

Comunicaciones Digitales

INFORME TALLER 1

SISTEMAS DIGITALES

GRUPO: 1

| Nombre | CI | email |
|----------------|----------|---------------------------------------|
| Héctor Garrido | 51070701 | hectoreduardogarridoalvarez@gmail.com |
| Santiago Avila | 49017096 | s.avila07@outlook.com |

1. Parte I

1.1. Modulaciones y Constelaciones

En la imagen 1 se muestran los diagramas de las constelaciones para cada una de las modulaciones, a su vez también se detallan las regiones de decisión correspondientes.

Para determinar las regiones de decisión se consideró el hecho de que los símbolos eran equiprobables, por lo tanto, sólo es necesario observar el punto medio de la recta que une a dos símbolos y trazar el punto medio. Cabe notar que a la hora de realizar las regiones de toma la hipótesis de que como máximo va a existir error en un bit, por lo que se desprecian los efectos de símbolos que varían más de un bit respecto al que se quiere enviar.

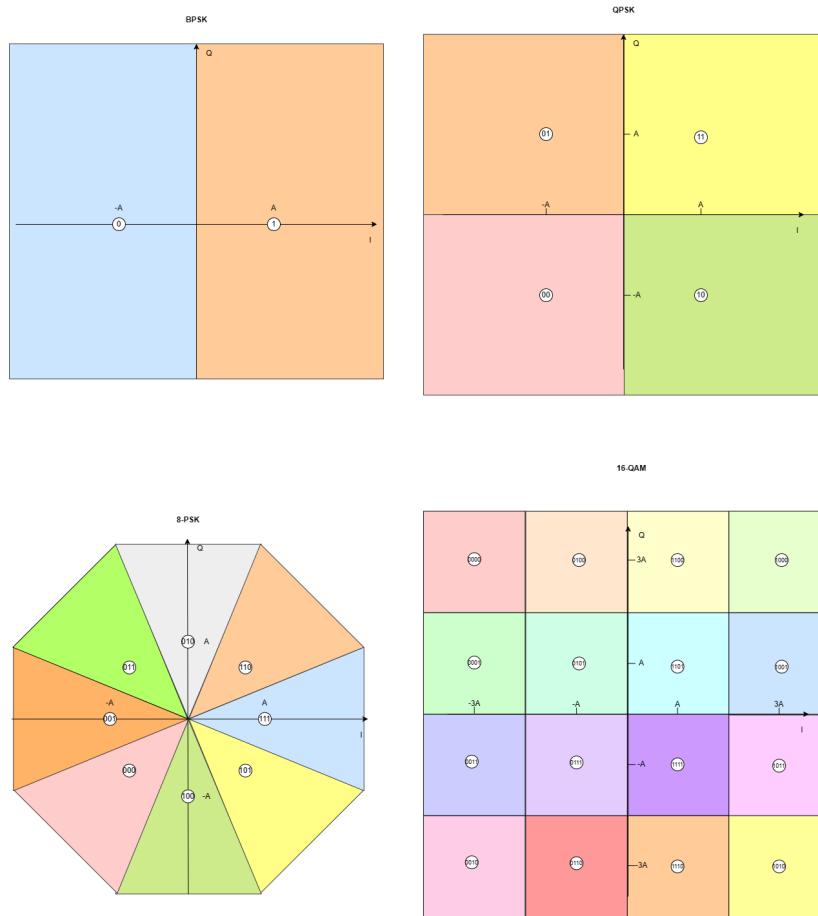


Figura 1: Constelaciones para cada modulación y sus regiones de decisión detalladas.

1.2. Máxima tasa de transferencia

Para la obtención de la máxima tasa de transferencia se analizó primero el ancho de banda total del sistema (BW) y el ancho de banda que consume la señal portadora (B), en este caso por tratarse de un pulso de Nyquist se cumple que el ancho de banda tiene la forma $B = r_s + 2\beta$, siendo r_s la tasa de transmisión de símbolos y β el ancho de banda extra necesario para la simetría vestigial. Entonces utilizando el hecho de que el ancho de banda de la portadora tiene que ser menor al ancho de banda total, se llega a que $r_s + 2\beta < BW = 3400Hz \rightarrow r_{smax} = BW - 2\beta$.

Analizando la relación existente entre la tasa de transferencia de símbolo y de bit para cada modulación se puede obtener la tabla 1.

| Modulación | Relación entre r_s y r_b | r_{bmax} |
|------------|------------------------------|------------------|
| BPSK | $r_s = r_b$ | $BW - 2\beta$ |
| QPSK | $r_s = \frac{r_b}{2}$ | $2(BW - 2\beta)$ |
| 8-PSK | $r_s = \frac{r_b}{3}$ | $3(BW - 2\beta)$ |
| 16-QAM | $r_s = \frac{r_b}{4}$ | $4(BW - 2\beta)$ |

Tabla 1: Tasa máxima de transmisión de bits por modulación

1.3. Diagrama transmisor-receptor, energía de símbolo y de bit

En las figuras 2 y 3 se puede ver el sistema que se utilizará para enviar y recibir las señales que se consideraran en este parte del documento. A continuación se presentará la energía de señal y bit del sistema, cabe destacar que para el análisis se considero la hipótesis de que el canal estaba libre de perdidas.

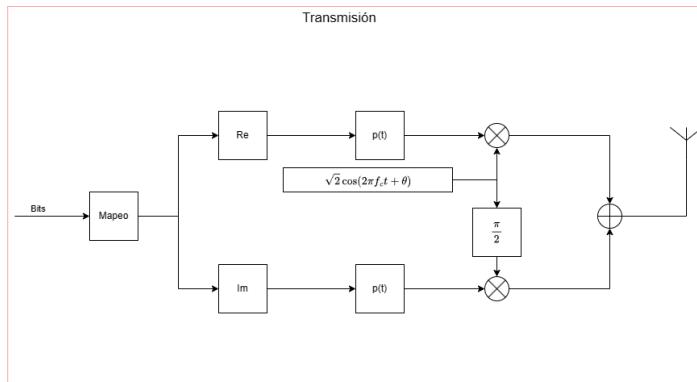


Figura 2: Diagrama de transmisión de señales

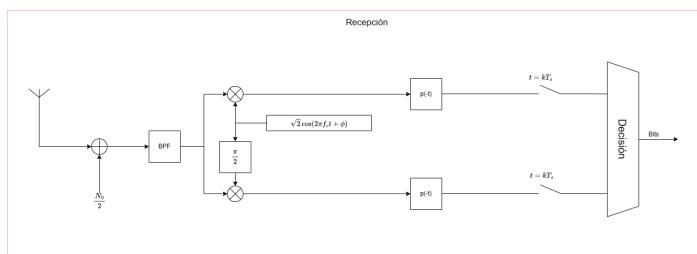


Figura 3: Diagrama de receptor de señales

A grandes rasgos, para el análisis de la energía de símbolo se consideró el hecho de que cuando se está en una base ortonormal la energía de símbolo es el promedio de la distancia de las señales al origen al cuadrado, debido a que se está separando las señales en sus componentes en fase y cuadratura, se está en condiciones de utilizar este resultado dado que la base formada por la parte real e imaginaria de la señal es ortonormal.

En la tabla 2 se puede ver un resumen de los valores de las energías, a continuación se procederá a realizar los cálculos en detalle para cada una.

| Modulación | E_s | E_b |
|------------|---------|------------------|
| BPSK | A^2 | A^2 |
| QPSK | $2A^2$ | A^2 |
| 8-PSK | A^2 | $\frac{A^2}{3}$ |
| 16-QAM | $10A^2$ | $\frac{5A^2}{2}$ |

Tabla 2: Resumen de energías por modulación

1.3.1. BPSK

Para obtener la energía es necesario ver el posicionamiento de los símbolos de la figura 1, en este caso se tienen dos símbolos cuya distancia al origen es la misma y tiene de valor A , por lo tanto el resultado se obtiene de la siguiente ecuación $E_s = \frac{E_0+E_1}{2} = \frac{A^2+A^2}{2} = A^2$ y dado que se tiene 1 bit por símbolo, se cumple que $E_s = E_b = A^2$.

1.3.2. QPSK

Para obtener la energía en este caso se sigue el mismo análisis que en la parte anterior pero con la distribución de la figura 1, obteniendo entonces que $E_s = \frac{E_{00}+E_{01}+E_{10}+E_{11}}{4} = \frac{2A^2+2A^2+2A^2+2A^2}{4} = 2A^2$ y en este caso se tienen 2 bits por símbolo por lo que $E_b = \frac{E_s}{2} = A^2$.

1.3.3. 8-PSK

Siguiendo el mismo procedimiento de análisis, se nota que en la distribución de la figura 1 todos los puntos pertenecen a una misma circunferencia de radio A centrada en el origen, por lo que basta con ver la energía de uno de los símbolos a la hora de hacer el promedio, $E_s = \frac{8E_{00}}{8} = A^2$ entonces $E_b = \frac{E_s}{3} = \frac{A^2}{3}$.

1.3.4. 16-QAM

En este caso, viendo la distribución de la figura 1 se puede notar cuatro distancias que se repiten en los cuatro cuadrantes, esto genera que la expresión de la energía de símbolo tenga la siguiente expresión $E_s = \frac{4E_{1101}+4E_{1100}+4E_{1000}+4E_{1001}}{16} = \frac{4(2A^2)+4(10A^2)+4(18A^2)+4(10A^2)}{16} = 10A^2$ entonces $E_b = \frac{E_s}{4} = \frac{5A^2}{2}$.

1.4. Probabilidades de error de bit P_{eb}

A la hora de obtener la probabilidad de error de bit se utilizarán fuertemente las hipótesis del canal con ruido blanco Gaussiano y que los bits son equiprobables, a su vez al igual que en la sección anterior, se considera que el canal no presenta atenuación.

En la tabla 3 se presenta en resumen de los valores obtenidos, las ecuaciones en detalle se desarrollaran a continuación.

| Modulación | P_e en función de P_R , r_b y N_0 | P_e en función de E_b y N_0 |
|------------|---|---|
| BPSK | $Q(\sqrt{\frac{2P_R}{r_bN_0}})$ | $Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$ |
| QPSK | $Q(\sqrt{\frac{2P_R}{r_bN_0}})$ | $Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$ |
| 8-PSK | $\frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{6P_R \tan^2(\frac{\pi}{8})}{r_bN_0}}\right)$ | $\frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \tan^2(\frac{\pi}{8})}{3N_0}}\right)$ |
| 16-QAM | $\frac{3}{4}Q(\sqrt{\frac{P_R}{5r_bN_0}})$ | $\frac{3}{4}Q(\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}})$ |

Tabla 3: Resumen de probabilidades de error de bit por modulación.

1.4.1. BPSK

A la hora de calcular la probabilidad de error se sigue la siguiente ecuación $P_e = P_1 P(error|a_k = 1) + P_0 (error|a_k = 0)$. Para esta modulación se cumple que $P_1 = P_0 = \frac{1}{2}$ debido a que se tienen dos bits equiprobables. Luego para el calculo de las probabilidades de error se considera la interferencia del ruido en el sistema como se puede ver en la figura 4, en este caso el error viene dado por las siguientes ecuaciones:

$$P(error|a_k = 1) = \int_{-\infty}^0 p(t|1)dt = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

$$P(error|a_k = 0) = \int_0^{+\infty} p(t|0)dt = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

En donde $p(t|1)$ y $p(t|0)$ son las formas de las campanas Gaussianas para cada símbolo y $Q(\frac{A}{\sigma})$ hace referencia a la formula de la cola Gaussiana, la cual en este caso representa el extremo de la campana que atraviesa el umbral de decisión.

Por lo tanto, la probabilidad de error de bit se expresa con la siguiente expresión

$$P_e = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) \quad (1)$$

Sabiendo que el ruido es blanco y que el pulso conformador está normalizado, se puede llegar a que $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$, a su vez se cumple que $P_R = r_s E_s$ por lo aplicando los resultados vistos en secciones anteriores se obtiene que $P_R = r_b A^2$ y entonces la expresión (1) se reescribe como

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2P_R}{r_bN_0}}\right)$$

También se puede expresar la ecuación (1) en función de la energía de bit, sabiendo que $E_b = A^2$ se llega a que

$$P_{eb} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

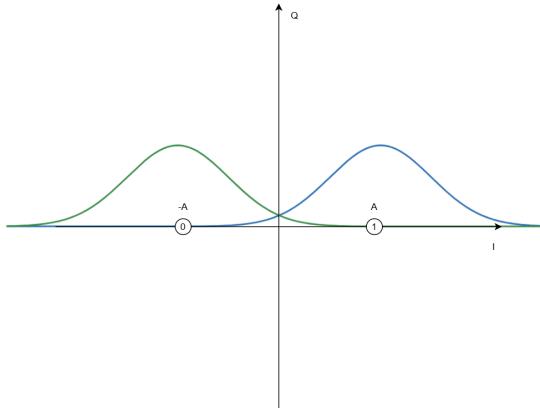


Figura 4: Constelación de modulación BPSK con su correspondiente distribución Gaussiana.

1.4.2. QPSK

La probabilidad de error de cada símbolo es igual para cada uno, viene de sumar ruido Gaussiano en fase y cuadratura a la señal enviada, como se ve en la figura 5. Viendo el símbolo s_{11} :

$$P_{e_S\{11\}} = [P_{11}P(\text{error}|s = 11)] \quad (2)$$

Esto, considerando que el ruido Gaussiano en fase es independiente al ruido en cuadratura, puede desarrollarse de la forma:

$$\begin{aligned} P(\text{error}|s = 11) &= P(y_{Di} + n_i < 0 | a_{ki} = A) + P(y_{Dq} + n_q < 0 | a_{kq} = A) \\ &\quad + P(y_{Di} + n_i < 0 \& y_{Dq} + n_q < 0 | a_{kq} = A) \end{aligned} \quad (3)$$

Estas se tratan de colas Gaussianas centradas en A tanto como en fase como en cuadratura. Ademas, la probabilidad de que $P(y_{Di} + n_i < 0 \& y_{Dq} + n_q < 0 | a_{kq} = A)$ es $Q^2\left(\frac{A}{\sigma}\right)$.

$$P(\text{error}|s = 11) = 2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) + Q^2\left(\frac{A}{\sigma}\right) \quad (4)$$

Esto pasa para cada símbolo, y en colas Gaussianas, por lo que $Q^2\left(\frac{A}{\sigma}\right) \gg Q(A/\sigma)$, por lo tanto, teniendo en cuenta (2) y tomando lo mencionado en la sección anterior, $P_R = r_s E_s = r_b A^2$, $E_s = A^2$:

$$\begin{aligned} P(\text{error}) &= 4[1/4(P(y_{Di} + n_i < 0 | a_{ki} = A) + P(y_{Dq} + n_q < 0 | a_{kq} = A))] \\ P(\text{error}) &= 4\left[1/4\left(2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) + Q^2\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right)\right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$P(\text{error}) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2P_R}{r_b N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad (6)$$

Esto da la probabilidad de error de bit,

$$P_{eb} = Q\left(\sqrt{\frac{2P_R}{r_b N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad (7)$$

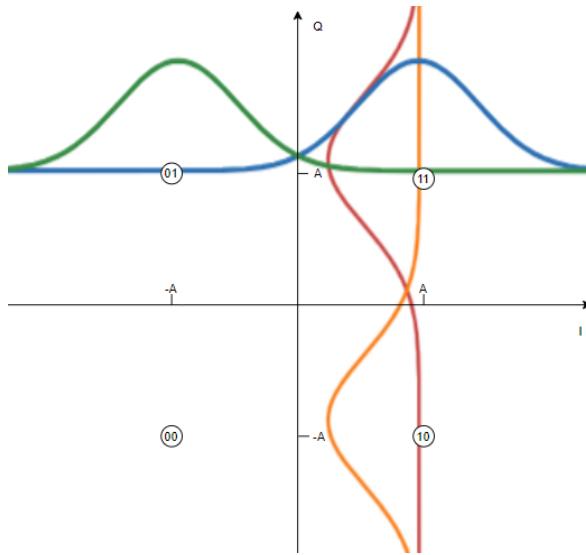


Figura 5: Constelación de modulación QPSK con su correspondiente distribución Gaussiana para el símbolo 11.

1.4.3. 8-PSK

En esta modulación la señal en detección tendrá amplitud A y se distingue según su fase, mediante el razonamiento descrito en la sección 4.1, se llega a los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{2}{3}Q\left(\frac{A \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sigma}\right) = \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{2E_s \tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{N_0}}\right) \\ P_{eb} &= \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{3N_0}}\right) = \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{6P_R \tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{r_b N_0}}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

1.4.4. 16-QAM

El análisis de la probabilidad de error en esta sección se realizará de forma similar a las modulaciones anteriores, en este caso particular es necesario tener en cuenta que debido a como están distribuidos los símbolos se detectan tres posiciones con probabilidades de error distintas, estas son ilustradas en la imagen 6. Por lo tanto la probabilidad de error de bit va a estar determinada por la ecuación:

$$P_e = \frac{1}{16 \times 4}(4P_{error|1101} + 4P_{error|1000} + 8P_{error|1100}) \quad (9)$$

Por lo que entonces queda obtener cada una de las tres probabilidades de error señaladas, en los tres casos el razonamiento involucrado es similar al realizado para QPSK, en donde se debe incluir la probabilidad no sólo de cruzar el umbral de decisión horizontalmente sino también el no cruzarlo verticalmente.

En el caso de $P_{error|1101}$ la expresión (10) obtenida se realiza en base al caso 1 de la imagen 6 y considera el hecho de que los términos cuadráticos son despreciables debido a la hipótesis de que como máximo falla 1 bit por señal transmitida.

$$P_{error|1101} = 4Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\left(1 - 2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right) + 4Q^2\left(\frac{A}{\sigma}\right) \approx 4Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) \quad (10)$$

Para el resto de probabilidades se considera un análisis similar, en el caso de $P_{error|1000}$ se analiza el caso 2 de la imagen 6 obteniéndose (11), luego para $P_{error|1100}$ se utiliza el caso 3 y se obtiene la ecuación (12).

$$P_{error|1000} = 2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\left(1 - Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right) + Q^2\left(\frac{A}{\sigma}\right) \approx 2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) \quad (11)$$

$$P_{error|1100} = 2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\left(1 - Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right) + Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\left(1 - 2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right) + 2Q^2\left(\frac{A}{\sigma}\right) \approx 3Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) \quad (12)$$

Juntando las ecuaciones (10), (11) y (12) con la ecuación (9) se obtiene la ecuación:

$$P_e = \frac{1}{16 \times 4} [4(4Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)) + 4(2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)) + 8(3Q\left(\frac{A}{\sigma}\right))] = \frac{3}{4}Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Luego utilizando que $P_R = r_s E_s = \frac{r_b 10 A^2}{4}$, $E_b = \frac{5 A^2}{2}$ y $\sigma = \frac{N_0}{2}$ se obtienen las expresiones finales de la probabilidad de error de bit, como se pueden ver en la ecuación siguiente

$$P_e = \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{5P_R}{r_b N_0}}\right) = \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}}\right)$$

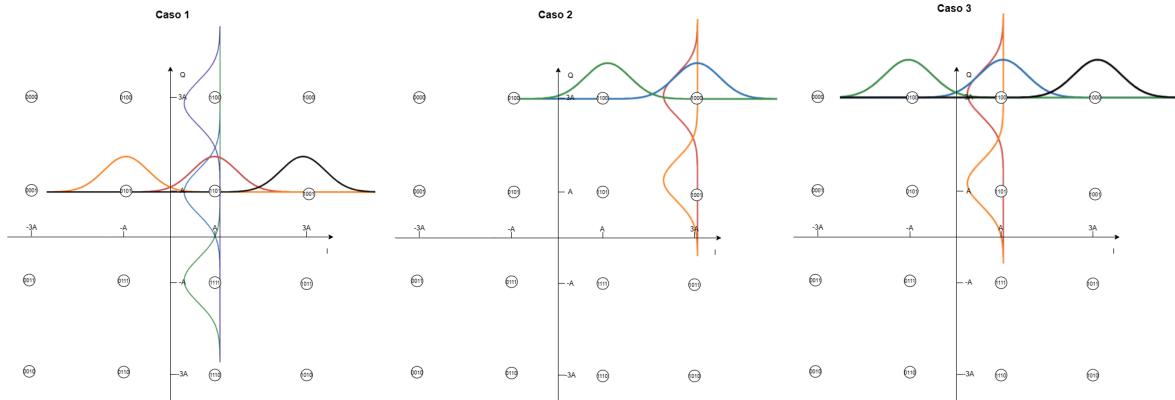


Figura 6: Constelación de modulación 16-QAM con su correspondiente distribución Gaussiana para cada caso de relevancia.

1.5. Gráfica de P_{eb}

En la imagen 7 se puede observar la probabilidad de error de bit graficada para cada modulación junto con sus puntos de operación. Para el cálculo del punto de operación se consideró la condición de que el SNR del sistema en detección es de aproximadamente 30 dB y se vio cuánto tiene que ser la relación $\frac{E_b}{N_0}$ en cada caso para que se alcance ese valor. Considerando la relación entre energía de bit y energía de símbolo vistas anteriormente y el hecho de que $SNR(dB) = 10 \log\left(\frac{2E_s}{N_0}\right)$ se llegan a las relaciones de la tabla 4.

A partir de la figura 7 se puede ver como la modulación 8-PSK es la más propensa a errores dado que se necesita una mayor cantidad de potencia por bit para asegurarse de que la probabilidad baje en comparación con el resto de modulaciones, en particular para el caso de BPSK y QPSK debido a su simplicidad son capaces de reducir en gran medida su tasa de errores a medida que se envíe mayor cantidad de símbolos. Entrando ya a casos particulares, si se propone llegar a una probabilidad de error máxima de

10^{-5} se obtienen los resultados de la tabla 4, en donde nuevamente es fácil observar como 8-PSK necesita de mayor energía de bit para obtener un mismo nivel de BER y a su vez es el que menor transferencia máxima es capaz de tener.

| Modulación | Punto de operación | $\frac{E_b}{N_0}$ tal que $P_e = 10^{-5}$ | r_{bmax} |
|------------|--------------------|---|----------------------------|
| BPSK | $\frac{10^3}{2}$ | 4.8 | $\frac{P_R}{4,8N_0}$ |
| QPSK | $\frac{10^3}{4}$ | 4.8 | $\frac{P_R}{4,8N_0}$ |
| 8-PSK | $\frac{10^3}{6}$ | 81.9 | $\frac{9P_R}{81,9N_0}$ |
| 16-QAM | $\frac{10^3}{8}$ | 11.8 | $\frac{P_R}{(4)(11,8)N_0}$ |

Tabla 4: Resumen de resultados.

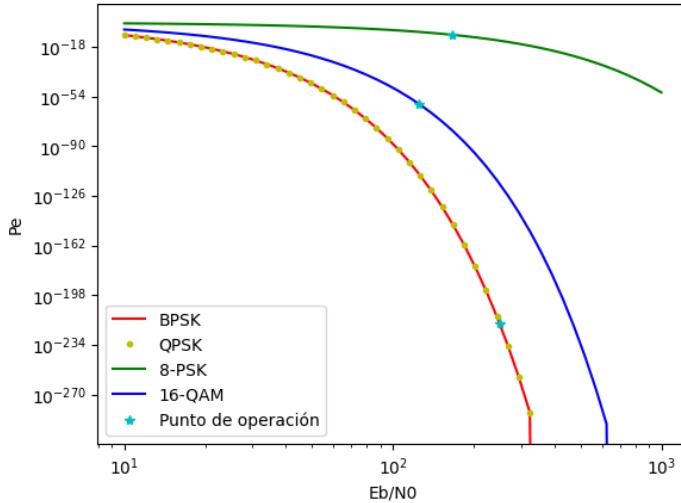


Figura 7: Probabilidades de error para cada modulación en función de $\frac{E_b}{N_0}$.

1.6. Modulación ASK binaria y máxima velocidad

Esta modulación se trata de Amplitud Shift Keying (ASK) binaria, esta mapea símbolos '1'-> A y '0'-> $-A$. Para corroborar si la velocidad indicada por el estándar es alcanzable para esta modulación lo primero es notar el hecho de que dicha velocidad va a ser distribuida por cada una de las portadoras, haciendo que la velocidad que se deba considerar sea $r_b = \frac{24MHz}{512} = 46,875kHz$, con esto en mente, se analiza la ecuación que se debería de cumplir para que cada pulso mantenga la simetría vestigial necesaria para evitar ISI $B = r_s + 2\beta$, en este caso dado que por la modulación elegida $r_b = r_s$ se llega a que

$$B = r_s + 2\beta = r_b + 2\beta \rightarrow \beta = \frac{B - r_s}{2} = -21,4kHz$$

Por la ecuación anterior se ve como se llega a un absurdo al considerar un valor de $\beta < 0$ lo cual no concuerda con el hecho de que se busca una simetría vestigial, esto muestra que con esta modulación no es posible transmitir la tasa de bits deseada.

1.7. 4-QAM, diseño de el pulso de transmisión y potencia de transmisión.

Esta modulación usa dos bits para hacer 4 símbolos y mapearlos '00'-> A , '01'-> jA , '11'-> $-A$ y '10'-> $-jA$, se diseña un pulso de Nyquist de forma que ocupe 4kHz :

$$W_b = \frac{3584 \text{ kbps}}{2 \times 512} = 3,5 \text{ kHz} \quad (13)$$

Aquí se tiene que el ratio de símbolo $r_s = W_b = 3,5 \text{ kHz}$, siendo W_b el ancho de banda en pasabanda del pulso de Nyquist. Luego, el ancho de banda total B_T incluye un *roll-off factor* ρ , tomando $B_T = 4 \text{ kHz}$ se tiene

$$\rho = \frac{B_T}{W_b} - 1 = 0,1428 \quad (14)$$

Con esto, el pulso utilizado será:

$$P(f) = \begin{cases} \sqrt{T}, & \text{si } 0 \leq f \leq \frac{1-\rho}{2T} \\ \sqrt{T} \cos\left(\frac{\pi|f|T}{2\rho}\right) & \text{si } \frac{1-\rho}{2T} \leq f \leq \frac{1+\rho}{2T} \\ 0, & \text{si } \frac{1+\rho}{2T} < f \end{cases} \quad (15)$$

Con $\rho = 0,1428$, $W_b = \frac{1}{2T} = 3,5 \text{ kHz}$.

Las constelaciones de 4-QAM y QPSK presentan una misma probabilidad de error debido a la similitud en su razonamiento, por lo que el error de bit será como en la ecuación siguiente.

$$P_{eb}^{QPSK} = P_{eb}^{4-QAM} = Q\left(\sqrt{\frac{2P_R}{r_bN_0}}\right) \quad (16)$$

Imponer que $P_{eb} < 10^{-5}$ hace necesario que,

$$\sqrt{\frac{2P_R}{r_bN_0}} > 4,6 \longleftrightarrow \frac{2P_R}{r_bN_0} > 4,6^2 \quad (17)$$

Se considera un canal de transmisión sin pérdidas, por lo que se llega a una condición para la potencia de transmisión P_T :

$$P_T = P_R > \frac{(4,6)^2 r_b N_0}{2} \quad (18)$$

1.8. Requerimientos para 24 Mbps

En esta modulación, se toman símbolos de M bits y se crea la constelación necesaria, teniendo $r_s = B_T = 4 \text{ kHz}$, se necesita que

$$r_s = \frac{r_b}{\log_2(M)} = 4 \text{ kbps} \quad (19)$$

Siendo $r_b = 24 \text{ Mbps}$,

$$\log_2(M) = \frac{24000 \text{ kbps}}{(4 \text{ kHz}) \times (512)} = 11,71 \quad (20)$$

Tomando $M = 2^{12}$, se cumple (19) obteniendo una modulación 4096-QAM con la constelación de la imagen 8.

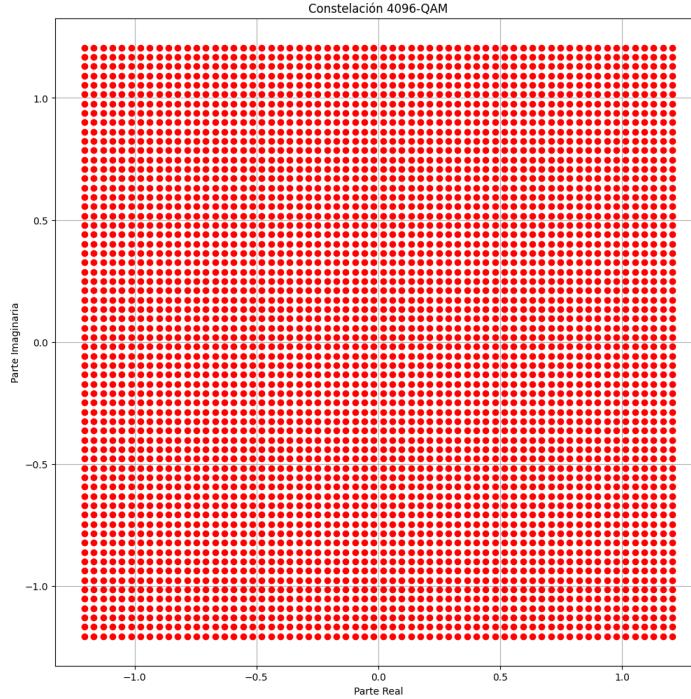


Figura 8: Constelación 4096-QAM.

2. Parte II

2.1. Espectro del Pulso Rectangular

Como se ve en la figura 9, el espectro del pulso rectangular tiene forma de $\text{sinc}^2(f)$, tomando a_k la serie de bits a enviar, la señal se ver en tiempo como

$$x(t) = \sum_k a_k \pi(t - kT_s) \quad (21)$$

Donde T_s es el período de cada pulso. Esto se puede ver en frecuencia como la Densidad Espectral de Potencia $S(f)$, usando la transformada de Fourier.,

$$S_x(f) = \frac{|P(f)|^2}{T} S_a(f) \quad (22)$$

Donde $S_a(f) = F(R_a[n]) = \sum_k R[k] e^{-j2\pi n f T_s}$ y la autocorrelación $R_a[n]$ cuando $n \neq 0$ es, sea m_a la media de la serie de bits,

$$R_a[n] = E\{a_0, a_n\} = E\{a_0 a_n\} = E\{a_0\} E\{a_n\} = m_a^2 \quad (23)$$

Si $n = 0$, hay correlación en la señal. Desarrollando,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E\{(x - \mu)^2\} = E\{x^2 - 2x\mu - \mu^2\} = E\{x^2\} - E\{2x\mu\} + E\{\mu^2\} = E\{x^2\} - 2\mu^2 + \mu^2 \\ \sigma^2 &= E\{x^2\} - \mu^2 \end{aligned}$$

$$E\{x^2\} = \sigma^2 + \mu^2 \quad (24)$$

En este caso, $\mu = m_a$. Volviendo a la ecuación (22),

$$S_x(f) = \frac{|P(f)|^2}{T} \sum_k R[k] e^{-j2\pi n f T_s} \quad S_x(f) = \frac{|P(f)|^2}{T} \left(\sigma^2 + m_a^2 \sum_k e^{-j2\pi n f T_s} \right)$$

Usando *Poisson*, $\sum_k e^{-j2\pi n f T_s} = \frac{1}{T} \sum_n \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$ y se tiene

$$S_x(f) = \frac{\sigma^2}{T} |P(f)|^2 + \frac{m_a^2}{T} \sum_n |P(\frac{n}{T_s})|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \quad (25)$$

Donde $|P(f)|^2$ es el espectro del pulso usado, en este caso $p(t) = \pi\left(\frac{t}{T_s}\right)$ y como a_k es tiene media 0, $m_a = 0$. Transformando y tomando $T = T_s$,

$$\begin{aligned} |P(f)|^2 &= |F\{\pi\left(\frac{t}{T_s}\right)\}|^2 = T_s^2 \text{sinc}^2(f) \\ S_x(f) &= \sigma^2 T_s \text{sinc}^2(f) \end{aligned} \quad (26)$$

Esto es lo que se ve en la figura 9.

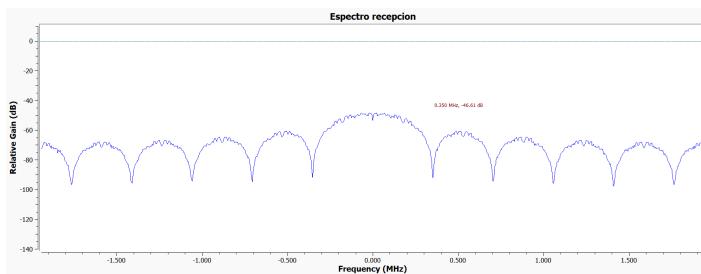


Figura 9: Espectro del pulso rectangular.

2.2. Instante de muestreo óptimo

Estos indicadores son histogramas que grafican dónde caen las muestras, por lo que cuanto menos muestras caigan lejos de $\pm 0,1$, que es donde se mapean los símbolos. menos error hay en la recepción, viendo los valores, es puede definir el mejor retraso con $n = 1$.

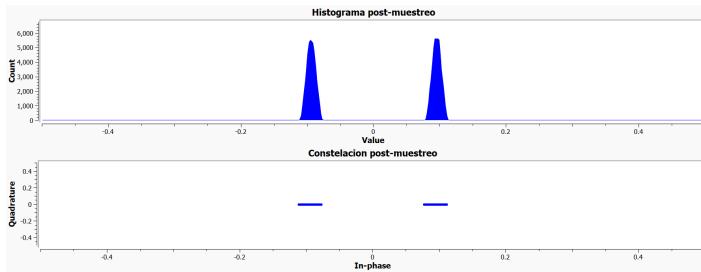
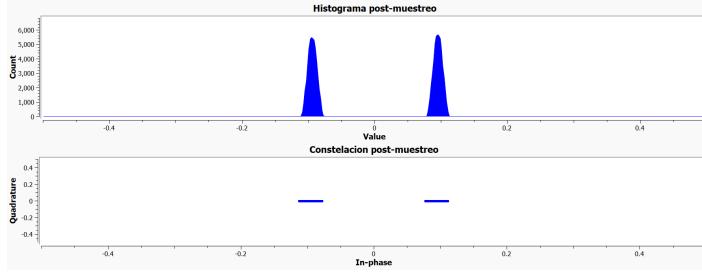
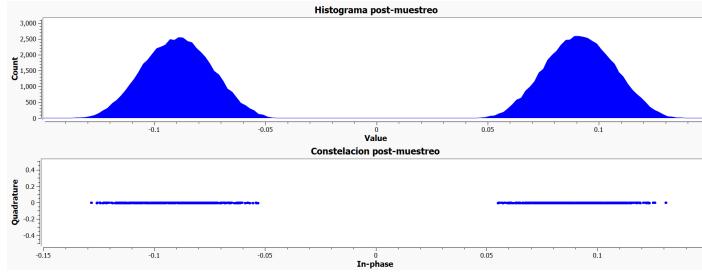
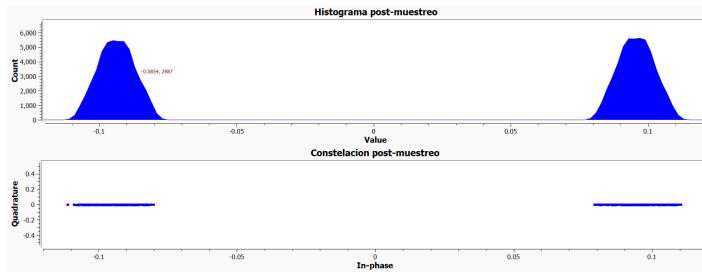


Figura 10: Histograma con $n=1$.

**Figura 11:** Histograma con $n=8$.

2.3. Diseño del filtro pasa bajos en recepción

Esta 'nube' viene debido a que usando un pasa bajos de ancho de banda W como filtro receptor, el ruido captado total esta dado por $N = W \frac{N_0}{2}$. Además, cuanto mas chico sea W , mas distorsión tendrán los pulsos. Se consideran 2 opciones: $W_1 = \frac{1}{T_b}$ y $W_2 = \frac{1}{2T_b}$, siendo $T_b = T_s$. Para W_1 , se tiene el histograma de la figura 12 mientras que para W_2 el histograma de la figura 13. En ambas las muestras caen con una distribución Gaussiana pero se nota que para el filtro con ancho de banda W_1 esta campana tiene un σ mayor que para W_2 , lo que quiere decir que para el segundo las muestras llegan con menos error, por lo que se elige $W_2 = \frac{1}{2T_b}$ como ancho de banda del filtro pasa bajos.

**Figura 12:** Histograma obtenido con $W_1 = \frac{1}{T_b}$.**Figura 13:** obtenido con $W_2 = \frac{1}{2T_b}$.

2.4. Elección de pulso conformador

A continuación se presentan los diferentes espectros de las señales obtenidas intercambiando un pulso rectangular y un pulso SRRC tanto en recepción como en transmisión.

Como se puede apreciar en la imagen 16, esta presenta características que la señalan como candidata a ser la mejor combinación por el hecho de que presenta la menor nube

de dispersión en cada punto, a su vez, una ventaja general de los SRRC, que es general para cualquier pulso de Nyquist, es el hecho de que poseen un ancho de banda finito, lo cual a efectos prácticos lo hace más usado que los pulsos rectangulares.

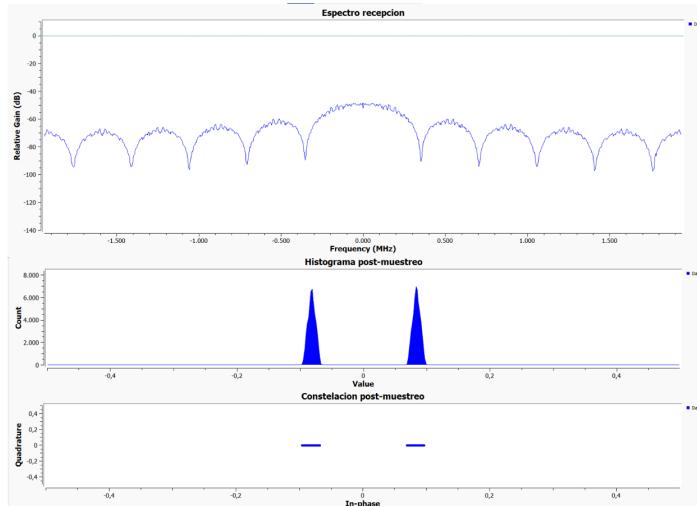


Figura 14: Señal obtenida en recepción con un filtro SRRC y pulso conformador rectangular.

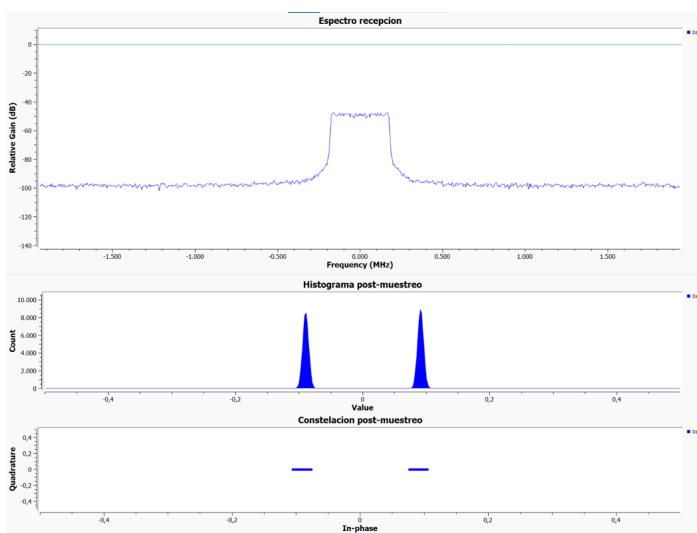


Figura 15: Señal obtenida en recepción con un filtro LPF y pulso conformador SRRC.

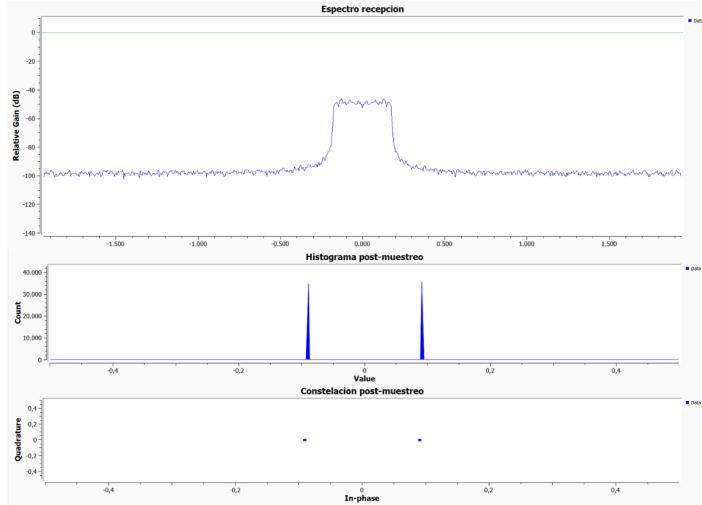


Figura 16: Señal obtenida en recepción con un filtro y pulso SRRC.

2.5. Diseño del pulso conformador e Interferencia entre Símbolos

En esta sección se analizaran los efectos de cambiar el largo en símbolos del pulso conformador y el coeficiente de roll-off. En la imagen 17 se puede observar como varía el espectro de la señal a lo largo de todo el proceso para el caso en que se envíe únicamente un 1, esta imagen será la referencia sobre la cual se compararán los cambios que se realizarán.

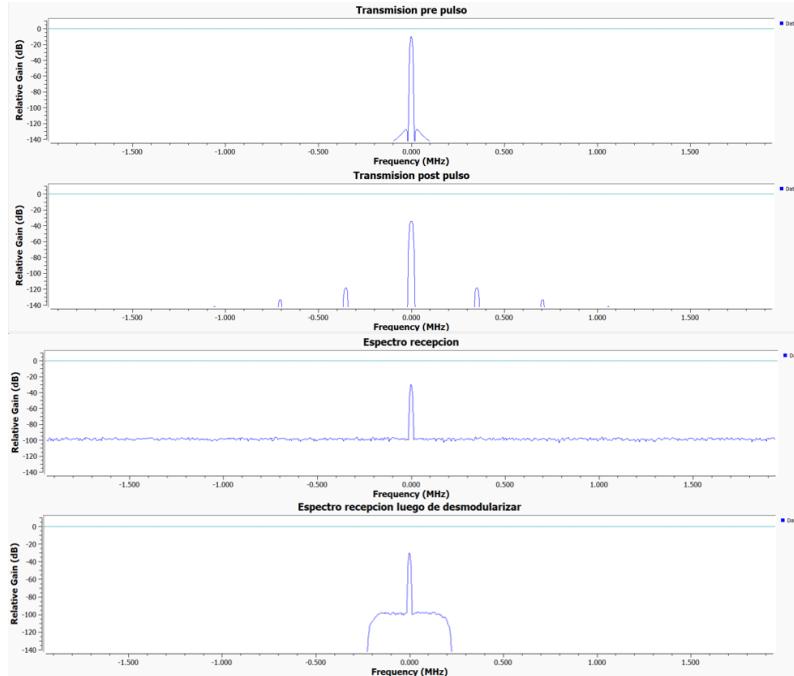


Figura 17: Forma de los espectros en transmisión y recepción para $\alpha = 0,25$ y largo de símbolo 51.

En la imagen 18 se puede apreciar lo que pasa cuando se disminuye el largo del pulso, se logra observar como luego de multiplicar la señal por el pulso conformador se

capturan más instancias de la señal original comparado con lo visto en la imagen 17, esto muestra que el largo que se cambia es el largo del pulso conformador en el tiempo, por lo tanto al disminuirlo se esta aumentando el ancho del espectro en frecuencia. Esto a su vez genera que luego de demodularizar no se recupere el mensaje original sino que empiecen a aparecer interferencias de el resto de señales.

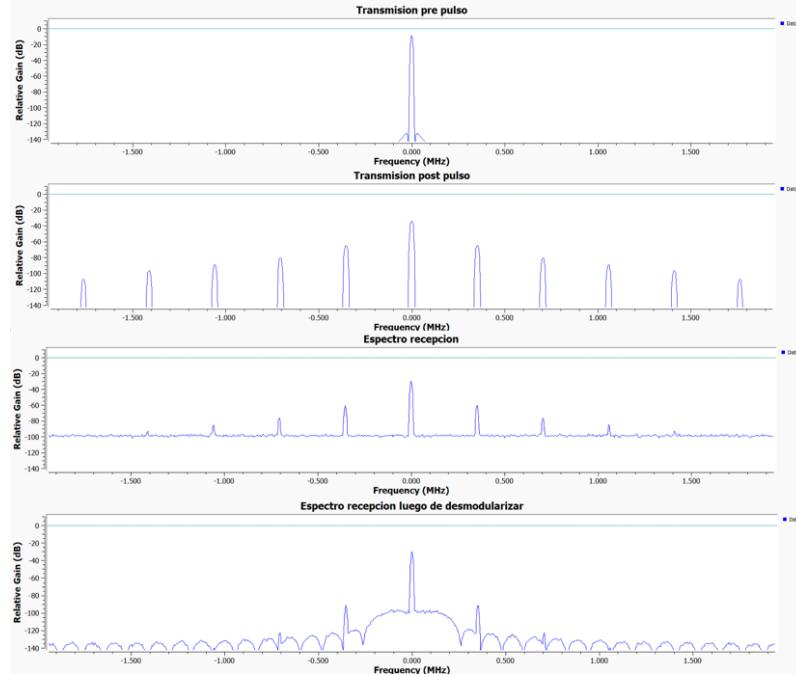


Figura 18: Espectros en transmisión y recepción para $\alpha = 0,25$ y largo de símbolo 3.

Para reducir el efecto de las interferencias se puede reducir el valor del coeficiente de roll-off dado que este simboliza que tanto ancho de banda extra va a consumir el pulso para mantener la simetría vestigial, en la imagen 19 se puede observar como hubo una mejoría respecto al caso de la imagen 17 debido a que las interferencias intersimbólicas luego de demodularizar pasaron de tener una ganancia del orden de -90 dB a una de -105 dB , si bien esto trae la desventaja de que en el tiempo el pulso tarda más en atenuarse.

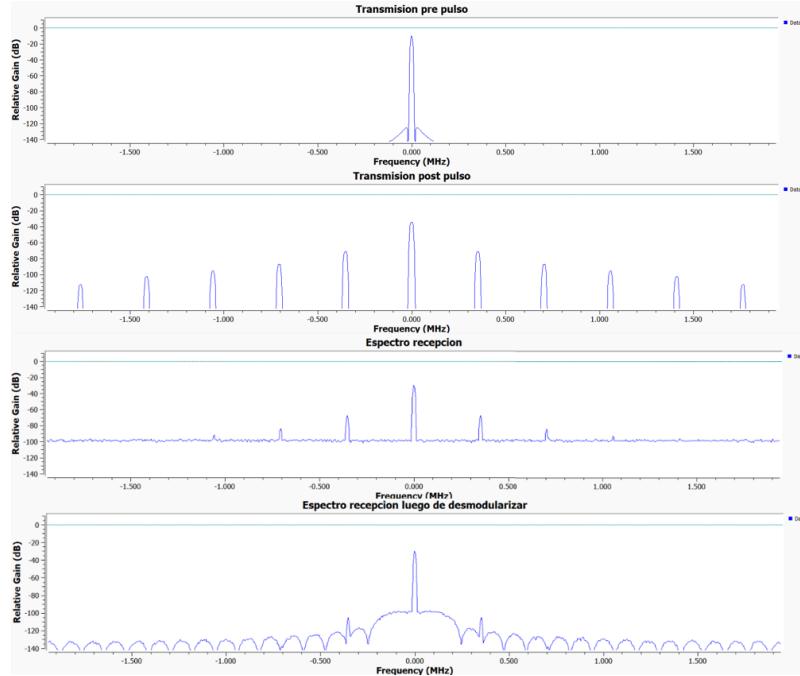


Figura 19: Espectros en transmisión y recepción para $\alpha = 2,5 \times 10^{-6}$ y largo de símbolo 3.

Algo a considerar es que el reducir el largo de los pulsos trae la ventaja de que un menor largo de pulso genera una reducción de tiempo de procesamiento, lo que puede llevar a que el sistema pase a ser más barato de implementar.

2.6. Umbral de decisión

El objetivo de esta sección es demostrar que al elegir el umbral de decisión óptimo se puede contrarrestar el efecto de tener un *SNR* es bajo. Para esto se toma una potencia de ruido de -7 dB y se busca γ el valor óptimo del umbral de decisión. Este valor está definido como el valor que minimiza la probabilidad de error, es decir,

$$\frac{\delta P_e}{\delta \gamma} = 0 \quad (27)$$

En este caso se utiliza modulación de 1 bit y polar, cuya probabilidad de error está dada por

$$P_e = (1 - q)Q_d\left(\frac{\gamma + \frac{A}{\sqrt{L}}}{\sigma}\right) + (q)Q_i\left(\frac{\frac{A}{\sqrt{L}} - \gamma}{\sigma}\right) \quad (28)$$

La derivada de $Q(k)$ es la distribución de gauss, $p(k)$, por lo que,

$$\frac{\delta P_e}{\delta \gamma} = -(1 - q)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(\frac{A}{\sqrt{L}}+\gamma)^2}{2\sigma^2}} + (q)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(\frac{A}{\sqrt{L}}-\gamma)^2}{2\sigma^2}} = 0 \quad (29)$$

Resolviendo la ecuación para distintos valores de q se obtiene el conjunto de valores de la tabla 5 en donde se puede apreciar la simetría a la hora de decidir los umbrales, a partir de estos valores es posible observar que dado un determinado SNR, si se elige el umbral óptimo, siempre se llega a un valor fijo de error de bit, en este caso el valor el valor alcanzado se encontraba en el orden de $10^{-1,8}$.

| q | Umbral óptimo |
|---------------|------------------------|
| 0 | -0,1 |
| $\frac{1}{4}$ | $-2,35 \times 10^{-3}$ |
| $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\frac{3}{4}$ | $2,35 \times 10^{-3}$ |
| 1 | 0,1 |

Tabla 5: Umbrales óptimos para distintos valores de q .

3. Parte III

- Kawamura, H., Kizu, S., Sakaida, F., & Toba, Y. (1993). The NOAA-HRPT data receiving system in the Center for Atmospheric and Oceanic Studies in the Tohoku University (Doctoral dissertation, Tohoku University).
- Schwalb, A. and United States. National Environmental Satellite Service.(1972).Modified Version of the Improved TIROS Operational Satellite (ITOS D-G)
- Gómez Goitia, M. (2018). SAWS, un sistema para descargar y visualizar automáticamente imágenes HRPT de satélites meteorológicos.

4. Anexo

4.1. Probabilidad de error de 8-PSK

Considerando el ruido, $y_d = A + N_i + N_q$, con N_i el ruido en fase y N_q el ruido en cuadratura. Esto puede ser reformulado considerando, para el símbolo 111 ubicado en $A + j0$, el ángulo $= \arctan\left(\frac{N_q}{A+N_i}\right)$. Con esta definición, se puede decir que hay un error cuando $-\frac{\pi}{8} > \theta$ y $\theta > \frac{\pi}{8}$. Luego,

$$P(error|s = 111) = \left(P\left(-\frac{\pi}{8} > \theta\right) + \left(\theta > \frac{\pi}{8}\right) \right) P(s = 111) \quad (30)$$

Donde $-\frac{\pi}{8} > \theta$ puede verse como $-\frac{\pi}{8} > \arctan\left(\frac{N_q}{A+N_i}\right)$ y se cumple también cuando $\tan(-\frac{\pi}{8}) > \tan\left(\arctan\left(\frac{N_q}{A+N_i}\right)\right)$, $\tan(-\frac{\pi}{8}) > \left(\frac{N_q}{A+N_i}\right)$. Esto permite reescribir ambas probabilidades de (30),

$$\left[P\left(\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) > \frac{N_q}{A+N_i}\right) + P\left(\frac{N_q}{A+N_i} > \tan\frac{\pi}{8}\right) \right] P(s = 111) \quad (31)$$

Donde $\tan(\frac{\pi}{8}) = \tan(\frac{-\pi}{8})$, y por simetría respecto al eje I,

$$P\left(\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) > \frac{N_q}{A+N_i}\right) = P\left(\frac{N_q}{A+N_i} > \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \quad (32)$$

Además, se puede considerar que $A \gg N_i$ y ruido Gaussiano, por lo que

$$\begin{aligned} P(error|s = 111) &= 2P\left(\frac{N_q}{A} > \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) P(s = 111) \\ P(error|s = 111) &= 2Q\left(\frac{A \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sigma}\right) \frac{1}{8} \end{aligned} \quad (33)$$

Por simetría, este error es el mismo para todos los símbolos, por lo que la probabilidad de error total se escribe considerando los 8,

$$P_e = 2Q\left(\frac{A \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sigma}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s \tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sigma^2}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{P_R \tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{r_s N_0}}\right) \quad (34)$$

Como para esta modulación se usan 3 bit, $3r_s = r_b$ y la probabilidad de error de bit se escribe

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{2}{3}Q\left(\frac{A \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sigma}\right) = \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{2E_s \tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{N_0}}\right) \\ P_{eb} &= \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{3N_0}}\right) = \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{6P_R \tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{r_b N_0}}\right) \end{aligned} \quad (35)$$