Pré-rentrée : calcul

Département MIDO, première année

Juliette Bouhours, basé sur le polycopié de Benjamin Melinand

(version provisoire du 20 juillet 2024)

Juliette Bouhours, basé sur le polycopié de Benjamin Melinand
CEREMADE, Université Paris-Dauphine, 75016 Paris, France.
E-mail : juliette.bouhours@dauphine.psl.eu

PRÉ-RENTRÉE : CALCUL

Juliette Bouhours, basé sur le polycopié de Benjamin Melinand

TABLE DES MATIÈRES

AVERTISSEMENT

Ce cours a pour principal objectif de revenir sur les résultats d'analyse et calcul que vous avez normalement pu entrevoir au lycée. Certains résultats seront seulement énoncés et vous verrez leurs preuves dans les cours d'analyse 1 et d'analyse 2. Certaines notions seront sans doute un peu nouvelles pour vous, notamment la notion de fonction/bijection réciproque ou la notion de fonction puissance réelle.

Ce document est issu du support de cours pour la pré-rentrée calcul 2022, rédigé par Benjamin Melinand. Il doit beaucoup

— au polycopié d'Alexandre Afgoustidis d'Analyse 1,
— au polycopié de José Trashorras d'Analyse 2,
— au polycopié de Denis Pasquignon d'Algèbre 1,
— aux remarques des collègues : Alexandre Afgoustidis, Emeric Bouin, Irène Waldspurger, José Trashorras, Denis Pasquignon, Moulka Tamzali-Lafond, Benjamin Melinand.

Il reste sans aucun doute beaucoup d'erreurs et de coquilles. N'hésitez pas à me les signaler.

CHAPITRE 1

CALCUL ALGÉBRIQUE

1. Quelques identités

Ce que nous appelons identité est une égalité entre deux termes ou deux expressions qui est vraie quels que soient les paramètres et les variables considérés.

1.1. Identités remarquables. — Nous rappelons ici les identités remarquables vues au lycée.

Proposition 1.1 – Identités remarquables

Pour tout a et b réels, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ *et* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Rappelons au passage un peu de vocabulaire. **Développer** signifie que l'on transforme un produit en somme et **factoriser** signifie que l'on transforme une somme en produit.

Application 1.2. —
1. Montrer que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$.
2. Calculer efficacement $10002 \cdot 9998$ et 100001^2
3. Factoriser $(2x-5)^2 - (2x-9)^2$.
4. Développer $(x^3 - x^2 + x - 1)^2$.

1.2. Coefficients binomiaux. — Nous rappelons les formules autour des coefficients binomiaux, que vous avez vu en terminal dans la partie dénombrement. Ces coefficients binomiaux vous seront utiles en probabilité et en dénombrement dans les prochaines années et vous reverrez la démonstration de leur formulation dans le cours d'algèbre du semestre 1. Dans ce cours de pré-rentrée, nous ne les utiliserons que dans la formule du binôme de Newton. Commençons par définir la factorielle d'un nombre naturel.

Définition 1.3 – Factorielle

Pour tout entier naturel n non nul, on définit

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

Par convention on note $0! = 1$.

Remarque 1.4. — $n!$ se lit « factorielle n » ou « n factorielle ».

Exemple 1.5. — $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$.

On peut maintenant introduire les coefficients binomiaux.

Définition 1.6 – Coefficient binomial

Pour tout n et k des entiers naturels tels que $k \leq n$, on définit
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$
Le coefficient $\binom{n}{k}$ se lit "k parmi n".

Interprétation. — Vous verrez en algèbre, dans le chapitre dénombrement, que l'entier $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties ayant k éléments dans un ensemble à n éléments. Par exemple dans l'ensemble à 4 éléments $\{1,2,3,4\}$ il y a $\binom{4}{2} = 6$ parties ayant 2 éléments. Ce sont les sous ensembles : $\{1,2\}$,$\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$.

Exemple 1.7. — On a $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3\cdot 2}{2} = 3$ et $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2} = 6$.

Application 1.8. —

1. Montrer que $\binom{n}{0} = 1$.
2. Montrer que $\binom{n}{n} = 1$.
3. Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. On pourra réfléchir à une interprétation ensembliste à cette égalité.

Les coefficients binomiaux sont reliés entre eux par un certain nombre d'égalités. La plus célèbre est le triangle de Pascal.

Proposition 1.9 – Triangle de Pascal

Pour tout n et k des entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n-1$,
$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Cette proposition peut être visualisée sur le tableau suivant

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0: & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1: & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2: & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3: & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4: & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5: & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6: & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Démonstration. — On remarque que $k! = k\cdot(k-1)!$ et $(n-k)! = (n-k)\cdot(n-k-1)!$. On a donc
$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\frac{k+n-k}{k(n-k)} \\
&= \frac{n\cdot(n-1)!}{k\cdot(k-1)!(n-k)\cdot(n-1-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.
\end{aligned}$$
□

Cette formule peut etre plus facilement démontrée via un raisonnement de dénombrement.

Application 1.10. — Montrer par récurrence sur $\mathbb{N}^*$ que les coefficients binomiaux sont des entiers naturels en utilisant la formule du triangle de Pascal. Attention aux cas $k = 0$ et $k = n$.

2. Somme sur un ensemble fini

L'objectif de cette section est essentiellement pratique : savoir calculer avec des formules contenant le symbole Σ.

2.1. Somme simple. —

2.1.1. *Notation.* — L'écriture

$$\sum_{k=0}^{5} 2^k$$

se lit " somme pour k allant de 0 à 5 de 2^k " ce qui revient à

$$\sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5.$$

La lettre k est un indice de sommation et son appellation importe peu. On peut choisir i ou l comme indice sans modifier la valeur de la somme, on dit que k est une **variable muette** :

$$\sum_{l=0}^{5} 2^l = \sum_{i=0}^{5} 2^i = \sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5.$$

Rappelons que par convention (nous verrons cela plus loin), $a^0 = 1$ pour tout réel non nul a. On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2.

Plus généralement on peut écrire une somme allant de $k = n_0$ à $k = n$ où $n_0, n \in \mathbb{N}$ quelconques tels que $n_0 \leq n$. Par exemple on a

$$\sum_{k=n_0}^{n} 2^k = 2^{n_0} + 2^{n_0+1} + 2^{n_0+2} + \cdots + 2^n.$$

Le nombre de termes de cette somme est $n - n_0 + 1$ et on a

Exemple 1.11. — Autres exemples :

- $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} i = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} i(i-1) = 0(0-1) + 1(1-1) + 2(2-1) + 3(3-1) = 8$

  On peut aussi réecrire cette somme en développant
  $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} i(i-1) = \sum_{i=0}^{3} \left(i^2 - i\right) = \sum_{i=0}^{3} i^2 - \sum_{i=0}^{3} i = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 - (0 + 1 + 2 + 3) = 8$

De manière générale, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \cdots, a_n$ réels

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Et on a la propriété suivante

Proposition 1.12

Soient $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$, $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i + b_i) = \lambda\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Exemple 1.13. —

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{4}\left(k-\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) &= (0-\cos(0)) + \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + (2-\cos(\pi)) + \left(3-\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) + (4-\cos(2\pi))\\ &= -1+1+3+3+3 = 9.\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{4}\left(k-\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) &= \sum_{k=0}^{4} k - \sum_{k=0}^{4}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\\ &= (0+1+2+3+4) - \left(\cos(0)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\pi)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\cos(2\pi)\right)\\ &= 10-(1+0-1+0+1) = 9\end{aligned}$$

Lorsque la quantité à sommer ne dépend pas de l'indice de sommation, le calcul de la somme revient à compter les termes de la somme, ainsi pour tout réel a :

$$\sum_{k=1}^{10} a = \underbrace{a}_{k=1} + \underbrace{a}_{k=2} + \cdots + \underbrace{a}_{k=10} = (10-1+1)a = 10a.$$

Par contre

$$\sum_{k=0}^{10} a = (10-0+1)a = 11a.$$

Cet exemple montre que la valeur d'une somme dépend de l'indice de départ et de celui d'arrivée.

2.1.2. *Sommes à connaître.* — Les formules ci-dessous peuvent toutes se prouver par récurrence (faites le).

Proposition 1.14 – Somme des n premiers entiers

Pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 1.15. — $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} k = \frac{100\cdot 101}{2} = 5050.$

Proposition 1.16 – Somme des termes d'une suite géométrique de raison q.

Pour tout n et n_0 entiers naturels tels que $n_0 \leq n$, pour tout nombre réel q,

$$\sum_{k=n_0}^{n} q^k = \begin{cases} q^{n_0} \times \dfrac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q} = \dfrac{q^{n_0}-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n - n_0 + 1 & \text{si } q = 1. \end{cases}.$$

Exemple 1.17. — $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} 2^k = 2^0 \frac{1-2^{10}}{1-2} = \frac{1024-1}{2-1} = 1023$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{9} 2^k = 2^1 \frac{1-2^9}{1-2} = 1022.$

Théorème 1.18 – Formule du binôme de Newton

Pour tout entier n, pour tout a et b nombres réels

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

Exemple 1.19. — $\displaystyle 11^4 = (10+1)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 10^k = 1 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + 10^4 = 14641.$

Proposition 1.20 – Différence de puissances

Pour tout entier n, pour tout a et b nombres réels

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k}.$$

Exemple 1.21. — $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Application 1.22. —

1. Calculer $2+3+4+5+6+7+8$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} 3^k$.
3. Calculer pour tout entier naturel n les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

2.1.3. *Changement d'indice.* — Pour le calcul de certaines sommes, il peut être astucieux de faire un changement d'indice. Par exemple pour calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} 2^k$ on peut directement utiliser la formule du dessus pour les sommes géométriques et on obtient

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2^1 \times \frac{1-2^3}{1-2} = 14$$

ou en posant $i = k-1$ on obtient
$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = \sum_{i=0}^{2} 2^{i+1} = 2\sum_{i=0}^{2} 2^i = 2 \times 2^0 \times \frac{1-2^3}{1-2} = 14.$$

Attention. — dans la deuxième méthode k varie entre 1 et 3 donc $i = k-1$ varie entre 0 et 2.

Donnons un autre exemple :

Exemple 1.23. — Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} 2^{1-k}$.
On effectue le changement d'indice $i = 1-k$ on a $k \in [\![1,3]\!] \Leftrightarrow i \in [\![-2,0]\!]$. Puis en posant à nouveau $j = -i$ on a $i \in [\![-2,0]\!] \Leftrightarrow j \in [\![0,2]\!]$. On obtient donc
$$\sum_{k=1}^{3} 2^{1-k} = \sum_{i=-2}^{0} 2^i = \sum_{i=-2}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{-i} = \sum_{j=0}^{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{j} = \frac{1-(\frac{1}{2})^3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{7}{4}.$$
'

Exemple 1.24. — En utilisant des changements d'indice appropriés on peut démontrer les formules de sommes pour certaines propositions de la section 2.1.2.

— Sommes des n premiers entiers : On écrit
$$\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{k=0}^{n}(k+n-k) = \sum_{k=0}^{n} n = n\sum_{k=0}^{n} 1 = n \times (n-0+1) = n(n+1)$$
Cependant, en posant le changement d'indice $i = n-k$ dans la deuxième somme on a $k \in [\![0,n]\!] \Leftrightarrow i \in [\![0,n]\!]$ et on obtient
$$\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{i=0}^{n} i = 2\sum_{k=0}^{n} k$$
Et donc $2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

— Somme géométrique : Soit $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$
$$q\sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} q^k$$
En posant $i = k+1$ dans la première somme on a $k \in [\![0,n]\!] \Leftrightarrow i \in [\![1,n+1]\!]$ et on obtient
$$(q-1)\sum_{k=0}^{n} q^k = \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} q^i - \sum_{k=0}^{n} q^k}_{\text{Somme téléscopique}} = \sum_{i=1}^{n} q^i + q^{n+1} - q^0 - \sum_{k=1}^{n} q^k = q^{n+1} - 1$$
Et on retrouve alors la formule en divisant par $(q-1)$.
On remarque que dans l'avant dernière égalité on a réécrit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} q^i = \sum_{i=1}^{n} q^i + q^{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + \sum_{k=1}^{n} q^k$.
Ainsi les sommes se compensent : on parle de **somme télescopique** car la plupart des termes s'annulent de proche en proche.

Exemple 1.25. — Nous allons calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. On commence par remarquer que
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$
Cette réécriture est appelée décomposition en éléments simples. On obtient alors
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

On procède alors à un changement d'indice $l = k+1$ dans la deuxième somme. On obtient donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{l} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{l=2}^{n} \frac{1}{l} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

où l'on a encore remarqué que les deux sommes se compensent.

2.2. Sommes doubles. — Considérons le cas d'une somme double

$$S = \sum_{i=0}^{2} \underbrace{\sum_{j=0}^{1} 2^{ij}}_{2^{i\times 0}+2^{i\times 1}} .$$

On a

$$S = \sum_{i=0}^{2} (1+2^i) = (1+1)+(1+2)+(1+4) = 10.$$

Cette opération revient à additionner tous les termes 2^{ij} lorsque i varient de 0 à 2 et j de 0 à 1. On peut disposer ces valeurs dans un tableau dont les entrées sont les 2^{ij} (en gras on a noté la somme de la colonne ou de la ligne correspondante)

$i \backslash j$	0	1	Somme
0	1	1	**2**
1	1	2	**3**
2	1	4	**5**
Somme	**3**	**7**	**S = 10**

Sur ce tableau, pour calculer S on peut soit additionner les termes par lignes puis additionner les résultats **ou** additionner les colonnes puis additionner les résultats. Ainsi

$$S = (1+1+1)+(1+2+4) = \sum_{j=0}^{1} \sum_{i=0}^{2} 2^{ij}.$$

On a ainsi réalisé une interversion des deux sommes. De manière générale, on a toujours pour n et p deux entiers naturels et pour $n \times p$ réels $a_{11}, \cdots, a_{1p}, \cdots, a_{np} = (a_{ij})_{i \in [\![1,n]\!],\, j \in [\![1,p]\!]}$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} a_{ij}$$

car $\{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]\} = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{j=1}^{p} \{(i,j)\} \right) = \bigcup_{j=1}^{p} \left(\bigcup_{i=1}^{n} \{(i,j)\} \right)$

Une situation plus difficile apparaît lorsque les indices i et j sont liés, par exemple si on impose $i \leq j$ alors intervertir les deux sommes nécessite de respecter cette condition. On a alors

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} a_{ij} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij}.$$

car $\{(i,j) \in [\![0,n]\!]^2 : i \leq j\} = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : \ i \in [\![0,n]\!], j \in [\![i,n]\!]\} = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : \ j \in [\![0,n]\!], i \in [\![0,j]\!]\}.$

Exemple 1.26. — Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq 5}\frac{i}{j}$. Pour comprendre la formule précédente, on dispose les nombres $\frac{i}{j}$ dans un tableau

$i\backslash j$	1	2	3	4	5
1	**1**	**1/2**	**1/3**	**1/4**	**1/5**
2	2	**1**	**2/3**	**2/4**	**2/5**
3	3	3/2	**1**	**3/4**	**3/5**
4	4	2	4/3	**1**	**4/5**
5	5	5/2	5/3	5/4	**1**

Dans ce tableau, les cases qui vérifient la condition $i\leq j$ correspondent aux nombres au dessus de la diagonale de 1, c'est-à-dire aux nombres représentés en gras. La somme signifie que l'on additionne tous les nombres en gras. Or il y a deux façons de faire : Dans la somme double $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}a_{ij}$, on somme d'abord sur i ce qui signifie que l'on fixe une colonne j puis on additionne tous les nombres en gras de cette colonne, puis tous ces termes sont additionnés. Mais on peut d'abord sommer sur j, c'est à dire fixer une ligne i puis sommer tous les nombres en gras de cette ligne, puis tous ces termes sont additionnés. C'est le cas de la somme double $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_{ij}$. Ces deux méthodes donnent bien entendu le même résultat. En pratique pour calculer cette somme on remarque que

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq 5}\frac{i}{j}=\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}=\sum_{j=1}^{5}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}i=\sum_{j=1}^{5}\frac{1}{j}\frac{j(j+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{5}(j+1)=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{5}j+\sum_{j=1}^{5}1\right)=\frac{1}{2}(15+5)=10.$$

Attention. — Si on essaye

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq 5}\frac{i}{j}=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i}^{5}\frac{i}{j}=\sum_{i=1}^{5}i\sum_{j=i}^{5}\frac{1}{j}$$

on se retrouve bloqué car $\displaystyle\sum_{j=i}^{5}\frac{1}{j}$ n'est pas une quantité aisée à calculer (voir le mot clé « série harmonique » dans votre moteur de recherche préféré). Il faut donc penser sur ce genre d'exemples à tester les deux cas pour voir lequel est le plus simple à calculer.

3. Inégalités

3.1. Rappels de lycée. — On rappelle ici quelques faits sur les inégalités entre réels.
Soient x,y,z,t des réels.

(a) Si $x<y$ alors $x\leq y$ (inégalité stricte entraîne inégalité large) ;

(b) si $x\leq y$, alors $x+z\leq y+z$ (ajout d'un réel à une inégalité) ;

(c) si $x\leq y$ et $y\leq z$, alors $x\leq z$ (transitivité de l'inégalité) ;

(d) si $x\leq y$ et **si** $z>0$, alors $zx\leq zy$ (produit d'un réel positif avec une inégalité) ;

Attention. — Ces assertions sont des implications.

Application 1.27. — En utilisant les propriétés (b) à (d) montrer les implications suivantes :
- si $x\leq y$, alors $-y\leq -x$ (changement de sens) ;
- si $x\leq y$ et $z\leq t$, alors $x+z\leq y+t$ (addition d'inégalités) ;
- si $x\leq y$ et $z\leq t$, alors $x-t\leq y-z$ (soustraction d'inégalités) ;
- si $x\leq y$ et si $z<0$, alors $zx\geq zy$ (produit d'un réel négatif avec une inégalité) ;
- si $0\leq x\leq y$ et si $0\leq z\leq t$, alors $xz\leq yt$ (produit d'inégalités à termes positifs).

L'inégalité qui suit est souvent utile pour estimer un produit de deux quantités.

Proposition 1.28 – Inégalité de Young

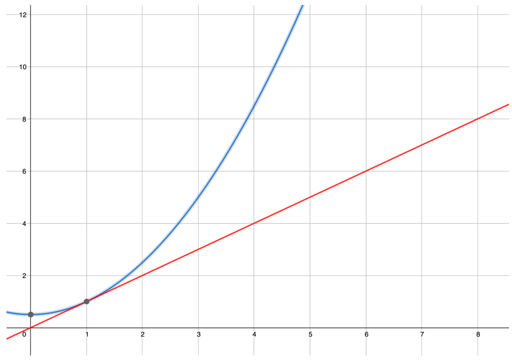
Pour tout a et b réels, $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ avec égalité si et seulement si $a = b$.

Démonstration. — On remarque que pour $a \neq b$, $(a-b)^2 > 0$. Il s'en suit que $a^2 + b^2 - 2ab > 0$ et donc que $\frac{1}{2}(a^2+b^2) > ab$. Si maintenant $a = b$, il est clair que $ab = \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. □

Exemple 1.29. — Montrons que pour tout réel positif x,

$$x \leq \frac{1}{2}(x^2+1).$$

On obtient cette inégalité en appliquant l'inégalité de Young à $a = x$ et $b = 1$. On remarque en outre que l'inégalité est stricte sauf pour $x = 1$. Dans cet exemple on vient de majorer le monôme $x^1 = x$ par la somme d'un monôme de plus bas degré $x^0 = 1$ avec un monôme de plus haut degré x^2. Cette idée est souvent utile en pratique. Le graphique qui suit exhibe cette inégalité : en rouge la droite $y = x$ et en bleu la courbe $y = \frac{1}{2}(x^2+1)$



Application 1.30. — Montrer que pour tout a et b réels : $4ab \leq (a+b)^2$ et $ab \leq \frac{1}{8}a^2 + 2b^2$.

3.2. Majorer, minorer et encadrer. — Considérons le nombre réel $x = \sqrt{\pi}$. On souhaite connaître une valeur approchée de ce nombre. Une première idée est de chercher un nombre réel proche de x plus grand que celui-ci. On sait que $\pi \leq 4$ et que la fonction racine carrée est croissante : pour tout a et b réels positifs, $a \leq b$ implique que $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$. Ainsi, $\sqrt{\pi} \leq \sqrt{4} = 2$. On vient de **majorer** x. On peut aussi chercher un nombre réel proche de x plus petit que celui-ci. Comme par exemple $1 \leq \pi$, on a $1 = \sqrt{1} \leq \sqrt{\pi}$. On vient de **minorer** x. Lorsque l'on effectue les deux opérations sur x on **encadre** celui-ci. Dans cet exemple, on a montré que $\sqrt{\pi}$ était compris entre 1 et 2.

Application 1.31. — Montrer que si $x \in [1,2]$, alors $\frac{9x+3}{x^2+2} \in [2,7]$.

4. Exercices du chapitre

4.1. Identités. —

Exercice 1.1. — Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\binom{n}{1} = n$.

Exercice 1.2. —

1. Calculer $\binom{7}{3}$.
2. Montrer de deux manières (par le calcul et par le triangle de Pascal) que $\binom{6}{4} = \binom{4}{2} + 2\binom{4}{3} + \binom{4}{4}$.
3. Montrer de deux manières que $\binom{16}{13} = \binom{13}{10} + 3\binom{13}{11} + 3\binom{13}{12} + \binom{13}{13}$.

Exercice 1.3 **(Une formule).** — Montrer que pour tout n et k entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n$

$$n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}.$$

Exercice 1.4 **(Une équation).** — Résoudre dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$ l'équation suivante

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n.$$

4.2. Sommes sur un ensemble fini. —

Exercice 1.5. — Calculer $2 + 4 + 6 + \cdots + 22 + 24$.
(On commencera par réécrire la somme précédente sous la forme $\sum_{k=\ldots}^{\ldots} a_k$*)*

Exercice 1.6 **(Une somme télescopique).** — Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

Exercice 1.7. — Calculer, pour tout entier n non nul,

$$S = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right).$$

Exercice 1.8. — Montrer (par récurrence ou via le changement d'indice $i = k+1$) que pour tout entier n

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Exercice 1.9 **(Somme des carrés - Formules à connaitre).** — Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 1.10. — Soit un entier n. En utilisant le fait que $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$ pour $1 \leq k \leq n$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Exercice 1.11. — $(*)$ Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} \exp\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \exp\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right).$$

Exercice 1.12. — $(*)$ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 1.13. — Soit un réel a et n un entier naturel. Calculer (on pourra utiliser l'exercice sur la somme des carrés)

(a) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} ij$, (b) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} a^{i+j}$, (c) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} (i+j)$, (d) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} (i+j)^2$, (e) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} \min(i,j)$.

Exercice 1.14. — Montrer que pour tout entier n

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(i^k) = \frac{n(n+1)}{2}\ln(n!).$$

Exercice 1.15. — 1. Vérifier que pour tout entier n

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} 2^k.$$

2. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

Exercice 1.16. — Calculer pour tout entier naturel n les sommes doubles $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n} j$ et $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n} i$. On pourra utiliser l'exercice sur la somme des carrés.

Exercice 1.17. — Calculer pour tout entier naturel non nul n les sommes doubles

(a) $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq i\leq n} \binom{i}{j}$, (b) $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq i\leq n} \frac{1}{i}$, (c) $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j}$.

4.3. Inégalités. —

***Exercice 1.18* (Plusieurs notions de moyenne).** —
Soient x et y deux réels strictement positifs vérifiant $x < y$.

- La *moyenne arithmétique* de x et y est le nombre $m = \frac{x+y}{2}$.
- La *moyenne géométrique* de x et y est le nombre $g = \sqrt{xy}$.
- La *moyenne harmonique* de x et y est le nombre h défini par : $\frac{2}{h} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Démontrer qu'on a toujours :

$$x < h < g < m < y.$$

***Exercice 1.19* (Inégalité de Bernoulli).** —
Montrer que pour tout réel positif x et pour tout entier naturel n, on a : $1 + nx \leq (1+x)^n$. Au moins trois méthodes sont possibles :

1. Utiliser la formule du binôme,
2. S'appuyer sur une étude de fonction,
3. Raisonner par récurrence.

***Exercice 1.20* (Majorer une fraction).** —
Soit x un nombre réel.

1. Montrer que si x appartient à $[1,2]$, alors $\frac{2x+3}{x^2+6}$ appartient à $[\frac{1}{2}, 1]$.
2. Montrer que si x appartient à $[1,2]$, alors $\frac{2x}{x^2-5}$ appartient à $[-4, -\frac{1}{2}]$.

CHAPITRE 2

FONCTIONS RÉELLES USUELLES : ÉTUDE DE FONCTION ENSEMBLE DE DÉFINITION, PROPRIÉTÉS, CALCULS DE LIMITES, DÉRIVATION...

En amont de ce chapitre vous pouvez lire l'**annexe sur les outils d'analyse pour une étude de fonction réelle** afin de vous rappeler des notions que vous avez manipulées en première et terminale. On y rappelle la définition d'une fonction réelle, la notion de fonction composée et de bijection/bijection réciproque. Puis on rappelle les différents résultats que vous avez vu sur le calcul de limite et sur la notion de nombre dérivée/fonction dérivée.

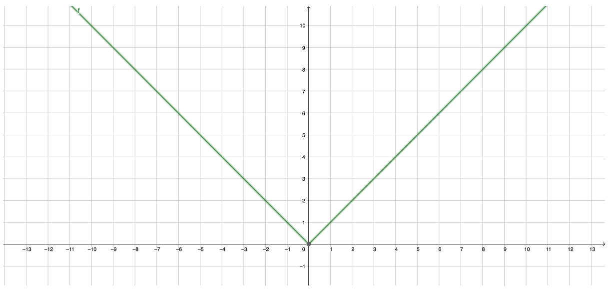
L'objectif de ce chapitre est de manipuler ces notions de composition, limite et dérivation en manipulant les fonctions usuelles. Nous introduirons aussi ici la fonction racine n-ième et la fonction puissance réelle.

1. Valeur absolue sur $\mathbb{R}$

1.1. Définition et premières propriétés. —
Nous commençons par donner la définition et la courbe représentative de la fonction valeur absolue.

Définition 2.1 – Valeur absolue d'un réel

La fonction valeur absolue est définie :
- sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$
- par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}^+, \\ -x & \text{si } x \in \mathbb{R}^-_*. \end{cases}$



On remarque que la fonction valeur absolue est paire : pour tout réel x, $|-x| = |x|$.

Proposition 2.2 – Propriétés élémentaires de la valeur absolue

Pour x et y réels et z un réel positif

(a) $x \leq |x|$ *(un nombre est toujours majoré par sa valeur absolue) ;*

(b) $|x| = 0 \iff x = 0$ *(le seul nombre vérifiant $|x| = 0$ est $x = 0$) ;*

(c) $|xy| = |x|\,|y|$ *(la valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues) ;*

(d) $|x| \leq z \iff -z \leq x \leq z$ *(majorer une valeur absolue c'est encadrer) ;*

Application 2.3. — Montrer la proposition précédente.

1.2. L'inégalité triangulaire. —

Proposition 2.4 – Inégalité triangulaire

Soient x, y et z des réels. On a les inégalités suivantes :

(i) Inégalité triangulaire. $|x+y| \leq |x|+|y|$.

(ii) Inégalité triangulaire, version avec la différence. $|x-y| \leq |x|+|y|$.

(iii) Inégalité triangulaire, version « distance ». $|x-z| \leq |x-y|+|y-z|$.

(iv) Inégalité triangulaire « inversée ». $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

Démonstration. — Dans la suite de la preuve x, y et z seront des réels.

(i) On utilise la propriété (a) en séparant deux cas
- si $x+y \geq 0$, on a : $|x+y| = x+y \underset{\text{(a)}}{\leq} |x|+|y|$.
- si $x+y \leq 0$, on a : $|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) \underset{\text{(a)}}{\leq} |-x|+|-y| = |x|+|y|$.

(ii) On applique l'inégalité triangulaire (i) à x et $(-y)$:

$$|x-y| = |x+(-y)| \underset{(i)}{\leq} |x|+|-y| = |x|+|y|\,.$$

(iii) Comme $(x-z) = (x-y)+(y-z)$, en notant $a = x-y$ et $b = y-z$, l'inégalité (i) donne :

$$|x-z| = |a+b| \underset{(i)}{\leq} |a|+|b| = |x-y|+|y-z|\,.$$

(iv) On remarque que

$$|x| = |(x-y)+y| \underset{\text{(i)}}{\leq} |x-y|+|y| \quad \text{et} \quad |y| = |x-(x-y)| \underset{\text{(ii)}}{\leq} |x|+|x-y|\,.$$

On obtient donc

$$|x|-|y| \leq |x-y| \quad \text{et} \quad -|x-y| \leq |x|-|y| \;\Leftrightarrow\; -|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y| \;\Leftrightarrow\; ||x|-|y|| \leq |x-y|$$

□

Proposition 2.5 – Dérivation de la fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa fonction dérivée est $x \mapsto \begin{cases} 1 & si\;\; x \in \mathbb{R}_*^+ \\ -1 & si\;\; x \in \mathbb{R}_*^- \end{cases}$.

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

***Exemple 2.6* (demonstration).** — Soit $x \neq 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{h\to 0} \begin{cases} \frac{x+h-x}{h} & \text{si } x>0 \\ \frac{-(x+h)-(-x)}{h} & \text{si } x<0 \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } x>0 \\ -1 \text{ si } x<0 \end{cases}.$$

De plus la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 car la limite du taux d'accroissement n'existe pas en 0 :

$$\lim_{h\to 0 \text{ et } h>0} \frac{|h|}{h} = 1 \neq \lim_{h\to 0 \text{ et } h<0} \frac{|h|}{h} = -1.$$

***Exemple 2.7* (Etude de fonction).** — On étudie la fonction $f(x) = |3x^2-5x+2|$ sur $\mathbb{R}$.
$x \mapsto 3x^2-5x+2$ est un polynome du second degré de discriminant égal à $(-5)^2-4\times 3\times 2 = 1 = 1^2 > 0$.

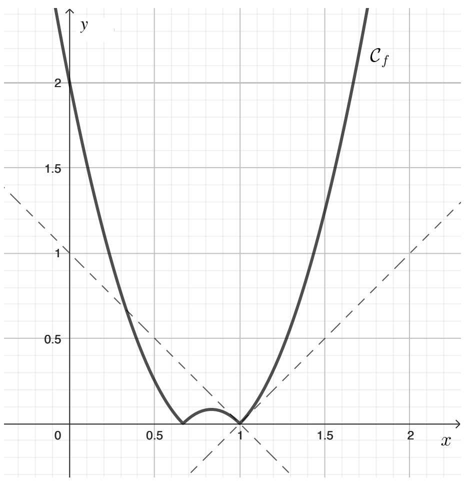
Ainsi ce polynome a deux racines réelles $x_\pm = \dfrac{5 \pm 1}{2 \times 3}$ et donc $x_+ = 1$ et $x_- = \frac{2}{3}$.
D'après le signe d'un polynome du second degré et la définition de la valeur absolue, on obtient

$$f(x) = \begin{cases} -(3x^2 - 5x + 2) = -3x^2 + 5x - 2 & \text{si } x \in]\frac{2}{3}, 1[\\ 3x^2 - 5x + 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus en utilisant les résultats de lycée sur les polynomes du second degré appliqués à $x \mapsto 3x^2 - 5x + 2$, on sait que f est décroissante sur $]\infty, \frac{2}{3}]$ et croissante sur $[1, +\infty[$. Avec les mêmes arguments on a que f est croissante sur $[\frac{2}{3}, \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha, 1]$, avec $\alpha = \frac{x_+ + x_-}{2} = \frac{5}{6}$.
Enfin on peut remarquer que pour tout $x \neq 1$ on a

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{|3(x - \frac{2}{3})(x-1)| - 0}{x - 1} = |(3x-2)| \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} |3x - 2| & \text{si } x > 1 \\ -|3x-2| & \text{si } x < 1 \end{cases} \underset{x \to 1}{\to} \begin{cases} 1 & \text{si } x \to 1,\ x > 1 \\ -1 & \text{si } x \to 1,\ x < 1 \end{cases}$$

Les limites du taux d'accroissement sont donc différentes en 1^+ et en 1^- et f n'est donc pas dérivable en 1. On peut aussi conclure que la tangente à la courbe en le point d'abscisse 1 est de coefficient directeur 1 à droite de 1 et de coefficient directeur -1 à gauche de 1.
Le même raisonnement peut être effectué en $x = \frac{2}{3}$ (faites le !).
On obtient alors la courbe représentative suivante



Avec en pointillé les tangentes à droite et à gauche en le point d'abscisse 1.

2. Exponentielle et logarithme néperien

Théorème et définition 2.8 – Exponentielle

Il existe une unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui soit dérivable sur $\mathbb{R}$, qui vaille 1 en 0 et qui soit égale à sa dérivée. On l'appelle exponentielle. On la note exp.

L'existence d'une telle fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est loin d'être évidente : ce n'est qu'en deuxième année qu'il sera possible de la justifier. Vous aurez l'occasion de montrer l'unicité au second semestre. Nous rappelons quelques propriétés de base sur cette fonction.

Proposition 2.9 – Propriétés de l'exponentielle

On a les propriétés suivantes :

(i) *Pour tout réel x,* $\exp(x) \neq 0$

(ii) *la fonction exponentielle vérifie :* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Conséquences :

(iii) *elle est strictement positive :* $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$.

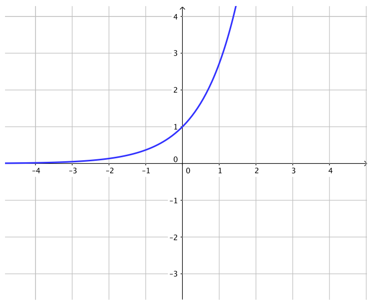
(iv) *elle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

(v) *la fonction exponentielle vérifie :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$.

(vi) *elle tend vers* 0 *en* $-\infty$ *et vers* $+\infty$ *en* $+\infty$.

Les points (i) et (ii) sont des conséquences directes du théorème-définition précédent (on pourra considérer la fonction $f(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$ pour le (i) et $f(x) = \exp(x) + \exp(x+y) - \exp(x)\exp(y)$ pour (ii) où y est un réel fixé). Le point (iii) découle alors des points (i) et (ii) et le point (iv) du point (iii). Le point (v) est une conséquence du point (ii). Le point (vi) peut s'obtenir par comparaison (en montrant par exemple que pour tout réel $x \geq 0$, $\exp(x) \geq x$) et en utilisant le point (v).

L'allure du graphe de exp est la suivante :



Ordre de grandeur. — La fonction exponentielle peut atteindre des valeurs gigantesques très rapidement. Par exemple $\exp(10) \approx 22066$ et $\exp(100) \approx 2 \cdot 10^{43}$.

***Exemple 2.10* (Calcul de limite).** —

1. $\lim\limits_{x \to 0} \exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$ par composition de limites car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} \exp(y) = +\infty$ $\left(y = \frac{1}{x^2}\right)$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x} + \exp(-x)\right) = 2$ comme somme de limites.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} x\exp(x^2 - 1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\exp(x^2 - 1) = +\infty$, comme composition et produit de limites.
4. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \exp(1 - x^2) = 0$ car $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (1 - x^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{y \to -\infty} \exp(y) = 0$ $\left(y = 1 - x^2\right)$.

Exemple 2.11. — On va simplifier l'expression $\frac{\exp(3x) - \exp(x)}{\exp(2x) + \exp(x)}$ pour x réel.

$$\frac{\exp(3x) - \exp(x)}{\exp(2x) + \exp(x)} = \frac{\exp(x)(\exp(2x) - 1)}{\exp(x)(\exp(x) + 1)} = \frac{\exp(x)^2 - 1}{\exp(x) + 1} = \exp(x) - 1$$

Application 2.12. —

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \exp(-\dfrac{1}{x^2})$
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \exp(x) + x)$

3. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)+1}{\exp(x)-1}$

Les propriétés (iv) et (vi) ci-dessus et le théorème des valeurs intermédiaires (que vous verrez dans le cours d'analyse 1) permettent d'obtenir le fait suivant :

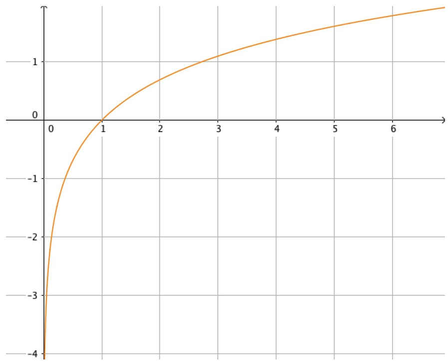
Théorème et définition 2.13 – Logarithme néperien

La fonction exponentielle $\exp$: $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x) \in \mathbb{R}_*^+$ *est une bijection, i.e* $\forall\, t \in \mathbb{R}_\star^+$*, il existe un unique réel* x *tel que* $\exp(x) = t$*. Ce réel est appelé le* logarithme népérien de t*, noté* $\ln(t)$*. On définit alors la fonction logarithme népérien comme*

$$\ln :\ t \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \ln(t) \in \mathbb{R},$$

tel que $\exp(\ln(t)) = t$ *.*
C'est la bijection réciproque de la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$

L'allure du graphe de ln est la suivante (symétrique de $\mathcal{C}_{\exp}$ par rapport à la droite $y = x$) :



Nous rappelons quelques propriétés de base sur cette fonction.

Proposition 2.14 – Propriétés du logarithme

On a les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$*, on a* $\ln(\exp(x)) = x$ *et pour tout* $t \in \mathbb{R}_*^+$, $\exp(\ln(t)) = t$*.*

(ii) La fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_\star^+$ *et sa dérivée est la fonction*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_\star^+ &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

(iii) La fonction $\ln$ *vérifie :* $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}_\star^+)^2,\ \ln(uv) = \ln(u) + \ln(v)$*.*

(iv) Elle tend vers $-\infty$ *en* 0 *et vers* $+\infty$ *en* $+\infty$*.*

Conséquences :

(v) La fonction $\ln$ *vérifie :* $\ln(1) = 0$ *et* $\forall u \in \mathbb{R}_\star^+,\ \ln(\frac{1}{u}) = -\ln(u)$*.*

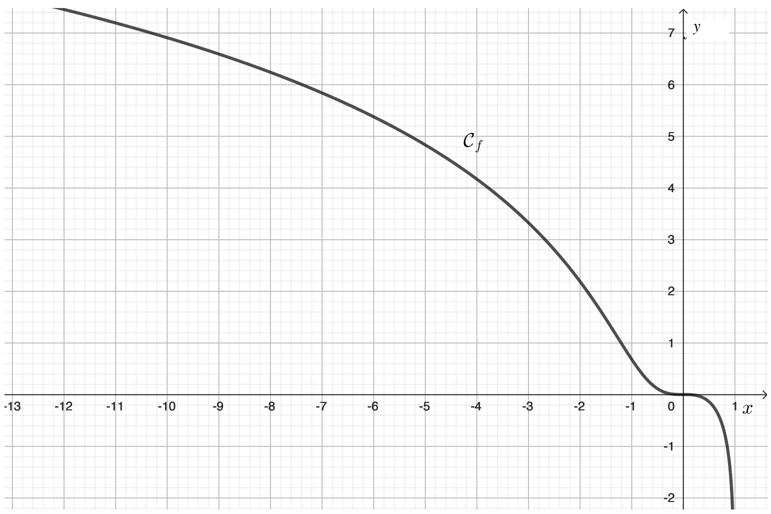
Notons que le point (i) est une conséquence directe du fait que la fonction logarithme est la bijection réciproque de la fonction exponentielle. Le point (ii) se montre en utilisant la formule de dérivation d'une bijection réciproque (ou par la composition de limites, voir en annexe). Les points (iii) et (iv) sont des conséquences des propriétés de la fonction exponentielle. Le point (v) est une conséquence directe du point (iii).

***Exemple 2.15* (Etude de fonction).** — On va étudier la fonction $f(x) = \ln(1 - x^3)$
On sait que la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_*^+$, ainsi f est définie ssi $1 - x^3 > 0 \Leftrightarrow x^3 < 1$. On obtient donc $D_f =]-\infty, 1[$.
De plus $x \mapsto x^3$ est croissante sur $]-\infty, 1[$ et donc par opération $x \mapsto 1 - x^3$ est décroissante sur $]-\infty, 1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. La fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_*^+$ ainsi par composition (croissante $\circ$ decroissante : décroissante) on a que f est décroissante sur $]-\infty, 1[$.
De plus si on pose $g(x) = 1 - x^3$ on a que pour tout $x < 1$, $f(x) = \ln(g(x))$ et comme ln est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ par composition f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et pour tout $x < 1$

$$f'(x) = g'(x) \times \ln'(g(x)) = -3x^2 \times \frac{1}{1 - x^3} < 0$$

On retrouve que f est strictement décroissante sur D_f. On remarque que $f'(0) = 0$ et que $f'(x) \underset{x \to -\infty}{\to} 0$.
Par composition de limite on a que $f(x) \underset{x \to 1,\, x<1}{\to} -\infty$ (il y a donc une asymptote verticale en $x = 1$) et $f(x) \underset{x \to -\infty}{\to} +\infty$.

On obtient la courbe représentative suivante



Application 2.16. — Simplifier les expressions $\ln(4 - \sqrt{3}) + \ln(4 + \sqrt{3})$ et $\ln(\sqrt{x + 1})$ pour $x \in \mathbb{R}_*^+$.

Application 2.17. — Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

Ordre de grandeur. — À l'inverse de la fonction exponentielle, la fonction logarithme met du temps à atteindre de grandes valeurs. Par exemple $\ln(10^{10}) \approx 23$ et $\ln(10^{100}) \approx 230$.

Si a est un nombre **strictement positif**, on définit par ailleurs le logarithme en base a

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_\star^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}. \end{aligned}$$

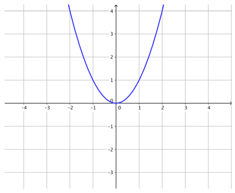
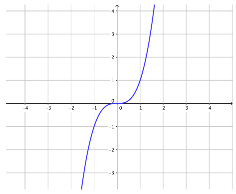
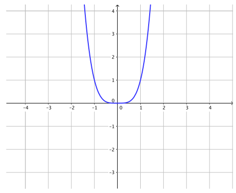
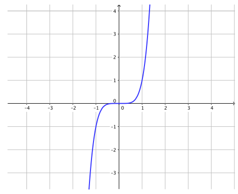
Les fonctions $\log_2$ et $\log_{10}$ interviennent souvent dans des problèmes très concrets. En effet, si n est un entier naturel non nul, $\log_{10}(n)$ donne une idée du nombre de chiffres de n dans son écriture en base 10 : par exemple, $\log_{10}(7891)$ vaut environ $3,897$ (approximation à $0,001$ près). La quantité $\log_2(n)$, quant à elle, donne une idée du nombre de chiffres de n dans son écriture en binaire (base 2).

3. Fonctions « puissances »

3.1. Puissance entière. — Pour tout entier naturel n, on définit la fonction

$$p_n \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^n.$$

On rappelle l'allure des graphes des fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^4$ et $x \mapsto x^5$.

Proposition 2.18 – Dérivée des fonctions puissances entières

La fonction p_n est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$ si $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \mapsto 0$ si $n = 0$.

Démonstration. — Les cas $n = 0$ et $n = 1$ sont clairs. Supposons donc que $n \geq 2$. Nous allons utiliser la formule du binôme. Soit un nombre réel x fixé et h dans $\mathbb{R}^\star$. Comme $\binom{n}{0} = 1$ et $h^0 = 1$, on obtient

$$\frac{p_n(x+h) - p_n(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1}.$$

On observe alors que

$$\frac{p_n(x+h) - p_n(x)}{h} = \underbrace{\binom{n}{1}}_{=n} x^{n-1} + h \cdot \left(\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-2} x^{n-k} \right)$$

et on constate que le deuxième terme tend vers zéro quand h tend vers zéro, donc que $\frac{p_n(x+h)-p_n(x)}{h}$ tend vers nx^{n-1} quand h tend vers zéro.
On peut aussi utiliser la formule de différence de puissances pour simplifier $p_n(x+h) - p_n(x)$ (faites le !) $\square$

Notation - Définition. — Si n est un entier relatif et x un réel *non nul*, on note $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

***Exemple 2.19* (Etude de fonction).** — Soit f la fonction définie par $f(x) = (1-x^2)^{-5}$.
Sachant que $(1-x^2)^{-5} = \frac{1}{(1-x^2)^5}$, on en déduit que f est définie ssi $1 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$. Ainsi on a que $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-1; 1\}$.
D_f est symétrique par rapport à 0 (i.e $\forall\, x \in D_f,\ -x \in D_f$) et pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$ donc f est paire (sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées). On peut limiter l'étude de f sur $D_f \cap \mathbb{R}^-$.
La fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ ainsi on a par opération que $x \mapsto 1-x^2$ est croissante sur $]-\infty, -1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^-_*$, croissante sur $]1, 0]$ à valeurs dans $]0, 1]$. Et la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^-_*$ et sur $]0, 1]$, ainsi par composition on a que f est décroissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, 0]$.
De plus en posant $g(x) = 1 - x^2$ et $h(x) = \frac{1}{x^5}$ on a que $f(x) = h \circ g(x)$. La fonction g est dérivable sur $D_f \cap \mathbb{R}^-$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ ainsi par composition f est dérivable sur $D_f \cap \mathbb{R}^-$ et $\forall\, x \in D_f \cap \mathbb{R}^-$

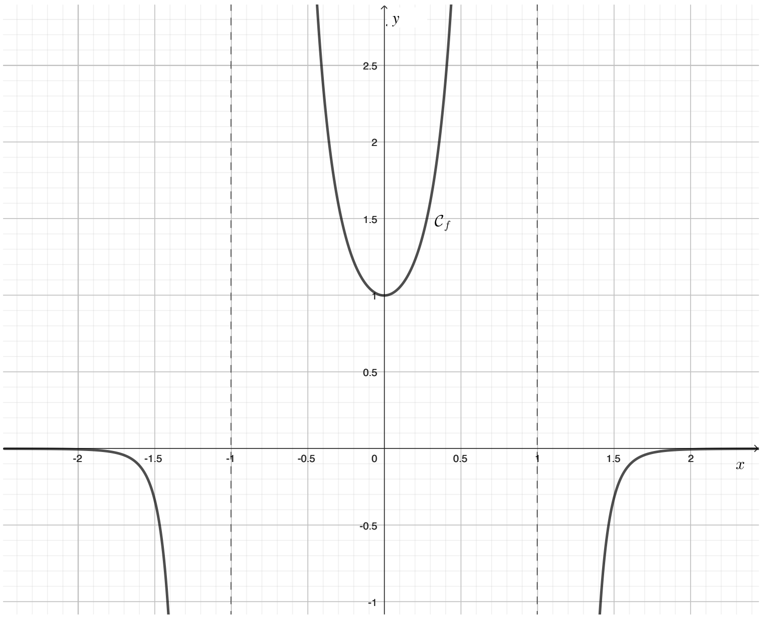
$$f'(x) = g'(x) \times h'(g(x)) = -2x \times (-5)(1-x^2)^{-5-1} = \frac{10x}{(1-x^2)^6} < 0$$

(on retrouve le décroissance de f sur $D_f \cap \mathbb{R}^-$ par le signe de la fonction dérivée) et on a que $f'(0) = 0$, ainsi $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en le point d'abscisse 0.

Enfin, par composition de limite on a

$$f(x) \underset{x\to -1,\, x<-1}{\longrightarrow} -\infty, \quad f(x) \underset{x\to -1,\, x>-1}{\longrightarrow} +\infty, \quad f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} 0$$

Et donc $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale et $y = 0$ comme asymptote horizontale en $-\infty$.
On obtient la courbe suivante (par symétrie axiale pour $x > 0$)



Proposition 2.20 – Puissances : exponentielle et logarithme

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_\star^+$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a

(i) $(\exp(x))^n = \exp(nx)$.

(ii) $\ln(y^n) = n\ln(y)$.

Cette proposition se montre par récurrence en utilisant les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

Corollaire 2.21

$\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}_*^+$, *on a* $x^n = \exp(n\ln(x))$.

3.2. Racine n-ième. — Soit n un entier naturel non nul et x un nombre réel. Que signifie $\sqrt[n]{x}$?

Pour simplifier les choses nous nous restreignons ici à la définition de la racine n-ième pour les nombres positifs.

Proposition 2.22 – Fonction puissance et bijection réciproque sur $\mathbb{R}^+$: racine n-ième

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $p_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^n \in \mathbb{R}^+$ est une bijection, i.e $\forall\, y \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique réel ***positif*** *x vérifiant $x^n = y$, on note alors $x = y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y}$ (appelé racine n-ième de y).*
Ainsi,

$$\sqrt[n]{\ } : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \end{array}$$

est bien définie comme la bijection réciproque de la fonction $p_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.
La fonction racine n-ième est dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$ et sa fonction dérivée est $x \mapsto \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

Pour aller plus loin. — Pour etre plus complet lorsque n est impaire, la fonction $p_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ est une bijection, i.e pour tout réel y, il existe un unique réel x vérifiant $x^n = y$.
Ainsi, si n est impair, la fonction racine n-ième :

$$\sqrt[n]{\ } : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \end{array}$$

est bien définie comme la bijection réciproque de la fonction $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Dans ce cas, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ a le même signe que x.

Notation. — Si n est un entier relatif non nul et x un réel *strictement* positif, on note $x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}$.

Exemple 2.23. — Soit f la fonction racine carrée, définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = p_{\frac{1}{2}}(x)$.
La fonction racine carrée est la bijection réciproque de la fonction carrée (restreinte à $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$).
De plus pour tout $x > 0$ et $h \neq 0$:

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \underset{h \to 0}{\to} \frac{1}{2\sqrt{x}} \in \mathbb{R}$$

Ainsi en utilisant le taux d'accroissement, on a bien montré que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$ avec $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$ pour $n = 2$.
Cependant la fonction racine carré n'est pas dérivable en 0 car

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty \notin \mathbb{R}$$

La courbe représentative de la fonction racine carrée admet une tangente verticale en 0.

Application 2.24. — Tracer les courbes représentatives des fonctions
(i) $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ sur $\mathbb{R}^+$ (et sur $\mathbb{R}$?), (ii) $x \mapsto x^{-\frac{1}{4}}$ sur son ensemble de définition.

Corollaire 2.25

Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^+_*$, on a $x^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n}\ln(x))$.

Pour la démonstration, on pourra penser à élever à la puissance n.

Proposition 2.26

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^+$, on a $(x^n)^{\frac{1}{n}} = x = (x^{\frac{1}{n}})^n$.

Pour aller plus loin. — Que se passe-t-il si on ne suppose plus $x \in \mathbb{R}^+$ mais $x \in \mathbb{R}$?

***Exemple 2.27* (Exemple d'étude de fonction).** — Étudions la fonction $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

On détermine d'abord le domaine de définition. Ici, à cause de la racine carrée, il faut et il suffit que $\frac{x+1}{x-1} \geq 0$ pour que f soit définie. Or $\frac{x+1}{x-1} \geq 0$ si et seulement si $x \leq -1$ ou $x > 1$. Le domaine de définition de f est donc $D =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$ (1 est exclu car la fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ n'est pas définie en $x = 1$). La fonction f n'a pas de parité particulière. Elle est aussi dérivable par composition et quotient sur l'ensemble $D' =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ (on exclut ici -1 car la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 et donc on ne peut pas appliquer le théorème de composition de fonctions dérivables lorsque $x = -1$). Calculons la dérivée de f. Posons $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$. On a donc pour tout $x \in D'$,

$$g'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \text{ et } f'(x) = g'(x)\frac{1}{2\sqrt{g(x)}} = -\frac{2}{(x-1)^2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

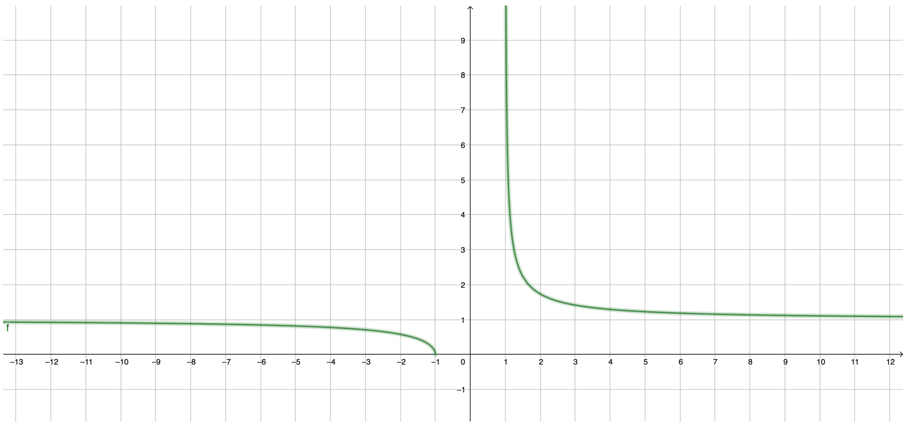
Et on a que $\forall\, x \in D'$, $f'(x) < 0$. La fonction est donc strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$. Calculons maintenant les limites aux bords de D. En utilisant les théorèmes de composition et de produit de limites (la fonction racine carrée est continue en 1), il vient

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \ , \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \text{ et } \lim_{x\to 1, x>1} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to -1, x<-1} f(x) = 0.$$

On peut alors donner le tableau de variations de f (faites le !).
La courbe de la fonction f a pour asymptote horizontale la droite $y = 1$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ et la droite $x = 1$ pour asymptote verticale.
On peut aussi se demander si f est dérivable en $x = -1$. On étudie le taux de variation pour $h < 0$,

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{h}{-2+h}} = -\sqrt{\frac{1}{h(-2+h)}} \underset{h\to 0}{\to} -\infty \notin \mathbb{R}$$

La fonction n'est donc pas dérivable en -1 et la courbe de f possède une tangente verticale en $x = -1$.
Nous traçons la courbe de la fonction sur son domaine de définition



3.3. Puissance rationnelle. — Grâce aux deux points précédents, on peut maintenant définir x^α pour α rationnel, $x \in \mathbb{R}^+$.

> Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que p et q soient **premiers entre eux**. Alors on peut définir pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p = (x^p)^{\frac{1}{q}}$.

Pour aller plus loin. — Si q est impair on peut en fait définir $x^{\frac{p}{q}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En effet on peut définir $(-8)^{\frac{2}{3}} = (-2)^2 = 4$ mais on ne peut pas définir $(-8)^{\frac{3}{2}}$.
Attention aussi à ce que p et q soient premiers entre eux. Ainsi $(-2)^{\frac{2}{6}} = (-2)^{\frac{1}{3}}$ fait sens !

Corollaire 2.28

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$, *et pour tout* $x \in \mathbb{R}_*^+$, *on a* $x^{\frac{p}{q}} = \exp(\frac{p}{q}\ln(x))$.

3.4. Fonction « puissance » réelle. — Peut-on donner un sens à $(\sqrt{2})^\pi$?

Définition 2.29 – Puissance d'exposant quelconque

Si x est un réel *strictement positif* et si α est un réel quelconque, on note $x^\alpha = \exp(\alpha\ln(x))$. De plus, si $\alpha > 0$, on adopte la convention que $0^\alpha = 0$.

On adopte la convention que $0^\alpha = 0$ pour tout $\alpha > 0$ car, $\lim\limits_{x\to 0^+} \exp(\alpha\ln(x)) = 0$ si $\alpha > 0$.

La définition précédente nous permet de faire deux remarques :
- on peut définir la fonction $x \mapsto x^x = \exp(x\ln(x))$ sur l'ensemble $\mathbb{R}_*^+$.
- si x est un nombre réel, on a $\exp(x) = (\exp(1))^x$.
  Il est courant de noter $e = \exp(1)$ et e^x au lieu de $\exp(x)$.

Exemple 2.30. — $\lim\limits_{x\to 0} |x|^\pi = \lim\limits_{x\to 0} e^{\pi\ln(|x|)} = 0$ par composition de limites car $\lim\limits_{x\to 0} \pi\ln(|x|) = -\infty$ et $\lim\limits_{y\to -\infty} e^y = 0$ ($y = \pi\ln(|x|)$).

Nous avons la propriété suivante pour la fonction puissance :

Proposition 2.31 – Puissances successives

Pour tout réel strictement positif x et réels α et β, on a $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

Application 2.32. — Pour $x > 0$, simplifier l'expression $\left(x^{\frac{1}{x}}\right)^{x^2+2x}$.

Proposition 2.33 – Dérivée des fonctions puissances

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, *on définit la fonction* $p_\alpha : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)} \in \mathbb{R}$.
La fonction p_α *est dérivable sur* $\mathbb{R}_\star^+$, *et sa dérivée est la fonction* $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Démonstration. — Les théorèmes généraux sur la dérivation de fonctions composées donnent $\forall\, x \in \mathbb{R}_\star^+$,

$$p_\alpha'(x) = (\alpha\ln(x))' \times \exp'(\alpha\ln(x)) = \frac{\alpha}{x}\cdot e^{\alpha\ln(x)} = \frac{\alpha e^{\alpha\ln(x)}}{e^{\ln(x)}} = \alpha e^{\alpha\ln(x)-\ln(x)} = \alpha e^{(\alpha-1)\ln(x)} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$\square$

Attention, si $\alpha > 0$, bien que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ puisse être définie sur $\mathbb{R}^+$, elle n'est pas forcément dérivable en zéro. Par exemple, la fonction racine carrée ($\alpha = \frac{1}{2}$) est dérivable sur $\mathbb{R}_\star^+$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

Application 2.34. — Montrer , en étudiant la limite du taux d'accroissement en 0, que si $\alpha \geq 1$, la fonction p_α est définie et dérivable en 0 et donner $p_\alpha'(0)$.

4. Limites indéterminées - croissances comparées

Dans certains cas, la connaissance de la limite de chaque sous terme d'une expression ne permet pas de déduire la limite de cette dernière. On parle de **formes indéterminées**. Les situations où l'on a une indétermination sont les suivantes :

$$\text{« } (\infty)-(\infty) \text{ »}, \quad \text{« } 0\times\infty \text{ »}, \quad \text{« } \frac{0}{0} \text{ »}, \quad \text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »}, \quad \text{« } 1^{\infty} \text{ »}.$$

Devant une situation de ce type, il est parfois possible de « ruser » pour *lever l'indétermination* en utilisant quelques manipulations classiques qu'il est utile d'avoir en tête : utilisation de la quantité conjuguée, factorisation par le terme de plus haut degré, reconnaissance de limites classiques...

Lorsque les manipulations classiques ne fonctionnent pas, il arrive que les formes indéterminées puissent être levées en utilisant les **croissances comparées**. C'est un résultat important permettant de comparer puissances, logarithmes et exponentielles.

Proposition 2.35 – Croissance comparée, I

Pour tout réel $a \neq 0$ et pour tout b et c des nombres réels, on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{ax}|x|^b \ln^c|x| = \lim_{x\to\pm\infty} e^{ax}$$

(« En $\pm\infty$, une exponentielle l'emporte sur toute puissance ou logarithme »).

Exemple 2.36. — $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{10000}} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x x^{10000} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{1000}} \ln^{10000}(|x|) = 0$.

Proposition 2.37 – Croissance comparée, II

Pour tout réel $b \neq 0$ et pour tout réel c, on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x|^b \ln^c|x| = \lim_{x\to+\infty} x^b$$

(« En $\pm\infty$, une puissance l'emporte sur tout logarithme »).

Exemple 2.38. — $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{(\ln(x))^{100}} = +\infty$.

Proposition 2.39 – Croissance comparée, III

Pour tout réel $b \neq 0$ et pour tout réel c, on a

$$\lim_{x\to 0 \text{ et } x>0} x^b|\ln x|^c = \lim_{x\to 0 \text{ et } x>0} x^b$$

(« En zéro, une puissance l'emporte sur tout logarithme »).

Exemple 2.40. — $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x}(\ln(x))^{100} = 0$.

La limite indéterminée « 1^∞ », est peut-être plus nouvelle. Lorsqu'on doit étudier une limite d'une fonction du type $f(x)^{g(x)}$ (avec f à valeurs dans $]0,+\infty[$), il est raisonnable de l'écrire sous la forme $e^{g(x)\ln(f(x))}$ et d'étudier la limite de $g(x)\ln(f(x))$. L'exercice 2.20 montre pourquoi la forme « 1^∞ » est bien indéterminée.

Application 2.41. — Montrer que $\lim\limits_{x\to0+} x^x = 1$.

5. Exercices

5.1. Premières manipulations. —

Exercice 2.1. — Montrer, en utilisant la définition, que la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. En utilisant une étude de fonction, tracer la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormé.

Exercice 2.2. — Soit n un élément de $\mathbb{N}^\star$. A l'aide d'une étude de fonction, tracer le graphe de la fonction

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x}{1+nx^2}. \end{array}$$

5.2. La fonction valeur absolue. —

Exercice 2.3. —

1. Montrer que $|\sin^{12}(x) - 2\cos^9(x)| \leq 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $|1 - x^{12} + 4x^3| \leq 5$ pour $x \in [-1, 1]$.

Exercice 2.4. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes
(a) $|x+1| = 2$, (b) $|x+3| \leq 4$, (c) $|x+1| > 3$,
(d) $|2x-4| = |x+2|$, (e) $|2x+4| \leq |x+1|$, (f) $|x+1| = |x| - 1$.

Exercice 2.5. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|2x-1| - 2|3x+1| = 1$.

Exercice 2.6. — Montrer que si x appartient à $[-3, 1]$, alors $\frac{|x+1|(x+2)}{x^2+1}$ appartient à $[-2, 6]$.

Exercice 2.7. —

1. Montrer que $|x+y| = |x| + |y|$ si et seulement si x et y sont de même signe.
2. Soit x et y des réels. Montrer que $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ et $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

5.3. Les fonctions exponentielle et logarithme néperien. —

Exercice 2.8. —

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{\exp(x^2-1)}{\exp(x+1)} \leq 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} + e^x - 6 = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(|x+1|) - \ln(|x-1|) \leq \ln(2)$.

Exercice 2.9. — Justifier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \frac{xe^x}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 2.10. — Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels l'expression $e^{\frac{1}{\ln x}}$ a un sens, puis étudier la fonction

$$\begin{array}{cccc} f & : & D & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^{\frac{1}{\ln x}}. \end{array}$$

Exercice 2.11. — Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

5.4. Les fonctions puissances. —

Exercice 2.12. — Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+x-6}}$.

Exercice 2.13 **(Problème de dérivabilité).** —

1. Montrer que si $\alpha \in]0, 1[$, la fonction $p_\alpha : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^\alpha \in \mathbb{R}$ n'est pas dérivable en 0.
2. Montrer que la fonction $f : x \in [-1, 1] \mapsto \sqrt{1-x^2} \in \mathbb{R}$ n'est pas dérivable en -1 et en 1.

Exercice 2.14. — Etudier la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ (ensemble de définition, dérivée, courbe).

5.5. Fonctions usuelles. —

Exercice 2.15. — Soit $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \ln(x)$. Donner le domaine de définition de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

Exercice 2.16 **(Quelques études de signe).** — Dans chacun des cas ci-dessous, donner l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression a un sens ; déterminer le signe de l'expression selon la valeur de x.

(1) $x \mapsto \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-3}$

(2) $x \mapsto \sqrt{|x-1|} - \sqrt{|2x-3|}$

(3) $x \mapsto (x^2-3)(2-\sqrt{x})(\sqrt{x^2-2x+1}-4)$

(4) $x \mapsto \ln(x+3) + \ln(x+2) - \ln(x+11)$

Exercice 2.17. —

1. Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0

   (a) $xe^{-\ln(x)}$, (b) $\frac{x+1}{x-1}$, (c) $\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}+1}{2e^{\frac{1}{x^2}}-1}$.

2. Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$

   (a) $\frac{\sqrt{|x|+1}}{x-1}$, (b) $\frac{x^3+1}{x^2-1}$, (c) $\frac{e^{2x}+1}{e^{3x}-1}$, (d) $\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|-1}$, (e) $2^{-x}e^x$.

Exercice 2.18 **(Croissances comparées.)** —

1. Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0

   (a) $e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{2}{x^2}}$, (b) $\frac{1}{x^2} + \ln(|x|)$, (c) $\frac{1+e^{-x}}{(e^x-1)^2-|x|\ln(|x|)}$.

2. Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$

   (a) $\frac{\ln(x)+xe^{-x}-e^x}{e^x+1}$, (b) $x^{\frac{1}{x}}$, (c) $\frac{e^x-\ln(x)}{xe^x-x^2}$ (d) $1+\frac{\ln(e^{3x})}{\sqrt{x}}$.

Exercice 2.19 **(Calcul de dérivées).** —

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes

   (a) $\frac{x-2}{x+1}$, (b) $\frac{x^2-2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$, (c) $x^{\frac{1}{3}}\ln(x)$, (d) $\frac{x}{e^x-2}$, (f) $\frac{e^x}{x^4+2x^2+1}$.

2. Calculer la dérivée des fonctions suivantes

   (a) $\ln^2(x)$, (b) $\frac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$, (c) $\sqrt{e^{x^3}}$.

Exercice 2.20. — Montrer que $\lim_{x\to 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1$, $\lim_{x\to 0+} (1+x)^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0+} (1+x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$.

(On pourra penser à utiliser que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$*)*

Exercice 2.21. — Étudier la fonction $x \mapsto x^x$.

Exercice 2.22. — Étudier les fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}} \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{l} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2} \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \end{array}$$

(*Attention, le calcul n'est pas toujours la meilleure solution.*)

CHAPITRE 3

QUELQUES CALCULS D'INTÉGRALES

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques points sur l'intégrale. Vous définirez cet objet plus précisément au deuxième semestre cette année.

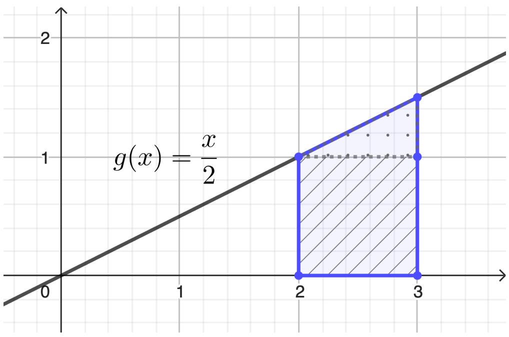
1. Quelques définitions et propriétés

On rappelle la définition de l'intégrale d'une fonction.

Définition 3.1 – Intégrale d'une fonction positive

Soit f une fonction continue et positive définie sur un intervalle $[a, b]$. On appelle intégrale de a à b de f l'aire délimitée par l'axe des abscisses, les droites $x = a$ et $x = b$ et la courbe $y = f(x)$. On note cette aire $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Par exemple, $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{2}dx$, l'intégrale entre 2 et 3 de la fonction $g(x) = \frac{x}{2}$, vaut $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ comme le montre le tracé qui suit (1 pour l'aire de la partie hachurée et $\frac{1}{4}$ pour l'aire de la partie en pointillée).



Remarque 3.2. — La variable x dans l'expression $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est muette. On peut utiliser d'autres lettres comme variable

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(z)dz.$$

On peut définir l'intégrale d'une fonction continue non nécessairement positive en séparant « la partie positive » et « la partie négative ». Vous verrez cela plus tard dans l'année.
L'intégrale admet les propriétés suivantes :

Proposition 3.3

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$,

1. *Linéarité de l'intégrale : $\forall \lambda$ un réel. On a alors*
$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx.$$
2. *Relation de Chasles : $\forall c \in [a, b]$. On a alors*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$
3. *Positivité : Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ (Attention ce n'est qu'une implication)*

Exemple 3.4. — On a $\int_0^1 2x - 3dx = 2\int_0^1 xdx - 3\int_0^1 dx = 2 \times \frac{1\times 1}{2} - 3 \times 1 = 1 - 3 = -2$.

Exemple 3.5. — On a $\int_0^2 2xdx = 2\int_0^2 xdx = 2 \times \frac{2\times 2}{2} = 4$ mais aussi
$\displaystyle\int_0^2 2xdx = \int_0^1 2xdx + \int_1^2 2xdx = 1 + (1 \times 2 + \frac{1\times 2}{2}) = 4.$

2. Intégrales et primitives

On introduit maintenant la notion de primitive.

Définition 3.6 – Primitive

Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I. On dit qu'une fonction F définie sur I est **une** primitive de f si F est dérivable sur I et que pour tout x dans I, $F'(x) = f(x)$.

Attention. — On parle d'**une** primitive et non de **la** primitive. Par exemple les fonctions $F_1(x) = x^2$ et $F_2(x) = x^2 + 1$ sont des primitives de la fonction $f(x) = 2x$. Une fonction ayant une primitive possède en fait une infinité de primitives et elles diffèrent toutes d'une constante.

La proposition qui suit permet de calculer en pratique des intégrales.

Proposition 3.7 – Intégrale et primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$

1. *Soit F une primitive de f, on a alors*
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$
2. *La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(y)dy$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a*

Exemple 3.8. — Calculer $\int_2^3 \frac{x}{2}dx$. La fonction $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$, on a alors
$$\int_2^3 \frac{x}{2}dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_2^3 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}.$$

Remarque 3.9. — La fonction $x \mapsto \frac{x^2}{4}+1$ est aussi une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$, on a donc

$$\int_2^3 \frac{x}{2}dx = \left[\frac{x^2}{4}+1\right]_2^3 = \frac{9}{4}+1-(1+1) = \frac{5}{4}.$$

qui est le même résultat que dans l'exemple précédent. On voit donc que dans le calcul d'une intégrale le choix d'une primitive importe peu puisqu'on obtient toujours le même résultat.

Primitives usuelles

Nous rappelons ici quelques primitives des fonctions usuelles du chapitre précédent. Sur chaque ligne, $F(x)$ est **une** primitive de la fonction f sur l'intervalle I. Ces primitives sont uniques à une constante près notée C.

fonction $f(x)$	Intervalle I	primitive $F(x)$
a (constante)	$\mathbb{R}$	$ax+C$
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$\dfrac{x^{-n+1}}{1-n}+C$
x^α, $\alpha \neq 1$	$]0,+\infty[$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x+C

Nous rappelons aussi quelques relations qui découlent des formules de dérivations. Les primitives sont données à une constante près notée C. Dans la suite, les fonctions f et g sont dérivables sur un intervalle I.

fonction	primitive
$f'+g'$	$f+g+C$
af' (a constante)	$af+C$
$f'f^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{1}{n+1}f^{n+1}+C$
$f'f^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, f ne s'annule pas sur I)	$\frac{1}{1-n}f^{1-n}+C$
$\frac{f'}{f}$ (f strictement positive sur I)	$\ln(f)+C$
$\frac{f'}{f}$ (f strictement négative sur I)	$\ln(-f)+C$
$g' \times f' \circ g$	$f \circ g + C$

Reconnaître la dérivée d'une fonction composée

Exemple 3.10. — Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx$. On reconnait ici la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$. On a donc

$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \ln(1+1)-\ln(1+0) = \ln(2).$$

Exemple 3.11. — Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. On reconnait ici la dérivée de la fonction $x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$. On a donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\left(\sqrt{1-\frac{1}{4}}-\sqrt{1}\right) = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Intégration par parties

La proposition qui suit est un moyen très pratique de calculer des intégrales.

Proposition 3.12 – Intégration par parties

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ telles que f' et g' sont continues sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Exemple 3.13. — Calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$.

On choisit $f(x) = e^x$ et $g(x) = x$ de sorte que $f'(x) = e^x$ et $g'(x) = 1$. Il s'en suit en intégrant par parties

$$\int_0^1 e^x x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e^1 - 0 - [e^x]_0^1 = e^1 - (e^1 - e^0) = e^0 = 1.$$

Application 3.14. — Soit x un réel strictement positif. Calculer $\int_1^x \ln(y)dy$.

4. Introduction à la décomposition en éléments simples : un exemple

La décomposition en éléments simple est utile pour le calcul d'intégrale de fonctions rationnelles (quotient de fonctions polynomiales).

Exemple 3.15. — Calcul de $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx$.

— <u>Décomposition en éléments simples</u> :

On sait que $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ et on remarque que

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

On a alors décomposé en éléments simples la fonction rationnelle $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$

— On peut alors calculer I en utilisant les primitives de $x \mapsto \frac{a}{x-1}$ et $x \mapsto \frac{b}{x+1}$ pour a, b réels.

$$\begin{aligned}
I &= \int_2^3 \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}dx \\
&= \left[a\ln(x-1) + b\ln(x+1)\right]_2^3 \quad (x-1>0 \text{ et } x+1>0 \text{ pour } x \in [2,3]) \\
&= \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(4) - \frac{1}{2}\ln(1) + \frac{1}{2}\ln(3) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\times 3}{4}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)
\end{aligned}$$

5. Exercices

***Exercice 3.1* (Une intégrale sur un intervalle).** — On définit la fonction f sur $[0,3]$ par

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0\leq x\leq 1,\\ 1 & \text{si } 1\leq x\leq 2,\\ (x-1)^2 & \text{si } 2\leq x\leq 3.\end{cases}$$

Calculer $\int_0^3 f(x)dx$.

***Exercice 3.2* (Intégrales et fonctions composées).** — Calculer les intégrales suivantes

(a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$, (b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{(x^2+1)^3}dx$, (c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}dx$.

***Exercice 3.3* (Intégration par parties.)** — Calculer les intégrales suivantes

(a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$, (b) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x dx$, (c) $\displaystyle\int_1^x y\ln(y)dy$, (d) $\displaystyle\int_1^3 (\ln(x))^2dx$.

***Exercice 3.4* (Décomposition en éléments simples).** —

1. Décomposer en éléments simples : $\frac{1}{2x^2+3x-2}$.
2. En déduire une primitive de la fonction $x\mapsto \frac{1}{2x^2+3x-2}$ définie sur $]\frac{1}{2},+\infty[$.
3. De même, déterminer une primitive de $f_1(x)=\frac{3}{x^2+2x-3}$ et de $f_2(x)=\frac{2x}{x^2+2x-3}$.

Exercice 3.5. — Calculer une primitive nulle en 0 de la fonction $x\mapsto\frac{x}{x-1}$ définie sur $]-\infty,1[$.

Exercice 3.6. — Calculer une primitive nulle en 0 des fonctions suivantes

(a) $x\mapsto\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, (b) $x\mapsto(x+1)e^x$.

Exercice 3.7. — Pour tout entier naturel n on pose

$$I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx.$$

1. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n\geq 0$.
2. Calculer I_0.
3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.
4. Montrer que pour tout entier non-nul n on a la relation
$$(3+2n)I_n=2nI_{n-1}.$$
5. En déduire I_n pour tout $n\geq 2$.
6. Sans nécessairement utiliser l'expression de I_n trouvée précédemment, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.

CHAPITRE 4

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

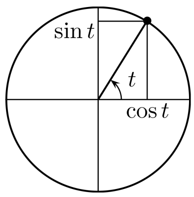
1. Fonctions consinus et sinus

On rappelle la définition des fonctions sinus et cosinus.

Définition 4.1 – Sinus et cosinus

Soit le cercle de rayon 1 centré à l'origine $(0,0)$ dans le plan cartésien. Considérons l'intersection entre ce cercle et la demi-droite partant de l'origine et faisant un angle t avec l'axe des abscisses. Notons $M(x,y)$ le point d'intersection. On définit alors $\cos(t) = x$ et $\sin(t) = y$.

Voici un dessin du cercle trigonométrique pour illustrer notre définition.



On rappelle que l'angle t est exprimé en radian et que π rad$= 180°$.
De plus les angles sont orientés : positivement dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique) négativement dans le sens des aiguilles d'une montre.
On a les propriétés immédiates suivantes.

Proposition 4.2 – Propriétés de $\cos$ et $\sin$

On a les propriétés suivantes :

(i) Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques : $\forall\, x \in \mathbb{R}$ *et* $k \in \mathbb{Z}$
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \ \text{ et } \ \sin(x + 2k\pi) = \sin(x).$$

(ii) On a la relation : $\forall\, x \in \mathbb{R}$
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

(iii) La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire : $\forall\, x \in \mathbb{R}$
$$\cos(-x) = \cos(x) \ \text{ et } \ \sin(-x) = -\sin(x).$$

(iv) On a la relation : $\forall\, x \in \mathbb{R}$
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x) \ \text{ et } \ \cos(\pi + x) = -\cos(x).$$

Démonstration. — Le point (i) vient du fait qu'un angle est défini à 2π près. Le point (ii) est une conséquence du théorème de Pythagore. Le point (iii) se voit sur le cercle trigonométrique : changer le signe de l'angle revient à faire une symétrie axiale par rapport à l'axe x. Le dernier point se voit aussi sur le cercle trigonométrique : ajouter π revient à faire une symétrie centrale par rapport à l'origine. □

Voici quelques valeurs numériques :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Proposition 4.3 – Dérivées de $\sin$ **et** $\cos$

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ *et pour tout réel* x*,*

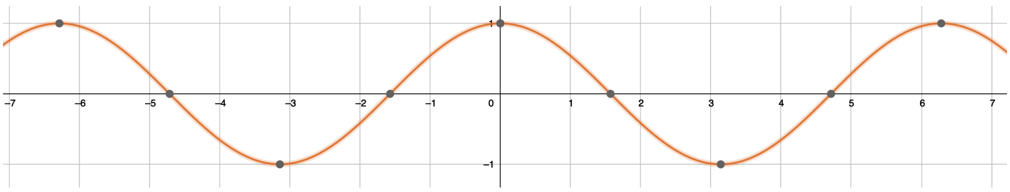
$$\cos'(x) = -\sin(x) \text{ et } \sin'(x) = \cos(x).$$

Ce résultat est l'objet de l'exercice 4.8. Vous montrerez plus tard dans votre cursus que la fonction sinus est l'unique fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $y'' + y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Similairement, la fonction cosinus est l'unique fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $y'' + y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

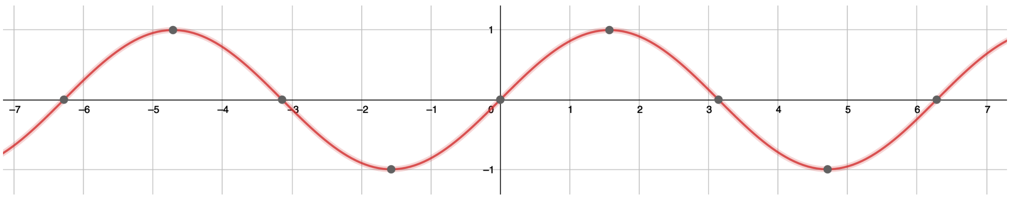
On obtient alors les primitives usuelles :

fonction $f(x)$	Intervalle I	primitive $F(x)$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin(x) + C$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos(x) + C$

On trace la fonction cosinus



et la fonction sinus



***Exemple 4.4* (Exemples de manipulation).** —

— Calcul de limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + \cos\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{y\to 0} \cos(y) = \cos(0) = 1$ comme somme et composition de limites $\left(y = \frac{1}{x+1}\right)$ car $\cos$ est continue en 0

— Dérivation :

  — Considérons la fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)+2}$. Comme pour tout réel x, $\cos(x) + 2 > 0$, la fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est dérivable comme quotient de fonctions dérivables de dénominateur non nul. Calculons sa dérivée pour tout x réel,

$$f'(x) = \frac{\cos(x)(\cos(x)+2) - \sin(x)(-\sin(x))}{(\cos(x)+2)^2} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x) + 2\cos(x)}{(\cos(x)+2)^2} = \frac{1 + 2\cos(x)}{(\cos(x)+2)^2}$$

  — Calculons la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(e^x)$. On pose $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = e^x$. La fonction $f \circ g$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (par composition). On a $f'(x) = \cos(x)$ et $g'(x) = e^x$. On a donc

$$(f \circ g)'(x) = e^x \cos(e^x).$$

Exemple 4.5. — Calculons la primitive de la fonction $x \mapsto e^x \sin(x)$, qui s'annule en 0.
On doit calculer $\int_0^x e^y \sin(y)dy$. On choisit $f(x) = e^x$ et $g(x) = \sin(x)$ de sorte que $f'(x) = e^x$ et $g'(x) = \cos(x)$. Il s'en suit en intégrant par parties

$$\int_0^x e^y \sin(y)dy = [e^y \sin(y)]_0^x - \int_0^x e^y \cos(y)dy = e^x \sin(x) - \int_0^x e^y \cos(y)dy.$$

On choisit maintenant $f(y) = e^y$ et $g(y) = \cos(y)$ de sorte que $f'(y) = e^y$ et $g'(y) = -\sin(y)$. Il s'en suit en intégrant à nouveau par parties

$$\int_0^x e^y \sin(y)dy = e^x \sin(x) - \left([e^y \cos(y)]_0^x - \int_0^x e^y(-\sin(y))dy\right)$$

et on a donc

$$\int_0^x e^y \sin(y)dy = e^x(\sin(x) - \cos(x)) + e^0 \cos(0) - \int_0^x e^y \sin(y)dy.$$

Il s'en suit

$$\int_0^x e^y \sin(y)dy = \frac{e^x(\sin(x) - \cos(x)) + 1}{2}.$$

Application 4.6. — Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(|x|)$ est dérivable en 0 mais que la fonction $x \mapsto \sin(|x|)$ n'est pas dérivable en 0.

Formules trigonométrique usuelles. — On rappelle ici quelques formules trigonométriques de base sur les fonctions cosinus et sinus.

Proposition 4.7 – Formules trigonométriques

Pour tout a et b des réels on a :

(i) $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ *;*

(ii) $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ *;*

On en déduit les formules suivantes :
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$;
- $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$;
- $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$;
- $\sin(\frac{\pi}{2} + a) = \cos(a)$ et $\cos(\frac{\pi}{2} + a) = -\sin(a)$.

Application 4.8. — Pour x réel, calculer $\cos(\pi - x)$ et $\sin(x - \frac{\pi}{2})$.

Application 4.9. — Calculer $\cos(\frac{2\pi}{3})$ et $\sin(\frac{2\pi}{3})$.

2. La fonction tangente

2.1. Fonction tangente. — On peut maintenant définir la fonction tangente.

Définition 4.10 – Tangente

Si x n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, c.a.d qu'il n'existe pas d'entier relatif k tel que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, on définit

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Remarque 4.11. — La fonction tangente **n'est pas définie en les réels où la fonction cosinus s'annule**. Le domaine de définition de la fonction tangente est donc l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$ où l'on définit

$$\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Voici quelques valeurs numériques :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

En utilisant les propositions précédentes on en déduit les propriétés suivantes sur la fonction tangente.

Proposition 4.12 – Propriétés de $\tan$

On a les propriétés suivantes :

(i) La fonction tangente est π-périodique : pour tout réel $x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$ et pour tout entier relatif k

$$\tan(x+k\pi)=\tan(x).$$

(ii) La fonction tangente est impaire : pour tout réel $x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$

$$\tan(-x)=-\tan(x).$$

(iii) La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et on a

$$\tan'(x)=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Ainsi $\tan(x)$ est une primitive de $1+\tan^2(x)$ et de $\frac{1}{\cos^2(x)}$ pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

(iv) On a les limites suivantes :

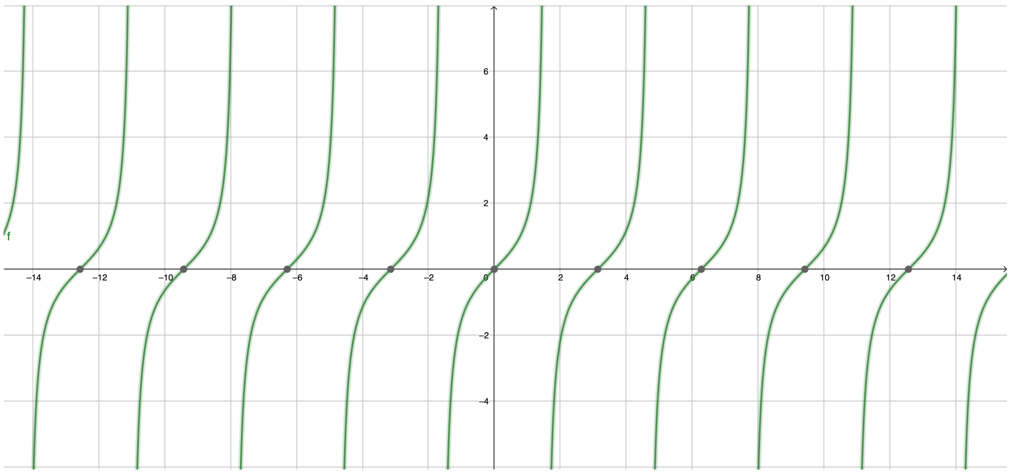
$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)=+\infty.$$

Démonstration. — Le point (i) est une conséquence du point (iv) des propriétés sur cos et sin. Le point (ii) découle de la parité des fonctions sinus et cosinus. Pour le point (iii), la fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition comme quotient de fonctions dérivables et car la fonction cosinus ne s'annule pas sur l'ensemble de définition de la fonction tangente. On calcule maintenant sa dérivée. On a

$$\tan'(x)=\frac{\cos(x)\cos(x)-\sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Pour le point (iv), on remarque que $\sin(-\frac{\pi}{2})=-1$, $\sin(\frac{\pi}{2})=1$, $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+}\frac{1}{\cos(x)}=+\infty$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{1}{\cos(x)}=+\infty$. Le résultat suit par les théorèmes généraux sur les limites. □

On trace la fonction tangente sur son domaine de définition



Formules trigonométriques. — En utilisant les formules trigonométrique du cosinus et du sinus on obtient la formule suivante pour la fonction tangente.

Proposition 4.13 – Formules diverses pour $\tan$

Pour tout a et b réels, $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ *lorsque* $\tan(a)$, $\tan(b)$ *et* $\tan(a+b)$ *sont bien définies.*

Et on peut en déduire que

(i) $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$ lorsque $\tan(a)$ et $\tan(2a)$ sont bien définies.

(ii) $\tan(\frac{\pi}{2}+a) = -\frac{1}{\tan(a)}$ pour $a \notin \pi\mathbb{Z}$.

Application 4.14. — Montrer que pour $a, b \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, on a : $\tan(a) + \tan(b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$.

Application 4.15. — Calculer $\tan(\frac{\pi}{8})$.

3. Les fonctions arc-sinus, arc-cosinus et arc-tangente

3.1. La fonction $\arcsin$. — La fonction sinus est strictement croissante et continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ avec $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. On en déduit donc la définition suivante.

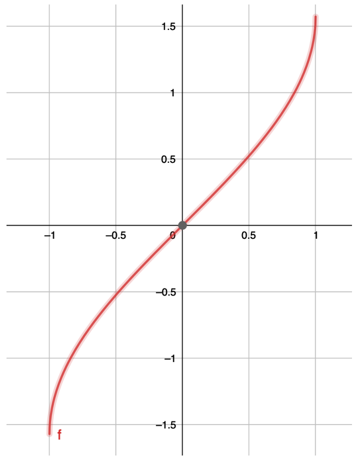
Théorème et définition 4.16 – Fonction $\arcsin$

Pour tout $t \in [-1, 1]$, il existe un unique réel $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(x) = t$.
La fonction $\sin : \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$ *est une bijection et on définit alors la fonction arc-sinus comme sa bijection réciproque :* $\arcsin : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ t & \mapsto & \arcsin(t) \end{array}$ *avec* $\arcsin(t)$ *l'unique réel dans* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *tel que* $\sin(\arcsin(t)) = t$.
La fonction $\arcsin$ *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et* $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Attention. — *La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ mais bijective sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ à valeurs dans $[-1, 1]$.*
Le domaine de définition de la fonction arc-sinus est $[-1, 1]$.
Mais le domaine de dérivabilité de la fonction arc-sinus est $]-1, 1[$.

Donnons quelques valeurs numériques ainsi que la courbe représentative de la fonction arc-sinus :

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$



Application 4.17. — Calculer $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Attention. — Si $x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin(x)) \neq x$. Par exemple, $\arcsin(\sin(2\pi)) = \arcsin(0) = 0 \neq 2\pi$.

3.2. La fonction arccos**.** — La fonction cosinus est strictement décroissante et continue sur $[0, \pi]$ avec $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$. On en déduit donc la définition suivante.

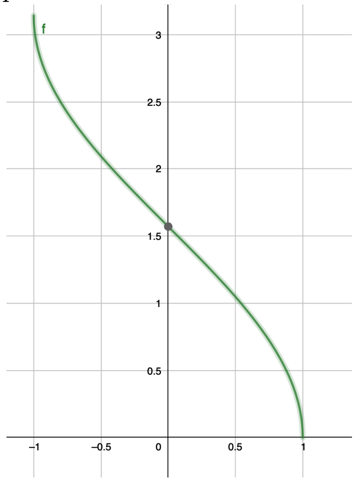
Théorème et définition 4.18 – Fonction arccos

Pour tout $t \in [-1, 1]$, il existe un unique réel $x \in [0, \pi]$ tel que $\cos(x) = t$.
La fonction $\cos : \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$ *est une bijection et on définit alors la fonction arc-cosinus comme sa bijection réciproque :* $\arccos : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ t & \mapsto & \arccos(t) \end{array}$ *avec* $\arccos(t)$ *l'unique réel dans* $[0, \pi]$ *tel que* $\cos(\arccos(t)) = t$.
La fonction arccos *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et* $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Attention. — *La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ mais bijective sur $[0, \pi]$ à valeurs dans $[-1, 1]$.*
Le domaine de définition de la fonction arc-cosinus est $[-1, 1]$.
Mais le domaine de dérivabilité de la fonction arc-cosinus est $]-1, 1[$.

Donnons quelques valeurs numériques ainsi que la courbe représentative de la fonction arc-cosinus :

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos(x)$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	0



Application 4.19. — Calculer $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Attention. — Si $x \notin [0, \pi]$, $\arccos(\cos(x)) \neq x$. Par exemple, $\arccos(\cos(2\pi)) = \arccos(1) = 0 \neq 2\pi$.

3.3. La fonction arctan. — La fonction tangente est strictement croissante et continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \tan(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan(x) = +\infty$. On en déduit la définition suivante.

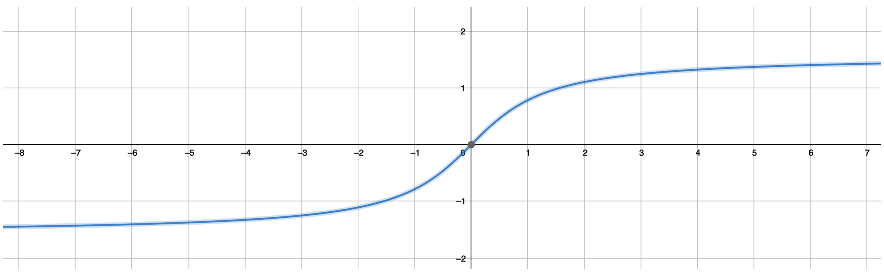
Théorème et définition 4.20 – Fonction arctan

Pour tout $t \in, \mathbb{R}$, *il existe un unique réel* $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *tel que* $\tan(x) = t$.
La fonction $\tan : \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$ *est une bijection et on définit alors la fonction arc-tangente comme sa bijection réciproque :* $\arctan : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ t & \mapsto & \arctan(t) \end{array}$ *avec* $\arctan(t)$ *l'unique réel dans* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *tel que* $\tan(\arctan(t)) = t$.
La fonction arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Attention. — *La fonction tangente est définie sur* $\mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *mais bijective de* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$. *Le domaine de définition et de dérivabilité de la fonction arc-tangente est* $\mathbb{R}$.

Donnons quelques valeurs numériques et la courbe représentation de la fonction arc-tangente :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$



Application 4.21. — Calculer $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Attention. — Si $x \notin]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan(x)) \neq x$. Par exemple,

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \neq \frac{4\pi}{3}.$$

***Exemple 4.22* (Calculs d'intégrales).** —

1. Calculer $\int_0^1 \frac{2}{1+x^2} dx$. On reconnait la dérivée de la fonction $x \mapsto 2\arctan(x)$. On a donc
$$\int_0^1 \frac{2}{1+x^2} dx = 2\left[\arctan(x)\right]_0^1 = 2\arctan(1) - 2\arctan(0) = 2\arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$
2. Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. On reconnait ici la dérivée de la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$. On a donc
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\arcsin(x)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin(\frac{1}{2}) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{6}.$$

4. Exercices.

4.1. Fonctions trigonométriques. —

Exercice 4.1. — Calculer $\sin(\frac{\pi}{8})$ et $\cos(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 4.2. — Montrer que pour tout réel a et b on a : $\sin^2(a+b)+\cos^2(a-b)=1+\sin(2a)\sin(2b)$.

Exercice 4.3. —

1. Calculer la limite des fonctions suivantes

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{x^2}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(\tan(x+\frac{\pi}{2}))^4+\tan(x+\frac{\pi}{2})-1}{(\tan(x+\frac{\pi}{2}))^2+1}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\cos(\sin(\frac{1}{x}))}$

2. Calculer la dérivée des fonctions suivantes

   (a) $\cos(x)e^x$, (b) $x^2\sin(x)$, (c) $\tan(x)e^{-x}$, (d) $\dfrac{\cos(x)}{x^2-2x+2}$, (e) $e^{\cos(x)}$, (f) $\ln(\cos(x))$,

3. Calculer les intégrales suivantes

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(x)dx$, (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x\cos(x^2)dx$, (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2\frac{\sin(x^3)}{\cos(x^3)}dx$, (d) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\cos(x)e^x dx$.

Exercice 4.4. — Calculer une primitive de la fonction $x\mapsto\tan(x)$ définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Exercice 4.5. — Montrer que pour tout réel a et b on a :

1. $\cos(a)\cos(b)=\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$,
2. $\sin(a)\sin(b)=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$,
3. $\sin(a)\cos(b)=\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$.

Exercice 4.6. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

(a) $\sin(|x|)=1$, (b) $\tan(2x)=\frac{1}{\sqrt{3}}$
(c) $|\cos(3x-2)|=\frac{\pi}{2}$, (d) $\cos^2(2x)-3\cos(2x)=-2$.

***Exercice 4.7* (Formule de l'arc moitié).** — Le but de cette exercice est de montrer que pour tout réel $x\notin\pi+2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\sin(x)=\frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}\ ,\ \cos(x)=\frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}\ \text{et}\ \tan(x)=\frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}.$$

1. En développant l'expression $\frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$, démontrer la première égalité.
2. De même, en développant l'expression $\frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$, démontrer la seconde égalité.
3. En déduire la troisième égalité.

***Exercice 4.8* (Dérivabilité des fonctions cosinus et sinus).** — Dans cette exercice nous allons prouver les formules de dérivation des fonctions cosinus et sinus. Nous admettrons que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ (voir l'annexe pour une preuve de cette limite).

1. (a) Montrer que pour tout $h\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on a $\cos(h)-1=-\frac{\sin^2(h)}{\cos(h)+1}$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0$.
2. Soit x un réel.

   (a) Montrer que pour tout réel h, on a $\sin(x+h)-\sin(x)=\sin(h)\cos(x)+\sin(x)(\cos(h)-1)$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\cos(x)$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=-\sin(x)$.

Exercice 4.9. — Étudier les fonctions suivantes :

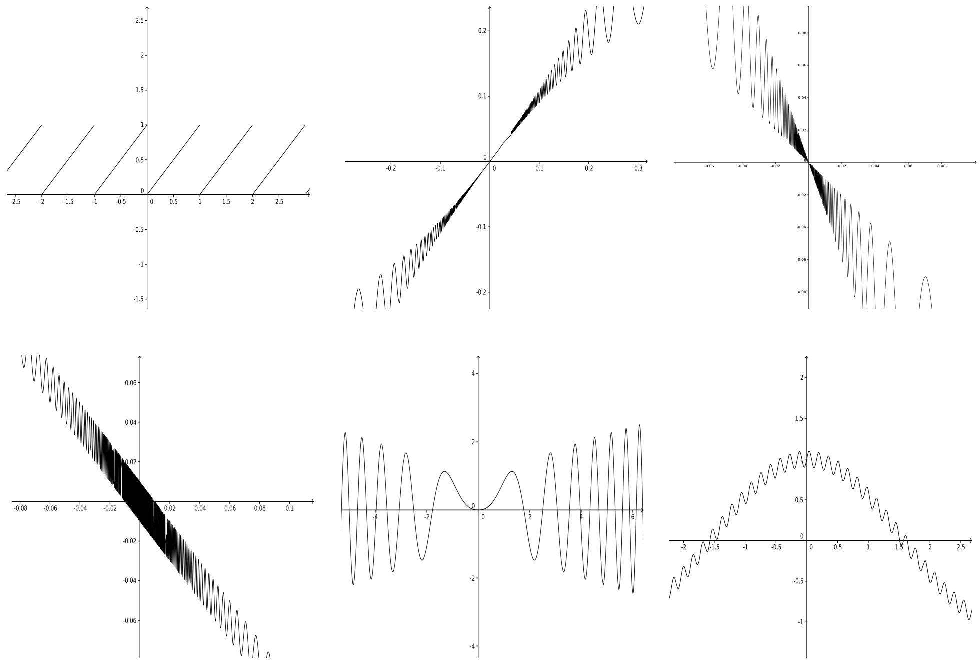
$$f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin^2(x) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x}\sin^2(x) \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\cos(x) + \cos(2x) \end{array}$$

(*Attention, le calcul n'est pas toujours la meilleure solution.*)

Exercice 4.10. — *Tiré de l'exercice III.3.5 page 211 du livre de Ernst Hairer et Gerhard Wanner « L'analyse au fil de l'histoire ».* Associer à chacune des fonctions suivantes le graphe qui lui correspond

$$f_1(x) = x\sin(\tfrac{1}{x}) - 2x \quad f_2(x) = \cos(x) + 0,1\sin(40x) \quad f_3(x) = \tfrac{1}{100}\sin(\tfrac{5}{x}) - x$$

$$f_4(x) = x - [x] \qquad f_5(x) = \sqrt{|x|}\sin(x^2) \qquad f_6(x) = x + x^2\sin(\tfrac{1}{x^2})$$



4.2. Fonctions trigonométriques réciproques. —

Exercice 4.11. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes
(a) $\arctan\left(\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right) = \frac{\pi}{4}$, (b) $\sin(|\arcsin(x)|) = -x$, (c) $\arccos(\sin(x)) = x$.

Exercice 4.12 **(Limites et fonctions trigonométriques.)** — Calculer les limites suivantes

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{\arccos(x)}{\pi}\right), \quad \text{(b)}, \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \arccos\left(\frac{1}{\tan(x)+3}\right) \quad \text{(c)} \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{\arccos(x)}}.$$

Exercice 4.13 **(Dérivation et fonctions trigonométriques).** — Calculer la dérivée des fonctions suivantes

(a) $\arctan(\arcsin(x))$, (b) $\arctan(x^2) - 2\arcsin(\ln(x))$, (c) $\arccos(\sin(x))$, (d) $\frac{\arctan(e^x)}{1+\arccos(x)}$.

Exercice 4.14 **(Intégration par parties).** —

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)dx$
2. $(*)$ Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$.

Exercice 4.15 **$(*)$.** — Calculer une primitive nulle en 0 de $x \mapsto \dfrac{x}{(x+1)^2+1}$.