Analyse 1

Exercice 1.1

1.a

P = « $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ »

NON(P) = « $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$ »

P est fausse ; contre-exemple : $x = y = 0$.

1.b

Q = « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ »

NON(Q) = « $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$ »

Q est vraie $(y = 1 - x)$: $\forall x \in \mathbb{R}, x + (1 - x) > 0$

1.c

R = « $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ »

NON(R) = « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$ »

NON(R) est vraie car : $\forall x \in \mathbb{R}, x + (-x) \leq 0$

R est donc fausse

1.d

S = « $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$ »

NON(S) = « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leq x$ »

S est vraie car $(x = -1)$: $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 > -1$

2.a

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$

2.b

$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 1$

2.c

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$

ou

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y)$

2.d

$\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) \neq f(y)$

Exercice 1.2

2.1

Soient x et y deux réels tels que $x = y$, on a $\forall \varepsilon > 0, |x - y| = 0 < \varepsilon$

On a donc : $x = y \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, |x - y| < \varepsilon$

Pour démontrer la réciproque, nous allons démontrer sa contraposée ; soient donc deux réels x et y inégaux $(x \neq y)$.

On pose $\varepsilon = |x - y| > 0$

On a alors : $|x - y| = \varepsilon \geq \varepsilon$

Ce qui démontre que $x \neq y \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0, |x - y| \geq \varepsilon$

On a donc l'équivalence : $x = y \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, |x - y| < \varepsilon$

2.2
La première implication est évidente :
$$\begin{aligned} x \leq y &\Longleftrightarrow x - y \leq 0 \\ &\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, x - y < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, x < y + \varepsilon \end{aligned}$$

Soient x et y, deux réels tels que $x > y$.

On pose $\varepsilon = x - y$ qui est strictement positif.

On a alors $y + \varepsilon = x \leq x$, donc :

$x > y \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0, x \geq y + \varepsilon$

Cela démontre donc la contraposée de la réciproque, et donc l'équivalence.

2.3
Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x \leq y < x + \frac{1}{n}$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $x \neq y$ (et donc $x < y$).

Comme $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, on sait que :

$\exists n_o \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_o, \frac{1}{n} \leq (y - x)$ ce qui implique que :

$x + \frac{1}{n_o} \leq x + (y - x) = y$ ce qui infirme l'hypothèse et confirme donc que $x = y$.

Exercice 1.3

3.1
« La somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle. »

Cette affirmation est vraie.

On raisonne par l'absurde et on suppose que :

$\exists x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x + y \in \mathbb{Q}$

On aurait alors $y = (x + y) - x$, différence de deux nombres rationnels qui est rationnelle ce qui contredit l'hypothèse. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

3.2
« La somme de deux nombres irrationnels positifs est irrationnelle. »

Cette affirmation est fausse.

Soient $x = 1 + \sqrt{2}$ et $y = 2 - \sqrt{2}$ qui sont deux nombres irrationnels strictement positifs et $x + y = 3$

3.3

« La racine carrée d'un nombre irrationnel positif est irrationnelle. »

Cette affirmation est fausse car le carré du nombre irrationnel $\sqrt{2}$ est rationnel $\sqrt{2}^2 = 2$

Exercice 1.4

$(b) \Longrightarrow (a)$ est évident car $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

Démontrons $(a) \Longrightarrow (b)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$.

On peut donc écrire $\sqrt{n}$ sous la forme d'une fraction irréductible $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$; p et q sont donc premier entre eux ($\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2, \alpha p + \beta q = 1$).

On a alors $p^2 = nq^2$.

q divisant nq^2, il divise p^2 ; et donc $p = \alpha p^2 + \beta pq$. Le seul diviseur commun à p et q étant 1, on a $q = 1$ et donc $n = p^2$ carré parfait.

Exercice 1.5

5.1.a

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) + x > 0\}$

E est minoré par -1 mais n'est pas majoré car $\forall x > 1, \cos(x) + x > 0$ et donc $]1; +\infty[\subset E$.

E n'est donc pas borné.

5.1.b

$E = \{\cos(x) + x, x \in \mathbb{R}^+\}$

$\forall x \in \mathbb{R}^+, \cos(x) + x \geq -1 + 0$

E est donc minoré par -1. On peut cependant être plus précis ; la fonction $x + \cos(x)$ étant croissante sur $\mathbb{R}$, sa borne inférieure est la valeur à l'origine et donc :

$$\inf(E) = 1$$

5.1.c

$E = \{\cos(x) + x, x \in \mathbb{R}^+\}$

E n'est pas majoré car $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(x) + x = +\infty$

5.2.a

$E = \mathbb{Q} \cap [-7; 4[$

E est minoré par 7 qui lui appartient et est donc son plus petit élément.

5.2.b

$E = \mathbb{Q} \cap [-7; 4[$

E est majoré par 4 qui ne lui appartient pas. $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$ l'est aussi dans $[-7; 4[$ et ne possède donc pas de plus grand élément (on peut le démontrer par l'absurde).

5.2.c

$\mathbb{R}_-^*$ n'admet pas de plus grand élément.

On le démontre par l'absurde : supposons que M soit le plus grand élément.

On a $M < 0$ et donc $\frac{M}{2}$ qui appartient à $\mathbb{R}_-^*$ est strictement supérieur à M ce qui est en contradiction avec le fait que M est le plus grand élément de E

5.3.a
$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 + 9 > n\}$

La fonction $f(x) = x^2 - x + 9$ n'admet pas de racine réelle et est donc strictement positive.

Il en résulte et donc $E = \mathbb{N}$ qui a 0 comme plus petit élément.

5.3.b
$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 + 9 < n\} = \emptyset$ et n'adment donc pas de plus petit élément.

5.3.c
$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 + 9 > n\} = \mathbb{N}$ n'admet pas de plus grand élément.

Exercice 1.6

6.1
$\mathbb{R}_-^*$ est majoré par 0 et admet donc une borne supérieure négative ou nulle. On démontre aisément que tout nombre strictement négatif n'est pas un majorant et donc que $\sup(\mathbb{R}_-^*) = 0$

6.2
Comme $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, x - 1 < x$, $\mathbb{R}_-^*$ n'a pas de minorant et donc pas de borne inférieure.

6.3
Soit $E = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [2n; 2n+1[$

E n'est pas majoré et n'admet pas de borne supérieure.

E est minoré par 0 qui lui appartient et est donc sa borne inférieure : $\inf(E) = 0$

6.4
Soit $E = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} [2n; 2n+1[$

E n'est ni majoré ni minorée et n'admet donc ni borne supérieure ni borne inférieure.

Soit $F = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} [\frac{1}{2n+1}; \frac{1}{2n}[$

F est majoré par $\frac{1}{2}$ et minoré par 0 qui constituent ses bornes supérieure et inférieure.

Exercice 1.7

$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

$-A = \{-a, a \in A\}$

$-A$ est majoré/minoré/borné si et seulement si A est minoré/majoré/borné et si elles existent on a:

$$\sup(-A) = -\inf(A) \;\text{ et }\; \inf(A) = -\sup(A)$$

Exercice 1.7 bis

Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que :

$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} b > a > 0 \\ A \subset [a, b] \end{cases}$

Soit $B = \{\frac{1}{x}, x \in A\}$

Par construction $B \subset [\frac{1}{b}; \frac{1}{a}]$ et est donc borné.

A étant borné, il admet des bornes inférieure et supérieure.

$$\sup(B) = \frac{1}{\inf(A)} \quad \text{et} \quad \inf(B) = \frac{1}{\sup(A)}$$

Exercice 1.25

Soient U une partie dense de $\mathbb{R}$ et a b deux réels tels que $a < b$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On définit les intervalles $I_k =]a + k\frac{b-a}{n}; a + (k+1)\frac{b-a}{n}[, k \in \{0, ..., n-1\}$

Les intervalles I_k constituent $\boldsymbol{n}$ **ouverts disjoints inclus dans** $\boldsymbol{]a;b[}$.

$U \cap]a;b[\supset U \cap \left(\underset{0 \leq k < n}{\cup} I_k \right) = \underset{0 \leq k < n}{\cup} (U \cap I_k)$

Les intervalles étant disjoints, les ensembles $U \cap I_k$ le sont également et donc :

$$\operatorname{card}\left(\underset{0 \leq k < n}{\cup} (U \cap I_k) \right) = \sum_{0 \leq k < n} \operatorname{card}(U \cap I_k)$$

Par définition de la densité de U dans $\mathbb{R}$, $U \cap I_k \neq \emptyset$; il en résulte que le cardinal ci-dessus est supérieur ou égal à n.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \operatorname{card}(U \cap]a;b[) \geq n$

L'ensemble $U \cap]a;b[$ est donc infini.

Exercice 1.27

Soit U l'ensemble des nombres rationnels ayant, dans leur écriture sous forme de fraction irréductible, un dénominateur impair.

Soit un intervalle ouvert $I =]a;b[$ de $\mathbb{R}$.

Démontrons que $I \cap U \neq \emptyset$

$\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe deux nombres rationnels x et y (avec $x < y$) appartenant à I.

Que x ou y appartiennent ou non à U, on peut les écrire sous la forme : $x = \frac{\alpha}{2m}$ et $y = \frac{\beta}{2n}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ et $(m, n) \in {\mathbb{N}^*}^2$.

Et donc : $y - x = \frac{\beta m - \alpha n}{2mn} > \frac{1}{2mn+1}$

On en déduit que : $\exists \gamma \in \mathbb{Z}, \frac{\gamma}{2mn+1} \in [x; y]$.

$2mn + 1$ étant impair, tous ses diviseurs le sont également ; la forme réduite de $z = \frac{\gamma}{2mn+1}$ a donc un dénominateur impair ; donc $z \in U$ ce qui démontre la densité de U dans $\mathbb{R}$

Exercice 1.29

Soit $A = \{q \in \mathbb{Q}, q^2 < 2\}$

Si on considère A comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$, il est majoré par $\sqrt{2}$ et l'on démontre aisément que c'est sa borne supérieure car de par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0, \left(\sqrt{2} - \varepsilon\right)$ n'est pas un majorant.

Si on considère A comme un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$, A est majoré mais ne possède pas de borne supérieure car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 2.1

1.1

Soit $\alpha > 0$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\alpha \ln(n)} = 0$

1.2

Soit $a \in]-1;1[$

Si $a = 0$, la limite est évidente.

Supposons $a \neq 0$

$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} |a^n| &= \lim_{n\to+\infty} |a|^n \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{n \ln(|a|)} \\ &= 0 \quad \text{car} \quad \ln(|a|) < 0 \end{aligned}$

Et donc : $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$

1.3

On a (« le suivant moins le premier sur la raison moins un ») :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-a}$$

Exercice 2.2

2.1.a

$\exists l \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, |u_k - l| < \varepsilon$

Exercice 2.6

$$\begin{aligned} 0 \leq |u_n| &= \left| \frac{\sin(n^2) + \arctan(n)}{n^2 + 1} \right| \\ &\leq \frac{|\sin(n^2)| + |\arctan(n)|}{n^2+1} \\ &\leq \frac{1 + \frac{\pi}{2}}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

Ce qui démontre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 par le théorème des gendarmes.

exercice 3.1

1.a

Soit $\varepsilon > 0$,

On pose $\mu = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{7}\right)$

alors

$$\begin{aligned}\forall x \in [1-\mu; 1+\mu], |-x^3-(-1)| &= |\ 1-x^3| \\ &= |(1-x)(1+x+x^2) \\ &= |1-x| \cdot |1+x+x^2| \\ &\leq \mu \cdot 7 \quad \text{car} \quad x \in [0;2] \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

Donc :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0, \forall x \in [1-\mu; 1+\mu], |\ 1-x^3| \leq \varepsilon$

Ce qui est la définition de la limite de $-x^3$ en 1.

1.b

Soit $\varepsilon > 0$

On pose $\mu = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right)$

$$\begin{aligned}\forall x \in [1-\mu; 1+\mu], |\tfrac{x}{x-2} - (-1)| &= |\tfrac{2x-2}{x-2}| \\ &\leq \tfrac{2\mu}{|x-2|} \leq \tfrac{2\mu}{\frac{1}{2}} \quad \text{car} \quad x \in \left[-\tfrac{3}{2}; -\tfrac{1}{2}\right] \\ &\leq 4\mu \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$