Def. Si dice matrice di tipo (m,n), $m,n \in \mathbb{N}^*$ una disposizione di numeri su m righe e n colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix}$$

a^i_j: $i \to$ i-ma riga, $j \to$ j-ma colonna

$i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$

I numeri che formano la matrice si dicono elementi della matrice.

Sia $\mathbb{K}$ uno dei campi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_p$ (p primo). L'insieme delle matrici di tipo (m,n) su $\mathbb{K}$ si indica con $M_{(m,n)}(\mathbb{K})$.

Due matrici A, B sono uguali se sono dello stesso tipo e $\forall i = 1 \dots m$, $\forall j = 1 \dots n$, $a^i_j = b^i_j$

Esempi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{Q}) \to M_2(\mathbb{Q}) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} \\ 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

a^1_2

$$\begin{pmatrix} [1]_7 & [0]_7 & [3]_7 \\ [2]_7 & [3]_7 & [0]_7 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{Z}_7)$$

a^2_1

$$(3) \in M_{1,1}(\mathbb{Q}) \to M_1(\mathbb{Q}) \qquad (\sqrt{2} \quad \sqrt{3} \quad -\sqrt{3}) \in M_{1,3}(\mathbb{R})$$

Si può usare anche la notazione compatta:

$$A = (a^i_j) \qquad i = 1, \dots, m \quad , j = 1, \dots, n$$

L'indice in alto indica la riga, quello in basso la colonna; talvolta si incontrano le notazioni

$$(a^{ij}) \qquad (a_{ij}) \qquad i = 1, \dots, m \ , \ j = 1, \dots, n.$$

nelle quali il primo è l'indice di riga.
Una matrice si dice <u>quadrata</u> se $n = m$ e si dice matrice quadrata di ordine n; l'insieme delle matrici quadrate di ordine n si indica con $M_n(\mathbb{K})$.
Si dice che una matrice quadrata è simmetrica se $\forall i, j = 1, \dots, n$ $a^i_j = a^j_i$.

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & \cdots & a^1_n \\ a^1_2 & a^2_2 & a^2_3 & \cdots & a^2_n \\ a^1_3 & a^2_3 & a^3_3 & \cdots & a^3_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^1_n & a^2_n & a^3_n & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

Esempi: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ simmetrica $\quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ simmetrica.

$\longrightarrow$ calcolare C^t

Def. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Si dice matrice trasposta di A e si indica con A^t la matrice di tipo (n, m) che si ottiene scambiando tra loro le righe e le colonne di A.

$$A^t \in M_{n,m}(\mathbb{K}) \qquad (A_{-1})$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & & a_2^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & & a_n^m \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{K}).$$

Oss. Una matrice quadrata è simmetrica se e solo se coincide con la sua trasposta.

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{Q}) \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{Q})$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \qquad A'^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Si può definire la somma tra due matrici dello stesso tipo:

$\forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $A = (a^i_j)$, $B = (b^i_j)$ $\quad i = 1, \dots, m$ i $j = 1, \dots, n$

$$A + B = (a^i_j + b^i_j) \qquad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Quindi resta definita

$$+ : M_{m,n}(\mathbb{K}) \times M_{m,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{K})$$

e si prova facilmente che $(M_{m,n}(\mathbb{K}), +)$ è un gruppo abeliano, usando le proprietà del gruppo $(\mathbb{K}, +)$.

$\forall A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad (A+B)+C = A+(B+C)$ associativa

$\exists\ \underline{0} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ dove $\quad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

tale che $\forall\ A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \quad A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$. esistenza elem. neutro

$\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $a = (a^i_j)$ $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ esiste la matrice $-A = (-a^i_j)$ $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ tale che

$$A + (-A) = (-A) + A = \underline{0}$$

$\forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad A + B = B + A.$

Esempi:

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & 0+0 & -1+(-1) \\ 2+2 & 2+1 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) $A + \underline{0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $-A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siano $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Allora si può eseguire il prodotto righe per colonne $A \cdot B$:

Se $A = (a^i_j)$ $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$

$B = (b^h_k)$ $h = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p$

allora $$A \cdot B = \left(\sum_{j=1}^{n} a^i_j \, b^j_k \right). \qquad i = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, p$$

$AB \in M_{m,p}(\mathbb{K})$

Esempi: 1°)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{Q}) \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$$

$$A \cdot B \in M_{3,2}(\mathbb{Q})$$

$a^1_1 \cdot b^1_1 + a^1_2 \cdot b^2_1$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{Q})$$

Non può eseguire il prodotto $B \cdot A$ perché B ha 2 colonne e A ha 3 righe.

2°)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{Q}) \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{Q})$$

Si può eseguire il prodotto $\qquad C \cdot D \in M_4(\mathbb{Q})$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 0 & 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$$

$D \in M_{3,4}(\mathbb{Q}) \qquad C \in M_{4,3}(\mathbb{Q})$ quindi si può eseguire il prodotto $\underline{D \cdot C} \in M_3(\mathbb{Q})$.

esercizio

Ovviamente due matrici quadrate dello stesso tipo si possono moltiplicare, per cui resta definito

$$\cdot : M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$$

e si verifica che $(M_n(\mathbb{K}), \cdot)$ è un monoide non commutativo, con unità I_n.

Esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il fatto che $(M_n(\mathbb{K}), \cdot)$ sia un monoide discende subito dalla proposizione che segue:

Si indica con $I_n \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

I_n matrice identica o unità di ordine n.

Proposizione. 1. $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ $\forall B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ $\forall C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

2. $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ $\qquad I_{\underline{\underline{m}}} \cdot A = A\, I_{\underline{\underline{n}}} = A$

Si può considerare la struttura algebrica $(M_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$, che si prova essere un anello non commutativo, in quanto

$(M_n(\mathbb{K}), +)$ è un gruppo abeliano

$(M_n(\mathbb{K}), \cdot)$ è un monoide non commutativo

$\forall A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$ risulta

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$$

$I_1 = (1) \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$

Def. Siano $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $A = (a^i_j)$ $i = 1, .., m$; $j = 1, .., n$

Si definisce prodotto $\lambda \cdot A = (\lambda a^i_j)$ $i = 1, .., m$
$j = 1, .., n$

Esempio: $2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 12 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Proprietà:
(1) $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad 1 \cdot A = A$
(2) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
(3) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \ \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \ (\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A.$

Def. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si dice che A è una matrice invertibile se esiste $A' \in M_n(\mathbb{K})$ tale che $A \cdot A' = A' \cdot A = I_n$.

A' si chiama matrice inversa di A e si indica con A^{-1}.

Quindi una matrice quadrata A è invertibile se è un elemento invertibile di $(M_n(\mathbb{K}), \cdot)$

Non tutte le matrici sono invertibili: sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

A non è invertibile: se esistesse $A' \in M_2(\mathbb{R})$, $A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

tale che $AA' = A' \cdot A = I_2$, si avrebbe

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\begin{pmatrix} x+z & y+t \\ 2x+2z & 2y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+t=0 \\ 2(x+z)=0 \\ 2(y+t)=1 \end{cases}$$

quindi $x+z=1 \wedge x+z=0$, contraddizione

Sia $GL(n,\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : A$ è invertibile$\}$.

Si ha: $I_n \in GL(n,\mathbb{K})$ $\quad I_n \cdot I_n = I_n$, ovvero $I_n^{-1} = I_n$

$\forall A, B \in GL(n,\mathbb{K}) \quad A \cdot B \in GL(n,\mathbb{K})$.

Infatti
$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} =$$
$$= A \cdot A^{-1} = I_n$$

e analogamente:
$$(B^{-1} A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = I_n$$

Quindi $A \cdot B$ è invertibile e la matrice inversa di $A \cdot B$ è:
$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Si può concludere che $(GL(n,\mathbb{K}), \cdot)$ è un gruppo non abeliano.
$$\cdot : GL(n,\mathbb{K}) \times GL(n,\mathbb{K}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{K}).$$

$A=(-1)\in M_1(\mathbb{Q})$ $\det A = -1$

Determinante di una matrice quadrata

Si definisce determinante di una matrice $(a)\in M_1(\mathbb{K})$ il numero a stesso.

Si definisce il determinante di una matrice $A\in M_2(\mathbb{K})$,

$$A=\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix}$$

il numero $\det(A)=a^1_1\cdot a^2_2 - a^1_2\cdot a^2_1$.

Si può scrivere anche nel modo seguente

$$\det A = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix} = a^1_1 a^2_2 - a^1_2 \cdot a^2_2 \in \mathbb{K}$$

Es. (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0$

(2) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 3$

Individuazione delle matrici invertibili e algoritmo per determinare la matrice inversa di una matrice invertibile.

Sia $A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & & \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix}$. Si dice minore complementare dell'elemento a^i_j il determinante (per ora si può fare solo per le matrici di ordine 3) della matrice quadrata di ordine $n-1$, ottenuta da A eliminando la i-ma riga e la j-ma colonna (ovvero la riga e la colonna alle quali l'elemento a^i_j appartiene).

Esempi. (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\to a^1_1$

minore complementare di a^1_1 : $|1| = 1$

" " " a^2_1 : $|0| = 0$

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b^3_1 $\quad$ b^2_2

" " " b^2_2 : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

" " " b^3_1 : $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$

Sia $A \in M_3(\mathbb{K})$. Si dice complemento algebrico dell'elemento a^i_j di A il prodotto tra il minore complementare di a^i_j e $(-1)^{i+j} =$
- -1 $\quad$ $i+j$ dispari
- 1 $\quad$ $i+j$ pari.

Esempi (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad a^1_1 \quad a^1_2 \quad a^2_1$

complemento algebrico di a^1_1 : $(-1)^{1+1} \cdot 1 = 1$

" " " a^2_1 : $(-1)^{2+1} \cdot 0 = (-1) \cdot 0 = 0$

" " " a^1_2 : $(-1)^{1+2} \cdot (-1) = (-1) \cdot (-1) = 1$

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad a^2_3 \quad a^3_1$

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix}$$

complemento algebrico di a^2_2 : $(-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 = 0$

" " " a^3_1 : $(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(-2) = -2$

" " " a^2_3 : $(-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 = -2.$

Teorema di Laplace. Sia $A \in M_3(\mathbb{K})$. Allora la somma dei prodotti degli elementi di una stessa riga o colonna di A per i rispettivi complementi algebrici non dipende dalla riga o colonna scelta.

La somma dei prodotti degli elementi di una stessa riga o colonna di A si dice determinante di A.

A questo punto il procedimento si itera, per cui il Teorema di Laplace può essere enunciato per le matrici q. di ordine un qualunque numero naturale e dunque si può dare la definizione di determinante di una matrice quadrata di qualunque ordine.

Esempi.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1\left((-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) + 0 \cdot \left((-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) + (-1)\left((-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 1 \cdot 1 \cancel{+ 0 \cdot (-1) \cdot (-1)} + (-1)(-1) = 2$$

$$(-1)\cdot\left((-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right)+0\cdot\left((-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right)+1\cdot\left((-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}\right)=$$

$$=(-1)\cdot 1\cdot(-1)+\cancel{0\cdot(-1)\cdot 1}+1\cdot 1\cdot 1=2$$

$$\boxed{\det A = 2}$$

Regola di Sarrus: Solo per matrici di ordine 3

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_1 & a^1_2\\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & a^2_1 & a^2_2\\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 & a^3_1 & a^3_2 \end{array}\right. = \left(a^1_1\cdot a^2_2\cdot a^3_3 + a^1_2\cdot a^2_3\cdot a^3_1 + a^1_3\cdot a^2_1\, a^3_2\right) -$$

$$-\left(a^1_3\, a^2_2\, a^3_1 + a^1_1\, a^2_3\cdot a^3_2 + a^1_2\, a^2_1\, a^3_3\right).$$

Esempio:

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right. =$$

$$= 1\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1)\cdot 1 - \left((-1)\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 0\cdot 1 + 0(-1)\cdot 1\right) = 2$$

Esempio

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a^1_3 $\quad$ a^2_3

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{0 \cdot \left((-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right)} + 1 \cdot \left((-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right) + 0 + 0$$

$$= 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \left(1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \right) =$$

$$= (-1) \cdot \left((-1) + (-1) \cdot 1 \right) = (-1) \cdot (-2) = 2$$

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_4 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & a^2_4 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 & a^3_4 \\ a^4_1 & a^4_2 & a^4_3 & a^4_4 \end{pmatrix}$$

Teorema Una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

Quindi $GL(n, \mathbb{K}) = \{ A \in M_n(\mathbb{K}) : \det A \neq 0 \}$.

Sia $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Si dice matrice <u>aggiunta</u> di A e si indica con $\operatorname{agg}(A)$, la matrice quadrata di ordine n trasposta della matrice costituita dai complementi algebrici degli elementi di A.

Esempi. (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (-1)^{1+2} \cdot |1| = -1$$

$$\det A = 2 - (-1) = 3$$

$$\operatorname{agg}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(2°)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det B = 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

$$\operatorname{agg}(B) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-1} \operatorname{agg}(B) = -\operatorname{agg}(B) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

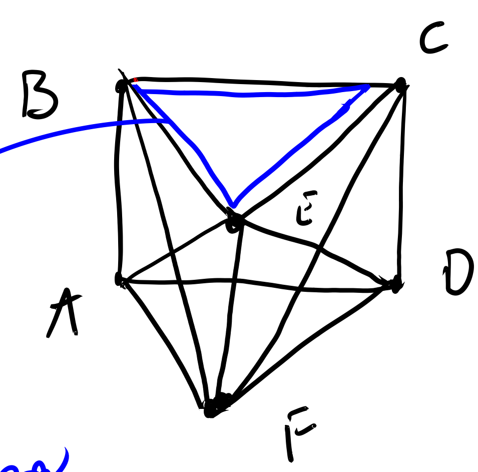
Sia $A \in GL(n, \mathbb{K})$. La matrice inversa di A è data dalla formula:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{agg}(A).$$

Teorema di Kuratowski

Un grafo è planare se e solo se non ammette sottografi isomorfi a K_5 o a $K_{3,3}$.

Esempio



non è bipartito perché il circuito in azzurro ha lunghezza dispari

~~AB~~ ~~AE~~ ~~AD~~ ~~AF~~

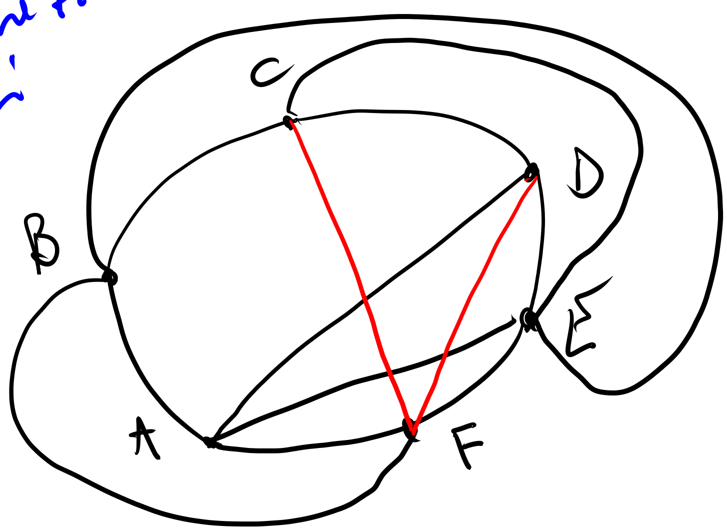
~~BE~~ ~~BF~~ ~~BC~~

~~CE~~ ~~CD~~ ~~CF~~

~~DE~~ DF ~~EF~~

$$\left.\begin{matrix} d(A)=4 & d(B)=4 & d(C)=4 \\ d(D)=4 & d(E)=5 & d(F)=5 \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

esiste cammino Euleriano



il grafo non è planare