Esercizio

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^*$ $\quad \forall x \in \mathbb{Z} \quad f(x) = 2x^2 + 3x + 2$

$g: \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ $\quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad g(n) = \frac{2+n}{n}$

(a) verificare che f, g sono ben poste

(b) stabilire se f, g sono iniettive, suriettive, bigettive e calcolare l'eventuale funzione inversa

(c) calcolare $f(0)$, $f(\{1,2\})$, $g^{-1}(\{2, \frac{1}{2}\})$, $g^{-1}(\{\frac{1}{5}\})$

(d) calcolare, se possibile, $g \circ f$ e $f \circ g$.

soluzione

(a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^*$ $\quad \underbrace{\forall x \in \mathbb{Z} \quad f(x) \neq 0}$?

poniamo $f(x) = 0 \iff \underbrace{2x^2 + 3x + 2 = 0}$ $\qquad \boxed{ax^2 + bx + c = 0}$

$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ $\qquad \Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 - 16 = -7 < 0$

l'equazione $2x^2 + 3x + 2 = 0$ non ha soluzioni e quindi $\forall x \in \mathbb{Z}$ $\quad f(x) = 2x^2 + 3x + 2 \neq 0$ $\quad$ f è ben posta

g è ben posta? $\qquad g: \underline{\underline{\mathbb{Z}^*}} \to \mathbb{Q}$ $\qquad g(n) = \frac{2+n}{n \neq 0}$ $\qquad$ <u>sì</u>

(b) f è iniettiva?

Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ con $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1^2 + 3x_1 + 2 = 2x_2^2 + 3x_2 + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x_1^2 + 3x_1 = 2x_2^2 + 3x_2 \Leftrightarrow 2x_1^2 - 2x_2^2 = 3x_2 - 3x_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\underbrace{(x_1 - x_2)}(x_1 + x_2) = 3\underbrace{(x_2 - x_1)} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)\left(2(x_1 + x_2) + 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee 2(x_1 + x_2) + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_2 = \frac{-3 - 2x_1}{2}$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_2 = \frac{-3 - 2x_1}{2}$

f non è iniettiva perché

$f\left(\frac{-3 - 2x_1}{2}\right) = f(x_1) \qquad \forall x_1 \in \mathbb{Z}$

verifica: $\underbrace{f\left(\frac{-3 - 2x_1}{2}\right)} = 2\left(\frac{-3 - 2x_1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{-3 - 2x_1}{2}\right) + 2 =$

$= \cancel{2}\,\frac{9 + 4x_1^2 + 12x_1}{\cancel{4}\,2} + \frac{-9 - 6x_1}{2} + 2 = \frac{\cancel{9} + 4x_1^2 + 12x_1 \cancel{- 9} - 6x_1 + 4}{2} =$

$= \frac{4x_1^2 + 6x_1 + 4}{2} = \frac{\cancel{2}(2x_1^2 + 3x_1 + 2)}{\cancel{2}} = 2x_1^2 + 3x_1 + 2 = \underbrace{f(x_1)}$

per es.

$\frac{-3 - 2x_1}{2} = n \qquad -3 - 2x_1 = 2n$

$-3 = 2(n + x_1)$

$\underbrace{-3 = 2(x + x_1)}$ mai verificata in $\mathbb{Z}$

e quindi f è iniettiva

Esercizio $f' : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^* \quad \forall x \in \mathbb{Q} \quad f'(x) = 2x^2 + 3x + 2$

non è iniettiva

f è surgettiva? $\underline{y \in \mathbb{Z}}^*$ $\exists\, x \in \mathbb{Z}$ tale che

$$2x^2 + 3x + 2 = y \qquad (1)$$

$$2x^2 + 3x + 2 - y = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2(2-y)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{8y - 7}}{4}$$

perché ci sia x verificante (1) $8y - 7 \geq 0$ $\quad y \geq \frac{7}{8}$

$1 \quad 2$

$7/8$

$y \geq 1$

$y = -3$ $\quad -3 < \frac{7}{8}$ e quindi non esiste x

$x \in \mathbb{Z}$ tale che $f(x) = -3$.

f non è surgettiva. $\quad$ f non è bigettiva e quindi non invertibile

$g : \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ $\qquad \forall n \in \mathbb{Z}^* \quad g(n) = \frac{2+n}{n}$

g è iniettiva? Siano $n, m \in \mathbb{Z}^*$ tali che

$g(n) = g(m) \iff \frac{2+n}{n} = \frac{2+m}{m} \iff \frac{2m + \cancel{mn} - 2n - \cancel{mn}}{nm} = 0$

$\iff 2m - 2n = 0 \iff m = n \qquad g$ è iniettiva

g è surgettiva? $y = \frac{1}{5}$ $\quad \exists\, n \in \mathbb{Z}^*$ tale che $g(n) = \frac{1}{5}$?

$\underbrace{\frac{2+n}{n} = \frac{1}{5}}$ $\qquad \frac{5(2+n) - n}{5n} = 0$

$10 + 5n - n = 0$

$10 + 4n = 0 \qquad n = -\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}^*$

g non è surgettiva quindi non è iniettiva e non è invertibile.

(c) $f(0)$ $\qquad f(\{1,2\})$

$f(0) = 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 2 = 2 \qquad f(1) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 2 = 2 + 3 + 2 = 7$

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 2 =$$
$$= 8 + 6 + 2 = 16$$

allora $f(\{1, 2\}) = \{7, 16\}$

$$g^{-1}\left(\left\{2, \tfrac{1}{2}\right\}\right) = \left\{n \in \mathbb{Z}^* : \underline{g(n) = 2} \vee \underline{g(n) = \tfrac{1}{2}}\right\}$$

$$g(n) = 2 \iff \frac{2+n}{n} = 2 \iff \frac{2+n-2n}{n} = 0 \iff$$

$$\iff 2 - n = 0 \iff n = 2$$

$$g(n) = \frac{1}{2} \iff \frac{2+n}{n} = \frac{1}{2} \iff \frac{4+2n-n}{2n} = 0$$

$$\iff \frac{4+n}{2n} = 0 \iff n = -4$$

$$g^{-1}\left(\left\{2, \tfrac{1}{2}\right\}\right) = \{2, -4\}.$$

$$g^{-1}\left(\left\{\tfrac{1}{5}\right\}\right) = \emptyset$$

(d)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{Z}^* \arrow[r, "g"] & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

$$f \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$$

$\forall x \in \mathbb{Z} \quad (g \circ f)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{n}) = g(\underbrace{2x^2+3x+2}_{n}) =$

$$= \frac{2+\overbrace{2x^2+3x+2}^{n}}{\underbrace{2x^2+3x+2}_{n}} = \frac{2x^2+3x+4}{2x^2+3x+2}.$$

$\mathbb{Z}^* \xrightarrow{g} \mathbb{Q}$

$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^*$

l'insieme di arrivo di g è diverso dall'insieme di partenza di f e quindi non esiste $f \circ g$.

---

altra verifica della non-surgettività di g

$y = \dfrac{2+n}{n}$

$yn - 2 - n = 0$

$n(y-1) = 2$

$n = \dfrac{2}{y-1}$

per esempio: $y = 4$ $\qquad n = \dfrac{2}{4-1} = \dfrac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$

Def. Sia $p \in \mathbb{Z}$ $p \neq 0$ $p \neq \pm 1$. Si dice che p è un numero primo se

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad p \mid a \cdot b \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b.$$

$6 \mid 12$ 6 non è numero primo

$6 \mid \underline{2 \cdot 6}$ $6 / 2 \vee 6 / 6$ vero

$\neg(6 \mid 3 \vee 6 \mid 4)$

$6 / \underline{3 \cdot 4}$ ma $6 \nmid 3 \wedge 6 \nmid 4$

$7 \mid 14$ $7 / 7 \cdot 2$ con $7/7 \vee \underline{7/2}$

$7 / 42$ $42 = 6 \cdot 7$ $42 = 3 \cdot 14$

$42 = 2 \cdot 21$

$7 / 6 \cdot 7$ con $\underline{7/6} \vee \underline{7/7}$ vero

$7 / 3 \cdot 14$ con $\underbrace{7 \nmid 3}_{f} \vee \underbrace{7 / 14}_{v}$ vero

$7 / 2 \cdot 21$ con $\underbrace{7 / 2}_{\text{falso}} \vee \underbrace{7 / 21}_{\text{vero}}$ vero

Def. Sia $p \in \mathbb{Z}^*$ $p \neq \pm 1$. Si dice che p è irriducibile se

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \mid p \Rightarrow (a = \pm 1 \ \vee \ a = \pm p)$$

Teorema. Un numero intero $p \neq 0$, $p \neq \pm 1$ è primo se e solo se è irriducibile.

Teorema fondamentale dell'aritmetica.
Sia $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ $n \neq \pm 1$. Allora esistono $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{Z}$ numeri primi $\exists h_1, \dots, h_s \in \mathbb{N}^*$ tali che

$$n = p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{h_s}.$$

Questa fattorizzazione è essenzialmente unica, nel senso che se $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{Z}$ numeri primi e se $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}^*$ tali che

$$n = q_1^{k_1} \cdot q_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot q_r^{k_r}$$

allora $r = s$ ed inoltre si può cambiare l'ordine di $q_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot q_r^{k_r}$ in modo che $\forall i = 1, \ldots, s = r$

$q_i = \pm p_i$ e $k_1 = h_1, \ldots, k_s = h_s$.

Esempi $\quad 28 = \underset{p_1}{2}^2 \cdot \underset{p_2}{7}^1 = \underset{q_1}{7} \cdot \underset{q_2}{(-2)}^2 = (-2)^2 \cdot 7$

$100 = 5^2 \cdot 2^2 \qquad 100 = (-2)^2 \cdot (-5)^2 = (-5)^2 \cdot (-2)^2$

$8 = 2^3 \qquad \cancel{8 = (-2)^3}$

<u>Osserv</u>. Siano $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Allora si possono esprimere come prodotto degli stessi fattori primi ammettendo la possibilità che alcuni esponenti siano 0.

Esempio: $580 = 2^2 \cdot 5 \cdot 29 \qquad 450 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2$

$580 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5 \cdot 29 \qquad 450 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 29^0$

Sia $a = p_1^{h_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{h_s} \qquad b = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$

$M.C.D.(a, b) = p_1^{\min(h_1, k_1)} \cdot p_2^{\min(h_2, k_2)} \cdot \ldots \cdot p_s^{\min(h_s, k_s)}$

per es. $M.C.D.(580, 450) = 2^{\min(2,1)} \cdot 3^{\min(0,2)} \cdot 5^{\min(1,2)} \cdot 29^{\min(1,0)}$

$= 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 29^0 = 2 \cdot 5 = 10$

$m.c.m.(a,b) = p_1^{\max(h_1,k_1)} \cdot p_2^{\max(h_2,k_2)} \cdot \ldots \cdot p_s^{\max(h_s,k_s)}$

$m.c.m.(580, 450) = 2^{\max(2,1)} \cdot 3^{\max(0,2)} \cdot 5^{\max(1,2)} \cdot 29^{\max(1,0)} =$

$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 29 = 26.100$

<u>Teorema</u>. Esistono infiniti numeri primi.

Dim. supponiamo che esista un numero finito di numeri primi $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$.

Sia $q = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n \in \mathbb{N}$ $\qquad$ q non è primo

$\forall i = 1, \ldots, n \quad p_i \leq q$

$\forall i = 1, \ldots, n \quad p_i < q+1$ $\qquad$ $q+1$ non è primo.

$\exists j = 1, \ldots, n$ tale che $p_j \mid q+1$

però certamente $p_j \mid q$

$(p_j \mid q+1 \wedge p_j \mid q) \Rightarrow p_j \mid q+1-q \Rightarrow p_j \mid 1 \Rightarrow p_j = 1$

in contraddizione col fatto che p_j è un numero primo.

Principio d'induzione completa.

Sia $n_0 \in \mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{Z}(n_0) = \{n \in \mathbb{Z} : n_0 \leq n\}$

(per es. $\mathbb{Z}(0) = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}(1) = \mathbb{N}^*$)

sia inoltre P una proprietà che ha senso $\forall n \in \mathbb{Z}(n_0)$

Se

1. $P(n_0)$ è vera
2. $\forall n \in \mathbb{Z}(n_0)$ $\quad P(n)$ vera $\Rightarrow P(n+1)$ vera

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{Z}(n_0)$.

Esempi.

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

per es. $1+2+3+\ldots+50 = \dfrac{50 \cdot 51}{2}$

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. passo base $\qquad P(1): \sum_{i=1}^{1} i = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$

$$1 \qquad \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 \qquad \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$$ quindi $P(1)$ è vero

2. passo induttivo

Ipotesi d'induzione: $P(n)$ sia vero, ovvero

che $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

tesi $\qquad P(n+1)$ è vero

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = 1+2+\ldots+n+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = (1+2+\ldots+n)+n+1 = \sum_{i=1}^{n} i + n+1 \overset{\text{ipotesi d'induz.}}{=}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Per il principio di induzione completa $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(2) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\frac{1}{1\cdot(1+1)} + \frac{1}{2\cdot(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$P(1)$ vero: $$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1+1}$$ da verificare

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

dunque $P(1)$ è vero

ipotesi induttiva: $P(n)$ vero; $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

tesi $P(n+1)$ vero: $$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}}_{} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

ipotesi d'induz.

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

$P(n+1)$ è vero e dunque $P(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}^*$.