Chapitre 1

Calcul algébrique

Application 1.2

1. Développement

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c)\\ &= a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2\\ &= a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= ((a+b)+c)^2\\ &= (a+b)^2+c^2+2(a+b)c\\ &= a^2+b^2+2ab+c^2+2ac+2bc)\\ &= a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)\end{aligned}$$

2. Calcul

$$\begin{aligned}10\,002\times 99\,998 &= (10^4+2)(10^4-2)\\ &= 10^8-4\\ &= 99\,999\,996\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}100\,001^2 &= (10^5+1)^2\\ &= 10^{10}+2\times 10^5+1\\ &= 10\,000\,200\,001\end{aligned}$$

3. Factorisation

$$\begin{aligned}(2x-5)^2-(2x-9)^2 &= (2x-5+2x-9)(2x-5-2x+9)\\ &= 4(4x-14)\\ &= 8(2x-7)\end{aligned}$$

Application 1.8

1.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1\times n!} = 1$$

2.

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1$$

3.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

Proposition 1.9 - Raisonnement de dénombrement

Soit E un ensemble de n éléments et e un de ces éléments.

Le nombre de combinaisons de k éléments contenant e est $N_e = \binom{n-1}{k-1}$: chaque combinaison est constituée de e et de $k-1$ éléments dans les $n-1$ restants.

Le nombre de combinaisons de k éléments ne contenant pas e est $N_{\bar{e}} = \binom{n-1}{k}$: il faut choisir k éléments dans les $n-1$ restants.

Donc :

$$\binom{n}{k} = N_e + N_{\bar{e}} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Application 1.10

Soit la proposition $P(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: « $\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \binom{n}{k} \in \mathbb{N}^*$ »

$P(1)$ est vraie

Supposons que $P(N)$ avec $N \in \mathbb{N}^*$ est vraie ; on a :

$$\begin{cases} \binom{N+1}{0} = 1 \implies \binom{N+1}{0} \in \mathbb{N}^* \\ \forall k \in \{1, ..., N\}, \binom{N+1}{k} = \binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} \in \mathbb{N}^* \text{ car somme de 2 entiers naturels non nuls} \\ \binom{N+1}{N+1} = 1 \implies \binom{N+1}{N+1} \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$P(N+1)$ est donc vraie

Proposition 1.16

Si la raison est différente de 1, la somme d'une suite géométrique est : « le suivant moins le premier sur la raison moins 1».

Application 1.22

1. Somme de 7 éléments consécutifs d'une suite arithmétique

$$2+3+4+5+6+7+8 = \frac{(8+2)\times 7}{2} = 35$$

2. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

$$\sum_{k=0}^{4} 3^k = \frac{3^5 - 1}{3-1} = \frac{243-1}{2} = 121$$

3. Sommes de coefficients binomiaux

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k.1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

Ou par récurrence :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} \\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] + \binom{n+1}{n+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} + 1 \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} + \binom{n}{n} \\
&= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \\
&= 2S_n
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k.1^{n-k} = (1-1)^n = 0$$

Application 1.27 - Inégalités

1. Changement de sens

D'après (b), on peut ajouter un réel $(-x-y)$ aux deux membres d'une inégalité :

$$\begin{array}{lcl}
 & x \leq y & \\
\Longrightarrow & x + (-x-y) \leq y + (-x-y) & \text{d'après (b)} \\
\Longrightarrow & -y \leq -x &
\end{array}$$

2. Addition d'inégalités

L'addition d'un réel à une inégalité (b) permet de dire :

$$\begin{aligned}
x \leq y &\implies x+z \leq y+z \\
z \leq t &\implies z+y \leq t+y
\end{aligned}$$

Donc d'après la transitivité (c) : $x+z \leq y+t$

3. Soustraction d'inégalités

Changement de sens : $z \leq t \implies -t \leq -z$ (cf. ci-dessus)
Addition d'inégalités ($x < y$ et $-t < -z$) : $x - t \leq y - z$

4. Produit d'un réel négatif avec une inégalités

$$\begin{array}{lcl}
 & z < 0 & \\
\Longrightarrow & -z > 0 & \text{Changement de sens} \\
\Longrightarrow & x(-z) \leq y(-z) & \text{Produit par un réel positif} \\
\Longrightarrow & xz \geq yz & \text{Changement de sens}
\end{array}$$

5. Produit d'inégalités à termes positifs

$$\begin{array}{rcl} & x \leq y \wedge z \leq t & \\ \Longrightarrow & xz \leq yz \wedge zy \leq ty & \text{d'après (d) car } z \text{ et } y \text{ sont positifs} \\ \Longrightarrow & xz \leq yt & \text{d'après (c), transitivité} \end{array}$$

Application 1.30

1.

$$(a+b)^2 - 4ab = a^2 + b^2 + 2ab - 4ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$$

Donc :

$$4ab \leq (a+b)^2$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}a^2 + 2b^2 - ab &= \frac{1}{8}(a^2 + 16b^2 - 8ab) \\ &= \frac{1}{8}(a-4b)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$ab \leq \frac{1}{8}a^2 + 2b^2$$

Application 1.31

Soit $f(x) = 9x + 3$; f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in [1;2], f(1) \leq f(x) \leq f(2) \\ \Longleftrightarrow &\forall x \in [1;2], 12 \leq 9x + 3 \leq 21 \end{aligned}$$

Soit $g(x) = x^2 + 2$ qui est croissante et positive sur $[1;2]$, donc :

$$\begin{aligned} &\forall x \in [1;2], g(1) \leq g(x) \leq g(2) \\ \Longrightarrow &\forall x \in [1;2], \frac{1}{g(2)} \leq \frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{g(1)} \\ \Longrightarrow &\ \forall x \in [1;2], \frac{1}{6} \leq \frac{1}{x^2+5} \leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

En faisant le produit des 2 inégalités à termes positifs précédentes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\forall x \in [1;2], \frac{12}{6} \leq \frac{9x+3}{x^2+5} \leq \frac{21}{3} \\ \Longrightarrow &\ \forall x \in [1;2], 2 \leq \frac{9x+3}{x^2+5} \leq 7 \end{aligned}$$

CQFD

Exercices

Exercice 1.1

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

Exercice 1.2

1

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{5 \times 6 \times 7}{6} = 35$$

2

D'après la relation de Pascal appliquées 3 fois, à $\binom{6}{4}$ puis $\binom{5}{4}$ et $\binom{5}{3}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\binom{6}{4} &= \binom{5}{4} + \binom{5}{3} \\ &= \binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{4}{3} + \binom{4}{2} \\ &= \binom{4}{2} + 2\binom{4}{3} + \binom{4}{4}\end{aligned}$$

On peut également calculer :

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

$$\begin{aligned}\binom{4}{2} + 2\binom{4}{3} + \binom{4}{4} &= \frac{4!}{2!2!} + 2\frac{4!}{3!1!} + 1 \\ &= 6 + 2 \times 4 + 1 \\ &= 15\end{aligned}$$

Exercice 1.3

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1, \dots, n\}, n\binom{n-1}{k-1} &= n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!n}{\frac{k!}{k}(n-k)!} \\ &= k\frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= k\binom{n}{k}\end{aligned}$$

Exercice 1.4

$$\begin{aligned}
& & \binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3} &= 5n \\
&\iff & n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6} &= 5n \\
&\iff & 1+\frac{n-1}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{6} &= 5 \\
&\iff & 6+3(n-1)+(n-1)(n-2) &= 30 \\
&\iff & n^2 &= 25 \\
&\iff & n &= 5 \text{ dans } \mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

Exercice 1.5

$$2+4+\cdots+22+24=\sum_{i=1}^{12} 2i = 2\sum_{i=1}^{12} i = 2\frac{12\times 13}{2} = 156$$

Exercice 1.6

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1)-\ln(k)\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \\
&= \ln(n+1)-\ln(1) \\
&= \ln(n+1)
\end{aligned}$$

Exercice 1.7

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} \text{ avec } j=n+1-k \\
&= 0
\end{aligned}$$

Exercice 1.8

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{(k+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \\
&= \frac{1}{0!} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{k!} \right) - \frac{1}{(n+1)!} \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

1.9 Somme des carrés

Soit la proposition :

$$P(n)_{n\in\mathbb{N}} : \text{« } \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ »}$$

$P(0)$ est vraie.
Supposons $P(N)$ vraie.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{N} k^2 + (N+1)^2 \\
&= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 \\
&= \frac{(N+1)\left[N(2N+1) + 6(N+1)\right]}{6} \\
&= \frac{(N+1)(2N^2+7N+6)}{6} \\
&= \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6} \\
&= \frac{(N+1)((N+1)+1)(2(N+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

$P(N+1)$ est donc vraie.

Exercice 1.10

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= 0\times\binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \text{ d'après l'exercice 1.3} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} \\
&= n2^{n-1}
\end{aligned}$$

Exercice 1.11

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi - x) = \sin x$, donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{2n-1} \exp\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) &= \sum_{k=n+1}^{2n-1} \exp\left(\sin\left(\pi - \frac{k\pi}{2n}\right)\right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n-1} \exp\left(\sin\left(\frac{(2n-k)\pi}{2n}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \exp\left(\sin\left(\frac{i\pi}{2n}\right)\right) \text{ avec } i = 2n-k
\end{aligned}$$

Exercice 1.12

On raisonne par récurrence et on utilisera le résultat de l'exercice 1.3. On applique tout d'abord la relation de Pascal en prenant soin d'isoler le terme de rang n :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right] + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\
&= S_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

Par récurrence, on a :

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n-1}{k-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{n} \binom{n}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ d'après exercice 1.3} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k} \binom{n}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \left[\sum_{k=0}^{n} 1^{n-k} (-1)^{k} \binom{n}{k} - 1 - (-1)^n \right] + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} (1-1)^n + \frac{1}{n} \left[1 + (-1)^n + (-1)^{n+1} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}
\end{aligned}
$$

Exercice 1.13

a

$$
\begin{aligned}
\sum_{0 \leq i,j \leq n} ij &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} ij \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(i \sum_{j=0}^{n} j \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} j \times \sum_{i=0}^{n} i \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} i \right)^2 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}
$$

b

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leq i,j\leq n} a^{i+j} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a^i a^j \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(a^i \sum_{j=0}^{n} a^j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} a^j \times \sum_{i=0}^{n} a^j i \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} a^i\right)^2 \\
&= \begin{cases} \left(\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\right)^2 & \text{si } a \neq 1 \\ (n+1)^2 & \text{si } a = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leq i,j\leq n} (i+j) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(i(n+1) + \sum_{j=0}^{n} j\right) \\
&= (n+1)\sum_{i=0}^{n} i + (n+1)\sum_{j=0}^{n} j \\
&= 2(n+1)\sum_{i=0}^{n} \\
&= n(n+1)^2
\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leq i,j\leq n} (i+j)^2 &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i^2 + 2ij + j^2) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left((n+1)i^2 + \sum_{j=0}^{n} j^2\right) + 2\sum_{0\leq i,j\leq n} ij \\
&= (n+1)\sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)\sum_{j=0}^{n} j^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{2} \\
&= 2(n+1)\sum_{i=0}^{n} i^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{2} \\
&= 2(n+1)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{2} \\
&= \frac{n(n+1)^2(4n+2+3n)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)^2(7n+2)}{6}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leq i,j\leq n} \min(i,j) &= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} j + \sum_{j=i+1 \text{ si } i<n}^{n} i\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} j + (n-i)i\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + ni - i^2\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2n+1}{2}i - \frac{i^2}{2}\right)\\
&= \frac{2n+1}{2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Exercice 14

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(i^k) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} k\ln(i)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k \times \sum_{i=1}^{n} \ln(i)\\
&= \frac{n(n+1)}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)\\
&= \frac{n(n+1)}{2}\ln\left(n!\right)
\end{aligned}$$

Exercice 15

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k2^k &= \sum_{k=1}^{n}\left(2^k\sum_{l=1}^{k} 1\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k} 2^k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} 2^k
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k2^k &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} 2^k \\
&= \sum_{1\leq l\leq k\leq n} 2^k \\
&= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=l}^{n} 2^k \\
&= \sum_{l=1}^{n}\left(2^{n+1}-2^l\right) \text{ (somme d'une suite géométrique)} \\
&= n2^{n+1} - \sum_{l=1}^{n} 2^l \\
&= n2^{n+1} - (2^{n+1}-2) \text{ (somme d'une suite géométrique)} \\
&= (n-1)2^{n+1}+2
\end{aligned}$$

Exercice 16

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leq i\leq j\leq n} j &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} j \\
&= \sum_{j=0}^{n} j(j+1) \\
&= \sum_{j=0}^{n}(j+j^2) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leq i,j\leq n} i &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} i \\
&= \sum_{j=0}^{n}\frac{j(j+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{0\leq i\leq j\leq n} j \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}
\end{aligned}$$

Exercice 17

On utilisera le fait que :

$$\sum_{1\leq j\leq i\leq n} f(i,j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} f(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} f(i,j)$$

On peut en effet parcourir les couples (i,j) avec $j < i$ par ligne ou par colonne

a

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq j\leq i\leq n}\binom{i}{j} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}-1\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(2^i-1)\\ &= 2^{n+1}-2-n \text{ somme d'une suite géométrique}\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq j\leq i\leq n}\frac{1}{i} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{i}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{i}\\ &= n\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2j}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right)\\ &= \frac{n(n+3)}{4}\end{aligned}$$

Exercice 18

1

$$x<y \Rightarrow x+y<y+y \Rightarrow \frac{x+y}{2}<y \Rightarrow m<y$$

2

Inégalité de Young avec $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$:

$$\sqrt{x}\sqrt{y}<\frac{\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2}{2} \Rightarrow g<m$$

3

$$h=\frac{2xy}{x+y}=\frac{g^2}{m}<\frac{gm}{m}\Rightarrow h<g$$

4

$$h=\frac{2xy}{x+y}>\frac{2xy}{y+y}\Rightarrow h>x$$

Exercice 19

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=1+nx+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

Comme :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^k\geq 0$$

On a :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,(1+x)^n\geq 1+nx$$

Exercice 20

1

$(2x+3)$ et (x^2+6) sont croissantes sur $[1,2]$, donc :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}\forall x\in[1,2],5\leq 2x+3\leq 7\\ \forall x\in[1,2],7\leq x^2+6\leq 10\end{cases}\\
\Rightarrow&\begin{cases}\forall x\in[1,2],5\leq 2x+3\leq 7\\ \forall x\in[1,2],\frac{1}{10}\leq\frac{1}{x^2+6}\leq\frac{1}{7}\end{cases}\\
\Rightarrow&\forall x\in[1,2],\frac{5}{10}\leq\frac{2x+3}{x^2+6}\leq\frac{7}{7}\text{ (multiplication d'inégalités positives)}\\
\Rightarrow&\forall x\in[1,2],\frac{1}{2}\leq\frac{2x+3}{x^2+6}\leq 1
\end{aligned}$$

2

Les numérateur et dénominateur étant croissants sur $[1,2]$, on a :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}\forall x\in[1,2],2\leq 2x\leq 4\\ \forall x\in[1,2],-4\leq x^2-5\leq -1\end{cases}\\
\Rightarrow&\begin{cases}\forall x\in[1,2],2\leq 2x\leq 4\\ \forall x\in[1,2],\frac{1}{4}\leq\frac{-1}{x^2-5}\leq 1\text{ (on veut une inégalité positive)}\end{cases}\\
\Rightarrow&\forall x\in[1,2],\frac{2}{4}\leq\frac{-2x}{x^2-5}\leq\frac{4}{1}\\
\Rightarrow&\forall x\in[1,2],-4\leq\frac{2x}{x^2-5}\leq\frac{-1}{2}
\end{aligned}$$