Prop. Sia A insieme finito, $|A| = n$. Allora $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

Dim. $\forall B \subset A$ si può considerare la funzione caratteristica di B $\quad f_B : A \to \{0,1\}$ tale che $\forall x \in A$ $\quad f_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin B \\ 1 & \text{se } x \in B \end{cases}$

Sia $\quad \Phi : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \{0,1\}^A$

tale che $\forall B \in \mathcal{P}(A) \quad \Phi(B) = f_B : A \to \{0,1\}$, $\quad f_B \in \{0,1\}^A$

$\{0,1\}^A = \{ f : A \to \{0,1\} \}$.

Proviamo che Φ è bigettiva.

Φ è ingettiva. Siano $B, C \in \mathcal{P}(A)$ con $B \neq C$: proviamo che allora $\Phi(B) \neq \Phi(C)$ ovvero che $f_B \neq f_C$.

$f_B : A \to \{0,1\} \qquad\qquad f_C : A \to \{0,1\}$

Dobbiamo provare che $\exists x_0 \in A$ tale che $f_B(x_0) \neq f_C(x_0)$.

$B \neq C \iff (\exists x_0 \in B$ tale che $x_0 \notin C) \vee (\exists y_0 \in C$ tale che $y_0 \notin B)$

per esempio supponiamo che $\exists x_0 \in B$ tale che $x_0 \notin C$ e risulta allora $f_B(x_0) = 1$ mentre $f_C(x_0) = 0$, per cui

$f_B(x_0) \neq f_C(x_0)$ e quindi $f_B \neq f_C$, ovvero $\Phi(B) \neq \Phi(C)$

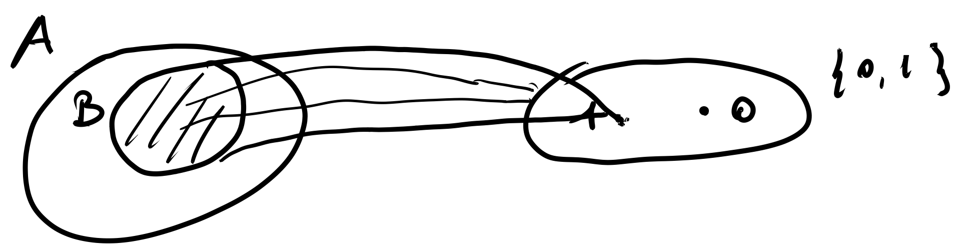
(in modo analogo se $\exists y_0 \in C$ tale che $y_0 \notin B$).

Proviamo ora che Φ è surgettiva.

Se $f \in \{0,1\}^A$ cioè $f: A \to \{0,1\}$, allora esiste $B \in \mathcal{P}(A)$ tale che $f = \Phi(B) = f_B$.

$$f: A \to \{0,1\}$$

Sia $B = f^{-1}(1) = \{x \in A : f(x) = 1\}$



Proviamo che
$f = f_B$

$$\begin{matrix} f \\ f_B \end{matrix} : A \to \{0,1\}$$

Sia $x \in A \Rightarrow (x \in B) \vee (x \in B)$

$\underline{\underline{x \in B}}$ $\quad f_B(x) = 1 = f(x) \Rightarrow f_B(x) = f(x)$

$\underline{\underline{x \notin B}}$ $\quad f_B(x) = 0 \wedge f(x) \neq 1$ quindi $f(x) = 0$

$$f_B(x) = f(x)$$

Quindi $f = f_B$ per cui $f = \Phi(B)$. Questo ci assicura che Φ è surgettiva. Dunque Φ è bigettiva, per cui $|\mathcal{P}(A)| = |\{0,1\}^A| = 2^{|A|} = 2^n$.

Si dice disposizione con ripetizioni di k elementi di classe n (a n a n) una n-pla ordinata formata con alcuni (o tutti) i k elementi. Queste corrisponde ad una funzione tra un insieme di cardinalità n e un insieme di cardinalità k. Abbiamo visto che il numero delle disposizioni con ripetizioni è k^n; segue che $|B^A| = |B|^{|A|}$.

Principio di moltiplicazione.

Siano $A_1, \dots, A_n$ insiemi finiti. Si può considerare

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

Risulta $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$.

Dim. $\underset{h_1}{\sqcup} \quad \underset{h_2}{\sqcup} \quad \dots \quad \underset{h_n}{\sqcup}$

indichiamo con $h_1 = |A_1|$, $h_2 = |A_2|, \dots, h_n = |A_n|$

Una n-pla può essere scelta in $h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_n$ modi.

Esempio. Quante targhe si possono formare?

Lettera Lettera cifra cifra cifra Lettera Lettera

$$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 = 26^4 \cdot 10^3 =$$

$$= 456.976.000.$$

Def. Si definisce ricorsivamente

$$0! = 1$$

$$n! = (n-1)!\, n$$

Cioè

$$0! = 1$$

$$1! = 0! \cdot 1 = 1$$

$$2! = 1! \cdot 2 = 2$$

$$3! = 2! \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 3! \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 4! \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$$

$$\vdots$$

Def. Siano $k, n \in \mathbb{N}^*$ $k \geq n$ $(k)_n = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1)$.

fattoriale decrescente.

Osserv. $n! = n\cdot(n-1)! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)! = \dots = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1$.

$(k)_k = k(k-1)\cdot\ldots\cdot 1$.

Esempi $\quad (5)_2 = 5\cdot 4 \qquad 5-2+1=4$

$(5)_4 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2. \qquad 5-4+1=2$

Def. Si dice disposizione semplice di k elementi di classe n, con $k \geq n$, una n-ple ordinata senza ripetizioni formata da alcuni (o tutti) i k elementi. Quindi una disposizione semplice non è altro se non una parola senza ripetizioni di lunghezza n, formata dai alcuni (o tutti) i k elementi, ovvero può essere considerata come una funzione iniettiva di un insieme di cardinalità n in un insieme di cardinalità k.

Prop. Il numero delle disposizioni semplici di k elementi di classe n, ovvero il numero delle funzioni iniettive di un insieme di n elementi in un insieme di k elementi è

$$(k)_n = k\cdot(k-1)\cdots(k-n+1).$$

Dim

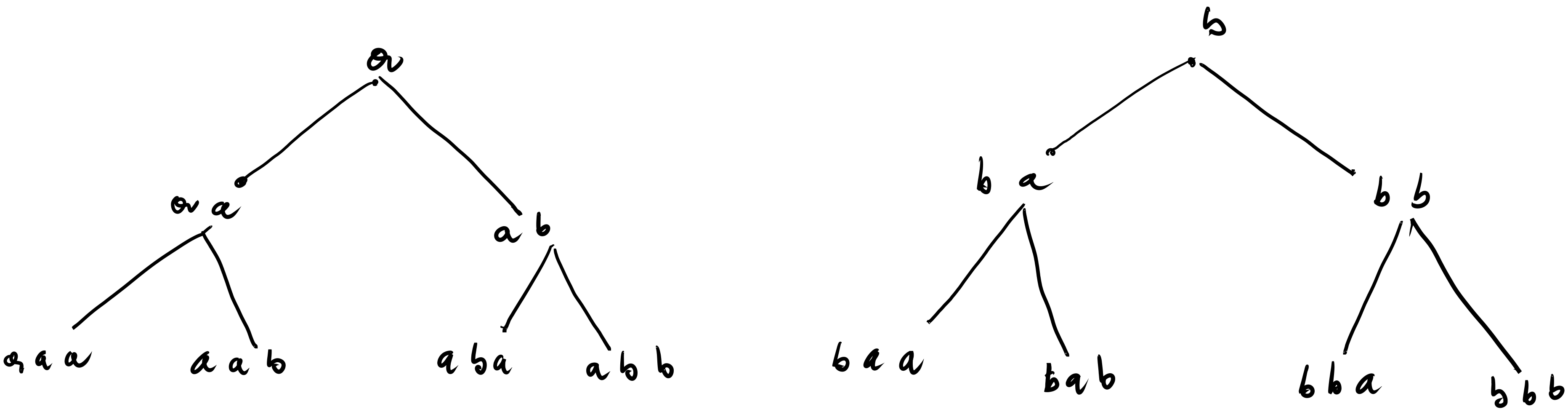
$$\begin{array}{cccc} \sqcup & \sqcup & \cdots & \sqcup \\ k & (k-1) & \cdots & (k-(n-1)) \\ & & & k-n+1 \end{array}$$

una disposizione semplice può essere scelta in
$k(k-1)\cdots(k-n+1)$ modi.

Esempi. 1. $|A| = 3$ $|B| = 2$

$B^A = \{f : A \to B\}$ $|B^A| = 2^3 = 8$

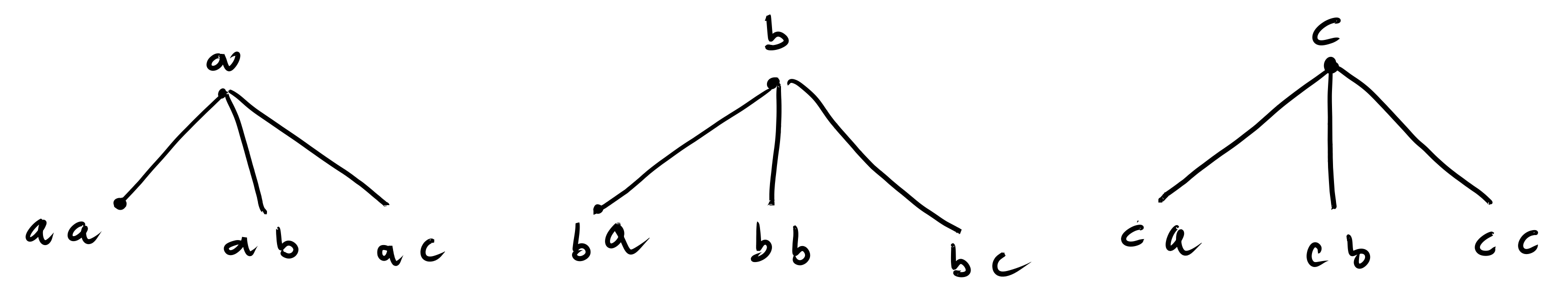
$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{a, b\}$ $\underset{1}{\sqcup}\ \underset{2}{\sqcup}\ \underset{3}{\sqcup}$



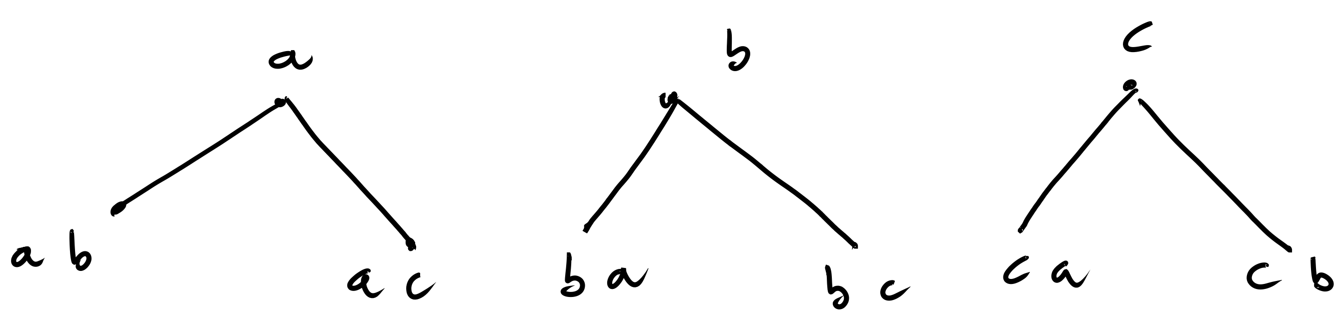
2. $|A| = 2$ $\quad$ $|B| = 3$

$|B^A| = 3^2 = 9$ elementi

$A = \{1, 2\}$ $\quad$ $B = \{a, b, c\}$



funzioni iniettive: $(3)_2 = 3 \cdot 2 = 6$ $\quad$ $3 - 2 + 1 = 2$



Conseguenza. Il numero delle funzioni bigettive tra due insiemi di cardinalità n è

$$(n)_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

$n - n + 1 = 1$

In particolare $|S_n| = n!$

Ricordiamo che S_n è l'insieme delle permutazioni su n oggetti.

Coefficiente binomiale.

Siano $s, r \in \mathbb{N}$ $s \neq 0$, $r \leq s$. Si pone

$$\binom{s}{r} = \frac{s!}{r!(s-r)!} = \frac{(s)_r}{r!}$$

infatti $$\frac{s!}{r!(s-r)!} = \frac{s\cdot(s-1)\cdot\ldots\cdot(s-r+1)\cancel{(s-r)\cdot\ldots\cdot 1}}{r!\cancel{(s-r)\cdot\ldots\cdot 1}} =$$

$$= \frac{(s)_r}{r!}.$$

Proprietà. Siano $s, r \in \mathbb{N}$, $s \neq 0$, $r \leq s$. Allora

1. $\binom{s}{0} = 1$

2. $\binom{s}{s} = 1$

3. $\binom{s}{s-1} = s$

4. $\binom{s}{1} = s$

5. $\binom{s}{r} = \binom{s-1}{r-1} + \binom{s-1}{r}$ $\quad s \neq 1$, $r \neq 0$

Verificar: 1. $\binom{s}{0} = \frac{s!}{0!(s-0)!} = \frac{\cancel{s!}}{0!\,\cancel{s!}} = 1$

2. $\binom{s}{s} = \frac{\cancel{s!}}{\cancel{s!}(s-s)!} = 1$

3. $\binom{s}{s-1} = \frac{s!}{(s-1)!\,(s-(s-1))!} = \frac{s!}{(s-1)!\,1!} =$

$$\frac{s\,\cancel{(s-1)\cdot\ldots\cdot 1}}{\cancel{(s-1)(s-2)\cdot\ldots\cdot 1}\cdot 1} = s$$

4. $\binom{s}{1} = \frac{s!}{1!(s-1)!} = s$

5. $\binom{s-1}{r-1} + \binom{s-1}{r} = \frac{(s-1)!}{(r-1)!(s-1-(r-1))!} + \frac{(s-1)!}{r!\,(s-1-r)!} =$

$$\frac{(s-1)!}{(r-1)!\,(s-r)!} + \frac{(s-1)!}{r!\,(s-r-1)!} = (s-1)!\left(\frac{1}{(r-1)!\,(s-r)(s-r-1)!} + \frac{1}{r(r-1)!\,(s-r-1)!}\right)$$

$$= (s-1)!\,\frac{\cancel{r} + s - \cancel{r}}{r\,(r-1)!\,(s-r)\,(s-r-1)!} = \frac{s\,(s-1)!}{r!\,(s-r)!} =$$

$$\frac{s!}{r!\,(s-r)!} = \binom{s}{r}.$$

Formula del binomio di Newton.

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Esempi: $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} =$

$$\binom{1}{0} a^0 b^{1-0} + \binom{1}{1} a^1 b^{1-1} = b + a = a + b$$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k b^{2-k} = \binom{2}{0} a^0 b^{2-0} + \binom{2}{1} a^1 b^{2-1} + \binom{2}{2} a^2 b^{2-2} =$$

$= 1 \cdot b^2 + 2ab + a^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^k b^{3-k} = \binom{3}{0} a^0 b^{3-0} + \binom{3}{1} a^1 b^{3-1} + \binom{3}{2} a^2 b^{3-2} + \binom{3}{3} a^3 b^{3-3}$$

$$= b^3 + 3ab^2 + 3a^2b + a^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Triangolo di Tartaglia

1 1		$a+b$
1 2 1		$(a+b)^2$
1 3 3 1		$(a+b)^3$
1 4 6 4 1		$(a+b)^4$
1 5 10 10 5 1		$(a+b)^5$

$5.\ \binom{5-1}{2-1} + \binom{5-1}{2} = \binom{5}{2}$

formula del binomio di Newton

$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$

$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$

$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$

Def. Siano $k, n \in \mathbb{N}^*$ $n \leq k$. Si dice combinazione semplice di k elementi di classe n una n-pla non ordinata formata da alcuni (o tutti) i k elementi. Quindi una combinazione semplice è un sottoinsieme di cardinalità n di un insieme di cardinalità k.

Prop. Il numero delle combinazioni semplici di k elementi di classe n, ovvero il numero dei sottoinsiemi formati da n elementi di un insieme di cardinalità k è:

$$\binom{k}{n}.$$

Dim. Il numero delle disposizioni semplici

$$(k)_n$$

va diviso per $n!$, ovvero per il numero delle permutazioni di n oggetti, perchè non interessa l'ordine con cui si considera una n-pla. Quindi il numero di combinazioni semplici è $\frac{(k)_n}{n!} = \binom{k}{n}$.

$\{a\ b\ c\} = \{a\ c\ b\} = \{c\ a\ b\}$ ... combinazioni semplici.

$a\ c\ b \neq a\ b\ c$ disposizioni semplici

Conseguenza: nuova dimostrazione del fatto che

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|\mathcal{P}(A)|} \quad , \quad A \text{ finito.}$$

Sia $n = |A|$: la cardinalità di $\mathcal{P}(A)$ è il numero dei sottoinsiemi di A e quindi può essere pensata come

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots\ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formula del binomio di Newton.}}}{=} (1+1)^n = 2^n$$

Def. Si dice combinazione di k elementi di classe n con ripetizioni una n-pla non ordinata con ripetizioni di k elementi.

Prop. Il numero delle combinazioni con ripetizioni di k elementi di classe n è

$$\binom{k+n-1}{n}.$$

Prop. Siano A, B insiemi finiti, $|A| = n$, $|B| = m$, $n \geq k$. Il numero delle funzioni surgettive di A in B è:

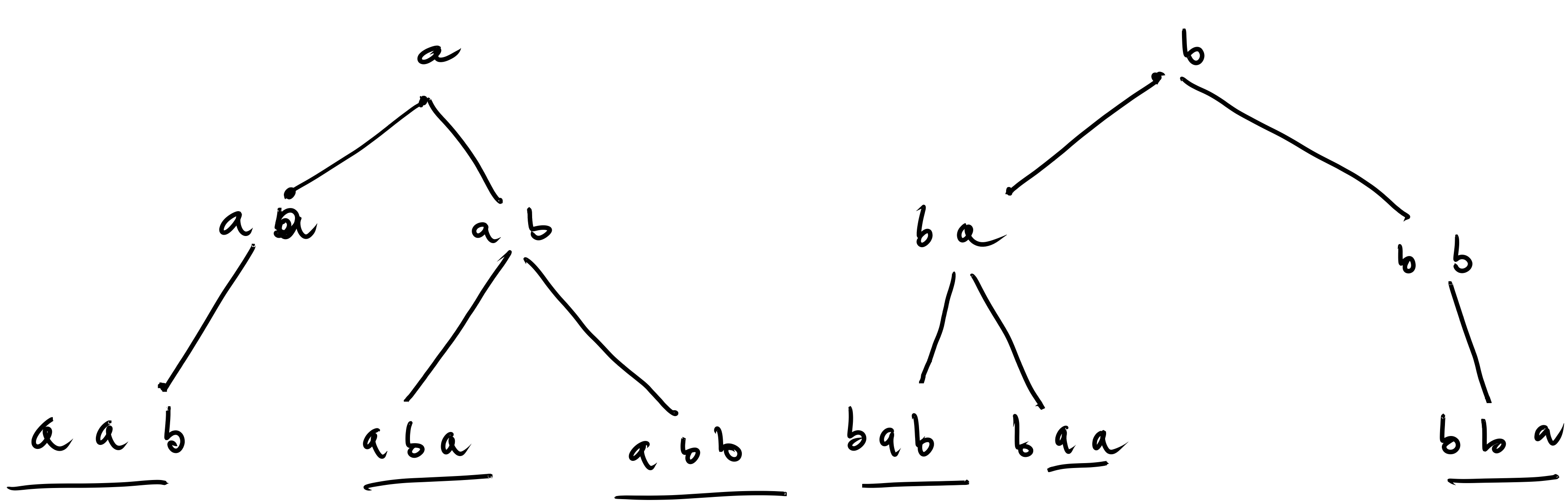
$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^{n}.$$

Esempi: 1. $n = 3$ $\quad m = 2$

$$\sum_{k=1}^{2} \binom{2}{k} (-1)^{2-k} k^{3} = \binom{2}{1}(-1)^{2-1} \cdot 1^{3} + \binom{2}{2}(-1)^{2-2} \cdot 2^{3} =$$

$$= 2(-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 8 = -2 + 8 = 6$$

$A = \{1, 2, 3\}$ $\quad B = \{a, b\}$

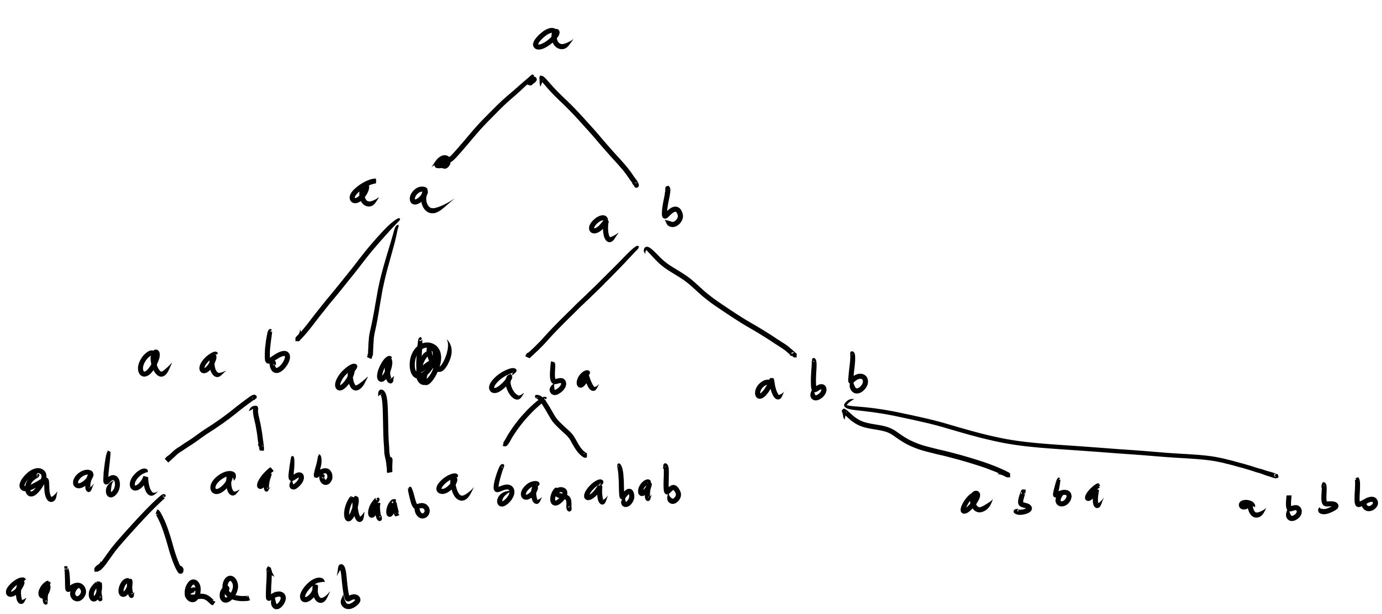


2. $n = 5$ $\qquad m = 2$

$$\sum_{k=1}^{2} \binom{2}{k} (-1)^{2-k} k^5 = \binom{2}{1} (-1)^{2-1} \cdot 1^5 + \binom{2}{2} (-1)^{2-2} 2^5 =$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3^2 = \underline{30}$$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\qquad B = \{a, b\}$



completare