Raisonnement par l'absurde. —

Exercice 2.6. — 1. Soit n un entier naturel non nul. Montrer qu'il est impossible que n^2+1 soit le carré d'un entier.

2. Soit un entier $n > 0$. Montrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Récurrences. —

Exercice 2.7. — 1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $2^n + 3^n \leq 5^n$.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, on a $(n!) \geq 2^n$.
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Analyse-synthèse. —

Exercice 2.8. — • Soit l'ensemble $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

- Soit H le sous-ensemble de E des fonctions f vérifiant $f(0) = 0$: $H = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$.
- On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 1$.

Montrer que pour toute fonction f de E, il existe un unique couple $(h, \alpha) \in H \times \mathbb{R}$ vérifiant $f = \alpha g + h$.

Exercice 2.9. — Soit la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + x\, f(1-x) = 1 + x.$$

1. Déterminer $f(0)$ et $f(1)$.
2. En substituant x par $1-x$, déterminer $f(x)$. Conclure.

Exercice 2.10. — Dans cet exercice, on détermine toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont deux fois dérivables et qui vérifient la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad f(x+y) + f(x-y) = 2\left(f(x) + f(y)\right). \qquad (\star)$$

1. Considérons une fonction f solution.
   (a) Déterminer $f(0)$ et montrer que f est paire.
   (b) Montrer que la fonction f'' est constante.
   On pourra fixer y et dériver deux fois par rapport à x, puis fixer x et dériver deux fois par rapport à y.
2. Conclure.

CHAPITRE 3

ENSEMBLES

1. Généralités

1.1. Premières notions. — On appelle *ensemble* toute collection d'objets. Les objets présents dans la collection s'appellent les *éléments de l'ensemble*.

Vocabulaire :

- *Appartenance.* Si E est un ensemble, dire « l'objet x est un élément de E » s'écrit « $x \in E$ » . On dit aussi que x *appartient* à E. Dire « x n'est pas un élément de E » s'écrit « $x \notin E$ ».
- *Ensemble vide.* L'ensemble n'ayant aucun élément est appelé *l'ensemble vide*, on le note $\emptyset$.

1.2. Construction d'ensembles. —

Définition en extension. —

- Un ensemble peut se définir avec la *liste de ses éléments* :

$$A = \{1, -8, \pi\}$$

  est un ensemble comportant trois éléments.
- Lorsqu'un ensemble A comporte un seul élément, on dit que A est un *singleton* : $A = \{0\}$.

Définition en compréhension. —

On peut décrire un ensemble en spécifiant quelles sont les *propriétés* qui distinguent les objets qui appartiennent à un ensemble E des objets qui n'y appartiennent pas. Soit un ensemble E et en supposant donné, pour chaque élément x de E, un énoncé $P(x)$, on peut former l'ensemble A des éléments de E vérifiant l'assertion $P(x)$.

$A = \{x \in E \ / \ P(x)\}$ est l'ensemble « des x de E vérifiant la propriété $P(x)$ ».

Dire qu'un élément appartient à un ensemble, c'est qu'il vérifie les caractéristiques de cet ensemble.

Exemple 3.1. — • l'ensemble des entiers naturels pairs est

$$B = \{n \in \mathbb{N} \ / \ \exists k \in \mathbb{N} \ : \ n = 2k\}.$$

- L'ensemble des suites géométriques est $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ \exists q \in \mathbb{R} \text{ } \textit{tel que} \ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = q.u_n\}$, et donc montrer qu'une suite appartient à E, revient à montrer l'existence de la raison q.

On peut aussi définir un ensemble à partir d'objets qui ont une « forme spécifique ».

Exemple 3.2. — • l'ensemble $C = \{p^2, p \in \mathbb{N}\}$, désigne l'ensemble des carrés des entiers naturels.

Équivalence de certaines définitions. — Un ensemble donné peut admettre plusieurs descriptions différentes

Exemple 3.3. — • $G = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$ peut aussi écrire $G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- l'intervalle $[-3, 2[$ s'écrit $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$.
- Dans $\mathbb{N}$, on note l'intervalle $[|1, 4, |]$, l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et 4, qu'on peut noter $\{1, 2, 3, 4\}$.

Notation. — On remarque qu'on utilise la notation $\{...\}$ pour caractériser les éléments d'un ensemble.

2. Opérations sur les ensembles

2.1. Inclusion. —

Définition 3.4 – Inclusion entre ensembles, parties d'un ensemble

Soient A et E deux ensembles. On dit que A est *inclus dans* E, ou que A est *une partie ou un sous-ensemble de* E, et on note $A \subset E$, si tous les éléments de A appartiennent à E.

Remarque 3.5. — Soit E un ensemble.
- On a toujours $E \subset E$: l'ensemble E lui-même est toujours une partie de E.
- L'ensemble vide $\emptyset$ est toujours une partie de E, : "tous les éléments de $\emptyset$ appartiennent bien à E".
- Si x est un élément de E (ie $x \in E$), alors l'ensemble $\{x\}$ est une partie de E qui comporte un seul élément. On a $\{x\} \subset E$.

Exemple 3.6. — • L'ensemble $A = \{1, -8, \pi\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
- On écrit alors $A \subset \mathbb{R}$.
- On a $\{2\} \subset \mathbb{R}$ et $2 \in \mathbb{R}$.

Définition 3.7 – Ensemble des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble. On appelle *ensemble des parties de* E, et on note $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble ayant pour éléments toutes les parties de E.
Si A est un sous-ensemble de E, on a donc : $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$.

Exemple 3.8. — Si $E = \{1, 2, 3\}$, les parties de E sont :
- l'ensemble vide $\emptyset$,
- les singletons $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$,
- les paires $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ et $\{1, 3\}$,
- l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$ lui-même.

L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ comporte donc 8 éléments : on a $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Remarque 3.9. — Un élément d'un ensemble peut lui-même être un ensemble...

> Pour vérifier qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, on doit montrer que tout élément de A est aussi un élément de B.

Pour cela, on part d'un objet ou élément de A, puis on essaie de montrer que cet objet est nécessairement un élément de B.

Exemple 3.10. — Soient $A = \{1\}$, $B = \{-2, 1, 5, 10\}$ et $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 = 0\}$.

- On remarque que les éléments de S sont -2 et 1, solutions de l'équation. On peut donc poser $S = \{-2, 1\}$.
- On a $A \subset B$ car tous les éléments de A sont des éléments de B.
- De même $A \subset S$.
- B n'est pas inclus dans S (tous les éléments de B ne sont pas éléments de S) mais on a $S \subset B$.

Exemple 3.11. — Soit $A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ \exists k \in \mathbb{N} \ : \ n = k(k+1)\}$ et notons B l'ensemble des entiers pairs. Montrons l'inclusion $A \subset B$. On doit donc montrer que tout élément de A est un élément de B. Soit n un élément de A.

On peut alors écrire $n = k(k+1)$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Montrons que $n \in B$, c'est à dire que n est pair. On distingue deux cas :

- Si k est pair, alors on peut écrire $k = 2q$ avec $q \in \mathbb{N}$, et alors $n = 2q(2q+1)$, donc n est pair.
- Si k est impair, alors on peut écrire $k = 2q+1$ avec $q \in \mathbb{N}$, et alors $n = (2q+1)(2q+2) = 2(2q+1)(q+1)$, donc ici aussi n est pair.

Dans tous les cas on a $n \in B$. Ainsi $A \subset B$.

2.2. Egalité. —

> **Définition 3.12 – Egalité de deux ensembles,**
>
> Deux ensembles A et B sont égaux lorsqu'ils ont exactement les mêmes éléments.

> **Axiome 3.13 – Égalité d'ensembles $\Longleftrightarrow$ double inclusion**
>
> *Si A et B sont deux ensembles, alors on a l'équivalence*
>
> $$A = B \Longleftrightarrow (A \subset B \ \text{ et } \ B \subset A)$$

$\Rightarrow$ Si $A = B$ alors
$A \subset A = B$ et $B \subset B = A$
$A \subset B$ $\qquad$ $B \subset A$

Exemple 3.14. — Considérons les ensembles $A = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \sqrt{2x^2+1} = 2x+1\right\}$ et $B = \{0\}$.
Montrons que $A = B$ en vérifiant séparément les inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$.

- Pour vérifier l'inclusion $B \subset A$, il suffit de constater que pour $x = 0$, on a bien $\sqrt{2x^2+1} = 2x+1$ et donc $x = 0$ appartient bien à A.
- Vérifions à présent l'inclusion $A \subset B$. Soit x un élément de A. On a alors $\sqrt{2x^2+1} = 2x+1$. En élevant au carré, on constate que $2x^2+1 = 4x^2+4x+1$, autrement dit, $2x^2+4x = 0$, ou encore $2x(x+2) = 0$. On a alors $x = 0$ ou $x+2 = 0$, donc $x = 0$ ou $x = -2$.

  Mais pour $x = -2$, on constate que $\sqrt{2x^2+1} = 3$ alors que $2x+1 = -3$: il est donc impossible que -2 appartienne à A.

  On en déduit donc que $x = 0$, et donc $x \in B$.

$\Leftarrow$ Supposons $A \subset B$ et $B \subset A$
$\Downarrow$
$B = A$

⚠ Démonstrations (peut être CC ?)

2.3. Intersection. —

Définition 3.15 – Intersection de deux ensembles

Soient A et B deux ensembles.
L'intersection $A \cap B$ est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B :

$$x \in (A \cap B) \iff (x \in A \text{ et } x \in B).$$

Exemple 3.16. — Si $A = \{2, 5, 7\}$ et $B = \{1, 5, 7, 9\}$, on a $A \cap B = \{5, 7\}$.

Vocabulaire. — On dit que deux ensembles A et B sont *disjoints*, lorsqu'ils vérifient $A \cap B = \emptyset$, c'est à dire qu'ils n'ont aucun élément en commun.

Propriétés. —

Soient A et B deux ensembles. On a toujours :

- $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- $A \cap B = B \cap A$.
- $A \cap B \subset A$.
- $A \cap B \subset B$.

2.4. Union. —

Définition 3.17 – Union de deux ensembles

Soient A et B deux ensembles. La réunion $A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à au moins l'un des deux ensembles A, B :

$$x \in (A \cup B) \iff (x \in A \text{ ou } x \in B).$$

Exemple 3.18. — Si $A = \{2, 5, 7\}$ et $B = \{1, 5, 7, 9\}$, alors $A \cup B = \{1, 2, 5, 7, 9\}$.

Propriétés. —

Soient A et B deux ensembles. On a toujours :

- $A \cup \emptyset = A$.
- $A \cup B = B \cup A$.
- $A \subset A \cup B$.
- $B \subset A \cup B$.

2.5. Propriétés de la réunion et de l'intersection. —

Proposition 3.19 – Associativité de la réunion et de l'intersection

Soient A, B et C trois ensembles. On a les égalités

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{et} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Exemple 3.20. — Si $A=\{2,5,7\}$, $B=\{1,5,7,9\}$ et $C=\{2,7,9,10\}$, alors $A\cup B\cup C=\{1,2,5,7,9,10\}$ et $A\cap B\cap C=\{7\}$.

Proposition 3.21 – Distributivité entre réunion et intersection

Soient A, B et C trois ensembles. On a les égalités

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

Démonstration. — Démontrer les égalités ci-dessus. □

2.6. Complémentaire. —

Définition 3.22 – Différence ensembliste

Soient A et B deux ensembles. La différence ensembliste $A\backslash B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A, mais pas à B : si x est un élément, alors

$$x\in A\setminus B \iff x\in A \text{ et } x\notin B.$$

Exemple 3.23. — Si $A=\{2,5,7\}$ et $B=\{1,5,7,9\}$, alors $A\setminus B=\{2\}$ et $B\setminus A=\{1,9\}$.

Exemple 3.24. — L'ensemble $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres réels x qu'il est impossible d'écrire sous la forme $x=\dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers (et $q\neq 0$). C'est l'ensemble des nombres *irrationnels.*

Définition 3.25 – Complémentaire d'une partie

Soient E un ensemble et A une partie de E. On appelle *complémentaire de A dans E* l'ensemble $E\setminus A$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.
Le complémentaire de A dans E se note $C_E(A)$ ou A^c ou $\overline{A}$.

Exemple 3.26. — Si $E=\{1,2,3,4,5\}$ et $A=\{2,3\}$, alors $C_E(A)=\{1,4,5\}$.

Exemple 3.27. — Soit $E=\mathbb{R}$. Soit $A=[0,1]$. On a

$$C_E(A)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\notin[0,1]\}=]-\infty,0[\cup]1,+\infty[.$$

Proposition 3.28

Si E est un ensemble et si A est une partie de E, alors :

$$C_E(E) = \emptyset$$
$$C_E(\emptyset) = E$$
$$C_E\left[C_E(A)\right] = A$$

$$A \cup \overline{A} = E$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Remarque 3.29. — Soient A et B deux ensembles, on note aussi

$$A \setminus B = \{x \in A, x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

Proposition 3.30 – Passer au complémentaire échange réunion et intersection

Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E. On a les égalités

$$C_E\left(A \cap B\right) = C_E(A) \cup C_E(B)$$

$$C_E\left(A \cup B\right) = C_E(A) \cap C_E(B)$$

Remarque 3.31. — La première égalité ci-dessus s'écrit aussi :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Démonstration. — Prouvons la première égalité : soit x est un élément de E, alors

$$\begin{aligned} x \in C_E\left(A \cap B\right) &\iff x \notin A \cap B \quad \text{par définition} \\ &\iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \quad \text{d'après les lois de De Morgan} \\ &\iff x \in C_E(A) \text{ ou } x \in C_E(B) \\ &\iff x \in C_E(A) \cup C_E(B). \end{aligned}$$

Remarque : la double inclusion est démontrée par équivalence.
La seconde égalité peut se prouver de la même manière. □

2.7. Représentation : Diagramme de Venn. —
On peut représenter les opérations sur les ensembles à l'aide de diagramme de Venn :

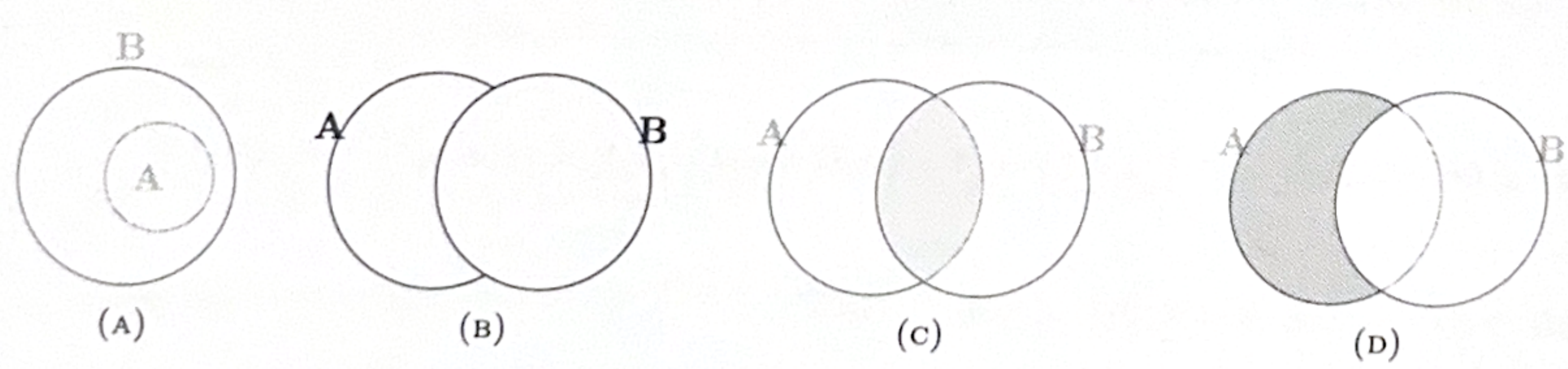

FIGURE 1. Opérations entre ensembles : Le graphe (A) exprime que A est inclus dans B soit $A \subset B$, le graphe (B) représente l'union de A et de B soit $A \cup B$, le graphe (C) représente l'intersection entre A et B soit $A \cap B$ et le dernier graphe (D) la différence de A avec B soit $A \setminus B$.

3. Produit cartésien

Définition 3.32 – Produit cartésien de deux ensembles

Soient A et B deux ensembles. Le *produit cartésien* $A \times B$ est l'ensemble des couples dont la première composante est un élément de A et la seconde un élément de B :

$$A \times B = \{(a,b), \quad a \in A, \quad b \in B\}.$$

- Dans un produit cartésien, les couples formés sont ordonnés.
- Le produit cartésien n'est pas commutatif : $A \times B$ est différent de $B \times A$.
- Le produit cartésien d'un ensemble avec un ensemble vide est vide : $A \times \emptyset = \emptyset$.

Notation. — Si E est un ensemble, on note souvent E^2 pour $E \times E$: par exemple, $(\pi, \sqrt{3})$ est un élément de $\mathbb{R}^2$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$ peut s'écrire $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 3.33. — Si $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{1,7\}$, alors

$$A \times B = \{(1,1),(1,7),(2,1),(2,7),(3,1),(3,7)\}$$
$$B \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(7,1),(7,2),(7,3)\}$$

On remarque que $A \times B \neq B \times A$

Exemple 3.34. — $\mathbb{N} \times [-3, 2[= \{(x,y)/ \ x \in \mathbb{N} \text{ et } -3 \leq y < 2\}$

Exemple 3.35. — Représenter graphiquement $[0,1] \times [2,5]$.

4. Famille indéxées

4.1. Produit cartésien de n ensembles. — Soit n un entier naturel non nul.

Définition 3.36 – Produit cartésien de n ensembles

Soient n ensembles A_1, A_2, ..., A_n. Le *produit cartésien* $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est l'ensemble des n-uplets où, pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, la i-ème composante est un élément de l'ensemble A_i :

$$A_1 \times A_2 \times \ldots A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Notation . — .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note E^n pour $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$ et un élément de E^n est donc un n-uplet d'éléments de E : par exemple, un élément de $\mathbb{Z}^6$ est un sextuplet $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ où $n_1, \ldots, n_6$ sont six entiers relatifs (pas forcément distincts).
- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $A_1 \times A_2 \cdots \times A_n$ s'écrit $\prod_{i=1}^{n} A_i$ ou $\prod_{1 \leq i \leq n} A_i$. (on note que la variable i est muette)

Remarque . — On peut définir ainsi le produit cartésien de toute famille (éventuellement infinie) d'ensembles.

Soit I un ensemble non vide quelconque. On suppose donné, pour chaque i de I, un ensemble A_i.

Le *produit cartésien* $\prod_{i \in I} A_i$ est l'ensemble dont les éléments sont les familles $(a_i)_{i \in I}$ où, pour chaque $i \in I$, l'élément a_i appartient à A_i.

Exemple 3.37. — Soit $I = \mathbb{N}$ et pour tout $i \in I$, $A_i = [-i, i]$.
Ainsi $A_0 = \{0\}$, $A_1 = [-1, 1]$.....
Un élément de l'ensemble $E = \prod_{i \in I} A_i$ est de la forme $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$, où, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $a_i \in [-i, i]$.

4.2. Union ou intersection indexée par un ensemble I. — Soit I un ensemble non vide quelconque. On suppose donné, pour chaque i de I, un ensemble A_i.

Définition 3.38 – Union indexée par un ensemble quelconque

La *réunion* $\bigcup_{i \in I} A_i$ est l'ensemble des objets x vérifiant : $\exists i \in I \ / \ x \in A_i$.

Ainsi dire $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ est équivalent à dire que x appartient à au moins un des ensembles A_i, donc $\exists i \in I \ / \ x \in A_i$.

Remarque 3.39. — Si on fixe $n \in \mathbb{N}^\star$ et si I est l'ensemble fini $\{1, \ldots, n\}$, $\bigcup_{i \in I} A_i$ désigne simplement $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, et se note aussi $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ou $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$.

Définition 3.40 – Intersection indexée par un ensemble quelconque

L'*intersection* $\bigcap_{i \in I} A_i$ est l'ensemble des objets x vérifiant : $\forall i \in I, \ x \in A_i$.

Ainsi dire $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ est équivalent à dire que x appartient à tous les A_i, donc $\forall i \in I, \ x \in A_i$.

Remarque 3.41. — Si on fixe $n \in \mathbb{N}^\star$ et si I est l'ensemble fini $\{1, \ldots, n\}$, $\bigcap_{i \in I} A_i$ désigne simplement $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, et se note aussi $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ou $\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i$.

Exemple 3.42. — Supposons $I = \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, notons $A_i = \{-i, i\}$.
On a : $A_0 = \{0\}$, $A_1 = \{-1, 1\}$ ... Ainsi $\bigcup_{i \in I} A_i = \mathbb{Z}$, tandis que $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$.

Lemme 3.43 – Propriétés de l'union et de l'intersection

Soit I un ensemble non vide quelconque.

- Distributivité de l'union et de l'intersection.
  Si A est un ensemble et si $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles indexée par I, alors

$$A\cup\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)=\bigcap_{i\in I}(A\cup B_i)\quad \text{et}\quad A\cap\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)=\bigcup_{i\in I}(A\cap B_i)$$

- Propriétés du passage au complémentaire.
  Si E est un ensemble et si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille indexée par I de parties de E, alors

$$C_E\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcap_{i\in I}C_E(A_i)\quad \text{et}\quad C_E\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}C_E(A_i)$$

4.3. Partition d'un ensemble. —

Définition 3.44 – Partition

La partition d'un ensemble E est la famille des parties non vides de E, disjointes deux à deux et dont l'union est l'ensemble E.

$\Longleftrightarrow$ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Une partition d'un ensemble E est un ensemble constitué des parties A_i de E vérifiant :

- $A_i\neq\emptyset$, $\forall i\in[\![1,n]\!]$.
- $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $i\neq j$, $A_i\cap A_j=\emptyset$.
- $E=\bigcup_{i\in I}A_i$.

Exemple 3.45. — Soit l'ensemble $E=\{1,2,3\}$.

- Les partitions sont : $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3\}\}$, $\{\{1\},\{2,3\}\}$ et $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.
- $\{\emptyset,\{1,3\},\{2\}\}$ ou $\{\{2\},\{3\}\}$ ne sont pas des partitions de E.

Exemple 3.46. — $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ n'est pas une partition de $\mathbb{R}$ car 0 est un élément commun.

Remarque . —

- Soit A une partie non vide d'un ensemble E, alors A et son complémentaire dans E forment une partition de E.
- Subdivision d'intervalles. Soit un intervalle $[a,b]$, et soient des réels $x_0,\cdots x_n$ tels que $x_0<x_1\cdots<x_n$ avec $x_0=a$ et $x_n=b$, alors les intervalles $[x_0,x_1[$, $[x_1,x_2[$, $\cdots[x_{n-1},x_n]$ forment une partition de $[a,b]$.

Exercices du chapitre 3

Appartenance, égalité, inclusion. —

Exercice 3.1. — Si a est un entier naturel, on note $a\mathbb{N}$ l'ensemble $\{ka,\ k \in \mathbb{N}\}$.

1. On fixe deux entiers naturels non nuls a et b. Montrer l'équivalence suivante :
$$a\mathbb{N} \subset b\mathbb{N} \iff a \in b\mathbb{N}.$$
2. On fixe deux entiers naturels non nuls a et b. Montrer l'équivalence suivante :
$$a\mathbb{N} = b\mathbb{N} \iff a = b.$$

Exercice 3.2. — Soit $E = \{a\}$ un singleton.
Décrire (en donnant la liste de leurs éléments) les ensembles $\mathcal{P}(E)$, et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Union, intersection, complémentaire. —

Exercice 3.3. — Soient $A = \{2,3,4,5\}$ et $B = \{4,5,6\}$. Déterminer
$$A \cap B,\ A \cup B,\ C_{\mathbb{N}}(A) \text{ et } C_{\mathbb{R}}(B).$$

Exercice 3.4. — Soient $A = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 - 3x + 1 > 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} :\ x > 0\}$. Déterminer
$$A^c,\ B^c,\ A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B \text{ et } B \setminus A$$

Exercice 3.5. — Soient A et B deux ensembles. Démontrer que les énoncés suivants sont équivalents :

(a) $A \subset B$

(b) $A \cup B = B$

(c) $A \cap B = A$

Exercice 3.6. — Soit E un ensemble ; soient A, B, C des parties de E. .

1. Donner un exemple où : $A \cup B = A \cup C$ et $B \neq C$.
2. Donner un exemple où : $A \cap B = A \cap C$ et $B \neq C$.
3. Démontrer que : $(A \cup B = A \cup C \text{ et } A \cap B = A \cap C) \implies B = C$.

Exercice 3.7. — Soit E un ensemble ; soient A, B, C des parties de E. On note A^c le complémentaire de A dans E.

1. Montrer l'égalité $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
2. Montrer l'égalité $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$.
3. Démontrer l'équivalence suivante :
$$A \subset B \iff C_E(B) \subset C_E(A)$$

Exercice 3.8. — Soient E, F et G trois ensembles. Montrer l'égalité suivante :

$$E \setminus (F \cap G) = (E \setminus F) \cup (E \setminus G)$$

Exercice 3.9. — Soient A, B, C, D quatre ensembles. Montrer que si les quatre propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $A \subset C$,

(ii) $B \subset D$,

(iii) $C \cap D = \emptyset$,

(iv) $A \cup B = C \cup D$,

alors $A = C$ et $B = D$

Produit cartésien. —

Exercice 3.10. —

- Dessiner les sous-ensembles

$$A = [-1,3] \times [-3,1], \quad B = \mathbb{Z} \times [-3,2], \quad C = A \cap ([2,3] \times [0,1]).$$

- Déterminer l'ensemble des triplets tels que le premier élément soit un entier relatif, le deuxième un nombre pair et le troisième un réel compris entre -5 et 5.

Exercice 3.11. — ★★☆ Soient A, B, C, D quatre ensembles.

Montrer l'égalité

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Familles indexées. —

Exercice 3.12. — Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note A_k l'intervalle $[0, k]$.

Déterminer, en justifiant vos réponses, les ensembles suivants :

- A_0 , A_1, $A_1 \setminus A_2$ et $A_2 \setminus A_1$
- $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$, $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$

Exercice 3.13. — Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note A_k l'intervalle $[k, k+10]$ et B_k l'intervalle $[-1, k]$.

Déterminer, en justifiant vos réponses, les ensembles suivants :

$$E_1 = \bigcap_{k=3}^{10} A_k \quad E_2 = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k, \quad E_3 = \bigcup_{k=3}^{10} A_k, \quad E_4 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k,$$
$$F_1 = \bigcap_{k=3}^{10} B_k, \quad F_2 = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k, \quad F_3 = \bigcup_{k=3}^{10} B_k, \quad F_4 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k.$$

On pourra utiliser librement l'« axiome » suivant : pour tout réel x, il existe un entier n vérifiant $n > x$.

Exercice 3.14. — Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_p = \left] \frac{p\alpha}{m}, \frac{(p+1)\alpha}{m} \right]$.

1. Pour tout entier p compris entre 0 et $m-1$, déterminer $I_p \cap I_{p+1}$.
2. Déterminer $\bigcup_{p=0}^{m-1} I_p$.