$R \subset A \times A$ si dice di equivalenza se è

Riflessiva $\forall a \in A \quad (a,a) \in R$

Simmetrica $\forall a,b \in A \quad (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

Transitiva $\forall a,b,c \in A \quad \big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R\big) \Rightarrow (a,c) \in R.$

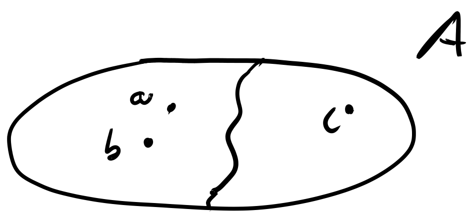
<u>Def</u> Siano A un insieme $A \neq \emptyset$, R relazione di equivalenza su A. $\forall a \in A$ si dice <u>classe di equivalenza di a rispetto a R</u> il sottoinsieme di A:

$$[a]_R = \{ b \in A : (a,b) \in R \}.$$

Esempi. 1. $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}$ su $A = \{a,b,c\}$

R è di equivalenza

$$[a]_R = \{a, b\} = [b]_R \qquad [c]_R = \{c\}$$



2. $R' = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x^2 = y^2 \}$

R' è di equivalenza: $X^3 = Y^3$

R' riflessiva $\forall x \in \mathbb{Z} \quad x^2 = x^2 \Rightarrow (x,x) \in R'$

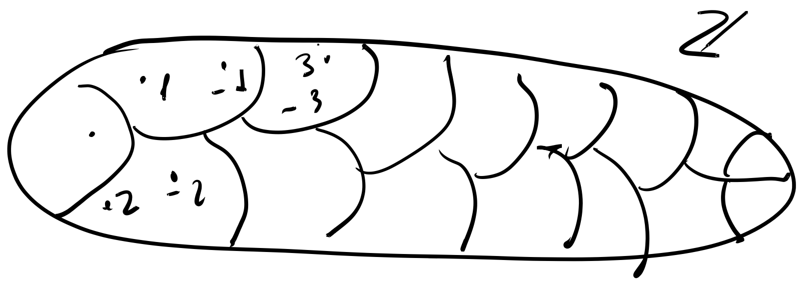
R' simmetrica $\quad \forall x,y \in \mathbb{Z} \quad (x,y)\in R' \Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow y^2=x^2 \Rightarrow (y,x)\in R'$

R' transitiva $\quad \forall x,y,z \in \mathbb{Z} \quad (x,y)\in R' \wedge (y,z)\in R' \Rightarrow x^2=y^2 \wedge y^2=z^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = z^2 \Rightarrow (x,z)\in R'$

$[0]_{R'} = \{0\}$; $[1]_{R'} = \{1,-1\} = [-1]_{R'}$; $[2]_{R'} = \{2,-2\} = [-2]_{R'}$ ...

$\forall x \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$ $\quad [x]_{R'} = \{x,-x\}$.



3. $R'' = \{(n,m)\in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* : n\cdot m > 0\}$ $\qquad \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$

R'' è di equivalenza

R'' è riflessiva $\quad \forall n \in \mathbb{Z}^* \quad n\cdot n = n^2 > 0 \Rightarrow (n,n)\in R''$

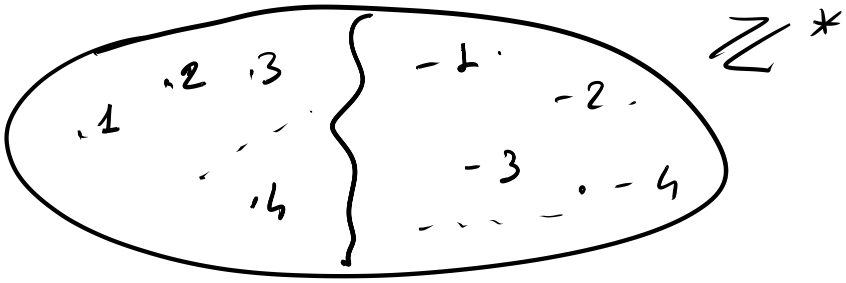
R'' è simmetrica $\quad \forall n,m \in \mathbb{Z}^* \quad (n,m)\in R'' \Rightarrow n\cdot m > 0 \Rightarrow m\cdot n > 0 \Rightarrow (m,n)\in R''$

R'' è transitiva $\quad \forall n,m,p \in \mathbb{Z}^* \quad (n,m)\in R'' \wedge (m,p)\in R'' \Rightarrow$

$n\cdot m > 0 \wedge m\cdot p > 0 \Rightarrow n\cdot m\cdot m\cdot p > 0 \Rightarrow \underbrace{np}\cdot m^2 > 0 \Rightarrow np > 0$

$\Rightarrow (n,p)\in R''$

$[1]_{R''} = \{1,2,3,\dots,n\dots\}$ $\qquad [-1]_{R''} = \{-1,-2,-3,\dots,-n,\dots\}$.



Prop. Siano A insieme $A \neq \emptyset$, R una relazione di equivalenza su A. Allora risulta

1. $\forall a \in A \quad [a]_R \neq \emptyset$

2. $\forall a, b \in A \quad [a]_R = [b]_R \iff (a,b) \in R$

3. $\forall a, b \in A \quad [a]_R \cap [b]_R = \emptyset \iff (a,b) \notin R$.

<u>Dim</u>. 1. $\forall a \in A \quad [a]_R \neq \emptyset$ perché $a \in [a]_R$ in quanto $(a,a) \in R$

2. $\Rightarrow$) siano $a, b \in A$ Ipotesi $[a]_R = [b]_R$ Tesi $(a,b) \in R$

$$[a]_R = [b]_R \Rightarrow a \in [a]_R = [b]_R \Rightarrow a \in [b]_R \Rightarrow (b,a) \in R \overset{\text{simmetria}}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow \underline{(a,b) \in R}$

$\Leftarrow$) siano $a, b \in A$ Ipotesi $(a,b) \in R$ Tesi $\underline{\underline{[a]_R}} = \underline{\underline{[b]_R}}$.

per provare la tesi bisogna verificare che

$$[a]_R \subset [b]_R \quad \wedge \quad [b]_R \subset [a]_R.$$

$a \wedge b \iff b \wedge a$

$\underbrace{(a,b)\in R}$ sia $c\in[a]_R \Rightarrow (a,c)\in R \wedge (a,b)\in R \Rightarrow$

$$\underset{\text{R è simmetrica}}{\Rightarrow} (b,a)\in R \wedge (a,c)\in R \underset{\text{R è transitiva}}{\Rightarrow} (b,c)\in R \Rightarrow c\in[b]_R$$

Abbiamo preso $c\in[a]_R$ e abbiamo provato che $c\in[b]_R$ da cui segue che $[a]_R\subseteq[b]_R$

L'altra inclusione $[b]_R\subseteq[a]_R$ è analoga (riscriverla per esercizio). In conclusione $[a]_R=[b]_R$.

3. $\Rightarrow)$ $a,b\in A$
Ipotesi $[a]_R\cap[b]_R=\emptyset$
Tesi $(a,b)\notin R$

supponiamo che $\underbrace{(a,b)\in R}$, allora $\underbrace{b\in[b]_R}_{\text{sempre vero}} \wedge \underbrace{b\in[a]_R}_{\text{per def. di classe di equiv.}} \Rightarrow$

$\Rightarrow b\in[b]_R\cap[a]_R=\emptyset$ contraddizione.

$\Leftarrow)$ $a,b\in R$
Ipotesi $\underbrace{(a,b)\notin R}$
Tesi $[a]_R\cap[b]_R=\emptyset$

per assurdo supponiamo che $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$.

allora esiste $c \in [a]_R \cap [b]_R$ e quindi:

$$(a,c) \in R \wedge (b,c) \in R \underset{\text{simmetria}}{\Rightarrow} (a,c) \in R \wedge (c,b) \in R \underset{\text{transitività}}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow (a,b) \in R$ contraddizione.

Osserv. A, B insiemi $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

A, B, C insiemi $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C =$

$$= \{x : x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}$$

$A_1, \dots, A_n$ insiemi

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n\} =$$

$$= \{x : \exists i = 1, \dots, n \text{ tale che } x \in A_i\}$$

In generale $(A_i)_{i \in I}$ una famiglia di insiemi

(per esempio $A_1, A_{\sqrt{3}}, A_{1/2}, A_7, A_{-2}$ $\quad I = \{1, \sqrt{3}, 1/2, 7, -2\} \subset \mathbb{R}$)

$$\bigsqcup_{i\in I} A_i = \{x : \exists\, i \in I \text{ tale che } x \in A_i\} \quad \left(\forall j \in I \quad A_j \subset \bigsqcup_{i\in I} A_i\right)$$

Prop. Siano A insieme $A \neq \emptyset$, R una relazione di equivalenza su A.
Allora
$$\bigsqcup_{x\in A} [x]_R = A.$$
unione delle classi di equivalenza di x al variare di x in A.

Dim. $\bigsqcup_{x\in A} [x]_R \subset A \quad \wedge \quad A \subset \bigsqcup_{x\in A} [x]_R$

$y \in \bigsqcup_{x\in A} [x]_R \Rightarrow \exists\, x_0 \in A$ tale che $y \in [x_0]_R \subset A \Rightarrow y \in A$.

$y \in A \Rightarrow y \in [y]_R \Rightarrow y \in \bigsqcup_{x\in A} [x]_R$.

Def. Sia A un insieme $A \neq \emptyset$ e sia $\Pi \subset \mathcal{P}(A)$.
Si dice che Π è una <u>partizione</u> di A se

1. $\forall X \in \Pi \quad X \neq \emptyset$
2. $\forall X, Y \in \Pi$, $X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$
3. $\bigsqcup_{X\in\Pi} X = A$.

Si può anche scrivere così $\Pi = \{X_i \subset A : i \in I\}$

1. $\forall i \in I \quad X_i \neq \emptyset$
2. $\forall i, j \in I \quad i \neq j \quad X_i \cap X_j = \emptyset$
3. $\bigsqcup_{i\in I} X_i = A$.

Osserv. Siano A un insieme, $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su A. Allora l'insieme

$$\Pi = \{ [a]_{\mathcal{R}} : a \in A \}$$

è una partizione di A. Infatti

1. $\forall a \in A \quad [a]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$

2. $\forall a, b \in A \quad [a]_{\mathcal{R}} \neq [b]_{\mathcal{R}} \Rightarrow [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} = \emptyset$

$[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow (a,b) \in \mathcal{R}$

$\neg([a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}) \Leftrightarrow \neg(a,b) \in \mathcal{R}$

$[a]_{\mathcal{R}} \neq [b]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow (a,b) \notin \mathcal{R}$.

3. $\bigcup_{a \in A} [a]_{\mathcal{R}} = A$.

Esercizio. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\Pi = \{ \underbrace{\{1, 2, 3\}}_{A_1}, \underbrace{\{4, 5\}}_{A_2} \}$$

Π è una partizione

1. $A_1 \neq \emptyset \qquad A_2 \neq \emptyset$
2. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
3. $A_1 \cup A_2 = X$

$$R_\pi = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(2,3),(3,2),(2,2),(3,3),$$
$$(4,4),(5,5),(4,5),(5,4)\} \subset X \times X$$

R_π è una relazione di equivalenza.

In generale, se π è una partizione su un insieme X ad essa si può associare una relazione di equivalenza.

Def. Siano A insieme $A \neq \emptyset$, R una relazione di equivalenza su A. Si dice insieme quoziente di A per R e si indica con il simbolo

$$A/_R \subset \mathcal{P}(A).$$

l'insieme di tutte le classi di equivalenza rispetto a R. In simboli

$$A/R = \{[a]_R : a \in R\}.$$

si tratta di una partizione su A.

Esempi. 1. $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$ su $A = \{a,b,c\}$

$$[a]_R = \{a,b\} = [b]_R \qquad [c]_R = \{c\}$$

$$A/R = \{[a]_R, [c]_R\} = \{\{a,b\},\{c\}\}.$$

2. $R' = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ x^2 = y^2 \}$

$[0]_R = \{0\}$ $\qquad$ $[x]_R = \{x, -x\}$

$$\mathbb{Z}/_{R'} = \{ [x]_R = \{x, -x\} \ ; \ x \in \mathbb{N} \} \cup \{ [0]_R = \{0\} \}$$

3. $R'' = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \ : \ x \cdot y > 0 \}$

$$\mathbb{Z}^*/_{R''} = \{ [1]_R , \ [-1]_R \}.$$

$n \in \mathbb{N}^*$ $\qquad$ Si indica con $R_n = \{ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ n \mid a-b \}$ di equivalenza

$$\mathbb{Z}/R_n = \mathbb{Z}_n.$$

Funzioni.

$\exists!$ si legge esiste un unico.

Def. Siano A, B insiemi non vuoti e sia $R \subset A \times B$ (R relazione tra gli elementi di A e gli elementi di B).

R è una relazione funzionale se

$\forall a \in A \ \exists!\, b \in B$ tale che $(a,b) \in R$.

$\exists a \in A$, $\exists b_1, b_2 \in B$.

$b_1 \neq b_2$ (a,b_1) $(a,b_2) \in R$ $\Rightarrow$ R non è funzionale

se $\exists a \in A$ che non è la prima coordinata di alcuna coppia, allora R non è funzionale

---

Esempi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{a, b, x, y\}$

$R_1 = \{(1,a), (1,b), (2,a), (3,b), (4,x), (5,x)\}$ non è funzionale

perché $(\underline{1},a), (\underline{1},b) \in R_1$

$R_2 = \{(1,a), (2,a), (3,b), (4,x), (5,y)\}$ è funzionale

$f_2 : A \to B$ $f_2(1) = a$ $f_2(2) = a$ $f_2(3) = b$ $f_2(4) = x$ $f_2(5) = y$

$$\boxed{\begin{array}{l} X = \{1,5\} \\ f_2(X) = \\ \{a, y\} \end{array}}$$

$R_3 = \{(1,y), (3,x), (5,a), (4,b)\}$ non è funzionale

$f_2(A) = \{a,b,x,y\} = B$

quindi non esiste in R_3 alcuna coppia con prima coordinata 2.

Notazione. Siano A, B insiemi non vuoti, R una relazione funzionale tra gli elementi di A e gli elementi di B. La terna $f = (A, B, R)$ si dice funzione o applicazione o mappa tra A e B.

A si dice insieme di partenza o dominio di f

B " " " di arrivo di f

R " " grafico di f.

La funzione $f = (A, B, R)$ si denota con il simbolo

$$f : A \to B.$$

$\forall a \in A \ \exists! \, b \in B$ tale che $(a, b) \in R$

poniamo $b = f(a)$.

Esempi. 1. $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} : y = -x\}$ è funzionale

$\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists! \ y = -x \in \mathbb{Z}$ tale che $(x, y) \in R$

$f_1 = (\mathbb{N}, \mathbb{Z}, R_1) \qquad \forall x \in \mathbb{N} \qquad f(x) = -x.$

$f_1 : \underline{\underline{\mathbb{N}}} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad \underbrace{x \longmapsto -x}_{\mathbb{N}}$

$X = \{2, 4, 6\}$

$f_1(X) = \{-2, -4, -6\}$

2. $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y = -x\}$ è funzionale

$f_2 = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, R_2)$

$X = \{-1, 1, 2, -3\}$

$f(X) = \{1, -1, -2, 3\}$.

$f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $\quad \underbrace{x \longmapsto -x}$

$f_1 \neq f_1$

3. $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q} : y = \frac{2}{x}\}$ è funzionale

$\forall x \in \mathbb{Q}^* \ \exists! y \in \mathbb{Q}$ tale che $y = \frac{2}{x}$.

$f_3 = (\mathbb{Q}^*, \mathbb{Q}, R_3)$

$f_3 : \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ $\quad x \longmapsto \frac{2}{x}$

4. $R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : y = \frac{2}{x}\}$ non è funzionale

perché $\exists x = 0 \in \mathbb{Q}$ tale che $\forall y \in \mathbb{Q}$ $(0, y) \notin R_4$

5. $R_5 = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* : y = \frac{2}{x}\}$ è funzionale

$f_5 = (\mathbb{Q}^*, \mathbb{Q}^*, R_5)$

$f_5 : \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Q}^*$ $\quad x \longmapsto \frac{2}{x}$

Osserv. Siano $\underline{f: A \to B}$, $\quad g: C \to D$ due funzioni

$$x \mapsto f(x) \qquad y \mapsto g(y)$$

$$f = g \iff A = C \wedge B = D \wedge \forall x \in A = C \quad f(x) = g(x).$$

Esempi: 1. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto 4n+2$

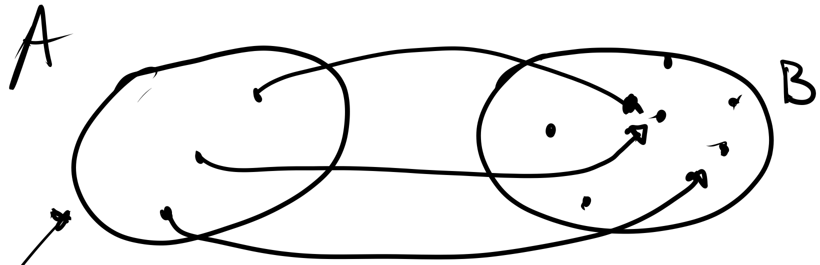
$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad n \mapsto (2n+1)2$

$f = g$.

2. $f_1: \mathbb{N} \to \underset{\sim}{\mathbb{Z}} \qquad n \mapsto 4n+2$

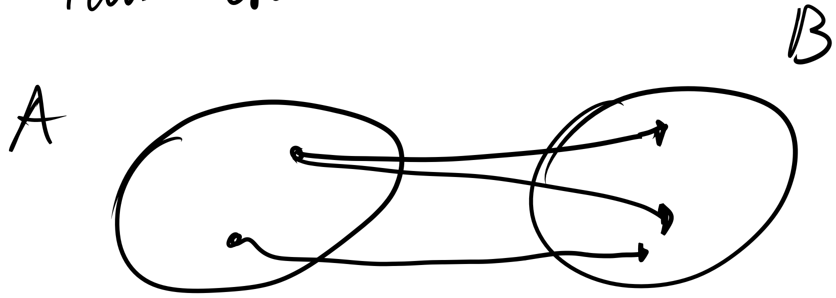
$f_1 \neq f$.

Osserv. $f = (A, B, R) \qquad R = \{(a, f(a)) \in A \times B : a \in A\}$

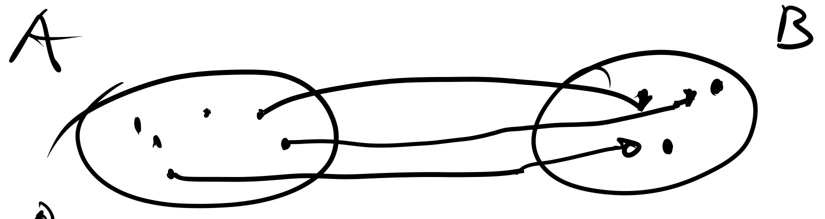


funzione

tutto "esaurito"



non funzione



non viene "esaurito"

non funzione

Def. Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione. Sia $X \subset A$.

Si dice immagine di X mediante f il sottoinsieme di B

$$f(X) = \{ b \in B \,:\, \exists\, x \in X \text{ tale che } f(x) = b \} =$$

$$= \{ f(x) \,:\, x \in X \} \subset B .$$