1. Provare che $3 \mid 2n - 5n^3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Passo base: $P(0)$: $3 \mid 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0^3 \iff 3 \mid 0$ vero

Passo induttivo: $P(n)$ vera $\quad 3 \mid \underbrace{2n - 5n^3}$ $\quad$ ipotesi induttiva

$P(n+1)$ vera $\quad 3 \mid 2(n+1) - 5(n+1)^3$ $\quad$ tesi

$$\underline{2(n+1) - 5(n+1)^3} = 2n + 2 - 5(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 2n + 2 - 5n^3 - 15n^2 - 15n - 5 =$$

$$= (\underline{2n - 5n^3}) - 15n^2 - 15n - 3 = (2n - 5n^3) - 3(5n^2 + 5n + 1)$$

$$\left(3 \mid 2n - 5n^3 \quad \wedge \quad 3 \mid 3(5n^2 + 5n + 1)\right) \Longrightarrow 3 \mid \underline{(2n - 5n) - 3(5n^2 + 5n + 1)}$$

e quindi $3 \mid 2(n+1) - 5(n+1)^3$

2. $\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod 5 \\ 2x \equiv 14 \pmod 6 \end{cases}$

$x_0 = 4$ è soluzione della prima congruenza lineare perché $3 \cdot 4 = 12$, $12 - 2 = 10$ multiplo di 5

$x = 4 + 5h$ $\quad$ M.C.D. $(3, 5) = 1$

$x \equiv 4 \pmod 5$ $\quad$ $\bar{m} = \frac{m}{d} = \frac{5}{1} = 5$

$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 7 \pmod 3 \end{cases}$

$2x \equiv 14 \pmod 6$ $\quad$ M.C.D. $(2, 6) = 2 \mid 14$ $\quad$ ci sono soluz.

$x \equiv 7 \pmod 3$

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 7 \pmod 3 \end{cases}$$

$M.C.D.(5,3) = 1$

sicuramente il sistema ammette soluzioni che si possono calcolare tramite il teorema cinese del resto.

$\underbrace{R = 5 \cdot 3 = 15}$ $\quad R_1 = 3 \quad R_2 = 5$

$3x \equiv 4 \pmod 5$ $\quad \underline{\underline{x_1 = 3}}$ è una soluzione perché $3 \cdot 3 - 4 = 5$ multiplo di 5

$5x \equiv 7 \pmod 3$ $\quad \underline{\underline{x_2 = 2}}$ è una soluzione perché $5 \cdot 2 - 7 = 3$ multiplo di 3

$\bar{x} = R_1 x_1 + R_2 x_2 = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 9 + 10 = 19$

va anche bene

$x = 19 + Rh = \underbrace{19 + 15h}$ $\quad h \in \mathbb{Z}$

$\underbrace{x = 4 + 15h}$ $\quad h \in \mathbb{Z}$.

3. $3 \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = n(4n^2-1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Passo base : $P(1)$ vera

$3 \sum_{i=1}^{1} (2i-1)^2 \overset{?}{=} 1 \cdot (4 \cdot 1^2 - 1)$

$3 \cdot (2 \cdot 1 - 1)^2 \overset{?}{=} 1 \cdot (4-1)$

$\underline{\underline{3 \cdot 1 = 3}} \quad \underline{\underline{1 \cdot 3 = 3}}$ OK.

Passo induttivo: $P(n)$ vero: $3\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = n(4n^2-1)$ ipotesi induttiva

$P(n+1)$ vero: $3\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)^2 = \underbrace{(n+1)(4(n+1)^2-1)}$ tesi

$$3\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)^2 = \underbrace{3\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2} + 3(2(n+1)-1)^2 =$$

$$= n(4n^2-1) + 3(2n+1)^2 = n(4n^2-1)+3(4n^2+4n+1)$$

ipotesi indutt.

$$= \underline{\underline{n(4n^2-1) + 12n^2 + 12n + 3}}$$

$$\underline{(n+1)(4(n+1)^2-1)} = (n+1)(4(n^2+2n+1)-1) = (n+1)(\underbrace{4n^2+8n+4-1}) =$$

$$= n(4n^2+8n+4-1) + (4n^2+8n+4-1) = n(4n^2-1) + 8n^2+4n$$

$$+4n^2+8n+3 =$$

$$= \underline{n(4n^2+1) + 12n^2 + 12n + 3}$$ OK

4. $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 3 \mid a^2 - b^2\}$

$\mathcal{R}$ è di equivalenza; $[5]_\mathcal{R}$, $\underbrace{[7]_\mathcal{R}, [-2]_\mathcal{R}, [0]_\mathcal{R}}_{\text{esercizio}}$

$\mathcal{R}$ è riflessiva: $\forall a \in \mathbb{Z} \quad (a,a) \in \mathcal{R}$

$\forall a \in \mathbb{Z} \quad 3 \mid a^2 - a^2$

$\forall a \in \mathbb{Z} \quad 3 \mid 0$ vero

$3 \mid 0 \Rightarrow 3 \mid a^2 - a^2 \; \forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a,a) \in \mathcal{R} \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

$\mathcal{R}$ è simmetrica: $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ se $(a,b) \in \mathcal{R}$ allora $(b,a) \in \mathcal{R}$

Siano $a,b \in \mathbb{Z}$ tali che $(a,b) \in \mathcal{R}$

$(a,b) \in \mathcal{R} \Rightarrow 3 \mid a^2 - b^2 \Rightarrow 3 \mid -(a^2 - b^2) \Rightarrow 3 \mid b^2 - a^2 \Rightarrow (b,a) \in \mathcal{R}$

$\mathcal{R}$ è transitiva: $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$ se $(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a,c) \in \mathcal{R}$

Siano $a,b,c \in \mathbb{Z}$ tali che $(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{R}$.

$(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{R} \Rightarrow 3 \mid a^2 - b^2 \wedge 3 \mid b^2 - c^2 \Rightarrow 3 \mid (a^2 - \cancel{b^2}) + (\cancel{b^2} - c^2)$

$\Rightarrow 3 \mid a^2 - c^2 \Rightarrow (a,c) \in \mathcal{R}$.

$[5]_\mathcal{R} = \{a \in \mathbb{Z} : (5,a) \in \mathcal{R}\}$

$a \in [5]_\mathcal{R} \Leftrightarrow (5,a) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow 3 \mid 5^2 - a^2 \Leftrightarrow 3 \mid (5-a)(5+a)$

Poiché 3 è un numero primo

$a \in [5]_\mathcal{R} \Leftrightarrow 3 \mid (5-a)(5+a) \Leftrightarrow 3 \mid 5-a \vee 3 \mid 5+a$

$3 \mid 5-a \Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $5-a=3h \Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $a=5-3h$

$3 \mid 5+a \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tale che $5+a=3k \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tale che $a=-5+3k$

$[a]_R = \{a \in \mathbb{Z} : \exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $a=5-3h\} \cup \{a \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}$ tale che $a=-5+3k\}$

$= \{5-3h : h \in \mathbb{Z}\} \cup \{-5+3k : k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\dots, -1, 2, 5, 8, \dots\} \cup \{\dots, -5, -2, 1, 4, \dots\}$

5. $3\sum_{i=2}^{n} i(i-1) = n(n^2-1) \qquad n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2$

Passo base: $P(2)$: $3\sum_{i=2}^{2} i(i-1) = 2(2^2-1)$

$$3\sum_{i=2}^{2} i(i-1) = 3 \cdot 2(2-1) = 3 \cdot 2 = 6$$

$$2 \cdot (2^2-1) = 2 \cdot (4-1) = 2 \cdot 3 = 6$$

$P(2)$ è quindi vero.

Passo induttivo: $3\sum_{i=2}^{n} i(i-1) = n(n^2-1)$ ipotesi d'induzione

$3\sum_{i=2}^{n+1} i(i-1) = (n+1)((n+1)^2-1)$ tesi

$$3\sum_{i=2}^{n+1} i(i-1) = 3\sum_{i=2}^{n} i(i-1) + 3(n+1)(n+1-1) \overset{\text{ipotesi d'induz.}}{=} n(n^2-1) + 3(n+1)n =$$

$$= n(n^2-1) + 3n^2 + 3n$$

$$(n+1)((n+1)^2-1) = (n+1)(n^2+2n+1-1) = n(n^2-1+2n+1)+(n^2+2n) =$$

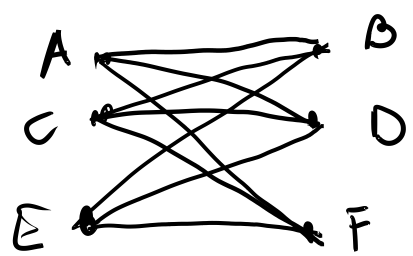
$$= n(n^2-1) + 2n^2+n+n^2+2n = n(n^2-1)+3n^2+3n$$

GRAFI

Teorema di Kuratowski. Un grafo è planare se e solo se non ha sottografi isomorfi a K_5 e $K_{3,3}$.

Metodo del cerchio e delle corde

1.



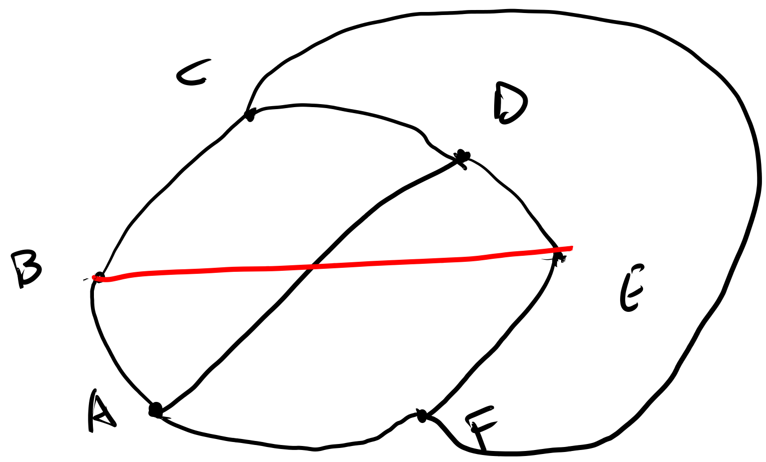
~~AB~~ ~~AD~~ ~~AF~~

~~CB~~ ~~CD~~ ~~CF~~

EB ~~ED~~ ~~EF~~

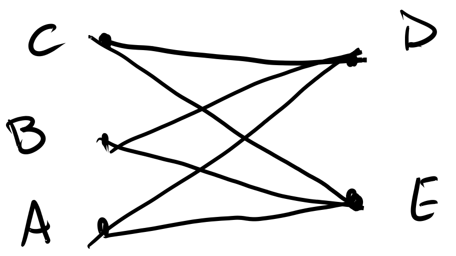
$6\cdot3=18$ grado complessivo

$|L| = \frac{18}{2} = 9$

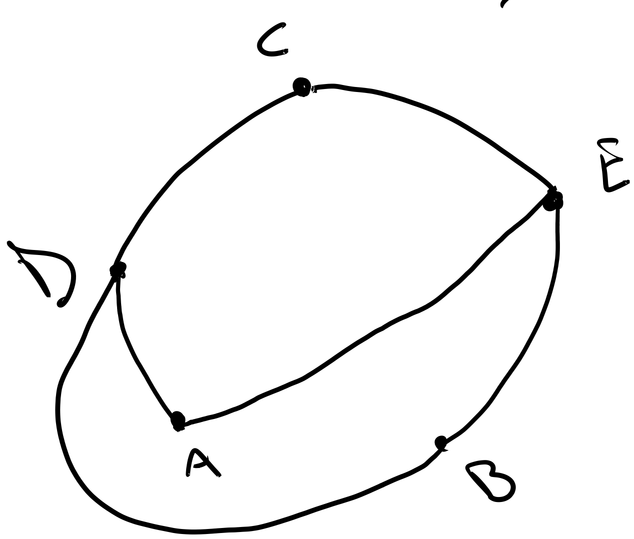


il grafo non è planare

2.



~~AD~~ ~~AE~~
~~BD~~ ~~BE~~
~~CD~~ ~~CE~~

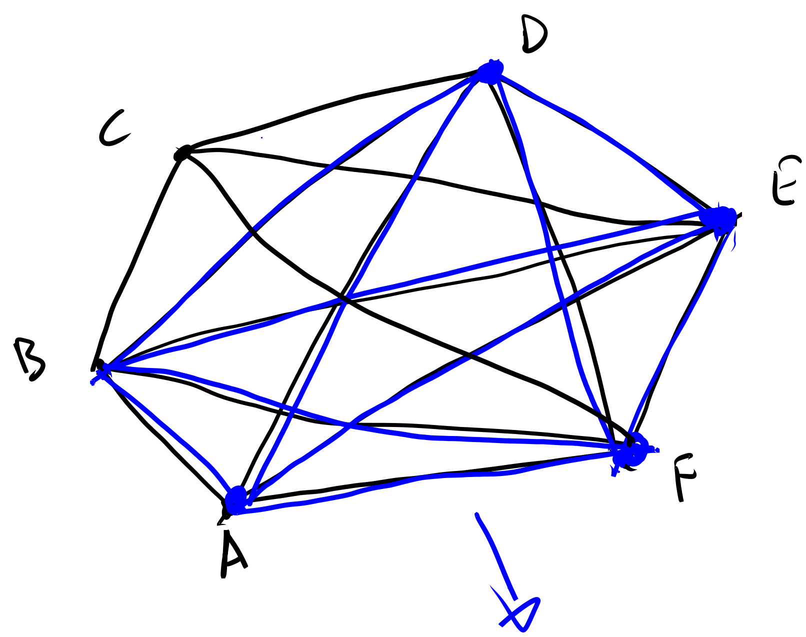


3. Per esercizio: rappresentare K_5 con il metodo del cerchio e delle corde.

$4+5+4+5+5+5 = 28$ grado complessivo

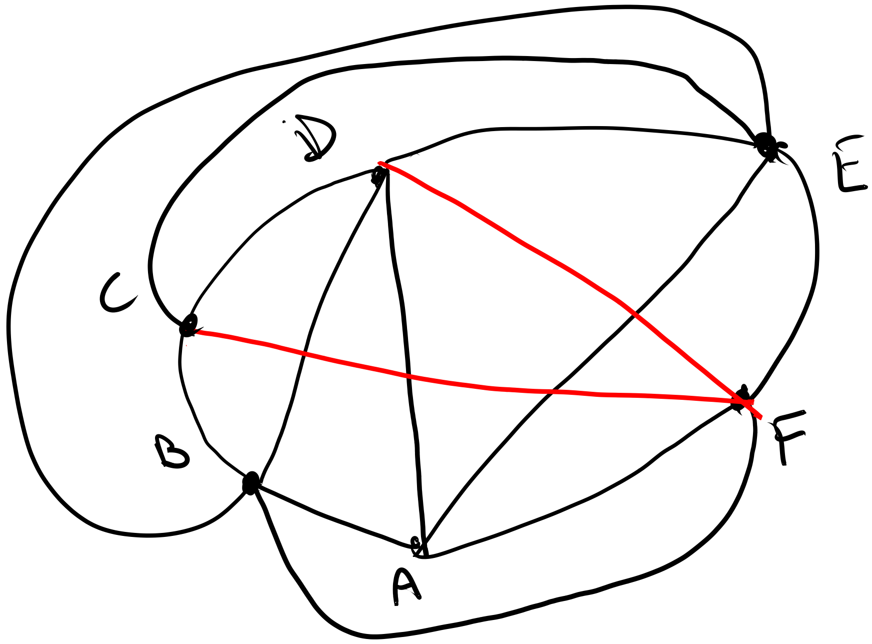
14 lati:

~~AB~~ ~~AD~~ ~~AE~~ ~~AF~~
~~BF~~ ~~BE~~ ~~BD~~ ~~BC~~
~~CF~~ ~~CE~~ ~~CD~~ ~~DE~~
~~DF~~ ~~EF~~



K_5

per il teorema di K il grafo non è planare



non è planare.

4. Stabilire se esiste un grafo $G = (V, L, \varphi)$ con $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ in modo che $\forall i = 1, \dots, 10 \quad d(v_i) = i$

$d(v_1) = 1$

$d(v_2) = 2$

$\vdots$

$d(v_{10}) = 10.$

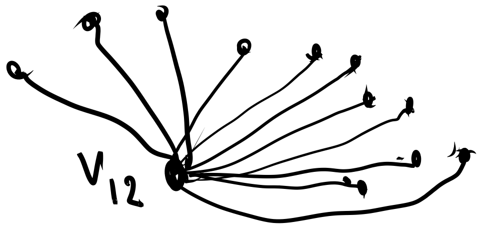
i vertici di grado dispari sarebbero 5 : impossibile

5. Stabilire se esiste un grafo $G = (V, L, \varphi)$ con

$$V = \{v_1, \dots, v_{12}\}$$

in modo che $\forall i = 1, \dots, 12 \quad d(v_i) = i.$

Non esiste perché il massimo grado possibile è 11.



6. Stabilire se esiste un albero avente:

3 vertici di grado 5
2 " " " 4
1 vertice " " 3
7 vertici " " 2
15 " " " 1

Non esiste perché si avrebbe un numero dispari di vertici dispari.

7. Sia $G = (V, L)$ un albero avente: 2 vertici di grado 5, 3 vertici di grado 4, 5 vertici di grado 3, 4 vertici di grado 2 e nessun vertice di grado maggiore.

(a) calcolare $|V|$, $|L|$ senza tracciare un albero con tali caratteristiche

(b) tracciare due alberi aventi lo stesso numero di vertici con i rispettivi gradi di G non isomorfi tra loro.

(a) $$2|L| = \sum_{v \in V} d(v)$$

2 vertici di grado 5

3 " " " 4

5 " " " 3

4 " " " 2

x " " " 1

$|V| = 2+3+5+4+x = 14+x$

$|L| = |V|-1 = (14+x)-1 = 13+x$

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2\cdot 5 + 3\cdot 4 + 5\cdot 3 + 4\cdot 2 + x\cdot 1 = 10+12+15+8+x = 45+x$$

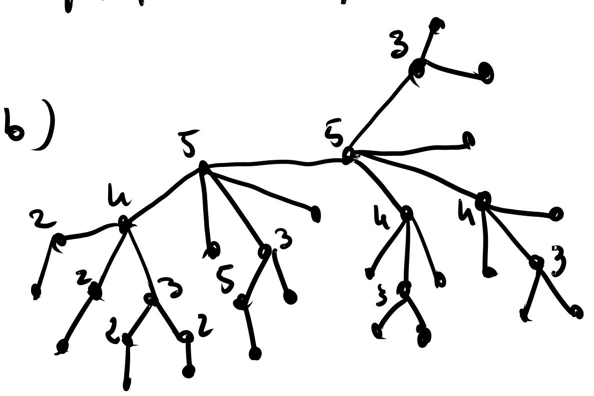
$$2(13+x) = 45+x$$

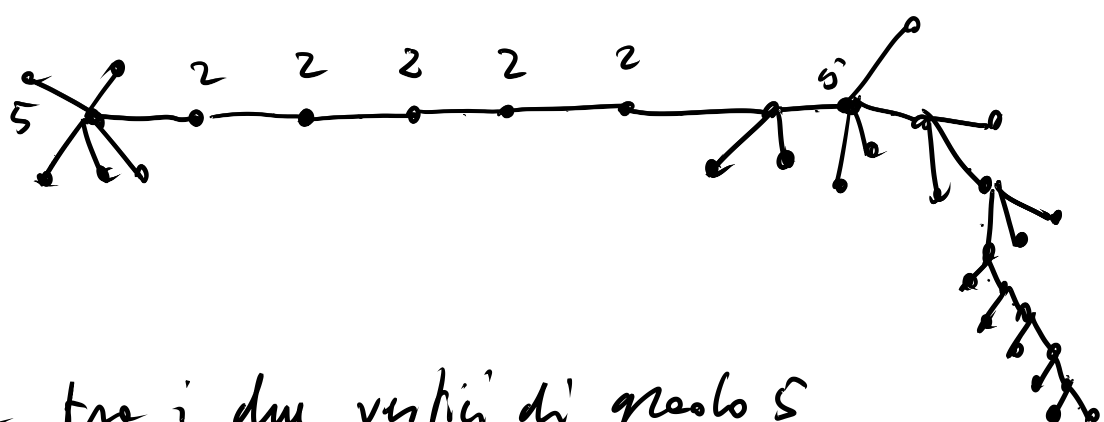
$$26 + \cancel{2}x = 45 + \cancel{x}$$

$x = 45-26 = 19$ vertici di grado 1

$|V| = 14+19 = 33$ $|L| = 32$

(b)





la distanza tra i due vertici di grado 5

Altro modo per verificare che i due alberi non sono isomorfi:

La massima lunghezza di un cammino del primo grafo è 7 nel secondo è 16.

Nel secondo albero c'è un cammino di lunghezza 16 e questo non può succedere nel primo albero, perché la massima lunghezza di un cammino in esso è 7.