Exercice 1.11 - Système de deux équations linéaires

Une équation linéaire à 2 inconnues de la forme $ax + by = c$ correspond dans le plan à :

— D : une droite si $|a| + |b| > 0$

— $P = \mathbb{R}^2$: le plan si $a = b = c = 0$

— $\emptyset$: l'ensemble vide sinon ($a = b = 0$ et $c \neq 0$)

Le résultat d'un système de 2 equations linéaires à 2 inconnues est l'intersection de 2 des types d'éléments précédents et peut donc être :

— un point si on a deux droites non parallèles (donc sécantes) ;

— l'ensemble vide si une des équations n'a pas de solutions ou si les équations correspondent à deux droites parallèles non confondues ;

— le plan si les deux équations sont triviales et correspondent au plan ;

— une droite si l'on a deux droites confondues ou un plan et une droite.

Cela peut être résumé par le tableau suivant $S = S_1 \cap S_2$:

S_1 \ S_2	$\emptyset$	P	D_2
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
P	$\emptyset$	P	D_2
D_1	$\emptyset$	D_1	Un point si droites concourantes D_2 $(= D_1)$ si confondues $\emptyset$ sinon

Soit le systèmes d'équations :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Le cas des droites concourantes est caractérisé par $\Delta = ae - db \neq 0$: les vecteurs normaux aux droites, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$, sont non colinéaires. La solution est alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_x}{\Delta} \\ \frac{\Delta_x}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ce-fb}{ae-db} \\ \frac{af-dc}{ae-db} \end{pmatrix}$$

Deux droites (donc $|a| + |b| > 0$ et $|d| + |e| > 0$) sont confondues si les deux équations sont proportionnelles ce qui est équivalent à dire que $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$.

Si on considère (toujours avec $\Delta = 0$) uniquement les systèmes où les équations linéaires ont des solutions (i.e. pas celle de la forme $0 = a$ avec $a \neq 0$), le système n'a une solution que si $\Delta_x = \Delta_y = 0$:

S_1 \ S_2	$\emptyset$	P	D_2
$\emptyset$	$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$	$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$	$\Delta = 0\,;\ \lvert\Delta_x\rvert + \lvert\Delta_y\rvert > 0$
P	$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$	$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$	$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$
D_1	$\Delta = 0\,;\ \lvert\Delta_x\rvert + \lvert\Delta_y\rvert > 0$	$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$	

Algorithm 1 Système d'équations linéaires

Vars
- x_1 : **float**
- y_1 : **float**
- c_1 : **float**
- x_2 : **float**
- y_2 : **float**
- c_2 : **float**
- D : **float**
- DX : **float**
- DY : **float**

EndVars

Begin

print `"Première équation : aX+bY = c"` ▷ Saisie des variables
print `"a ?"`
get x_1
print `"b ?"`
get y_1
print `"c ?"`
get c_1
print `"Seconde équation : dX+eY = f"`
print `"d ?"`
get x_2
print `"e ?"`
get y_2
print `"f ?"`
get c_2

▷ Calcul des déterminants

$D \leftarrow x_1y_2 - x_2y_1$
$D_X \leftarrow c_1y_2 - c_2y_1$
$D_Y \leftarrow x_1c_2 - x_2c_1$

if $D \neq 0$ **then**
  print `"Solution unique"`
  print `"X = "` $+ (D_X/D)$
  print `"Y = "` $+ (D_Y/D)$
else if $(x_1 = 0 \wedge y_1 = 0 \wedge c_1 \neq 0) \vee (x_2 = 0 \wedge y_2 = 0 \wedge c_2 \neq 0) \vee (D_X \neq 0) \vee (D_Y \neq 0)$ **then**
  print `"Aucune solution"`
else if $(x_1 = 0) \wedge (y_1 = 0)$ **then**
  if $(x_2 = 0) \wedge (y_2 = 0)$ **then**
    print `"Solution = R x R"`
  else
    print `"Solution = droite d'équation "` $x_2X + y_2Y = c_2$
  end if
else
  print `"Solution = droite d'équation "` $x_1X + y_1Y = c_1$
end if

End