CHAPITRE 1

LOGIQUE

1. Propositions

1.1. Définition. — Il y a deux valeurs de vérité : le vrai (V) et le faux (F).

Définition 1.1

Une proposition est un énoncé complet qui est soit "vrai" soit "faux".

Exemple 1.2. —
- $2+2=4$
- Si x est un réel tel que $x^2 \geq 1$, alors $x > 1$

1.2. Connecteurs NON, ET, OU , $\Longrightarrow$. —

1.2.1. *Négation : connecteur* NON. —

Définition 1.3 – Négation d'une proposition

La *négation* de la proposition P, notée NON(P), est vraie si « P est fausse ».

Exemple 1.4. —
- Si x est un nombre réel, alors la négation de « $x > 3$ » est « $x \leq 3$ ».
- La négation de « ma voiture est bleue » est simplement « ma voiture n'est pas bleue »
- la négation d'une fonction croissante est ...la fonction n'est pas croissante

1.2.2. *Connecteur* ET. —

Définition 1.5 – Conjonction de deux propositions

On appelle conjonction des propositions P et Q , la proposition notée (P ET Q) , qui est vraie si P et Q sont vraies toutes les deux, et fausse sinon.

Par exemple, « $(2+2=4)$ ET $(3+3=6)$ » est vrai, mais « $(2+2=4)$ ET $(3+3=7)$ » est faux.

Notation. — L'énoncé (P ET Q) se note parfois $(P \wedge Q)$ ou $(P \,\&\, Q)$.

1.2.3. *Connecteur* OU. —

Définition 1.6 – Disjonction de deux propositions

On appelle disjonction des propositions P et Q, la proposition notée (P OU Q) , qui est vraie si l'une au moins des deux propositions est vraie, et fausse si et seulement si les deux propositions sont fausses.

Remarque 1.7. — (P OU Q) veut dire « soit P, soit Q, soit les deux ». On dit que le OU est *inclusif* .

1.2.4. *Connecteur* $\Longrightarrow$. —

Définition 1.8 – Implication

On appelle implication de Q par P , ou on dit P implique Q, la proposition notée ($P \Longrightarrow Q$) comme l'assertion

$$(\text{NON } P) \text{ OU } Q.$$

Remarque 1.9. — Dans un énoncé, l'implication se lit " si .... alors ....."

$P \Rightarrow Q$ vrai sauf si Q fa et P V en même temp

Exemple 1.10. — Fixons un nombre réel x. Soit l'énoncé

$$x \geq 3 \Longrightarrow x^2 \geq 9 \tag{1.1}$$

Notons P l'affirmation « $x \geq 3$ » et Q l'affirmation « $x^2 \geq 9$ ».
Il y a deux situations possibles selon que P : « $x \geq 3$ » est vraie ou non :

- si P est vraie, soit donc $x \geq 3$, alors, comme la fonction carrée est croissante, on a $x^2 \geq 9$, ce qui signifie que Q est vraie. Donc, par définition de disjonction de deux propositions, (NON(P) OU Q) est vraie.
- Si P est fausse (soit si $x < 3$), alors NON(P) est vraie, et donc (NON(P) OU Q) est aussi vraie.

Remarque 1.11. — On peut résumer par la table de vérité suivante :

P	Q	NONP	NONQ	(P ET Q)	(P OU Q)	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V

1.3. Construction de propositions complexes. —

Définition 1.12 – proposition complexe

Une proposition complexe est composée à partir de propositions simples et des connecteurs.

On emploie des parenthèses afin d'établir l'ordre des constructions successives. Par exemple

$$((P \text{ OU } Q) \implies R). \tag{1.2}$$

$$(P \text{ OU } (Q \implies R)). \tag{1.3}$$

$$(((P \text{ OU } Q) \implies R) \text{ ET } (\text{NON } (R)). \tag{1.4}$$

!

1.4. Propositions équivalentes. —

Définition 1.13 – Énoncés équivalents

On dit que deux propositions P et Q sont équivalentes, si les deux propositions $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$ sont vraies. Cette relation est notée $(P \iff Q)$

Remarque 1.14. — Dans un énoncé, l'équivalence se lit "si et seulement si" .

1.5. Propriétés des connecteurs. —

Dans ce qui suit, P, Q et R sont des propositions.

1.5.1. *Principes fondamentaux.* —

- $(P \text{ OU } (\text{NON}P))$ est vraie : on a toujours P *ou* $(\text{NON}P)$.
- De même, $(P \text{ ET } (\text{NON}P))$ est fausse : on ne peut avoir en même temps P *et* $(\text{NON}P)$.
- $\text{NON}(\text{NON}P) \iff P$. → principe du tiers exclu

1.5.2. *Commutativité des* ET , OU. —

- $(P \text{ ET } Q) \iff (Q \text{ ET } P)$.
- $(P \text{ OU } Q) \iff (Q \text{ OU } P)$.

1.5.3. *Associativité des* ET , OU. —

- $((P \boxed{\text{ET}} Q) \boxed{\text{ET}} R) \iff (P \text{ ET } (Q \text{ ET } R))$.
- $((P \text{OU } Q) \text{ OU } R) \iff (P \text{ OU } (Q \text{ OU } R))$.

1.5.4. *Distributivité de* ET / OU, OU / ET. —

- $(P \boxed{\text{ET}} (Q \text{ OU } R)) \iff ((P \text{ ET } Q) \text{ OU } (P \text{ ET } R))$.
- $(P \text{ OU } (Q \text{ ET } R)) \iff ((P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \text{ OU } R))$.

1.5.5. *Transitivité de* $\implies$, —

- $((P \implies Q) \text{ ET } (Q \implies R)) \implies (P \implies R)$.

1.5.6. *Contraposition.* —

Définition 1.15 – Contraposée d'une implication

La contraposée de l'implication $(P \implies Q)$ est

$$(\text{NON } (Q) \implies \text{NON } (P)).$$

$$(P \implies Q) \iff (\text{NON } (Q) \implies \text{NON } (P)).$$

Exemple 1.16. — Soit la proposition : "si une fonction f est impaire alors $f(0) = 0$" , la contraposée est "si $f(0) \neq 0$ alors f n'est pas impaire".

Remarque 1.17. — Pour démontrer une implication, on pourra démontrer la contraposée

1.5.7. *Dualité : Loi de Morgan.* —

- NON $(P \text{ ET } Q) \iff (\text{NON } P) \text{ OU } (\text{NON } Q)$.
- NON $(P \text{ OU } Q) \iff (\text{NON } P) \text{ ET } (\text{NON } Q)$.

Exemple 1.18. — NON $(f(0) = 0 \text{ OU } f(1) = 0) \iff f(0) \neq 0 \text{ ET } f(1) \neq 0$

1.5.8. *Négation de* $\implies$. —

- NON $(P \implies Q) \iff (P \text{ ET } \text{ NON } Q)$.

2. Quantificateurs : « pour tout » et « il existe »

2.1. Quantificateurs $\forall$ et $\exists$. — On donne un ensemble E et, pour tout élément x de E, une forme propositionnelle $P(x)$, soit une proposition qui dépend de x.

Définition 1.19 – Énoncé avec quantificateur universel $\forall$

L'énoncé ($\forall x \in E, \ P(x)$) est vrai , si et seulement si , pour tout choix x dans E, $P(x)$ est vraie.

Cela se lit : pour tout x de E (ou quelque soit x) , $P(x)$ est vraie.

Exemple 1.20. — $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

Exemple 1.21. — Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison a si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n + a.$$

Définition 1.22 – Énoncé avec quantificateur existentiel

L'énoncé ($\exists x \in E \ / \ P(x)$) est vrai, si et seulement si, pour au moins un élément x de E, $P(x)$ est vraie.

Cela se lit : il existe au moins un élément x de E, $P(x)$ est vraie.

Exemple 1.23. — $\exists\, x \in \mathbb{R},\, x - 1 = -5$.

Convention d'écriture et de lecture. — Dans « $\forall x \in E,\ P(x)$ », la virgule peut se lire « on a ».
Dans « $\exists x \in E \ / \ P(x)$ », la barre peut se lire « tel que » ou « vérifiant ».
La barre après $\exists$ n'est pas indispensable et on peut la remplacer par une virgule ou par deux points.

Exemple 1.24. — Soient deux entiers n et p. On dit que n est multiple de p, si $\exists k \in \mathbb{Z},\ n = kp$.

Exemple 1.25. — L'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ x^2 + x + 1 \geq 0$$

se lit « pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ on a $x^2 + x + 1 \geq 0$ » : elle est vraie. Par contre, l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ (x-1)(x-3) \geq 0,$$

est fausse, puisque pour $x = 2$, on a $(x-1)(x-3) < 0$.

Exemple 1.26. — L'assertion

$$\exists x \in \mathbb{R} \ / \ (x-1)(x-3) \geq 0,$$

se lit « il existe un x réel tel que $(x-1)(x-3) \geq 0$ » : elle est vraie, puisque pour $x = 4$, l'inégalité est vérifiée. Par contre, l'assertion

$$\exists n \in \mathbb{N} :\ \ 40 = 2n + 1$$

est fausse.

Notion de variable muette. — Dans une assertion du type « $\forall x \in E,\ P(x)$ » ou « $\exists x \in E \ / \ P(x)$ », la variable x est muette.

L'assertion

La fonction exp *est strictement positive sur* $\mathbb{R}$

s'écrit, par exemple

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \exp(u) > 0$$

- L'énoncé
$$\exp(x^2 + 1) \geq 1 \tag{2.1}$$
n'est pas complet : c'est une affirmation portant sur un élément x qui n'est pas précisé.

- L'énoncé
$$\forall y \in \mathbb{R},\ \ln(y^2 + 1) \geq 0. \tag{2.2}$$
est *complet*, et il est vrai. La variable y est muette et aurait pu être remplacée par une autre lettre.

Vocabulaire : le quantificateur « il existe un unique » $\exists!$. — (« $\exists!\ x \in E \ / \ \mathcal{P}(x)$ ») se lit « il existe un unique x tel que $P(x)$ soit vraie ». Par exemple, l'assertion

$$\exists!\ x \in \mathbb{R} \ : \ e^x = 1$$

est vraie. L'assertion

$$\exists!\ x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 = 4$$

est fausse.

2.2. Propriétés des énoncés avec un seul quantificateur. —

$$\text{NON } (\forall x \in E,\ P(x)) \Longleftrightarrow (\exists x \in E,\ \text{NON } P(x))$$

Exemple 1.27. — La négation de

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ x^2 + x + 1 \geq 0$$

est

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \ x^2 + x + 1 < 0.$$

Exemple 1.28. — L'assertion « Tout étudiant de L1 aime les mathématiques » s'écrit « $\forall x \in L1, P(x)$ ». La négation est « $\exists x \in L1, \text{NON } (P(x))$ » : il y a au moins un étudiant de L1 qui n'aime pas les mathématiques.

- $\text{NON } (\exists x \in E,\ P(x)) \Longleftrightarrow (\forall x \in E,\ \text{NON } P(x))$
- $(\forall x \in E,\ P(x) \text{ ET } Q(x))) \Longleftrightarrow (\forall x \in E,\ P(x)) \text{ ET } (\forall x \in E, Q(x))$
- $(\exists x \in E,\ P(x) \text{ OU } Q(x))) \Longleftrightarrow (\exists x \in E,\ P(x)) \text{ OU } (\exists x \in E, Q(x))$
- $(\forall x \in E,\ P(x)) \text{ OU } (\forall x \in E, Q(x)) \Longrightarrow (\forall x \in E,\ P(x) \text{ OU } Q(x))$
- $(\exists x \in E,\ P(x) \text{ ET } Q(x)) \Longrightarrow (\exists x \in E,\ P(x)) \text{ ET } (\exists x \in E, Q(x))$

2.3. Enchainement des quantificateurs. — Soient E et F deux ensembles, un élément $x \in E$ et un élément $y \in F$. On considère une forme propositionnelle notée $R(x, y)$, c'est à dire un énoncé contenant les deux éléments x et y . Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ permettent de former de nombreuses assertions mathématiques.

2.3.1. *Enchainement avec mêmes quantificateurs.* — Dans une assertion comportant les mêmes quantificateurs, l'ordre n'est pas important :

- $(\forall x \in E, \forall y \in F,\ R(x, y)) \Longleftrightarrow (\forall y \in F, \forall x \in E,\ R(x, y))$
- $(\exists x \in E, \exists y \in F,\ R(x, y)) \Longleftrightarrow (\exists y \in F, \exists x \in E,\ R(x, y))$

2.3.2. *Enchainement avec quantificateurs différents.* —

Dans une assertion comportant plusieurs quantificateurs, l'ordre est très important.
Il permet notamment de déterminer quelles variables « peuvent dépendre des autres ».

Quand on a « $\forall x \in E, \exists y \in F...$ », ce qui se lit « pour tout x , il existe y... » : y peut dépendre de x.
Quand on a « $\exists y \in F, \forall x \in E....$ », ce qui se lit « il existe y tel que pour tout x ... » : y est indépendant de x.

$$(\exists x \in E, \forall y \in F,\ R(x, y)) \Longrightarrow (\forall y \in F, \exists x \in E,\ R(x, y)).$$

Exemple 1.29. — Considérons les deux assertions suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}^+ \ : \ y = x^2, \tag{2.3}$$

$$\exists y \in \mathbb{R}^+ \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad y = x^2. \tag{2.4}$$

- La première, correcte, indique l'existence du carré d'un réel quelconque.
- La seconde, fausse, signifie qu'il existe un réel positif qui est le carré de tous les réels.

Exemple 1.30. — Considérons les deux assertions suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R} \ : \ y + 1 > x^2, \tag{2.5}$$

$$\exists y \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad y + 1 > x^2. \tag{2.6}$$

- La première est vraie : si x est un nombre réel, alors en choisissant $y = x^2$, on constate que $y+1 > x^2$.
- La seconde est fausse : en effet, s'il existait un réel y vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y+1 > x^2$, alors on pourrait appliquer cette affirmation avec $x = \sqrt{|y|+1}$, et on obtiendrait $y+1 > |y|+1$, ce qui est impossible.

2.3.3. *Négation d'enchainement des quantificateurs.* —

$$\text{NON } (\forall x \in E, \forall y \in F, \ R(x,y)) \Longleftrightarrow (\exists x \in E, \exists y \in F, \ \text{NON } R(x,y))$$
$$\text{NON } (\exists x \in E, \exists y \in F, \ R(x,y)) \Longleftrightarrow (\forall x \in E, \forall y \in F, \ \text{NON } R(x,y))$$
$$\text{NON } (\exists x \in E, \forall y \in F, \ R(x,y)) \Longleftrightarrow (\forall x \in E, \exists y \in F, \ \text{NON } R(x,y))$$

Pour nier un énoncé comportant plusieurs quantificateurs :

- on change tous les $\forall$ en $\exists$ et tous les $\exists$ en $\forall$, en conservant soigneusement l'ordre,
- on écrit la négation de la partie non quantifiée.

Exercices du chapitre 1

Conjonction, disjonction, négation. —

***Exercice 1.1* (Sens et négation du OU et du ET).** —
Xavier est brun et Maria est blonde. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, puis les nier.

1. Xavier est blond ou Xavier est brun.
2. Xavier est roux et Maria est blonde.
3. Xavier n'est pas brun ou Maria est blonde.

***Exercice 1.2* (Négation du OU et du ET).** — Soit x un réel. Nier les propositions suivantes :

1. $x = 1$ ou $x = -1$.
2. $0 \leq x \leq 1$.
3. $x = 0$ ou ($x^2 = 1$ *et* $x \geq 0$).

***Exercice 1.3* (Manipulation des connecteurs ET, OU, NON).** — On considère les assertions suivantes portant sur un réel x :

$$P : « x < 50 » \quad \text{et} \quad Q : « x > 40 »$$

Écrire simplement les énoncés

(a) NON(P),

(b) NON(Q),

(c) P OU Q,

(d) NON(P) OU Q,

(e) NON(P OU Q),

(f) NON(P) ET NON(Q).

(g) NON(NON(P)),

(h) P ET Q,

***Exercice 1.4* (Calcul propositionnel).** — Soient P et Q deux énoncés. Simplifier autant que possible les énoncés suivants :

1. NON (NON(P) ET NON(Q))
2. (Q ET NON(P)) OU P
3. (P ET Q) OU (P ET NON(Q)) OU (NON(P) ET Q)

Implication. —

***Exercice 1.5* (Manipulation de la définition).** — Soient P, Q, R trois assertions.
On suppose que P est fausse, que Q est vraie et que R est vraie.
Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

(a) ($P \implies$ NON(Q)) OU (NON (R ET Q))

(b) (NON(P) OU NON(Q)) $\implies$ (P OU NON(R))

(c) NON (NON(P) $\implies$ NON(Q)) ET R

(d) NON (NON(P) $\implies$ (Q ET NON(R)))

***Exercice 1.6* (Contraposée et réciproque).** — Dans tout l'exercice, on fixe un réel x et un entier naturel n.
Pour chacune des implications suivantes, écrire la contraposée et la réciproque , préciser si elles sont vraies.

1. Si $x \geq 3$, alors $x + 2 \geq 5$.
2. Si $n > 1$, alors $n^2 > n$.

***Exercice 1.7* (Définition de l'implication).** — Étant donné trois énoncés P, Q et R.

1. On forme l'énoncé
$$(P \text{ ET } (Q \text{ OU } R)) \implies (Q \text{ OU } (P \text{ ET } R)). \tag{E}$$
Écrire la négation de (E), la contraposée de (E) et la réciproque de (E).

2. En utilisant la table de vérité ci-dessous (rajouter les colonnes intermédiares nécessaires), montrer que l'énoncé suivant est toujours vrai
$$(((P \implies Q) \implies P) \implies P).$$

à compléter

P	Q	$P \Rightarrow Q$	NON$(P \Rightarrow Q)$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$	NON $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P)$	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$
V	V	V	F	V		V
V	F	F	V	V		V
F	V	V	F	V		V
F	F	V	F	F	V	V

Quantificateurs. —

***Exercice 1.8* (Lecture d'énoncés).** — On considère les ensembles $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, $C = \{2,4\}$ et $D = \mathbb{N}$.
Parmi les énoncés ci-dessous, déterminer ceux qui sont vrais et ceux qui sont faux.

(a) $\forall x \in A,\ x \in B.$
(b) $\exists x \in B,\ x \in A.$
(c) $\exists x \in A,\ x \notin B$
(d) $\exists x \in B,\ x \notin A$
(e) $\forall x \in C,\ \exists y \in B,\ x \leq y.$
(f) $\forall x \in A,\ \exists y \in B,\ x \leq y.$
(g) $\exists x \in C,\ \forall y \in A,\ y \leq x.$
(h) $\exists x \in B,\ \forall y \in A,\ \forall z \in C,\ \ y + z \leq 2x.$
(i) $\exists x \in B,\ \forall y \in B,\ x \leq y.$
(j) $\exists x \in D,\ \forall y \in D,\ x \leq y$
(k) $\exists x \in D,\ \forall y \in D,\ x \geq y.$
(l) $\forall x \in D,\ \exists y \in A,\ x = y.$
(m) $\exists x \in D,\ \exists y \in A,\ x = y.$
(n) $\exists x \in D,\ \forall y \in A,\ x = y.$

***Exercice 1.9* (Traduction langage courant / quantificateurs).** — Écrire sous la forme d'une assertion avec quantificateurs les énoncés suivants :

1. Tout entier naturel possède une racine carrée réelle.
2. Tout entier naturel possède un réel positif plus grand que lui.
3. Il existe un réel plus petit que tous les entiers naturels.

***Exercice 1.10* (Traduction langage courant / quantificateurs).** — Dans cet exercice, on fixe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Pour chacune des phrases ci-dessous, écrire une assertion utilisant les quantificateurs et ayant la même signification logique.
   (a) La fonction f ne s'annule pas.
   (b) La fonction f n'est pas nulle.
   (c) La fonction f est strictement croissante.
2. Pour chaque énoncé ci-dessous, écrire une phrase en français courant (sans quantificateurs) ayant la même signification logique.
   (a) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = y.$
   (b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y.$
   (c) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall x' \in \mathbb{R},\ \ f(x) \leq f(x').$

***Exercice 1.11* (Négation d'énoncés avec quantificateurs courant)**

Nier, en langage courant, les propositions suivantes :

1. Il y a au moins un étudiant qui aime le tennis.
2. Tous les étudiants aiment lire.
3. Dans toutes les matières, il y a au moins un étudiant qui travaille régulièrement.
4. Il y a au moins un étudiant qui, dans toutes les matières, travaille régulièrement.

Exercice 1.12. — 1. Soient A, B et C trois propositions. Soit la proposition $P : ((A\ ET\ B) \implies C)$. Ecrire P sous une forme équivalente.

2. On définit $A = \{\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 1\}$, $B = \{\exists x \in \mathbb{R}, x^4 < 1\}$ et $C = \{\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 1\ et\ x^4 < 1\}$. En utilisant la question précédente, montrer que P est fausse.

***Exercice 1.13* (Traduction d'énoncés avec des quantificateurs).** — À l'université du Portique, il n'y a que deux étudiant·e·s : Camille et Claude. Il y a trois matières : Latin, Grec et Rhétorique. À la fin de l'année, leurs notes (sur 20) sont les suivantes.

	Latin	Grec	Rhétorique
Camille	12	5	16
Claude	14	15	7

Considérons les ensembles $E = \{\text{Camille, Claude}\}$ et $F = \{\text{Latin, Grec, Rhétorique}\}$. Pour tout x dans E et tout y dans F, on considère l'énoncé

$P(x, y)$: « l'étudiant·e x a obtenu une note supérieure ou égale à 10 dans la matière y ».

Pour chacun des énoncés suivants :

- donner une traduction en français courant ;
- dire si l'énoncé est vrai ou faux.

(a) : $\forall x \in E, \forall y \in F,\ P(x, y)$ (b) : $\exists x \in E, \exists y \in F,\ \text{NON}(P(x, y))$ (c) : $\exists x \in E, \forall y \in F,\ P(x, y)$
(d) : $\forall x \in E, \exists y \in F,\ P(x, y)$ (e) : $\exists y \in F, \forall x \in E,\ \text{NON}(P(x, y))$ (f) : $\exists y \in F, \forall x \in E,\ P(x, y)$

***Exercice 1.14* (Quantificateurs imbriqués et négation, I).** — Écrire la négation de chacun des énoncés suivants :

1. $\exists x \in \mathbb{R}\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\ x > 2n$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x \in \mathbb{R}\ :\ x > 2n$
3. Pour tout réel x, pour tout réel y, si $x \geq y$ alors $x^2 \geq y^2$.

08/09

***Exercice 1.15* (Quantificateurs imbriqués et négation, II).** — 1. Considérons l'énoncé suivant :

$$\exists x \in \mathbb{R}\ /\ \forall y \in \mathbb{R},\ x^2 + 2xy = 1. \qquad \text{(P)}$$

(a) Écrire la négation de (P).

(b) L'énoncé (P) est-il vrai ?

2. Écrire la négation de l'énoncé :

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}\ :\ \exists z \in \mathbb{N}\ :\ (x \leq y \quad \text{et} \quad y = 2z) \qquad \text{(Q)}$$

CHAPITRE 2

MÉTHODES DE DÉMONSTRATION

Ce chapitre présente les manières les plus courantes de *démontrer* une assertion mathématique.

1. Déduction

La formation d'un énoncé vrai C, à partir d'un énonce vrai H, s'appelle la déduction de C à partir de H. H est l'hypothèse et C la conclusion. Faire une démonstration, c'est donc suivre un chemin, en appliquant des règles. Il y a de nombreuses méthodes de démonstration.

2. Assertions avec quantificateur universel ou existentiel

Soit un ensemble E et pour chaque x de E, une assertion $\mathcal{P}(x)$.

2.1. Démontrer une assertion qui commence par un « pour tout ». —
Pour vérifier l'assertion

$$\forall x \in E, \quad \mathcal{P}(x),$$

on ne peut pas procéder « élément par élément ».

> Pour commencer la démonstration d'une assertion du type « $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ », on peut écrire
>
> « Soit x un élément de E »
>
> x un élément arbitraire de E. On tente ensuite de montrer $\mathcal{P}(x)$.

Exemple 2.1. — Montrons l'assertion suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 1 \geq 2x.$$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$. On a toujours $(x-1)^2 \geq 0$: soit

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0,$$

d'où

$$x^2 + 1 \geq 2x,$$

ce qu'il fallait démontrer.

2.2. Démontrer une assertion qui commence par un « il existe ». — Pour vérifier l'assertion

$$\exists x \in E, \quad \mathcal{P}(x),$$

nous devons montrer qu'il existe au moins un élément de E pour lequel $\mathcal{P}(x)$ est vraie. Le plus simple est de trouver concrètement un tel élément, lorsque c'est possible :

> Pour démontrer une assertion du type « $\exists x \in E \; / \; \mathcal{P}(x)$ », on peut chercher un *exemple concret* d'élément x de E pour lequel $\mathcal{P}(x)$ est vérifiée.

Exemple 2.2. — On fixe trois réels a, b et c, on suppose $a > 0$ et $c < 0$ et on veut montrer l'assertion

$$\exists x \in \mathbb{R} \; / \; ax^2 + bx + c \leq 0.$$

On choisit $x = 0$; on a bien alors $ax^2 + bx + c = c < 0$.

Attention aux variables muettes. — Lorsqu'on veut montrer une assertion écrite avec des quantificateurs à partir d'autres assertions elles-mêmes écrites avec des quantificateurs, les *noms des variables* peuvent semer la confusion, notamment lorsqu'il y a des variables muettes en commun dans les deux assertions à montrer.

Exemple 2.3. — Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Supposons vérifiée la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad 0 < f(x) < \varepsilon. \tag{H}$$

Montrons l'assertion suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists x \in \mathbb{R}, \quad 0 < 2f(x) < \varepsilon. \tag{2.1}$$

> Pour débuter notre raisonnement, on se laisser guider par *l'assertion à montrer.*

Ici, c'est l'assertion (2.1) que nous devons prouver. C'est une assertion qui commence par un « pour tout », on écrit donc :

Soit $\varepsilon > 0$.

Nous avons maintenant fixé un nombre ε, qui ne *peut plus bouger* jusqu'à la fin de notre raisonnement. Nous ne pouvons pas appliquer l'hypothèse (H) à ce ε-là, puisque cela ne donnera pas la conclusion voulue.

Mais on peut (et on doit) remarquer que dans (H), les variables sont *muettes* : l'hypothèse (H) a *exactement la même signification* que la version suivante :

$$\forall \alpha > 0, \; \exists x \in \mathbb{R}, \quad 0 < f(x) < \alpha. \tag{H, reformulée}$$

Nous avons fixé ε au début de notre raisonnement, mais nous pouvons appliquer (H, reformulée) avec un α de notre choix. On constate alors qu'en appliquant (H, reformulée) avec $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$, on obtient l'existence d'un réel x vérifiant

$$0 < f(x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

autrement dit, $0 < 2f(x) < \varepsilon$, comme espéré.

3. Montrer qu'une implication est vraie

3.1. Par la définition. —

Pour montrer que $(P \implies Q)$ est vraie, il faut montrer que si P est vraie alors Q est vraie.

Remarque 2.4. — On dit que
- P est une condition suffisante de Q : pour que Q soit vraie, il suffit que P soit vraie.
- Q est une condition nécessaire de P : pour que P soit vraie, il faut que Q soit vraie.

Exemple 2.5. — Montrons
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} \quad (n \textit{ multiple de } p \implies n^2 \textit{multiple de } np)$$
Soient n et p deux entiers naturels. On part de n multiple de p . Alors par définition, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = kp$. Et donc $n^2 = k^2p^2 = k(kp)p = k(np)$. D'où n^2 est un multiple de np.

3.2. Par la transitivité. —

Pour montrer que $(P \implies R)$ est vraie, on montre que $(P \implies Q)$ et que $(Q \implies R)$.

Exemple 2.6. — Soit f une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer l'assertion
$$f' \textit{ positive sur } \mathbb{R} \implies (\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R},\ a < b \implies f(a) \leq f(b)).$$
Nous savons par théorème que : f' positive $\implies f$ croissante sur $\mathbb{R}$.
Nous savons par définition que : f croissante sur $\mathbb{R} \implies (\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, a < b \implies f(a) \leq f(b))$.
Donc on a par transitivité de l'implication le résultat.

3.3. Par la contraposition. —

Pour montrer que $(P \implies Q)$ est vraie, on montre que $(\text{NON } Q \implies \text{NON } P)$ est vraie.

C'est à dire on peut supposer la négation de Q et montrer la négation de P.

Exemple 2.7. — Soit n un entier naturel. Pour démontrer l'assertion
« Si n^2 est pair, alors n est pair »,
on peut raisonner par contraposition : cela revient à démontrer que si n est impair, alors n^2 est impair. Or, si n est un entier impair, il existe un entier k vérifiant $n = 2k + 1$, et alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$, d'où n^2 est impair.

4. Raisonnement par équivalence

Pour démontrer une équivalence $(P \iff Q)$, deux stratégies sont possibles :
(a) Démontrer séparément les implications $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$,
(b) Ou montrer directement que P et Q ont la même signification.

Remarque 2.8. — On dit que
- P est une condition nécessaire et suffisante de Q (en abrégé CNS).
- Q est une condition nécessaire et suffisante de P.
- Pour que P soit vraie, il faut et il suffit que Q soit vraie (et réciproquement).
- P est vraie si et seulement si Q est vraie (et réciproquement).

Exemple 2.9. — Soient x et y deux réels. Montrons l'assertion

$$x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0.$$

On peut ici utiliser la stratégie (a) et établir la double implication :

- Si $x^2+y^2=0$, alors $x^2 = -y^2$; le nombre x^2 est donc à la fois positif (puisque c'est le carré du réel x) et négatif (puisque c'est l'opposé du carré du réel y). Il est donc nul : on a ainsi $x^2 = 0$, donc $x = 0$, et aussi $y^2 = -x^2 = 0$, donc $y = 0$.
- Réciproquement, si $x = y = 0$, alors on a bien sûr $x^2 + y^2 = 0 + 0 = 0$.

Exemple 2.10. — On donne ici une illustration de la stratégie (b). Soient x et y deux réels ; on suppose $0 < x < 1$. Montrons l'équivalence suivante :

$$x = \frac{e^y}{1+e^y} \iff y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

Dire que $x = \frac{e^y}{1+e^y}$ revient à dire que $x\,(1+e^y) = e^y$, autrement dit : $e^y\,(1-x) = x$.

Comme $x < 1$, le nombre $1 - x$ est non-nul, donc l'équation précédente équivaut à : $e^y = \frac{x}{1-x}$.

Par ailleurs, comme on a supposé $0 < x < 1$, les nombres x et $1-x$ sont strictement positifs, donc $\frac{x}{1-x}$ est strictement positif.

L'équation $e^y = \frac{x}{1-x}$ est donc équivalente à $y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

5. Raisonnement par disjonction des cas

Dans certains raisonnements, on peut être amené à distinguer des cas. On considère donc chaque cas et on établit la conclusion.

Exemple 2.11. — Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $n(n+1)$ est pair.
Soit n un entier naturel. Distinguons deux cas :

- Si n est pair, alors $n+1$ est impair et donc $n(n+1)$ est pair.
- Si n est impair, alors $n+1$ est pair et donc $n(n+1)$ est pair.

Dans tous les cas, on obtient $n(n+1)$ est pair.

Exemple 2.12. — Montrer que pour tout réel x, on a $|x-2| \leq x^2 - 2x + 3$.
Soit x un nombre réel. Distinguons deux cas :

- Si $x \geq 2$, alors $|x-2| = x-2$ et ce que nous devons montrer est qu'on a $x - 2 \leq x^2 - 2x + 3$. Or, on constate que
$$(x^2 - 2x + 3) - (x - 2) = x^2 - 3x + 5 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$
et que ce nombre est positif, ce qui permet de conclure.
- Si $x < 2$, alors $|x-2| = 2-x$ et ce que nous devons montrer est donc qu'on a $2 - x \leq x^2 - 2x + 3$. Cette fois, on a
$$(x^2 - 2x + 3) - (2 - x) = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$
et à nouveau, ce nombre est positif ; l'inégalité voulue est donc vérifiée.

Dans tous les cas, on a bien $|x-2| \leq x^2 - 2x + 3$.

6. Démonstration par l'absurde

Pour démontrer qu'un énoncé A est vrai, on suppose que « A est faux ». Si on arrive à une contradiction logique, une "absurdité" , c'est que A est nécessairement vrai.

Le raisonnement consiste à démontrer une proposition en posant la négation et arriver à une contradiction. Notamment, si on veut démontrer que ($P \Longrightarrow Q$), autrement dit si P est vraie alors Q est vraie, on suppose que P est vraie ET que Q est fausse.

Exemple 2.13. — Soient deux réels positifs x et y. On veut démontrer :

$$\text{si } \frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} \text{ alors } x = y.$$

Pour raisonner par l'absurde, on suppose que $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$ ET $x \neq y$.
De $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$, on obtient $x(1+x) = y(1+y)$ puis $x^2 - y^2 = -(x-y)$, soit $(x-y)(x+y) = -(x-y)$. Comme on a supposé que $x \neq y$, on peut simplifier par $(x-y)$: on déduit que $x+y = -1$. Or x et y sont tous les deux positifs, donc leur somme ne peut être égale à -1 : on a obtenu une "absurdité".
On conclut donc que l'énoncé est vrai.

Exemple 2.14. — On veut démontrer

$$\tfrac{1}{3} \text{ n'est pas un nombre décimal}$$

Raisonnons par l'absurde. On suppose que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal soit donc : $\exists a \in \mathbb{Z}$ et $\exists b \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^b}$. Alors $3a = 10^b$; donc 10^b est multiple de 3 : ce qui est absurde. En effet, la somme des chiffres de 10^b est égal à 1 , qui n'est pas un multiple de 3.

7. Démonstration par un contre-exemple

Pour montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ » est *fausse*, on peut donner un *contre-exemple*, c'est-à-dire un exemple de x pour lequel $\mathcal{P}(x)$ n'est pas vérifiée.

Exemple 2.15. — L'assertion

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \textit{ multiple de } 2 \textit{ et } 4 \Longrightarrow n \textit{ multiple de } 8$$

est fausse, puisque que 12 est bien un multiple de 2 et 4, mais 12 n'est pas multiple de 8.

Exemple 2.16. — L'assertion

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^2 \geq 2n$$

est fausse, puisque que pour $n = 1$, on a $n^2 < 2n$.

8. Raisonnement par récurrence

Soit un entier naturel n_0. Le but est de démontrer qu'une assertion, qui dépend de n, notée $\mathcal{P}(n)$ est alors vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Axiome 2.17 – Principe de récurrence

Fixons un entier naturel n_0. Supposons donnée, pour chaque entier $n \geq n_0$, une assertion $\mathcal{P}(n)$, et supposons que

1. *l'assertion $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,*
2. *pour tout entier $n \geq n_0$, on a $[\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)]$.*

L'assertion $\mathcal{P}(n)$ est alors vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple 2.18. — Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1\cdot} = \frac{1}{2}u_n - 1$. Montrons qu'elle est minorée par -2 et majorée par 1 ; c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -2 \leq u_n \leq 1.$$

Soit $\mathcal{P}(n) : -2 \leq u_n \leq 1$.

- Initialisation : Vérifions que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $-2 \leq 1 \leq 1$: la proposition est vérifiée pour $n = 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Fixons un entier naturel n et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie c'est à dire qu'on a : $-2 \leq u_{n+1} \leq 1$.
  D'après notre hypothèse de récurrence, nous avons $-2 \leq u_n \leq 1$. En multipliant par $\frac{1}{2}$ l'inégalité, puis en soustrayant 1, on obtient $-2 \leq \frac{1}{2}u_n - 1 \leq -\frac{1}{2}$; or $-\frac{1}{2} \leq 1$, d'où $-2 \leq u_{n+1} \leq 1$.
  On a démontré que $[\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)]$.
- Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire à partir du rang 0 donc, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple 2.19. — Montrons le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad 2^n \geq n.$$

Soit $\mathcal{P}(n) : 2^n \geq n$.

- Initialisation : Vérifions que $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Pour $n = 1$, on a $2^n = 2$ et $2^1 \geq 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité : Soit un entier naturel $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (on veut montrer que $2^{n+1} \geq n+1$). Nous avons $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n$. Or, $2n \geq n+1$, car $(2n) - (n+1) = n - 1 \geq 0$. Nous obtenons donc $2^{n+1} \geq (n+1)$, soit $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire à partir du rang 1 donc, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Remarque 2.20. — Récurrence forte. Voici une variante, parfois utile, du raisonnement par récurrence.

Théorème 2.21 – Récurrence forte

Fixons un entier naturel n_0. Supposons donnée, pour chaque $n \geq n_0$, une assertion $\mathcal{P}(n)$, et supposons que

1. *l'assertion $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,*
2. *pour tout $n \geq n_0$, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tous les entiers k vérifiant $n_0 \leq k \leq n$, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.*

L'assertion $\mathcal{P}(n)$ est alors vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple 2.22. — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^{n-1}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{P}(n) : u_n = 2^{n-1}$.

- Initialisation : Pour $n = 1$, $u_1 = \sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 1 = 2^0$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité : Soit un entier naturel $n \geq 1$. Supposons que pour tous les entiers k vérifiant $1 \leq k \leq n$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \text{ \textit{d'après l'hypothèse de récurrence.}}$$

  On reconnait une suite géométrique de raison 2, d'où

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 1 + (2^n - 1) = 2^n$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : Donc d'après le principe de récurrence forte, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$. □

9. Raisonnement par analyse-synthèse

Nous avons vu que pour montrer une affirmation du type $\exists x \in E \ / \ \mathcal{P}(x)$, il suffisait de trouver un exemple concret d'objet x vérifiant l'assertion. En cas de difficulté, un autre chemin possible est *d'analyser les contraintes sur* x qu'impose le fait que $\mathcal{P}(x)$ soit vrai.

> Raisonner par analyse-synthèse pour démontrer l'existence d'un objet vérifiant certaines propriétés, c'est procéder en deux étapes :
> - *analyser les contraintes* imposées par ces propriétés pour trouver des objets-candidats,
> - puis tester parmi les candidats obtenus ceux qui conviennent : c'est l'étape de *synthèse*.

Exemple 2.23. — Déterminer les réels x tels que $\sqrt{2 - x} = x$.

- *Première étape : Analyse.* Soit x solution de cette équation. Alors il est nécessaire que $x \in]-\infty, 2]$ sinon la racine carrée n'aurait pas de sens. On doit aussi avoir $x \geq 0$ car la racine carrée est positive. D'où $x \in [0, 2]$.

  En élevant ensuite l'équation au carrée, si x est solution, $2 - x = x^2$ c'est à dire $x^2 + x - 2 = 0$. La résolution de cette équation du second degré donne deux solutions : $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$. Seul x_1 est dans l'intervalle souhaité. Cette première étape donne un candidat.
- *Deuxième étape : Synthèse.* On teste le candidat. On prouve que $x = 1$ est solution de l'équation. En effet, $\sqrt{2 - 1} = 1$.

La seule solution de l'équation est $x = 1$.

$f(x) = f(-x)$ paire
$f(x) = -f(x)$ impaire

***Exemple 2.24* (Partie paire et impaire d'une fonction).** — Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple (g, h) formé de deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

- g est paire et h est impaire ;
- $f = g + h$.

Nous raisonnons par analyse-synthèse :

- *Analyse.* Supposons qu'on dispose de deux fonctions g et h vérifiant les contraintes ci-dessus. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors nécessairement

$$f(x) = g(x) + h(x) \tag{9.1}$$

  et

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x). \tag{9.2}$$

En sommant les équations (9.1) et (9.2), on obtient une expression pour $g(x)$:

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \tag{9.3}$$

En prenant la différence de (9.1) et (9.2), on obtient cette fois une expression pour $h(x)$:

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right). \tag{9.4}$$

Il y a donc, étant donné f, *une seule possibilité pour* g et *une seule possibilité pour* h.

- *Synthèse.* Pour tout x de $\mathbb{R}$, on considère les fonctions g et h données par les formules (9.3) et (9.4). On constate alors que
  - — la fonction g est paire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = g(x)$,
  - — la fonction h est impaire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h(-x) = \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = -h(x)$,
  - — on a bien $f = g + h$, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + h(x) = \frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$.

  Les fonctions g et h conviennent donc, et ce sont les seules à pouvoir convenir.

10. Exercice corrigé d'une démonstration par l'absurde : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel

Raisonnons par l'absurde : on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. Donc, par définition, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^\star$ tels que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

et que $\frac{p}{q}$ soit une fraction irréductible, c'est à dire que $\text{PGCD}(p, q) = 1$. En mettant au carré, puis en simplifiant, on obtient :

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$
$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$

Ainsi, par définition de la parité, p^2 est pair et donc p est pair. D'où, il existe p' tel que $p = 2p'$. En substituant p dans l'égalité $p^2 = 2 \cdot q^2$, puis en développant et simplifiant, on obtient

$$2p'^2 = q^2.$$

Par un raisonnement analogue, on en déduit que q est pair et qu'il existe q' tel que $q = 2q'$.
On réécrit l'expression initiale :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'} = \frac{p'}{q'}.$$

Ainsi la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible : ce qui contredit notre supposition.

Exercices du chapitre 2

Démonstration et utilisation d'assertions quantifiées. —

***Exercice 2.1* (Démontrer des assertions avec $\forall$ et $\exists$, I).** — Démontrer ou infirmer les assertions suivantes.

1. $\exists x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{N},\quad x \leq -y^2$
2. $\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{N},\quad x \leq -y^2$
3. $\forall y \in \mathbb{N},\ \exists x \in \mathbb{Z},\quad x \leq -y^2$
4. $\forall a \in \mathbb{N}^\star,\ \exists b \in \mathbb{N}^\star,\ \exists x \in \mathbb{R},\ e^{ax} > b$

***Exercice 2.2* (Utiliser des hypothèses avec des $\forall$ et $\exists$, I).** — Dans cet exercice, on fixe deux réels a et b et on considère l'application

$$f \ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + b. \end{array}$$

1. Montrer que si l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$, alors on a nécessairement $a = b = 0$.
2. Montrer que si l'on a : $\exists x \in \mathbb{R}\ /\ f(x) = 0$, alors on a nécessairement $ab \leq 0$.

***Exercice 2.3* (Utiliser des hypothèses avec des $\forall$ et $\exists$, II).** — Dans tout l'exercice, on fixe une fonction $f : \mathbb{R}_\star^+ \to \mathbb{R}_\star^+$ et on suppose que f vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in \mathbb{R}_+^\star,\quad 0 < f(x) < \varepsilon. \tag{$\star$}$$

1. On introduit la fonction $g : \mathbb{R}_\star^+ \to \mathbb{R}_\star^+$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ g(x) = 5f(x)^2$.
   Démontrer que g vérifie la propriété suivante :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in \mathbb{R}_+^\star,\quad 0 < g(x) < \varepsilon.$$
2. On introduit la fonction $h : \mathbb{R}_\star^+ \to \mathbb{R}_\star^+$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_\star^+,\ h(x) = f(x^2)$.
   Démontrer que h vérifie la propriété suivante :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in \mathbb{R}_+^\star,\quad 0 < h(x) < \varepsilon.$$
3. On introduit la fonction $\varphi : \mathbb{R}_\star^+ \to \mathbb{R}_\star^+$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \varphi(x) = \frac{1}{f(\sqrt{x})}$.
   Démontrer que φ vérifie la propriété suivante :
   $$\forall A > 0,\ \exists x \in \mathbb{R}_+^\star,\quad \varphi(x) > A.$$

Implications et équivalences. —

***Exercice 2.4* (Passer ou non par la contraposée...)** — 1. Soit x un nombre réel.

   (a) ★☆☆ Montrer que si $x^3 = 2$ alors $x < 2$.

   (b) ★☆☆ Montrer que si $x + 1$ est le carré d'un entier impair, alors x est un entier multiple de 4.

2. Soient a et b deux nombres réels.

   (a) ★☆☆ Montrer l'implication suivante :$(b - a > 0 \implies \exists \varepsilon > 0, (b-a)^2 > \varepsilon$.

   (b) ★★☆ Montrer l'implication suivante : $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |a - x| + |b - x| < \varepsilon \implies a = b$.

***Exercice 2.5* (Équivalence à montrer).** — Soient x et y deux réels. Montrer que $xy + 2x + 2y = -4$ si et seulement si $x = -2$ ou $y = -2$.

$x(y+2)+2y=-4$

$x(y$