

Exercice 1.11 - Système de deux équations linéaires

Une équation linéaire à 2 inconnues de la forme $ax + by = c$ correspond dans le plan à :

- une droite si $|a| + |b| > 0$
- le plan si $|a| + |b| = c = 0$
- l'ensemble vide sinon ($|a| + |b| = 0$ et $c \neq 0$)

Le résultat d'un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues peut-donc être :

- un point si on a deux droites non parallèles (donc sécantes) ;
- l'ensemble vide si une des équations n'a pas de solutions ou si les équations correspondent à deux droites parallèles non confondues ;
- le plan si les deux équations sont triviales et correspondent au plan ;
- une droite si l'on a deux droites confondues ou un plan et une droite.

Soit le systèmes d'équations :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Le cas des droites concourantes est caractérisé par $\Delta = ae - db \neq 0$; la solution est alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_x}{\Delta} \\ \frac{\Delta_y}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ce-fb}{ae-db} \\ \frac{af-dc}{ae-db} \end{pmatrix}$$

Le cas $\Delta = 0$ ne peut être résumé à la nullité de Δ_x et Δ_y car les systèmes suivants ont leurs 3 déterminants nuls mais ne possède aucune solutions :

$$\begin{cases} 0x + 0y = a & \text{avec } a \neq 0 \\ 0x + 0y = b & \text{avec } b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Si on considère (toujour avec $\Delta = 0$) uniquement les systèmes où les équations linéaires ont des solutions (i.e. pas celle de la forme $0 = a$ avec $a \neq 0$), le système n'a une solution que si $\Delta_x = \Delta_y = 0$

Algorithm 1 Système d'équations linéaires

Vars

x_1 : float
 y_1 : float
 c_1 : float
 x_2 : float
 y_2 : float
 c_2 : float
 D : float
 DX : float
 DY : float

▷ Déterminant

EndVars**Begin**

print "Première équation : aX+bY = c"
print "a ?"
get x_1
print "b ?"
get y_1
print "c ?"
get c_1
print "Seconde équation : dX+eY = f"
print "d ?"
get x_2
print "e ?"
get y_2
print "f ?"
get c_2

▷ Saisie des variables

$D \leftarrow x_1 y_2 - x_2 y_1$
 $DX \leftarrow c_1 y_2 - c_2 y_1$
 $DY \leftarrow x_1 c_2 - x_2 c_1$

▷ Calcul des déterminants

if $D \neq 0$ **then**

print "Solution unique"
print "X = " + (DX/D)
print "Y = " + (DY/D)

else if $(x_1 = 0 \wedge y_1 = 0 \wedge c_1 \neq 0) \vee (x_2 = 0 \wedge y_2 = 0 \wedge c_2 \neq 0) \vee (DX \neq 0) \vee (DY \neq 0)$ **then**

print "Aucune solution"

else if $(x_1 = 0) \wedge (y_1 = 0)$ **then****if** $(x_2 = 0) \wedge (y_2 = 0)$ **then**print "Solution = $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ "**else**print "Solution = droite d'équation " $x_2 X + y_2 Y = c_2$ **end if****else**print "Solution = droite d'équation " $x_1 X + y_1 Y = c_1$ **end if****End**
