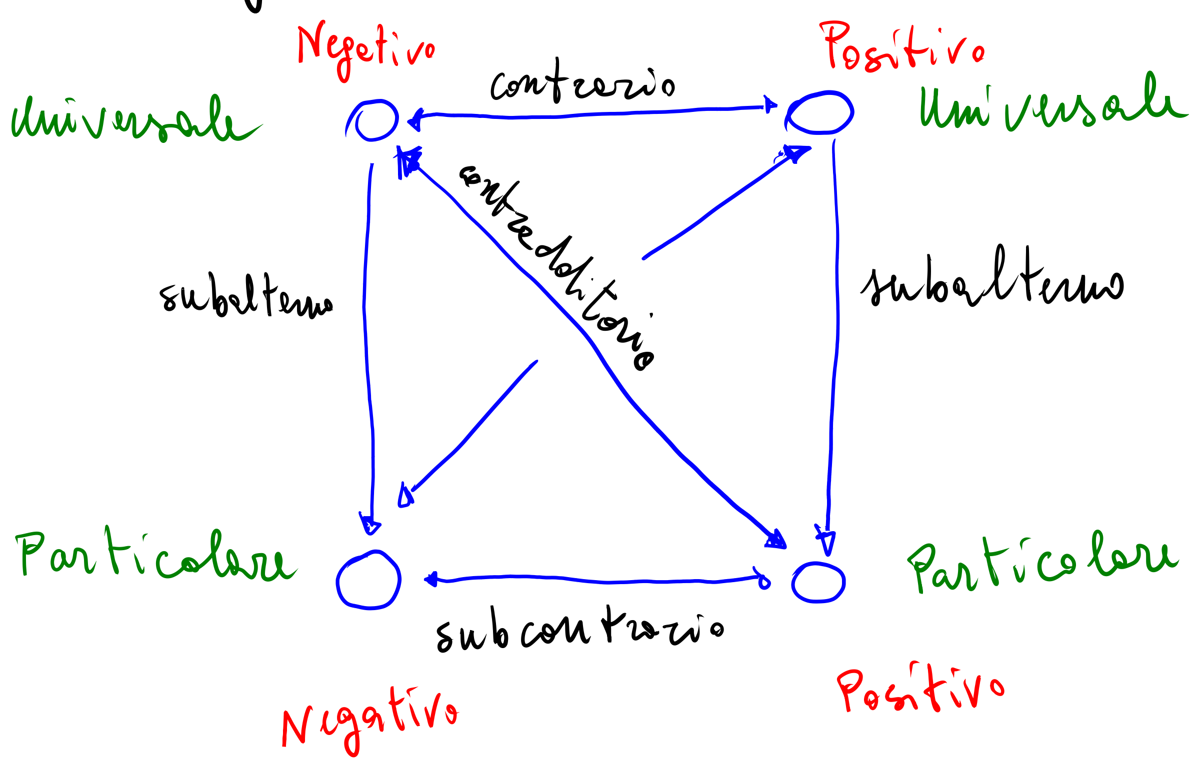
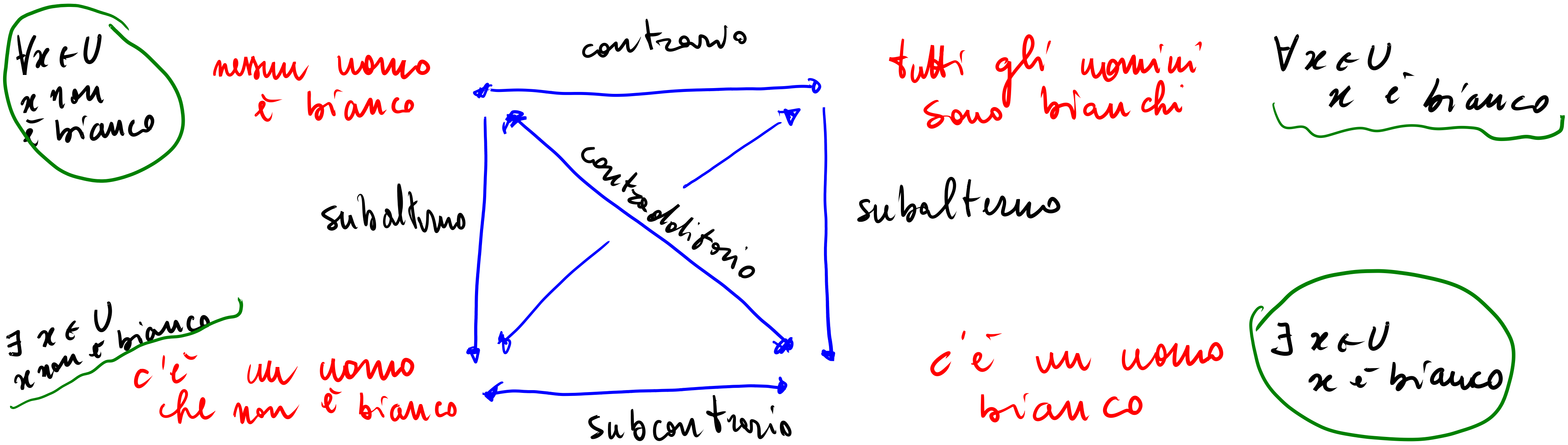
Def. Siano A e B due proposizioni. Si dice che A è contrario di B (e viceversa) se A e B possono essere false entrambe ma non vere entrambe. Si dice che A è subcontraria di B (e viceversa) se A e B possono essere entrambe vere ma non entrambe false. Si dice che A e B sono contraddittorie se non possono essere né entrambe vere né entrambe false. Si dice che B è subalterno ad A se la verità di A implica la verità di B o equivalentemente la falsità di B implica la falsità di A (la subalternità corrisponde alla conseguenza logica).

Quadrato logico



Esempio



U insieme degli uomini (= esseri umani).

Osservazione: La negazione corrisponde al contraddittorio. La negazione (contraddittoria) dell'universale è il particolare e viceversa:

$$\neg(\forall x \in A \ P(x)) \iff \exists x \in A \ \neg P(x)$$
$$\neg(\exists x \in A \ P(x)) \iff \forall x \in A \ \neg P(x).$$

Osservando il quadrato logico si deduce che dall'universale segue il particolare:

$$(\forall x \in A \ P(x)) \Rightarrow (\exists x \in A \ P(x)).$$

Esempio: A insieme

$$(\exists x \in A)\ (\forall y \in A\ \ P(x,y)) \Rightarrow (\exists x \in A)\ (P(x,x))$$

o x è tra questi

Scrivere in simboli le seguenti proposizioni

1. Moltiplicando 0 per qualunque numero intero si ottiene 0.

p: $\forall n \in \mathbb{Z} \quad 0 \cdot n = 0$ — 1

$\neg p$: $(\exists n \in \mathbb{Z})\ (0 \cdot n \neq 0)$ — 0

2. Ogni numero naturale ha il successivo

q: $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists\ n+1$ successivo di $n)$ — 1

$\neg q$: $(\exists n \in \mathbb{N})$ che non ha il successivo — 0

$\neg q$: $(\exists n \in \mathbb{N})\ (\forall m \in \mathbb{N} \quad m \neq n+1)$ — 0

3. 0 non è il successivo di alcun numero naturale.

$r: \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ (0 \neq n+1)$ $\qquad 1$

$\neg r: \ (\exists n \in \mathbb{N}) \ (0 = n+1)$ $\qquad 0$

4. Ogni numero intero dispari è un numero primo

$\mathbb{Z}$ è unione disgiunta dell'insieme P dei numeri pari e dell'insieme D dei numeri dispari

$$P = \{ n \in \mathbb{Z} : \exists \ \underline{\underline{h}} \in \mathbb{Z} \text{ tale che } n = 2h \}$$

$$D = \{ n \in \mathbb{Z} : \exists \ \underline{\underline{h}} \in \mathbb{Z} \text{ tale che } n = 2h+1 \}$$

$n = 6 \quad h = 3 \quad , \quad n = -12 \quad h = -6 \quad \text{-----}$

$n = 7 \quad h = 3 \quad (7 = 2 \cdot 3 + 1) \qquad n = 15 \quad h = 7$

$(15 = 2 \cdot 7 + 1).$

$s: (\forall x \in D)$ x è un numero primo $\qquad 0$

$\exists\, 9 \in D$ tale che 9 non è primo $\rightarrow$ giustificazione del fatto che s è falsa

$\neg s: (\exists\, x \in D)$ (x non è un numero primo) $\qquad 1$

5. Ogni numero naturale è il quadrato di un numero intero.

t: $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $n = h^2)$ falso

per es. $\exists\, n = 5 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall h \in \mathbb{Z}$ $h^2 \neq 5 \to$ giustificazione

$\neg t$: $(\exists n \in \mathbb{N})\ \neg(\exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $n = h^2)$ 1

$\neg t$: $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall h \in \mathbb{Z}\ n \neq h^2)$ 1

Def. Sia A, B insiemi non vuoti. Si dice relazione tra gli elementi di A e gli elementi di B un sottoinsieme $\mathcal{R}$ del prodotto cartesiano $A \times B$.

$\mathcal{R}$ relazione tra gli elem. di A e gli elem. di $B \overset{def}{\iff} \mathcal{R} \subset A \times B$.

$A = B \qquad \mathcal{R} \subset A \times A$.

Def. Siano A insieme $A \neq \emptyset$, $\mathcal{R} \subset A \times A$. Si dice che $\mathcal{R}$ è <u>riflessiva</u> se $(\forall a \in A)((a,a) \in \mathcal{R})$

Def. Siano A insieme $A \neq \emptyset$, $\mathcal{R} \subset A \times A$. Si dice che $\mathcal{R}$ è <u>simmetrica</u> se $(\forall a,b \in A)((a,b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b,a) \in \mathcal{R})$

$A = \{a, b, c, d\}$

$\mathcal{R}_1 = \{(a,a), (a,b), (b,b), (c,c), (d,d)\}$

riflessiva, non simmetrica, è antisimmetrica, è transitiva

$(b,a) \notin \mathcal{R}_1$

$\underbrace{(a,b) \in \mathcal{R}_1 \wedge (b,b) \in \mathcal{R}_1} \Rightarrow (a,b) \in \mathcal{R}_1$ vero

$\underbrace{(a,a) \in \mathcal{R}_1 \wedge (a,b) \in \mathcal{R}_1} \Rightarrow (a,b) \in \mathcal{R}_1$ vero

$\mathcal{R}_2 = \{(a,a), (a,b), (b,a)\}$

non riflessiva, simmetrica

non transitiva

$\underbrace{(a,a) \in \mathcal{R}_2 \wedge (a,b) \in \mathcal{R}_2} \Rightarrow (a,b) \in \mathcal{R}_2$ vero

$\underbrace{(a,b) \in \mathcal{R}_2 \wedge (b,a) \in \mathcal{R}_2} \Rightarrow (a,a) \in \mathcal{R}_2$ vero

$\underbrace{(b,a) \in \mathcal{R}_2 \wedge (a,b) \in \mathcal{R}_2}$ ma $(b,b) \notin \mathcal{R}_2 \Rightarrow \mathcal{R}_2$ non è transitiva

$R_3 = \{(a,b),(b,c),(a,c)\}$ non riflessiva, non simmetrica, antisimmetrica, transitiva

$(b,a) \notin R_3 \quad (c,b) \notin R_3 \quad (c,a) \notin R_3$.

$(a,b) \in R_3 \wedge (b,c) \in R_3 \Rightarrow (a,c) \in R_3$

(b,c), (a,c) non ci sono coppie in R_3 che hanno prima coordinata c

$R_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b),(a,b),(b,a)\}$

riflessiva, simmetrica, transitiva — vale lo stesso

$(a,c) \in R_4 \wedge (c,a) \in R_4 \Rightarrow (a,a) \in R_4$; $(c,a) \in R_4 \wedge (a,c) \in R_4 \Rightarrow (c,c) \in R_4$

$(b,c) \in R_4 \wedge (c,b) \in R_4 \Rightarrow (b,b) \in R_4$; $(c,b) \in R_4 \wedge (b,c) \in R_4 \Rightarrow (c,c) \in R_4$

$R_5 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,c),(a,c)\}$ riflessiva, non simmetrica, antisimmetrica, transitiva

$(b,a) \notin R_5$

$(a R_5 b \wedge b R_5 c \Rightarrow a R_5 c)$

$(b,c) R_4 \wedge (c,a) \in R_4 \Rightarrow (b,a) \in R_4$

$(a,c) \in R_4 \wedge (c,b) \in R_4 \Rightarrow (a,b) \in R_4$; $(a,b) \in R_4 \wedge (b,c) \in R_4 \Rightarrow (a,c) \in R_4$

$(b,c) \in R_4 \wedge (c,a) \in R_4 \Rightarrow (b,a) \in R_4$ $(c,a) \in R_4 \wedge (a,b) \in R_4 \Rightarrow (c,b) \in R_4$

$R_6 = \{(a,a),(b,b),(d,d),(a,b),(b,c)\}$ non riflessiva $(c,c) \notin R_6$, non simmetrica, antisimmetrica, non transitiva

$(a,b) \in R_6 \wedge (b,c) \in R_6$ ma $(a,c) \notin R_6$

$R_7 = \{(a,b), (b,c), (a,c), (b,a), (c,b), (c,a)\}$ non riflessiva, simmetrica, non transitiva

$(a,b) \in R_7 \wedge (b,a) \in R_7$ ma $(a,a) \notin R_7$

$R_8 = \{(a,b), (b,c), (a,c), (b,a), (c,b)\}$ non riflessiva, non simmetrica, non antisimmetrica, non transitiva

$(c,a) \notin R_8$

$(a,b) \in R_8 \wedge (b,a) \in R_8$ ma $(a,a) \notin R_8$

$R_9 = \{(a,b), (b,c), (a,c), (b,a)\}$ né simmetrica, né riflessiva, né antisimmetrica, né transitiva

Def. Siano A insieme $A \neq \emptyset$, $R \subset A \times A$. Si dice che R è antisimmetrica se

$$(\forall a, b \in A) \ \left((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \right) \Longrightarrow a = b$$

Equivalentemente

$$(\forall a, b \in A \quad a \neq b) \ \left((a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R \right).$$

Osserv.: Una relazione simmetrica non può essere antisimmetrica e una relazione antisimmetrica non può essere simmetrica, a esclusione della diagonale Δ.

R antisimmetrica $\Rightarrow R$ non simmetrica.

Esempio:

$$\underbrace{a, b \in \mathbb{R} \qquad a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b}$$

R relazione $\qquad \underbrace{(a,b) \in R} \qquad \underbrace{a R b}$

$\forall a, b \in A \qquad \underbrace{a R b \wedge b R a \Rightarrow a = b}$ antisimmetrica.

Def. Siano A insieme $A \neq \emptyset$, $R \subset A \times A$. Si dice che R è **transitiva** se

$$(\forall a, b, c \in A) \quad \big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R\big) \Rightarrow (a,c) \in R.$$

$$a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$$

Esempio. Sia Π l'insieme delle rette di un piano fissato.

$R = \{(r,s) \in \Pi \times \Pi ;\ r$ ha la stessa direzione di $s\}$

$\forall r \in \Pi \qquad r$ ha la stessa direzione di r e quindi

$$(r,r) \in R$$

$\forall r, s \in \Pi \qquad (r,s) \in R \Rightarrow (s,r) \in R$

$\forall r, s, t \in \Pi \qquad (r,s) \in R \wedge (s,t) \in R \Rightarrow (r,t) \in R$

$\mathcal{R}' = \{(r,s) \in \Pi \times \Pi : r$ è perpendicolare a $s\}$

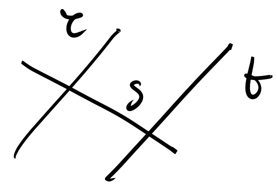
$\forall r \in \Pi \qquad (r,r) \notin \mathcal{R}'$

$\mathcal{R}'$ è simmetrica

$r,s \in \Pi \qquad (r,s) \in \mathcal{R}' \Rightarrow (s,r) \in \mathcal{R}'$

$\mathcal{R}'$ non è transitiva

$r,s,t \in \Pi \qquad (r,s) \in \mathcal{R}' \wedge (s,t) \in \mathcal{R}' \Rightarrow (r,t) \notin \mathcal{R}'$



Def. Siano A insieme $A \neq \emptyset$, $\mathcal{R} \subseteq A \times A$. Si dice che $\mathcal{R}$ è una <u>relazione d'ordine</u> se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

$\mathcal{R}_1 = \{(a,a),(a,b),(b,b),(c,c),(d,d)\}$ è una relazione d'ordine

Osserv. $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine sull'insieme A, viene denotata con il simbolo $\leq$. $(\mathcal{R} = \leq)$

$\forall a,b \in A \quad (a,b) \in \mathcal{R}$ si scrive $a \leq b$.

Esplicitiamo R_1 tramite $\leq$

$a \leq a$, $b \leq b$, $c \leq c$, $d \leq d$, $a \leq b$.

$R_5 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,c),(a,c)\}$ è di ordine

Esplicitiamo R_5 tramite $\leq$

$a \leq a$, $b \leq b$, $c \leq c$, $d \leq d$, $a \leq b$, $b \leq c$, $a \leq c$.

<u>Esempio</u> Definiamo la relazione d'ordine naturale su $\mathbb{Z}$.

$$(\forall n, m \in \mathbb{Z})\ (n \leq m \iff \exists\, h \underline{\in \mathbb{N}} \text{ tale che } m = h + n)$$

$$-7 \leq -5$$

$$-5 = \overset{h}{2} - 7.$$

$\leq$ è una relazione d'ordine su $\mathbb{Z}$.

<u>Dim.</u> $\leq$ è riflessiva

$(\forall n \in \mathbb{Z})\ (n \leq n)$ da dimostrare

$$(\forall n \in \mathbb{Z})\ (\underbrace{\exists\, h = 0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = 0 + n}_{n \leq n})$$

vero!

$\leq$ è antisimmetrica

$$(\forall n, m \in \mathbb{Z})\big((n \leq m \wedge m \leq n) \Rightarrow (n = m)\big)$$

Siano $n, m \in \mathbb{Z}$ $\quad n \leq m \wedge m \leq n \Rightarrow$

$(\exists h \in \mathbb{N}$ tale che $m = h + n) \wedge (\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $n = k + m)$

$$m = h + n = h + (k + m) = (h + k) + m$$

allora $m = (h+k) + m$ e quindi $\underline{h + k = 0}$

però $h, k \in \mathbb{N}$ allora necessariamente sarà $h = 0 \wedge k = 0$ (*)

pertanto $m = 0 + n$, ovvero $m = n$.

(*) Proprietà di annullamento della somma in $\mathbb{N}$:

$$(\forall r, s \in \mathbb{N})\,(r + s = 0 \Rightarrow r = 0 \wedge s = 0).$$

$\leq$ è transitiva

Siano $n, m, p \in \mathbb{Z}$ con $n \leq m \wedge m \leq p$;

bisogna verificare che $n \leq p$.

$(n \leq m \wedge m \leq p) \Rightarrow (\exists h \in \mathbb{N}$ tale che $m = h + n) \wedge (\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $p = k + m)$

allora $p = k + m = k + (h + n) = \underbrace{(k+h)}_{t} + n$

$\exists\, t = k+h \in \mathbb{N}$ tale che $p = t + n$ e quindi $n \leq p$.

$\leq$ è effettivamente una relazione d'ordine su $\mathbb{Z}$.

Esempio. Sia A insieme. La relazione di inclusione $\subset$ è una relazione d'ordine su $\mathcal{P}(A)$.

1. $\forall X \in \mathcal{P}(A) \quad X \subset X$ "$\subset$" è riflessiva
2. $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A) \quad (X \subset Y \wedge Y \subset X) \Rightarrow X = Y$ "$\subset$" è antisimmetrica
3. $\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(A) \quad (X \subset Y \wedge Y \subset Z) \Rightarrow X \subset Z$ "$\subset$" è transitiva.

Notazione. Sia A insieme, $\leq$ una relazione d'ordine su A. La coppia ordinata $(A, \leq)$ si chiama insieme ordinato.

$(\mathbb{Z}, \leq)$ è un insieme ordinato

$(\mathcal{P}(A), \subset)$ è un insieme ordinato.

<u>Def.</u> Siano $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Si dice che b divide a o che è divisore di a oppure che a è multiplo di b

o che a moltiplica b e si scrive

$$b \mid a$$

se e solo se esiste $h \in \mathbb{Z}$ tale che $a = h \cdot b$.

Per es. $3 \mid 12$, $-2 \mid 8$, $5 \mid 0$.

$12 = 4 \cdot 3$ $\quad \exists\, h = 4 \in \mathbb{Z}$ tale che $12 = h \cdot 3$

$\exists\, k = -4 \in \mathbb{Z}$ tale che $8 = k \cdot (-2)$

$\exists\, t = 0 \in \mathbb{Z}$ tale che $0 = t \cdot 5$.

Osserv. $\forall\, b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$ $b \mid 0$. Infatti esiste $h = 0 \in \mathbb{Z}$ tale che $0 = h \cdot b$.

Osserv. $\forall\, a \in \mathbb{Z}^*$ $a \mid a$, $a \mid -a$, $-a \mid a$, $-a \mid -a$

Osserv. $\forall\, a \in \mathbb{Z}$ $1 \mid a \wedge -1 \mid a$.

<u>Prop</u>. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ risulta:

1. $a \mid b \Rightarrow (a \mid -b \wedge -a \mid b \wedge -a \mid -b)$

2. $(b \neq 0 \wedge a \mid b \wedge b \mid a) \Rightarrow a = \pm b$

3. $(a \mid b \wedge b \mid c) \Rightarrow a \mid c$

4. $(a \mid b \wedge a \mid c) \Rightarrow a \mid b \pm c$

5. $a \mid b \Rightarrow a \mid b \cdot c$.

Dim. 1. $a \mid b \Rightarrow \exists\, h \in \mathbb{Z}$ tale che $b = h\, a$

proviamo che $-a \mid b$

$b = h \cdot a = (-h)(-a)$ e quindi $\exists\, k = -h \in \mathbb{Z}$ tale che $b = k(-a)$

cioè $-a \mid b$.

in maniera analoga $a \mid -b \wedge -a \mid -b$

2. sia $b \neq 0$ $b \mid a \wedge a \mid b$ allora esistono

$(h \in \mathbb{Z}$ tale che $a = h \cdot b) \wedge (\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tale che $b = k \cdot a) \Rightarrow$

$a = h \cdot b = h(k \cdot a) = (h \cdot k) \cdot a$

$a = (h \cdot k) \cdot a$ e quindi $h \cdot k = 1$.

$h \cdot k = 1 \Rightarrow h = k = 1 \vee h = k = -1$

Se $h = k = 1$ allora $a = b$

Se $h = k = -1$ allora $a = -b$.

Sia $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, \dots\dots, n, \dots\dots\}$

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

La relazione $|$ su $\mathbb{N}^*$ è una relazione d'ordine.

$\forall n, m \in \mathbb{N}^*$ $n | m \iff \exists h \in \mathbb{N}^*$ tale che $m = n \cdot h$.

$|$ è riflessiva : $\forall n \in \mathbb{N}$ $n | n$

$|$ è antisimmetrica $\forall n, m \in \mathbb{N}$ $n | m \wedge m | n \overset{2.}{\Rightarrow} m = n$

$|$ è transitiva $(\forall n, m, p \in \mathbb{N})(n | m \wedge m | p) \overset{3.}{\Rightarrow} n | p$

$(\mathbb{N}^*, |)$ è un insieme ordinato.

Def. Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato. Si dice che $(A, \leq)$ è <u>totalmente ordinato</u> se $(\forall x, y \in A)(x \leq y \vee y \leq x)$, si dice che è <u>parzialmente ordinato</u> se

$\exists\, x, y \in A$ tali che $x \not\leq y \wedge y \not\leq x$.

$(\mathbb{Z}, \leq)$ è totalmente ordinato.

$(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ è parzialmente ordinato

Esempio. $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\},$

$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, A\}$

Per esempio: $\{1,2\}$ $\{1,3,4\}$ $\{1,2\} \not\subseteq \{1,3,4\}$
$\{1,3,4\} \not\subseteq \{1,2\}$

Esempio $(\mathbb{N}^*, |)$ è parzialmente ordinato

per es. 5 16 $5 \nmid 16 \wedge 16 \nmid 5$.

Esempio $D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

$(D_{20}, |)$ insieme ordinato.

$1 | 2, \ 1 | 4 \ldots\ldots$ $2 | 4, \ 2 | 10$

è parzialmente ordinato $\qquad 4 \nmid 10 \wedge 10 \nmid 4$.

$(A, \leq)$ insieme ordinato $\quad B \subset A \quad B \neq \emptyset$

La relazione d'ordine indotta $\leq_B$:
$\forall a, b \in B$
$a \leq_B b \iff a \leq b$.

$(B, \leq_B)$ insieme ordinato

$(\mathbb{Z}, \leq)$ $\qquad B = \{-1, 0, 2, 3, 4\} \subset \mathbb{Z}$

$(B, \leq_B)$ è un insieme ordinato.

Def. Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato $B \subset A$.

$x_0 \in B$ si dice <u>minimo</u> di B se

$$\forall x \in B \quad x_0 \leq x.$$

$x_1 \in B$ si dice <u>massimo</u> di B se

$$\forall x \in B \quad x \leq x_1.$$

Prop. Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato, $B \subset A$.
Se esiste un minimo (o un massimo) di B, esso è unico.

Dim. siano x_0, y_0 due minimi di B.

$\forall x \in B \quad x_0 \leq x \quad \wedge \quad \forall x \in B \quad y_0 \leq x.$

in particolare

$$(x_0 \leq y_0 \ \wedge \ y_0 \leq x_0) \underset{\text{antisimmetria}}{\Longrightarrow} x_0 = y_0$$

Per esempio $(\mathbb{N}, \leq)$ ammette minimo che è 0
non ammette massimo

$(\mathbb{Z}, \leq)$ non ammette né minimo né massimo.

$(\mathbb{N}^*, |)$ ammette minimo che è 1
ma non ammette massimo

D_{20} ammette minimo 1 e massimo 20

$(\mathcal{P}(A), \subset)$ ammette minimo $\emptyset$ e massimo A.

$A = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$ ha minimo -2 e massimo 3.

Notazione. Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato $B \subset A$ $B \neq \emptyset$. Se esiste il minimo di B (che si chiama anche il più piccolo elemento di B) si indica con $\min(B)$; se esiste il massimo di B (che si chiama anche il più grande elemento di B), si indica con $\max(B)$.

$(\mathbb{N}, \leq)$ $\min(\mathbb{N}) = 0$

$(\mathbb{N}^*, |)$ $\min(\mathbb{N}) = 1$

$(D_{20}, |)$ $\min(D_{20}) = 1$, $\max(D_{20}) = 20$.

$(\mathcal{P}(A), \subset)$ $\min(\mathcal{P}(A)) = \emptyset$ $\max(\mathcal{P}(A)) = A$.

$(\forall X \in \mathcal{P}(A) \quad \emptyset \subset X)$ a $(\forall X \in \mathcal{P}(A) \quad X \subset A)$.

Relazioni di equivalenza.

Def. Sia A un insieme $A \neq \emptyset$. Una relazione R su A si dice di equivalenza se è riflessiva, simmetrica, transitiva.

R_4 è di equivalenza

$R_4 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b), (a,b), (b,a)$

Esempi.

Π insieme delle rette del piano

$R = \{(r,s) \in \Pi \times \Pi$: r ha la stessa direzione di $s\}$

R è di equivalenza.

$R' = \{(r,s) \in \Pi \times \Pi$; r è perpendicolare a $s\}$

non è di equivalenza (né di ordine)

Esempio. A = insieme dei residenti a Bari. $R \subset A \times A$

$(\forall x, y \in A)$ $(x,y) \in R \Leftrightarrow$ x ha la stessa madre di y.

$\mathcal{R}$ è riflessiva, simmetrica transitiva e quindi è di equivalenza.

Es. Sia A insieme $A \neq \emptyset$. $\Delta = \{(x,y) \in A \times A \ ; \ x = y\}$

è sia di equivalenza che di ordine (l'unica che verifica entrambe le def.).