ARGOMENTI DEL CORSO

1. CENNI DI LOGICA
2. CENNI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

   (Relazioni di equivalenza – funzioni)
3. NUMERI INTERI
   - divisione tra numeri interi
   - massimo comune divisore e algoritmo delle divisioni successive
     minimo comune multiplo
   - principio di induzione completa
   - congruenze (mod n) e congruenze lineari
   - teorema di Eulero-Fermat e conseguenze

4. STRUTTURE ALGEBRICHE
   - Monoidi
   - gruppi
   - anelli – campi

5. CENNI DI CALCOLO COMBINATORIO
6. GRAFI
7. MATRICI.

TESTI CONSIGLIATI

1. DISPENSE
2. S. CAPPARELLI: "Appunti di Matematica Discreta" (ESCULAPIO)
3. A. FACCHINI: "Algebra e Matematica Discreta" (Zanichelli)
4. G. M. PIACENTINI CATTANEO: "Matematica Discreta (Zanichelli)
5. M. G. BIANCHI, A. GILLIO: "Introduzione alla Matematica Discreta" (Mc Graw-Hill)
6. C. DELIZIA, P. LONGOBARDI, M. MAJ, C. NICOTERA "Matematica Discreta" (Mc Graw-Hill)

Proposizioni atomiche

a: 5 è un numero primo è vera

b: In aula sono presenti più di 100 studenti è falsa

c: La matematica è bella non è una proposizione per la quale si possa dire se è vera o falsa.

d: $\underline{\underline{x}}$ è un numero positivo

$\forall$ "per ogni" ; $\exists$ "esiste"

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ <u>insieme dei numeri naturali</u>

" $\in$ " simbolo di appartenenza.

gli oggetti di un insieme si dicono <u>elementi dell'insieme</u>

Se A è un insieme $a \in A$ vuol dire che a è uno degli oggetti che costituiscono A.

$a \in A$ a appartiene ad A

a è elemento di A

Per es. $1 \in \mathbb{N}$

$\forall x \in \mathbb{N}$ x è positivo   vera (considerando lo 0 positivo)

$\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ insieme dei numeri relativi

$\forall x \in \mathbb{Z}$ x è positivo — falsa

$\exists x \in \mathbb{Z}$ tale che x è positivo — vera

CONNETTIVI LOGICI

NEGAZIONE — a proposizione atomica

$\neg a$ "non a"

$\bar{a}$

$\neg a$ negazione di a

se a vera allora $\neg a$ è falsa

se a è falsa allora $\neg a$ è vera.

se a è vera si assegna ad a valore di verità 1 (V o T)

se a è falsa " " " " " " 0 (F)

Tavola di verità della negazione

a	$\neg a$
1	0
0	1

b: In aula ci sono più di 100 studenti — 0

$\neg b$: Non è vero che in aula ci sono 100 studenti

in aula ci sono meno di 100 studenti — 1

p: Milano è la capitale d'Italia 0

$\neg p$: Milano non è la capitale d'Italia 1

DISGIUNZIONE $\vee$ "o" (vel)

a e b proposizioni atomiche, la proposizione

$$a \vee b$$

si legge "a o b" e si chiama disgiunzione di a e b.

Tavola di verità della disgiunzione

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Esempi p: $\sqrt{2}$ è un numero razionale 0

q: 5 è un numero pari 0

$p \vee q$: ($\sqrt{2}$ è un numero razionale) $\vee$ (5 è un numero pari) 0

q': 5 è un numero dispari

$p \vee q'$: ($\sqrt{2}$ è un numero razionale) $\vee$ (5 è un numero dispari) 1

CONGIUNZIONE $\wedge$ "e"

Se a e b sono proposizioni atomiche, allora la proposizione

$$a \wedge b \qquad \text{"a e b"}$$

si dice congiunzione di a e b.

Tavola di verità della congiunzione

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Esempi

p: la mosca è un insetto 1

q: 4 è un multiplo di 2 1

$p \wedge q$: (la mosca è un insetto) $\wedge$ (4 è un multiplo di 2) 1

r: l'asino vola 0

s: $\sqrt{2}$ è positivo 1

$r \wedge s$: (l'asino vola) $\wedge$ ($\sqrt{2}$ è positivo) 0

Implicazione "$\longrightarrow$"

Se a e b sono proposizioni atomiche la proposizione

$$a \longrightarrow b$$

si legge "a implica b" o "se a allora b"
e ha la seguente tavola di verità

a	b	$a \longrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Paradosso di Russel.

Se $1 = 2$ allora io sono il Papa.

Se $1=2$ allora io e il Papa siamo 2, ma $2=1$
allora io sono il Papa.

Esempio a: l'automobile viaggia
  b: l'automobile ha carburante

$a \longrightarrow b$ se a ha valore di verità 1, allora
b ha valore di verità 1.
se a ha valore di verità 0 non si può
dire che b sia vera.

Doppia implicazione a, b proposizioni atomiche

$a \longleftrightarrow b$ a se e solo se b

corrisponde a $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$

a	b	$a \rightarrow b$	$b \rightarrow a$	$(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

a	b	$a \longleftrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

FORMULE DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

siano $a_1, \dots, a_n$ dei simboli

Una formula si ottiene nel modo seguente

1. $a_1, \dots, a_n$ sono formule
2. Se a, b sono formule, sono formule anche
   $\neg a$, $a \wedge b$, $a \vee b$, $a \rightarrow b$, $a \longleftrightarrow b$.
3. le formule si ottengono esclusivamente da 1. e 2.

Esempi: $\quad p, q, r \quad$ formule

(1) $\quad (p \wedge (q \rightarrow r)) \longleftrightarrow ((\neg q) \vee (\neg r))$ $\qquad$ formule

(2) $\quad (((\neg p) \rightarrow (q \wedge r)) \vee (p \rightarrow q))$ $\qquad$ formule

- prima $\neg$
- poi $\wedge$ e $\vee$
- poi $\rightarrow$ e $\longleftrightarrow$

(1) si scrive $\quad (p \wedge (q \rightarrow r)) \longleftrightarrow (\neg q \vee \neg r)$

(2) si scrive $\quad (\neg p \rightarrow q \wedge r) \vee (p \rightarrow q)$

Tavole di verità

(1)

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \wedge (q \rightarrow r)$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg q \vee \neg r$	$(p \wedge (q \rightarrow r)) \longleftrightarrow (\neg q \vee \neg r)$
1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1	1	1	0

formula con k variabili, si esaminano 2^k casi

Se la tavola di verità di una formula è sempre vera, allora tale formula si dice <u>tautologia</u>; se è sempre falsa si dice <u>contraddizione</u>.

Esempi. a formula

$a \wedge \neg a$ è una contraddizione

a	$\neg a$	$a \wedge \neg a$
1	0	0
0	1	0

$a \vee \neg a$ è una tautologia

a	$\neg a$	$a \vee \neg a$
1	0	1
0	1	1

legge del terzo escluso.

$\neg(a \wedge b) \leftrightarrow \neg a \vee \neg b$ tautologia

a	b	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee \neg b$	$\neg(a \wedge b) \leftrightarrow \neg a \vee \neg b$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

a: 5 è pari $\qquad$ b: 3 è primo

$a \wedge b$ è falsa

$\neg(a \wedge b)$ è vero

$\neg(a \wedge b) \Longleftrightarrow \neg a \vee \neg b$

$\neg$(5 è pari) $\vee$ $\neg$(3 è primo)

5 è dispari $\vee$ 3 non è primo. $\qquad$ 1

Analogamente $\quad \neg(a \vee b) \Longleftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$

$(a \wedge b) \vee c \Longleftrightarrow (a \vee c) \wedge (b \vee c)$

$(a \vee b) \wedge c \Longleftrightarrow (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

esercizio: tavole di verità