ainsi les quatre racines :

$$w_0 = e^{\frac{i\pi}{8}}, \quad w_1 = e^{i\frac{5\pi}{8}}, \quad w_2 = e^{i\frac{9\pi}{8}}, \quad w_3 = e^{i\frac{13\pi}{8}}.$$

***Remarque.*** — *On dira racine* 2*-ème ou carrée, racine* 3*-ème ou cubique.*

***Attention aux notations !*** — Soit $n \geq 2$ et $a$ un nombre complexe non nul. L'écriture $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{1/n}$ n'a pas de sens . Par exemple, si $n = 2$ : écrire $\sqrt{7 - i}$ n'a pas de sens !. On parlera toujours d'*une* racine $n$-ème ou *des* racines $n$-èmes, mais le vocabulaire "la " racine $n$-ème est donc à proscrire quand il s'agit de nombres complexes. La notation $\sqrt[n]{\cdot}$ est spécifique au cas réel.

### 3.2. Racines $n$-èmes de l'unité. —

On applique le cas général précédent avec $a = 1$.

**Définition 3.32 – Racine $n$-ème de l'unité**

Soient $n$ un élément de $\mathbb{N}^\star$ et $z$ un nombre complexe.
On dit que $z$ est une racine $n$-ème de l'unité lorsque

$$z^n = 1.$$

***Exemple 3.33.*** —

- Les nombres 1 et $(-1)$ sont des racines carrées de l'unité.
- Le nombre $i$ n'est pas une racine carrée de l'unité, puisque $i^2 = (-1) \neq 1$. En revanche, c'est une racine quatrième de l'unité, puisque $i^4 = (i^2)^2 = 1$.

**Proposition 3.34 – Liste des racines $n$-èmes de l'unité**

*L'ensemble des racines $n$-èmes de l'unité est*

$$\left\{1, \quad e^{\frac{2i\pi}{n}}, \quad e^{2\cdot\frac{2i\pi}{n}}, \quad e^{3\cdot\frac{2ik\pi}{n}}, \ldots, \quad e^{(n-1)\cdot\frac{2i\pi}{n}}\right\}$$

*Il comporte exactement $n$ éléments.*

***Exemple 3.35*** **(Racines troisièmes de l'unité : 1, $j$ et $j^2$).** —

On cherche les nombres $z$ vérifiant $z^3 = 1$ : il y a 3 racines troisième de l'unité.

- On écrit le nombre 1 sous forme exponentielle : on a $1 = e^{i0}$, on applique la proposition avec $n = 3$ et $\theta = 0$ (le module est égal à 1) .
- On obtient alors les trois racines troisième : 1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}}$.
- On remarque que $e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2$.

Ainsi, les trois racines cubiques de l'unité, sont les nombres 1, $j$ et $j^2$.

**Proposition 3.36 – La somme des racines $n$-èmes de l'unité vaut 0**

*Fixons $n \in \mathbb{N}^\star$ et notons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On a l'égalité* $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$.

***Exemple 3.37* (Cas $n = 3$).** — Pour les racines troisièmes de l'unité, la proposition ci-dessus exprime l'égalité $1 + j + j^2 = 0$.

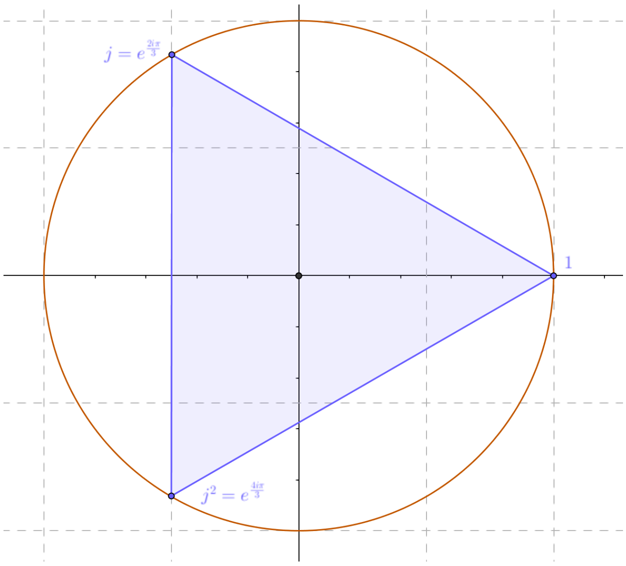


Figure 6. Les complexes 1, $j$ et $j^2$ forment, sur le cercle unité, les trois sommets d'un triangle équilatéral.

### 3.3. Solutions d'une équation du second degré à coefficients complexes. —

Soient $a$, $b$, $c$ trois nombres complexes avec $a \neq 0$.

On veut résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

**Proposition 3.38 – Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ : $az^2 + bz + c = 0$**

*On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.*

- *Si $\Delta = 0$, alors il existe une solution unique $z = \frac{-b}{2a}$.*
- *Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation admet exactement deux solutions.*

  *On détermine les racines carrées de $\Delta$. Si l'on note $\rho$ l'une des deux racines carrées du nombre complexe $\Delta$,*

  *alors les deux solutions sont* $\dfrac{-b-\rho}{2a}$ *et* $\dfrac{-b+\rho}{2a}$.

***Remarque 3.39.*** — On rappelle qu'écrire la racine carrée d'un nombre complexe n'a pas de sens. Si $\Delta < 0$, on exprimera alors toujours $\Delta$ sous forme de carrée de nombre complexe (éventuellement sous forme exponentielle), afin de déterminer ses deux racines carrées.

***Exemple 3.40.*** — On veut résoudre l'équation $z^2 + iz + 1 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

On calcule le discriminant : $\Delta = -1 - 4 = -5$. Donc $\Delta < 0$. On écrit alors $\Delta = 5\, i^2$. Sous cette forme, on peut exprimer une racine carrée de $\Delta$ : on pose donc $\rho = \sqrt{5}\, i$.

Les deux solutions sont

$$z_1 = \frac{-i-\sqrt{5}\,i}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,i$$
$$et\ z_2 = \frac{-i+\sqrt{5}i}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,i.$$

## 4. Transformations du plan complexe

**4.1. Interprétation géométrique des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.** — Soient $E$ et $F$ deux parties de $\mathbb{C}$. On considère une application $f : E \to F$.

Si $z$ est un point de $E$, alors $z$ peut être représenté géométriquement par un point du plan. Si l'on observe $f(z)$, qui est un point de $F$, donc de $\mathbb{C}$, on obtient un autre point du plan. On peut donc voir $f$ comme une *transformation géométrique*.

**4.2. Translations, rotations, homothéties.** —

**Définition 3.41 – Translation dans $\mathbb{C}$**

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application. On dit que $f$ est une translation s'il existe un nombre complexe $v \in \mathbb{C}$ vérifiant
$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = z + v.$$
On dit alors que $f$ est la translation de vecteur $v$.

***Exemple 3.42.*** — Soit $f$ une translation de vecteur $3+i$ et le nombre $z = 3+2i$. Alors l'image de $z$ par $f$ est : $f(z) = 6+3i$. (voir la figure ci-après).

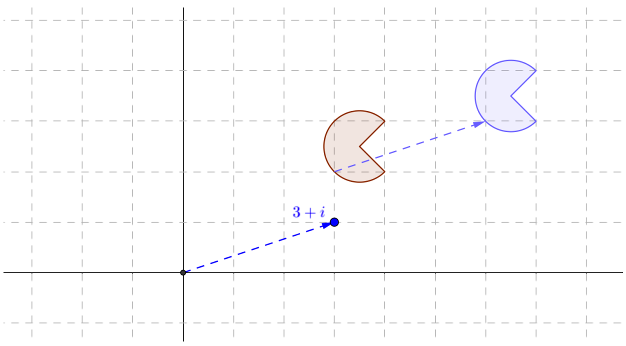


FIGURE 7. Un pac-man (en rouge) et son image par la translation de vecteur $3+i$.

**Définition 3.43 – Rotation autour de l'origine, puis rotation autour d'un point $z_0$**

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application. Soit $\theta$ un nombre réel fixé.

1. Lorsque $f$ est l'application $z \mapsto e^{i\theta} z$, on dit que $f$ est la *rotation d'angle $\theta$ autour de l'origine.*
2. Lorsqu'il existe un nombre complexe $z_0$ tel que $f$ soit l'application $z \mapsto e^{i\theta}(z - z_0) + z_0$, on dit que $f$ est la *rotation d'angle $\theta$ autour de $z_0$*.

***Exemple 3.44.*** — Soit $f$ une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'origine et le nombre $z = 4 + 3i$. L'image de $z$ par $f$, exprimé sous forme algébrique, est :

$$f(z) = e^{i\dfrac{2\pi}{3}} z \;=\; j\,(4+3i) \;=\; \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(4+3i) = -\left(\frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{-3+4\sqrt{3}}{2}\right).$$

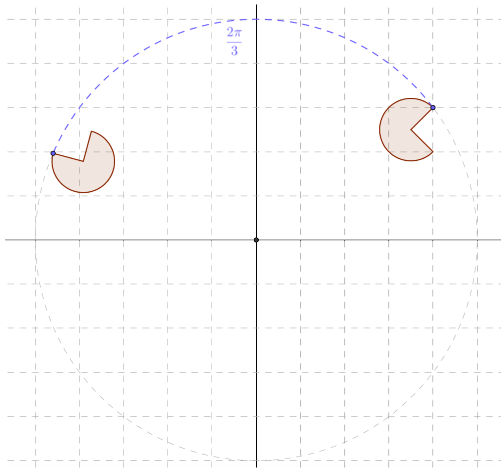


FIGURE 8. Le pac-man de la figure 7 et son image par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'origine.

**Définition 3.45 – Homothétie de centre l'origine, puis homothétie de centre un point $z_0$**

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application. Soit $k \in \mathbb{R}^\star$.

1. Lorsque $f$ est l'application $z \mapsto kz$, on dit que $f$ est l' *homothétie de centre* 0 *et de rapport* $k$..
2. Lorsqu'il existe un nombre complexe $z_0$ tel que $f$ soit l'application $z \mapsto k(z - z_0) + z_0$, on dit que $f$ est l'*homothétie de centre* $z_0$ *et de rapport* $k$.

***Exemple 3.46.*** — Soit $f$ l'homothétie de centre 0 et de rapport $\frac{1}{3}$. Alors l'image de $z = 4 + 3i$ par $f$ est $f(z) = 8 + 3i$.

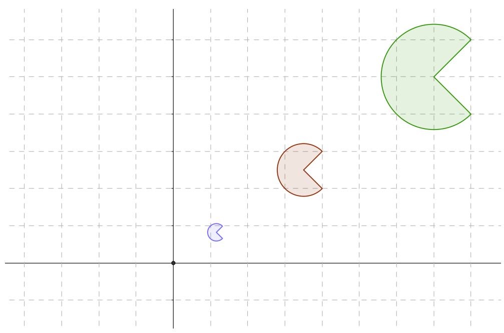

FIGURE 9. Le pac-man de la figure 7 et, en vert, son image par l'homothétie de centre 0 et de rapport 2, en bleu, son image par l'homothétie de centre 0 et de rapport $\frac{1}{3}$. .

### 4.3. Similitudes directes. —

**Définition 3.47 – Similitude directe dans $\mathbb{C}$**

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application. On dit que $f$ est une *similitude directe* lorsqu'il existe un nombre complexe $a \neq 0$ et un nombre complexe $b$ vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b.$$

**Proposition 3.48 – Similitude directe dans $\mathbb{C}$**

*Soient $a$ et $b$ deux nombres complexes et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application $z \mapsto az + b$.*

1. *Si $a = 1$, alors $f$ est la translation de vecteur $b$.*
2. *Si $a \neq 1$, alors il existe un unique point $z_0 \in \mathbb{C}$ vérifiant $f(z_0) = z_0$. De plus, toujours sous l'hypothèse $a \neq 1$ :*
   - *S'il existe $\theta \in (\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z})$ tel que $a = e^{i\theta}$, alors $f$ est la rotation d'angle $\theta$ autour de $z_0$.*
   - *Si $a \in (\mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$, alors $f$ est l'homothétie de rapport $a$ et de centre $z_0$.*

## Exercices du chapitre 3

*Forme algébrique - trigonométrique - exponentielle.* —

***Exercice 3.1.*** — Trouver la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$(1+i)^2, \qquad \frac{1}{i}, \qquad \frac{3+6i}{3-4i}, \qquad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2, \qquad \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

*Rappel : « trouver la forme algébrique de $z$ » signifie « écrire $z$ sous la forme $x+iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ ».*

***Exercice 3.2.*** — 1. Trouver une forme exponentielle de chacun des nombres complexes suivants :

$$z = 1+j, \qquad z_1 = 1+i\sqrt{3}, \qquad z_2 = \sqrt{3}+i, \qquad z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}.$$

*Rappel : « trouver une forme exponentielle de $z$ » signifie « écrire $z$ sous la forme $re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^\star$ et $\theta \in \mathbb{R}$ ».*

2. Calculer $z^3$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver une forme exponentielle de $e^{e^{i\alpha}}$.
4. Déterminer une forme exponentielle de $\frac{1+i}{1-i}$, puis calculer $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{32}$.

*Module, argument, conjugué.* —

***Exercice 3.3.*** — Soient $a$ et $b$ deux nombres complexes. On suppose que $a$ et $b$ sont de module 1 et que $ab \neq -1$. Démontrer que le nombre $\frac{a+b}{1+ab}$ est réel.

***Exercice 3.4.*** —

1. Soit $\theta$ un réel. Déterminer une forme exponentielle des nombres :
   (a) $\dfrac{\tan(\theta)-i}{\tan(\theta)+i}$.
   (b) $\dfrac{1+i\tan(\theta)}{1-i\tan(\theta)}$.
2. Soit $z$ un nombre complexe de module 1. Montrer qu'il existe un réel $t$ vérifiant

$$z = \frac{1+it}{1-it}.$$

*Formules d'Euler, de Moivre, Méthode de l'angle moitié.* —

***Exercice 3.5.*** — "Linéariser" $\cos^4(x)sin(x)$

***Exercice 3.6.*** — 1. Soit $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$. Trouver une forme exponentielle de $1+e^{i\theta}$.

2. Soit $\theta \in ]0, 2\pi[$. Trouver une forme exponentielle de $1+e^{i\theta}$.
3. Soit $\theta$ un réel. Déterminer une forme exponentielle de $1-\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.
4. Soit $\theta$ un réel. Déterminer une forme exponentielle de $e^{i\theta}+e^{2i\theta}$.

***Exercice 3.7.*** — Dans tout l'exercice, on fixe $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Calculer $a = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $b = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ *(on calculera $a+ib$)*.
2. Calculer $c = \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}$.
3. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$.

***Exercice 3.8.*** — Dans cet exercice, on fixe $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$. Calculer les deux quantités suivantes :

$$a = \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad b = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right).$$

***Exercice 3.9.*** — 1. Pour tout réel $\theta$, exprimer $\cos(5\theta)$ à l'aide des puissances de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

2. En utilisant le fait que $\cos\left(5\frac{\pi}{10}\right) = 0$, trouver la valeur de $\cos(\frac{\pi}{10})$.
3. Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(1 - \sqrt{5})$.

*Racines n-èmes.* —

***Exercice 3.10.*** — 1. Calculer les racines carrées des nombres complexe $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z' = 8(i + \sqrt{3})$.

2. Calculer les racines carrées des nombres complexe $z = -2 + 2i\sqrt{3}$ et $z' = 9i$.

***Exercice 3.11.*** — 1. Calculer les racines troisièmes du nombre $1 + i$.

2. Calculer les racines cinquièmes du nombre $z = 1 - i\sqrt{3}$.
3. Calculer les racines quatrièmes du nombre $-4$.

***Exercice 3.12.*** — Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer tous les nombres réels $x$ qui vérifient l'équation

$$(x + i)^n = (x - i)^n.$$

***Exercice 3.13.*** — 1. Montrer qu'un nombre complexe $z$ vérifie $|1 + iz| = |1 - iz|$ si et seulement si on a $z \in \mathbb{R}$.

2. On fixe un réel $a$ et on considère dans $\mathbb{C}$

$$\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^n = \frac{1 + ia}{1 - ia} \tag{$\star$}$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   (a) Montrer, sans les calculer, que les solutions de cette équation sont réelles.

   (b) En écrivant $a = \tan(\alpha)$ et $z = \tan(\theta)$ avec $\alpha$ et $\theta$ réels, résoudre l'équation $(\star)$.

3. Calculer les racines cubiques de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

*Équations du second degré.* —

***Exercice 3.14.*** — Résoudre l'équation suivante, (sous forme algébrique), d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ :

$$z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0.$$

***Exercice 3.15.*** — Résoudre l'équation suivante, (sous forme exponentielle), d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ :

$$z^6 + z^3 + 1 = 0.$$

***Exercice 3.16.*** — On fixe un réel $\theta$. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ :

1.
$$z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0.$$

2.
$$z^2 - 2e^{i\theta}z + 2i\sin(\theta)e^{i\theta} = 0.$$

***Exercice 3.17.*** — On considère l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ :

$$z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3}) = 0. \tag{$\star$}$$

1. Montrer que $(\star)$ a deux solutions distinctes, qu'on exprimera en fonction de $a = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $b = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
2. Trouver une forme trigonométrique de chacune des deux solutions de $(\star)$.
3. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{5\pi}{12})$, $\sin(\frac{5\pi}{12})$, $\cos(\frac{11\pi}{12})$ et $\sin(\frac{11\pi}{12})$.

*Transformations du plan - Applications.* —

***Exercice 3.18.*** — Ecrire sous forme d'une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ les transformations géométriques suivantes :

1. Rotation de centre $(1+i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
2. Homothétie de centre $(-2i)$ et de rapport $\frac{1}{3}$.

***Exercice 3.19.*** — Pour un $\alpha$ fixé, on considère l'application dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f_\alpha(z) = \alpha\ z$$

1. Soit $\alpha = \frac{2}{5}$.
   (a) $f_\alpha$ est quelle transformation géométrique ?
   (b) Montrer que $f_\alpha$ est bijective et exprimer sa réciproque en fonction de $\alpha$.
   (c) Que peut-on en déduire ?
2. Soit $\alpha = j$.
   (a) Quelle est la "nature" de $f_\alpha$ ?
   (b) Soit $A = \{z \in \mathbb{C}, |z| = \sqrt{2}\ \}$. Déterminer $f_\alpha(A)$.

***Exercice 3.20.*** — Dans $\mathbb{C}$, pout tout $a \in \mathbb{C}$, on considère l'application $f$ définie par :

$$f(z) = az + i$$

1. On pose $a = 1$. Montrer que $f$ est bijective et donner sa réciproque. $f$ et sa réciproque sont quelles transformations géométriques ?
2. Pour tout $a \neq 1$, résoudre $f(z_0) = z_0$.
3. On pose $a = e^{i\frac{\Pi}{3}}$. Vérifier qu'on retrouve l'expression d'une rotation d'angle $\frac{\Pi}{3}$ autour de $z_0$ calculé dans la question précédente.
4. On pose $a = 2$. Après avoir précisé la "nature" de $f$, vérifier qu'on retrouve son expression.

***Exercice 3.21.*** — On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{C} \setminus \{i\} & \to & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ & & z & \mapsto & \frac{z+i}{z-i}. \end{array}$$

1. Montrer que $f$ est bijective et déterminer $f^{-1}$.
2. Déterminer les points fixes de $f$ c'est à dire les nombres $z$ vérifiant $f(z) = z$.
3. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
   (a) Montrer que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{U} \setminus \{1\}$.
   (b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{1\}$.

***Exercice 3.22.*** — On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{C}^\star & \to & \mathbb{C}^\star \\ & & z & \mapsto & \frac{2}{(\overline{z})}. \end{array}$$

1. Montrer que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^\star}$.
2. L'application $f$ est-elle bijective, et si oui, quelle est l'application $f^{-1}$ ?.
3. Soit $R$ un réel strictement positif et $\mathcal{C}$ le cercle $\{z \in \mathbb{C}\ /\ |z| = R\}$. Déterminer l'ensemble $f(\mathcal{C})$.
4. Quel est l'ensemble des points fixes de $f$ ?

***Exercice 3.23.*** — Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par la formule suivante : si $z$ est un nombre et si $z = x + iy$ est son écriture sous forme algébrique, alors

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}\right).$$

1. Quelle est la fonction $f|_{\mathbb{R}}$ ?
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $f(z + 2\pi) = f(z)$, que $f(-z) = f(z)$ et que $f(2z) = 2(f(z))^2 - 1$.
3. L'application $f$ est-elle injective ?
4. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$.

***Exercice 3.24.*** — On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{C}^\star & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \end{array}$$

1. L'application $f$ est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{i\})$.
3. Déterminer l'image directe par $f$ du cercle unité $\mathbb{U}$.

# CHAPITRE 4

# FONCTIONS POLYNOMIALES

## 1. Généralités

La notation $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

### 1.1. Notations et vocabulaire. —

**Définition 4.1**

Une fonction polynomiale $P$, parfois appelée fonction polynôme, est une application de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ , dont l'expression est de la forme $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathbb{K}$.

***Remarque 4.2.*** — Par abus de langage, on appelle parfois une « fonction polynomiale » simplement « polynôme », confondant ainsi la notion de fonction polynomiale avec celle de polynôme formel.

Une fonction polynomiale est caractérisée par « son degré » et ses « coefficients »

- ***Coefficients.*** Les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont appelés les *coefficients* de $P$.
  On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients complexes et $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels. On a par exemple (avec $X \in \mathbb{K}$) :

  $$(3X^8 - X^3 + 4) \in \mathbb{R}[X], \qquad (3X^8 - (2+3i)X^2) \in \mathbb{C}[X], \qquad \text{et aussi} \quad (3X^8 - X^3 + 4) \in \mathbb{C}[X].$$

  ***remarque.*** — *Ainsi* $\mathbb{K}[X]$ *désigne* $\mathbb{R}[X]$ *ou* $\mathbb{C}[X]$.

- ***Degré.*** On note $\deg(P)$, le plus grand entier $k$ tel que $a_k \neq 0$. Par exemple, on a l'égalité

  $$\deg(X^3 - 7X + 2) = 3.$$

  Le degré du polynôme constant (c'est à dire $\forall X \in \mathbb{K},\ P(X) = c$) est égal à 0.

- ***Fonction polynôme nulle.*** On définit la fonction polynôme nulle $P = 0$ par :

  $$\forall X \in \mathbb{K},\ P(X) = 0 \iff \textit{pour tout } 1 \leq i \leq n,\ a_i = 0$$

  .

  **Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.**

- ***Coefficient constant.*** Le nombre $a_0$ est appelé le *coefficient constant de* $P$.

- ***Coefficient dominant.*** Si l'on note $n = \deg(P)$, le coefficient $a_n$ est appelé *coefficient dominant de* $P$.
- ***Fonction polynôme unitaire.*** On dit qu'une fonction polynomiale (non nulle) est *unitaire* si son coefficient dominant est égal à 1.

**1.2. Opérations.** — Soient $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ et $Q(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_pX^p$ deux fonctions polynomiales de degrés respectifs $n$ et $p$.

**Définition 4.3**

1. **Egalité.** Si $P = Q$ alors $n = p$ et pour tout $1 \leq i \leq n$, $a_i = b_i$.
2. **Addition.**
   L'élément $P + Q$ de $\mathbb{K}[X]$ est défini par la formule suivante :
   $$\forall X \in \mathbb{K},\ (P+Q)(X) = P(X) + Q(X) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_d + b_d)X^d$$
   où $d = \max(n, p)$ et où on a défini $a_k = 0$ pour tout $k > n$, et $b_k = 0$ pour tout $k > p$.
3. **Multiplication.**
   L'élément $PQ$ de $\mathbb{K}[X]$ est défini par la formule suivante :
   $$\forall X \in \mathbb{K},\ (PQ)(X) = P(X)Q(X) = \sum_{k=0}^{n+p} \left( \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) X^k$$
   autrement dit,

$$(PQ)(X) = (a_0b_0)+(a_0b_1+b_1a_0)X+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)X^2+\cdots+(a_{n-1}b_p+a_nb_{p-1})X^{n+p-1}+(a_nb_p)X^{n+p}.$$

**Proposition 4.4 – Degré d'une somme et d'un produit**

*Soient $P$ et $Q$ deux fonctions polynomiales . On a :*

1. $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
2. *Si* $\deg(P) \neq \deg(Q)$, $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
   *Le seul cas où il n'y a pas d'égalité est celui où $P$ et $Q$ ont le même degré et des coefficients dominants opposés.*
3. *Si $P$ et $Q$ sont non-nulles,* $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

***Remarque 4.5.*** — Si le produit de deux fonctions polynômes $P$ et $Q$ est nul, alors on a $P = 0$ ou $Q = 0$, au moins une des deux est nulle. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

### 1.3. Fonction polynôme dérivée. —

**Définition 4.6 – Dérivée**

Soit $P$ un élément de $\mathbb{K}[X]$,
$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$, où $a_0, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.
La *fonction polynôme dérivée* de $P$, et on note $P'$, est la fonction polynôme de $\mathbb{K}[X]$ donnée par :

$$P'(X) = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1}.$$

***Exemple 4.7.*** — Si $P(X) = X^4 - 5X^3 + X^2 + 1$, alors $P'(X) = 4X^3 - 15X^2 + 2X$.

**Proposition 4.8 – Degré de la fonction polynôme dérivée**

*Soit $P$ un polynôme non constant. On a l'égalité*

$$\deg(P') = \deg(P) - 1.$$

**Proposition 4.9 – Dérivée d'une somme et d'un produit**

*Soient $P$ et $Q$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les égalités suivantes*

$$(P+Q)' = P' + Q'$$
$$(\lambda P)' = \lambda P'$$
$$(PQ)' = P'Q + QP'$$

### 1.4. Dérivées d'ordre supérieur. —

**Définition 4.10 – Dérivées d'ordre supérieur**

Soit $P$ un élément de $\mathbb{K}[X]$. Pour tout $k \geq 2$, on définit la dérivée $k$-ème de $P$, notée $P^{(k)}$ par la formule récursive suivante : $P^{(0)} = P$, $P^{(1)} = P'$ et pour tout $k \geq 2$, $P^{(k)} = (P^{(k-1)})'$.

## 2. Division euclidienne

### 2.1. Divisibilité. —

**Définition 4.11**

Soient $A$ et $B$ deux focntions polynomiales à coefficients réels ou complexes.
On dit que $B$ (non nulle) divise $A$, et on note $B|A$, s'il existe une fonction polynomiale $Q$ telle que : $\forall X \in \mathbb{K}$, $A(X) = B(X)Q(X)$.

***Exemple 4.12.*** —
- La fonction polynomiale $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ est divisible par $X + 1$ car $P(X) = X^2(X+1) + (X+1) = (X+1)(X^2+1)$.
- $X^7 - 2X + 3$ n'est pas divisible par $X^4 - X$ : si c'était le cas, il existerait une fonction polynomiale $Q(X)$ vérifiant : $(X^7 - 2X + 3) = (X^4 - X)Q(X)$ ; or, le coefficient constant de $(X^4 - X)Q(X)$ est nécessairement égal à 0, ce qui impossible car, par égalité, le coefficient constant doit être 3.

**Proposition 4.13 – Divisibilité et degré**

1. *Si $A$ et $B$ sont deux fonctions polynômes non nulles et si $B$ divise $A$ , alors* $\deg(B) \leq \deg(A)$.
2. *Si $B|A$ et $A|B$, alors il existe un scalaire $\gamma \neq 0$ vérifiant : $A = \gamma B$.*
3. *Si $B|A$ et $\deg(A) = \deg(B)$, alors il existe un scalaire $\gamma \neq 0$ vérifiant : $A = \gamma B$.*

*Démonstration.* — 1. Si $B$ divise $A$, par définition il existe une fonction polynôme $Q$ vérifiant : $A(X) = B(X)Q(X)$ ; d'après la proposition 4.4, on a $\deg(A) = \deg(B) + \deg(Q)$, et puisque $Q \neq 0$, le degré de $Q$ est un entier positif ou nul ; on a donc bien $\deg(B) \leq \deg(A)$.

2. D'après le point précédent, si $B|A$ et $A|B$, alors on a nécessairement $\deg(A) = \deg(B)$ ; de plus, si on écrit $A(X) = B(X)Q(X)$ pour tenir compte du fait que $B$ divise $A$, alors on a $\deg(A) = \deg(B) + \deg(Q)$ ; comme nous venons de voir que $\deg(A) = \deg(B)$, on a $\deg(Q) = 0$ ; $Q$ est donc constant et on peut écrire $Q(X) = \gamma$ où $\gamma$ est un scalaire non nul. Ainsi on obtient $A(X) = \gamma B(X)$.

□

***Exemple 4.14.*** — Si $P$ est un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n$, alors on a l'équivalence suivante :

$$P \text{ est divisible par } X^n \iff \exists \gamma \in \mathbb{K}^\star, \quad P(X) = \gamma X^n.$$

***Remarque 4.15* (Divisibilité sur $\mathbb{C}$ et divisibilité sur $\mathbb{R}$).** — Si $A$ et $B$ sont à coefficients réels et si $A$ divise $B$ dans $\mathbb{C}[X]$, alors $A$ divise $B$ dans $\mathbb{R}[X]$.

### 2.2. Division euclidienne. —

**Théorème 4.16 – Existence et unicité de la division euclidienne de $A$ par $B$**

*Soient $A$ et $B$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.*
*Il existe un unique couple $(Q, R)$ de fonctions polynomiales de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant*

$$A(X) = B(X)Q(X) + R(X) \quad \textit{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

*$Q$ est appelé quotient et $R$ reste.*

***Remarque 4.17.*** — Si $R = 0$ (le reste est nul), alors $B$ divise $A$.

***Exemple 4.18.*** — On veut effectuer la division euclidienne de $A$ par $B$ avec :

$$A(X) = X^3 + X + 1 \qquad \text{et} \qquad B(X) = X + 1.$$

On cherche $Q(X)$ et $R(X)$ tels que $A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$ , avec $\deg(R) < \deg(B) = 1$.
D'où $\deg(R) = 0$ et donc $R$ est un polynôme constant.
On propose trois méthodes.

1. On décompose :
$$\begin{aligned} X^3+X+1 &= X^3+X^2-X^2+2X-X+2-1 \\ &= X^2(X+1)-X(X+1)+2(X+1)-1 \\ &= (X+1)(X^2-X+2)-1. \end{aligned}$$
On obtient alors $Q(X)=(X^2-X+2)$ et $R(X)=-1$.
2. On effectue une « division classique » : division suivant les puissances décroissantes.
$$\begin{array}{cccc|c} X^3 & & +X & +1 & X+1 \\ \cline{5-5} X^3 & +X^2 & & & X^2-X+2 \\ \cline{1-4} & -X^2 & +X & +1 & \\ & -X^2 & -X & & \\ \cline{2-4} & & 2X & +1 & \\ & & 2X & +2 & \\ \cline{3-4} & & & -1 & \end{array}$$
Par lecture, on obtient le quotient et le reste.
3. On cherche donc $Q(X)$ et $R(X)$ tels que $A(X)=B(X)Q(X)+R(X)$ , avec $\deg(R)<\deg(B)=1$ : ainsi $\deg(R)=0$ et $\deg(Q)=2$. On cherche donc $R$ et $Q$ de la forme : $R(X)=d$ et $Q(X)=aX^2+bX+c$, avec $a$, $b$, $c$, et $d$ réels. Donc :
$$\begin{aligned} A(X)=X^3+X+1 &= (X+1)(aX^2+bX+c)+d \\ &= aX^3+(a+b)X^2+(b+c)X+c+d \end{aligned}$$
On procède « par identification » : donc $a=1$, $(a+b)=0$, $(b+c)=1$ et $(c+d)=1$. On obtient $a=1$, $b=-1$, $c=2$ et $d=-1$ et donc $Q(X)=(X^2-X+2)$ et $R(X)=-1$.

***Remarque 4.19.*** — On remarque que $B(-1)=0$, et donc $A(-1)=-1=R(-1)=d$. Ainsi $R(X)=-1$.

*Démonstration du théorème 4.16.* —
- *Unicité sous réserve d'existence.* On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe deux couples $(Q_1,R_1)$ et $(Q_2,R_2)$ vérifiant
$$\begin{aligned} A(X)=B(X)Q_1(X)+R_1(X) \quad &\text{et} \quad \deg(R_1)<\deg(B), \\ A(X)=B(X)Q_1(X)+R_2(X) \quad &\text{et} \quad \deg(R_2)<\deg(B). \end{aligned}$$
On a alors l'égalité $BQ_1+R_1=BQ_2+R_2$ ; en la réarrangeant, on trouve
$$R_1-R_2=B(Q_2-Q_1).$$
Examinons les degrés des deux membres de cette égalité :
— $R_1$ et $R_2$ étant de degrés $<\deg(B)$, on a $\deg(R_1-R_2)<\deg(B)$ (voir la proposition 4.4).
— Par ailleurs, $U=B(Q_2-Q_1)$ est divisible par $B$ ; si $Q_2-Q_1\neq 0$, on en déduit (par la proposition 4.13) que $\deg(B)\leq\deg(U)$.
Ces deux remarques mènent à une absurdité, sauf si l'on a $Q_2=Q_1$ ; c'est donc que $Q_2=Q_1$, et on en déduit que $BQ_1+R_1=BQ_1+R_2$, d'où $R_1=R_2$.
- *Existence.* On suppose que $B$ ne divise pas $A$, sinon le résultat à montrer est immédiat. On pose $\deg(A)=n$ et $\deg(B)=m$ et $A(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$ ( donc $a_n\neq 0$) et $B(X)=b_0+b_1X+\cdots+b_mX^m$ ( donc $b_m\neq 0$). Considérons alors l'ensemble suivant :
$$E=\{\deg(A-BP), \quad P\in\mathbb{K}[X]\}.$$

Comme $B$ ne divise pas $A$, on n'a jamais $A-BP=0$, donc jamais $\deg(A-BP)=-\infty$. L'ensemble $E$ est donc formé d'entiers naturels. De plus, $E$ est non vide (il contient par exemple $\deg(A-0)=\deg(A)$).

L'ensemble $E$ admet donc un plus petit élément. Notons $l$ le plus petit élément de $E$, alors il existe $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(A-BQ)=l$. On pose $R=A-BQ$ et $R(X)=c_0+c_1X+\cdots+c_lX^l$.

On a alors $A=BQ+R$, avec $\deg(R)=l$ ; Montrons que $l<\deg(B)=m$.

Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons donc $l\geq m$. Posons

$$P(X)=Q(X)+\frac{c_l}{b_m}X^{l-m}.$$

Alors

$$\begin{aligned}A(X)-B(X)P(X)&=A(X)-B(X)(Q(X)+\frac{c_l}{b_m}X^{l-m})=A(X)-B(X)Q(X)-B(X)(\frac{c_l}{b_m}X^{l-m})\\&=R(X)-(b_0+b_1X+\cdots+b_mX^m)(\frac{c_l}{b_m}X^{l-m})\\&=c_0+c_1X+\cdots+c_lX^l-\frac{c_lb-0}{b_m}X^{l-m}-\cdots-c_lX^l\end{aligned}$$

Donc $\deg(A-BP)<l$. Ce qui contredit que $l$ est le plus petit entier de l'ensemble des éléments de la forme $A-BP$. D'où on a bien $deg(R)<\deg(B$.

□

## 3. PGCD

### 3.1. Définition PGCD. —

**Théorème et définition 4.20 – PGCD de deux polynômes**

Soient $A$ et $B$ deux fonctions polynomiales non nulles de $\mathbb{K}[X]$. Il existe une unique fonction polynomiale $D\in\mathbb{K}[X]$ vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $D$ est un diviseur commun de $A$ et $B$,

(ii) $D$ est unitaire,

(iii) et pour tout $Q\in\mathbb{K}[X]$, si $Q$ est unitaire et divise à la fois $A$ et $B$, alors $\deg(Q)\leq\deg(D)$.

Cette fonction polynomiale $D$ est appelée plus grand diviseur commun de $A$ et $B$, notée $\text{PGCD}(A,B)$.

***Remarque.*** — *Le PGCD de deux fonctions polynomiales est une fonction polynomiale unitaire. Ainsi quand on écrit* $\text{PGCD}(A,B)=1$ *, c'est la fonction polynomiale constante 1.*

### 3.2. Relation de Bézout, algorithme d'Euclide. —

**Proposition 4.21 – Relation de Bézout pour le PGCD**

*Soient $A$ et $B$ deux fonctions polynomiales non nulles de $\mathbb{K}[X]$ et $D$ leur PGCD .*
*Il existe deux fonctions polynomiales $U$ et $V$ de $\mathbb{K}[X]$ telles que*

$$D(X)=A(X)U(X)+B(X)V(X).$$

**Proposition 4.22 – Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD**

*Soient $A$ et $B$ deux fonctions polynomiales non nulles.*
- Initialisation : *on pose $R_1 = A$ et $R_2 = B$.*
- Boucle : *tant que $R_i \neq 0$, on définit $R_{i+1}$ comme étant le reste de la division euclidienne de $R_{i-1}$ par $R_i$.*
- Conclusion : *on s'arrête quand le dernier reste est nul.*

*Le contenu du dernier reste non nul, **divisé par son coefficient dominant pour devenir unitaire**, donne alors le PGCD de $A$ et $B$.*

***Exemple 4.23.*** — Soient les polynômes $A(X) = X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1$ et $B(X) = X^4+2X^3+X+2$.
On applique l'algorithme d'Euclide : en posant $R_1 = A$ et $R_2 = B$, et en effectuant à chaque étape une division euclidienne .

- On effectue la division euclidienne de $R_1$ par $R_2$. On obtient :

$$R_1 = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 = R_2\ (X+1) - X^3 - 1 \qquad \textit{reste } R_3 = -X^3 - 1$$

- On effectue la division euclidienne de $R_2$ par $R_3$ :

$$R_2 = X^4 + 2X^3 + X + 2 = (-X^3 - 1)(-X - 2) + 0 \qquad \textit{et } R_4 = 0$$

Le dernier reste non nul est le polynôme $-X^3 - 1$. On le divise par $-1$ pour le rendre unitaire. Ainsi on obtient $\text{PGCD}(A, B) = X^3 + 1$.

## 4. Polynômes premiers entre eux

**Définition 4.24 – Polynômes premiers entre eux**

Soient $A$ et $B$ deux fonctions polynomiales non nulles. On dit que $A$ et $B$ sont premiers entre eux si $\text{PGCD}(A, B) = 1$.

***Exemple 4.25.*** — Soient $A(X) = X^4 + 1$ et $B(X) = X^3 + 1$. On applique l'algorithme d'Euclide :

$$R_1 = X^4 + 1 = (X^3 + 1)X - X + 1 \qquad R_3 = -X + 1$$
$$R_2 = R_3(-X^2 - X - 1) + 2 \qquad R_4 = 2$$
$$R_3 = R_4\left(-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right) + 0.$$

Le dernier reste non nul est le polynôme constant 2, qui n'est pas unitaire. En le divisant par son coefficient dominant (donc 2), on obtient 1 ; ainsi $\text{PGCD}(A, B) = 1$, donc $A$ et $B$ sont premiers entre eux.

**Proposition 4.26 – Théorème de Bézout pour deux polynômes premiers entre eux**

*Soient $A$ et $B$ deux fonctions polynômes non nulles. $A$ et $B$ sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux fonctions polynômes $U$ et $V$ telles que soit vérifiée la relation*

$$A(X)U(X) + B(X)V(X) = 1.$$

***Recherche d'une relation de Bézout.*** — On reprend l'exemple précédent $A(X) = X^4 + 1$ et $B(X) = X^3 + 1$, avec $\text{PGCD}(A, B) = 1$.

Pour trouver deux polynômes $U$ et $V$ vérifiant $AU + BV = 1$, on "remonte" les calculs pour exprimer le PGCD 1. En partant de l'expression du dernier reste, on remplaçe et on exprime comme suit :

$$R_4 = 2 = R_2 - R_3(-X^2 - X - 1)$$

On exprime $R_3$ obtenu dans la première division euclidienne, ce qui donne : $R_3 = R_1 - R_2 \cdot X$. En remplaçant, cela donne

$$\begin{aligned} R_4 = 2 = R_2 &- (R_1 - R_2\ X)(-X^2 - X - 1) \\ = R_2 &\left(1 - X^3 - X^2 - X\right) + R_1\ (X^2 + X + 1) \end{aligned}$$

On divise par 2 :

$$1 = (X^4 + 1)\left(\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right) + (X^3 + 1)\left(-\frac{1}{2}X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right).$$

On pose $U(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$ et $V(X) = -\frac{1}{2}X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$, pour obtenir $AU + BV = 1$.

**Proposition 4.27 – Lemme de Gauss**

*Soient $A$, $B$, $C$ trois fonctions polynômes non nuls.*
*Si $A$ divise $(BC)$ et si $A$ est premier avec $B$, alors $A$ divise $C$.*

**Proposition 4.28 – Deux diviseurs premiers entre eux...**

*Soient $A$, $B$, $C$ trois fonctions polynômes non nuls.*
*Si $A$ et $B$ divisent $C$ et si $A$ et $B$ sont premiers entre eux, alors $(AB)$ divise $C$.*

## 5. Racines d'une fonction polynôme

### 5.1. Définitions. —

**Définition 4.29**

Soit $P$ un élément de $\mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha$ un élément de $\mathbb{K}$.
On dit que $\alpha$ est une racine de $P$ lorsqu'on a $P(\alpha) = 0$.

***Remarque :*** — *Pour déterminer les racines de $P$, on résout $P(X) = 0$.*

***Exemple 4.30*** **(Degré 1).** — Soit $P$ à coefficients réels ou complexes ; on peut donc écrire $P(X) = aX + b$ où $a$ et $b$ sont deux nombres réels ou complexes et où $a \neq 0$.

Le nombre $-\frac{b}{a}$ est la seule racine de $P$.

***Exemple 4.31*** **(Cas de racines sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$).** — $P(X) = X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle ; en revanche, $P(i) = P(-i) = 0$, donc les nombres $i$ et $-i$ sont des racines de $P$ dans $\mathbb{C}$.

**Proposition 4.32 – Diviseur et racine**

*Soient $A$ et $B$ deux fonctions polynômes. Si $B$ divise $A$ alors toute racine de $B$ est aussi racine de $A$.*

***Remarque :*** — *Soient $A$ et $B$ deux fonctions polynômes avec $B$ divise $A$. alors $\exists\, Q$ , $A(X) = B(X)Q(X)$.*
*Si $\alpha$ est racine de $Q$ alors $\alpha$ est racine de $A$.*
*Mais $\alpha$ n'est pas toujours aussi racine de $B$.*
*Par exemple $X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$ a pour racine $1$ qui n'est pas racine du diviseur $(X^2+X+1)$.*

**Proposition 4.33 – Racine et divisibilité par $X - \alpha$**

*Soit $P$ un élément de $\mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha$ un élément de $\mathbb{K}$.*

$$\begin{aligned} \alpha \text{ est une racine de } P &\iff (X-\alpha) \text{ divise } P \\ &\iff \exists Q \text{ tel que } P(X) = (X-\alpha)Q(X) \end{aligned}$$

**Théorème 4.34 – Théorème de d'Alembert-Gauss**

*Tout polynôme $P$ (non constant), à coefficients réels ou complexes, admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

**5.2. Multiplicité d'une racine.** —

**Définition 4.35 – Multiplicité d'une racine**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de $P$ (vérifiant $P(\alpha) = 0$).
On appelle *multiplicité de $\alpha$ comme racine de $P$*, le plus grand entier $m$ tel que $(X-\alpha)^m$ divise $P$.

la racine $\alpha$ est d'ordre de multiplicité $m$ lorsqu'on a : $(X-\alpha)^m | P$ mais $(X-\alpha)^{m+1} \nmid P$.

$$\begin{aligned} \alpha \text{ est racine de multiplicité } m &\iff P \text{ est divisible par } (X-\alpha)^m \\ &\iff \exists\, Q \text{ tel que } P(X) = (X-\alpha)^m Q(X) \end{aligned}$$

***Remarque.*** — *On dit qu'une racine est simple quand son ordre de multiplicité est 1, et double quand son ordre est 2...*

***Exemple 4.36.*** —
- $P(X) = X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$ : le nombre 1 est racine simple.
- $P(X) = X^4 + 3X^2 = X^2(X^2+3)$, le nombre 0 est racine double, mais pas triple.

**Proposition 4.37 – Multiplicité d'une racine et annulation des dérivées successives**

*Soient $P$ une fonction polynôme à coefficients réels ou complexes, $\alpha$ un nombre réel ou complexe et $m \in \mathbb{N}^\star$. On a :*

$$\alpha \text{ est racine de multiplicité } m \text{ de } P \iff P^{(k)}(\alpha) = 0 \text{ pour tout } k \leq m-1 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

*où $P^{(k)}$ est la dérivée kième de $P$.*

**Proposition 4.38 – Fonction polynôme à coefficients réels**

*Si $P$ est **à coefficients réels** et si $\alpha$ est une racine complexe de $P$, d'ordre de multiplicité $m$, alors son conjugué $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de $P$ du même ordre de multiplicité $m$.*

**5.3. Factorisation d'un polynôme.** —

**Proposition 4.39 – Factorisation**

*Soit $P$ un polynôme de degré $n$.*

1. *Soient $\alpha$ et $\beta$ deux racines distinctes de multiplicités respectives $m$ et $p$. Alors $\exists Q$ tel que $P(X) = (X-\alpha)^m (X-\beta)^p Q(X)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$, $Q(\beta) \neq 0$ et $m+p \leq n$.*
2. *Généralisation*
   - *Soient $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ $k$ racines (réelles ou complexes) de $P$ , et $m_i$ l'ordre de multiplicité de chaque $\alpha_i$ (on a $\sum_{i=1}^{k} m_i \leq n$). $\exists$ une fonction polynôme $Q$ telle que $P$ est de la forme :*
   $$P(X) = (X-\alpha_1)^{m_1} \ldots (X-\alpha_k)^{m_k} \; Q(X)$$
   - *Si $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, alors $P$ est de la forme $P(X) = c \; (X-\alpha_1)^{m_1} \ldots (X-\alpha_k)^{m_k}$ avec $c$ le coefficient dominant de $P$.*

**Corollaire 4.40 – Degré et nombre de racines**

1. *Une fonction polynôme de degré $n$ admet au plus $n$ racines distinctes.*
2. *Si un polynôme admet une infinité de racines, alors c'est le polynôme nul.*

### 5.4. Polynôme scindé. —

**Définition 4.41**

Un polynôme $P$ est dit scindé s'il se factorise (se scinde) en un produit de facteurs du premier degré, autrement dit s'il admet $k$ racines distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $k$ de multiplicité $m_1, \ldots, m_k$ avec $\sum_{i=1}^{k} m_i = d(P)$ alors $P(X) = c\ (X - \alpha_1)^{m_1} \ldots (X - \alpha_k)^{m_k}$ avec $c$ le coefficient dominant de $P$.

Ainsi, le théorème d'existence de racine dans $\mathbb{C}$ se ré-écrit comme suit :

**Théorème 4.42 – Théorème de d'Alembert**

*Tout polynôme $P$ non constant de $\mathbb{C}[X]$ se scinde sur $\mathbb{C}$.*

***Exemple 4.43.*** —

- La fonction polynomiale
$$X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$$
est scindée sur $\mathbb{C}$ (comme toute fonction polynôme non constante), et elle est scindée à racines simples sur $\mathbb{C}$. Par contre, elle n'est pas scindée sur $\mathbb{R}$.
- La fonction polynomiale $(X + 3)(X - 1)^2$ est scindée sur $\mathbb{R}$ (3 est racine simple et 1 racine double).

## 6. Polynômes irréductibles ; factorisation

### 6.1. Définitions. —

**Définition 4.44 – Polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $P$ est *irréductible* lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :
- $P$ n'est pas constant
- et les seuls diviseurs de $P$ dans $\mathbb{K}[X]$ sont les fonctions polynômes de la forme $\beta 1$ et $\beta P$, $\beta \in \mathbb{K}^\star$.

***Exemple 4.45.*** — La fonction polynôme $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, mais pas dans $\mathbb{C}[X]$.

Soit $P(X) = X^2 + 1$.
- Si on considère $P$ comme un élément de l'ensemble $\mathbb{R}[X]$, à coefficients réels : $P$ n'a pas de racine réelle donc $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
- On a $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$. Ainsi la fonction polynôme $P(X) = X^2 + 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$ car elle admet des racines dans $\mathbb{C}[X]$.

**Proposition 4.46**

- *Les polynômes irréductibles de* $\mathbb{C}[X]$ *sont les polynômes de premier degré.*
- *Les polynômes irréductibles de* $\mathbb{R}[X]$ *sont les polynômes de premier degré et ceux du second degré sans racine réelle.*

**Théorème 4.47 – Décomposition en produit de facteurs irréductibles**

*Tout polynôme* $P$ *de degré supérieur ou égal à 1 s'écrit de façon unique comme un produit de facteurs irréductibles ; autrement dit il existe*

- *un entier* $r \in \mathbb{N}^\star$*,*
- *des fonctions polynômes* $P_1, \ldots, P_r$ *qui sont unitaires et irréductibles dans* $\mathbb{K}[X]$*,*
- *des entiers* $m_1, \ldots m_r$ *de* $\mathbb{N}^\star$*,*
- *une constante* $c \in \mathbb{K}^\star$*,*

*vérifiant :*

$$P(X) = cP_1(X)^{m_1}P_2(X)^{m_2}\cdots P_r(X)^{m_k}.$$

***Exemple 4.48.*** — Soit $P(X) = X^4 - 1$. En utilisant l'identité remarquable $X^4 - 1 = (X^2)^2 - 1^2 = (X^2-1)(X^2+1)$, on constate que

$$P(X) = (X-1)(X+1)(X^2+1).$$

Les fonctions polynômes $X-1$ et $X+1$ sont irréductibles (de degré 1 ) ; de plus, nous avons vu à l'exemple 4.45 que $X^2+1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. L'écriture ci-dessus donne donc la décomposition en facteurs irréductibles de $P$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Par ailleurs, nous avons vu que $X^2+1$ n'est pas irréductible si l'on se place dans $\mathbb{C}[X]$ ; si l'on décide de travailler dans $\mathbb{C}[X]$, alors on peut poursuivre la factorisation et écrire

$$P(X) = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i).$$

Cette écriture en produit de quatre facteurs de degré 1, donc irréductibles, donne la factorisation de $P$ dans $\mathbb{C}[X]$.

### 6.2. Fractions rationnelles. —

**Définition 4.49**

On appelle *fraction rationnelle* toute expression de la forme $\dfrac{P}{Q}$ où $P \in \mathbb{K}[X]$, $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \neq 0$.

**Proposition 4.50 – Forme irréductible d'une fraction rationnelle**

*Soit* $R \in \mathbb{K}[X]$ *, une fraction rationnelle non nulle. Il existe alors un unique couple* $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ *tels que*

- $Q \neq 0$ *et unitaire,*
- $R = \dfrac{P}{Q}$ *,*
- $P$ *et* $Q$ *sont premiers entre eux..*

## Exercices du chapitre 4

*Notion de degré.* —

***Exercice 4.1.*** — Soient $P$ et $Q$ deux polynômes à coefficients réels. On suppose que $P$ et $Q$ ne sont pas constants.

1. Peut-on avoir $P + Q = PQ$ ?
2. Peut-on avoir $(P + Q)^2 = (P - Q)^2$ ?
3. Peut-on avoir $(P - Q)^3 = P^3 - Q^3$ ? Et si $P$ et $Q$ n'ont pas le même degré ?

***Exercice 4.2.*** — 1. Déterminer un polynôme $P$ de degré 2 tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 1$.

2. Existe-t-il un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P' = P$ ?
3. Existe-t-il un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X) = XP'(X)$ ?

*Division euclidienne.* —

***Exercice 4.3.*** — 1. Trouver le quotient et le reste de la division euclidienne

(a) $\begin{cases} \text{de} & X^3 + 6X^2 + 2X + 5 \\ \text{par} & 2X^2 + 4. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \text{de} & X^7 + 2X^5 + 7X^3 + 15X + 2 \\ \text{par} & X^3 + 2X. \end{cases}$

2. Étant donné un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on considère les polynômes

$$A(X) = X^5 + X^4 + aX^3 + bX^2 + 5X - 2 \text{ et}$$
$$B(X) = X^3 - 2X + 1.$$

Déterminer $a$ et $b$ de façon à ce que $B$ divise $A$ ?

***Exercice 4.4.*** — Dans tout l'exercice, on fixe deux réels $a$ et $b$ et on suppose $a \neq b$.

1. Exprimer le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $a$, $b$, $P(a)$ et $P(b)$.
2. Exprimer le reste de la division euclidienne de $X^n + X + b$ par $X - a$ en fonction de $a$ et $b$.

***Exercice 4.5.*** — 1. Fixons un entier $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n + X + 1$ par $(X - 1)^2$.

2. Fixons deux entiers naturels $p$ et $q$ avec $p > q$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^p + X^q + 1$ par $X^2 + X$.

***Exercice 4.6.*** — Dans tout l'exercice, on fixe trois entiers $n$, $m$, $p$ dans $\mathbb{N}^\star$.

1. Démontrer que $B(X) = X(X + 1)(2X + 1)$ divise $A(X) = (X + 1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$.
2. Démontrer que $B(X) = X^2 + X + 1$ divise $A(X) = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$.

PGCD. —

***Exercice 4.7.*** — On considère les polynômes $A(X) = X^4+4X^3+X^2-16$ et $B(X) = X^3+3X^2-3X+4$.

1. Calculer le PGCD de $A$ et $B$, noté $D$.
2. En déduire un couple $(U, V)$ de polynômes vérifiant : $AU + BV = D$.

***Exercice 4.8.*** — 1. Montrer que le polynôme $X + 1$ divise les polynômes $X^5 + 1$ et $X^3 + 1$.

2. On note $P_1$ et $P_2$ les polynômes vérifiant $X^5 + 1 = (X + 1)P_1(X)$ et $X^3 + 1 = (X + 1)P_2(X)$. Écrire explicitement $P_1$ et $P_2$, puis montrer que $P_1$ et $P_2$ sont premiers entre eux.
3. En déduire le PGCD de $X^5 + 1$ et $X^3 + 1$.

*Racines.* —

***Exercice 4.9.*** — 1. À l'aide d'un tableau de variations, montrer que le polynôme $P(X) = X^3+3X-5$ admet une et une seule racine réelle.

2. À l'aide d'un tableau de variations, montrer que le polynôme $P(X) = X^3 + 4X^2 - 2X$ admet trois racines réelles distinctes.
3. Montrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

***Exercice 4.10.*** — On fixe un entier $n \geq 2$ et on considère le polynôme

$$P(X) = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1.$$

Montrer que 1 est racine de $P$ et préciser son ordre de multiplicité.

***Exercice 4.11.*** — On fixe $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Déterminer les racines de $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$. En déduire une factorisation dans $\mathbb{C}$.
2. Déterminer les racines du polynôme $X^4 - 2\cos(\theta)X^2 + 1$. En déduire une factorisation dans $\mathbb{C}$.
3. Montrer que le polynôme $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ divise $X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$.

*Décomposition en produits de facteurs irréductibles.* —

***Exercice 4.12.*** — Déterminer la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$ des polynômes.

1. $P(X) = X^4 + 3X^3 + 3X^2$.
2. $P(X) = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.
3. $P(X) = X^4 + 2X^3 - X - 2$.
4. $P(X) = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.

***Exercice 4.13.*** — Dans cet exercice, on considère le polynôme $P(X) = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Montrer que $i$ est racine de $P$.
2. En déduire que $P$ est divisible par $X^2 + 1$.
3. Déterminer la décomposition de $P$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

***Exercice 4.14.*** — 1. Déterminer les racines des polynômes $P$ suivants puis en déduire la factorisation, dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ :

   (a) $P(X) = X^4 - 1$.

   (b) $P(X) = X^5 - 1$.

2. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^\star$. En distinguant selon la parité de $n$, déterminer la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ :

   (a) du polynôme $X^n - 1$,

(b) du polynôme $X^n + 1$.

***Exercice 4.15.*** — Dans cet exercice, on considère le polynôme $P(X) = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

1. Quel est le degré de $P$ ?
2. Montrer que $P$ est divisible par $(X-j)^2$, où $j$ est le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
3. Donner deux racines réelles "simples" de $P$, en précisant leurs multiplicité.
4. En remarquant que $P$ est à coefficients réels, en déduire la factorisation de $P$ dans $\mathbb{C}[X]$.

***Exercice 4.16.*** — On fixe trois réels $a$, $b$, $c$ et on considère $P(X) = X^6 + aX^4 + bX^3 + c$, vu comme élément de $\mathbb{C}[X]$.

1. Déterminer $a$, $b$ et $c$ tels que 1 soit racine double de $P$ et $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ soit racine de $P$.
2. Montrer que si ces conditions sont vérifiées, alors $P$ est en fait à coefficients réels et $j$ est en fait racine double de $P$.
3. Trouver la factorisation de $P$ en produit de facteurs irréductibles, dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

***Exercice 4.17.*** — Dans cet exercice, on considère le polynôme

$$P(X) = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1.$$

1. Montrer que le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est racine de $P$, en précisant son ordre de multiplicité.
2. Quelles conséquences sur les racines de $P$ peut-on tirer du fait que $P$ soit pair et à coefficients réels ?
3. En déduire la décomposition de $P$ en facteurs irréductibles, dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

***Exercice 4.18.*** — Le but de cet exercice est de déterminer tous les polynômes (non nul) $P \in \mathbb{R}[X]$ qui sont scindés sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient :

$$P(X)P(X+2) + P(X^2) = 0.$$

1. Montrer que si $\alpha$ est une racine de $P$, alors $\alpha^2$ est aussi une racine de $P$.
2. Soit $P$ non nul. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer, par récurrence, que si $\alpha$ est une racine de $P$, alors $\alpha^{2^n}$ est aussi une racine de $P$.
3. En déduire que la seule racine possible de $P$ est 1.
4. Conclure en déterminant l'expression de $P$.