$f : A \to B$

f si dice iniettiva se

- $\forall x_1, x_2 \in A \qquad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

- $\forall x_1, x_2 \in A \qquad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

- $\forall y \in B \qquad f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) = y\}$ ha al massimo un elemento

- $\forall y \in B$ esiste al massimo un $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

f è suriettiva se

- $\forall y \in B \quad \exists x \in A$ tale che $f(x) = y$

- $\forall y \in B \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset$

- $f(A) = \{y \in B : \exists x \in A$ tale che $f(x) = y\} = B$

f è biiettiva se f è iniettiva e suriettiva

- $\forall y \in B \quad \exists!\, x \in A$ tale che $f(x) = y$

Def. Sia $f : A \to B$. Si dice che f è invertibile se esiste $g : B \to A$ tale che

$$g \circ f = id_A \quad \wedge \quad f \circ g = id_B .$$

Se g esiste è unico e si chiama funzione inversa di f.
In generale la funzione inversa di f (quando esiste) si indica con f^{-1}. Allora $f^{-1} : B \to A$ tale che

$$f^{-1} \circ f = id_A \quad \wedge \quad f \circ f^{-1} = id_B .$$

Osserv. Se $Y \subset B$ $\quad f^{-1}(Y) = \{ x \in A \; ; \; f(x) \in Y \}$

$y \in B \qquad \underline{\underline{f^{-1}(y)}} = \underbrace{f^{-1}(\{y\})}_{\text{controimmagine di } \{y\}} = \{ x \in A \; : \; f(x) = y \} \subset B$

Se f è invertibile e $f^{-1} : B \to A$ è l'inversa

$\forall y \in B \qquad \underline{\underline{f^{-1}(y) \in B}}.$

Teorema. Sia $f : A \to B$. f è invertibile se e solo se f è bigettiva.

Esercizi 1.

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$

$f : \mathbb{Q} - \{5\} \longrightarrow \mathbb{Q}^*$ tale che $\forall x \in \mathbb{Q} - \{5\}$ $f(x) = \frac{1}{5}x - 1$

$g : \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ tale che $\forall q \in \mathbb{Q}^*$ $g(q) = \frac{3}{q} + 2.$

(a) Stabilire se f è iniettiva e/o surgettiva

(b) Stabilire se g è iniettiva e/o surgettiva

(c) calcolare, se esiste, la funzione inversa di f

(d) calcolare, se esiste, la funzione inversa di g

(e) calcolare $f(\{-3, 0\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $g(\{-1, 1\})$, $g(2)$.

(f) calcolare, se possibile, $g \circ f$ e $f \circ g$.

(a) f è iniettiva? Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{Q} - \{5\}$ in modo che sia

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{5}x_1 - 1 = \frac{1}{5}x_2 - 1 \Rightarrow \frac{1}{5}x_1 = \frac{1}{5}x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$a, b \in \mathbb{R}$ $\quad a = b \Rightarrow a + x = b + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

$$a \cdot y = b \cdot y \quad \forall y \in \mathbb{R}^*$$

---

f è surgettiva? Sia $\underline{y \in \mathbb{Q}^*}$. Si cerca, se esiste

$x \in \mathbb{Q} - \{5\}$ tale che $f(x) = y$

$f(x) = y \iff \frac{1}{5}x - 1 = y \iff \frac{1}{5}x = y + 1 \iff x = 5y + 5$

$\exists\, x = 5y + 5 \in \mathbb{Q} - \{5\}$ tale che $f(5y+5) = \frac{1}{5}(5y+5) - 1 =$

$= y + 1 - 1 = y$

e quindi f è surgettiva. $x = 5y + 5 \neq 5$

perché se fosse $x = 5$, allora $f(x) = f(5) = 0$ che è escluso da $\mathbb{Q}^*$.

f è bigettiva e quindi ammette l'inversa.

(b) g è ingettiva. Siano $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}^*$ tali che

$\underline{g(q_1) = g(q_2)} \iff \frac{3}{q_1} + 2 = \frac{3}{q_2} + 2 \iff \frac{3}{q_1} = \frac{3}{q_2} \iff$

$\iff \frac{3q_2 - 3q_1}{q_1 q_2} = 0 \iff 3q_2 - 3q_1 = 0 \iff 3(q_1 - q_2) = 0 \iff \underline{q_1 = q_2}.$

g è surgettiva. Sia $z \in \mathbb{Q}$. Si cerca, se esiste $q \in \mathbb{Q}^*$

tale che $g(q) = z$

$g(q) = z \iff \frac{3}{q} + 2 = z \iff \frac{3}{q} = z - 2 \iff q = \frac{3}{z-2}$

q esiste soltanto quando $z \neq 2$.

g non è surgettiva perché esiste $z = 2 \in \mathbb{Q}$ tale che $\forall q \in \mathbb{Q}^*$ $g(q) \neq 2$.

g non è surgettiva, quindi non è bigettiva e quindi non è invertibile.

(c) calcoliamo $f^{-1} : \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Q} - \{5\}$.

Se $y \in \mathbb{Q}^*$, allora esiste $x = 5y + 5$ tale che $f(x) = y$.

$f^{-1}(y) = 5y + 5$ perché è l'unico elemento di $\mathbb{Q}^*$ tale che $f(x) = y$.

(d) g non è bigettiva quindi non è invertibile e dunque non esiste la funzione inversa di g.

(e) $f(\{-3, 0\}) \subset \mathbb{Q}^*$

$$f(-3) = \frac{1}{5}(-3) - 1 = -\frac{3}{5} - 1 = \frac{-3-5}{5} = -\frac{8}{5}$$

$f(0) = \frac{1}{5}\cdot 0 - 1 = -1$

$f(\{-3, 0\}) = \{-\frac{8}{5}, -1\} \subset \mathbb{Q}^*$.

$f^{-1}(\{1\})$ la controimmagine di $\{1\}$ mediante f

$x \in \mathbb{Q} - \{5\}$ tale che $f(x) = 1$

$$\frac{1}{5}x - 1 = 1$$

$$\frac{1}{5}x = +2$$

$$x = +10$$

$f^{-1}(\{1\}) = \{+10\}$.

$g(\{-1, 1\}) \subset \mathbb{Q}$

$g(-1) = \frac{3}{-1} + 2 = -3 + 2 = -1$

$g(1) = \frac{3}{1} + 2 = 5$ $\qquad g(\{-1, 1\}) = \{-1, 5\}$

$g(2) = \frac{3}{2} + 2 = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$ $\qquad g(2) = 7/2$.

(f)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q} - \{5\} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{Q}^* \arrow[r, "g"] & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

$g \circ f : \mathbb{Q} - \{5\} \to \mathbb{Q}$

$\forall x \in \mathbb{Q} - \{5\} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{5}x - 1\right) =$

$$= \frac{3}{\frac{1}{5}x - 1} + 2 = \frac{3}{\frac{x-5}{5}} + 2 = \frac{15}{x-5} + 2 =$$

$$= \frac{15 + 2(x-5)}{x-5} = \frac{15 + 2x - 10}{x-5} = \frac{2x+5}{x-5}.$$

$$\mathbb{Q}^* \xrightarrow{g} \underline{\underline{\mathbb{Q}}} \qquad \underline{\underline{\mathbb{Q} - \{5\}}} \xrightarrow{f} \mathbb{Q}^*$$

Poiché l'insieme di arrivo di g è diverso dall'insieme di partenza di f, non esiste $f \circ g$.

Esercizio Siano $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = 3n + 1$

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \quad \forall x \in \mathbb{Z} \quad g(x) = \frac{1}{3}x + 2$

(a) stabilire se f e g sono iniettive e/o suriettive

(b) calcolare, eventualmente, le funzioni inverse di f e di g

(c) calcolare, se possibile, $g \circ f$ e $f \circ g$

(e) calcolare $f(\{3, 5\})$, $f^{-1}(\{-2, -3\})$

$g(-20)$ $\quad g^{-1}(\{-\frac{1}{5}\})$. $\to$ controimmagine di $\{-\frac{1}{5}\}$.

Osserv. Sia $f: A \to B$ una funzione.

$\emptyset \subset A \qquad f(\emptyset) = \emptyset$

$\emptyset \subset B \qquad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Osserv. Siano $f: A \to B$, $Y \subset B$. Allora può accadere che sia $f^{-1}(Y) = \emptyset$ pur essendo $Y \neq \emptyset$ (solo se f non è surgettiva).

Prop. $f: A \to B$ funzione. Allora

1. $\forall X \in \mathcal{P}(A) \quad X \subset f^{-1}(f(X))$
2. $\forall Y \in \mathcal{P}(B) \quad f(f^{-1}(Y)) \subset Y$.

Se f è bigettiva valgono le uguaglianze.

Def. $f: A \to B$. Si può considerare

$$f_{\#}: A \to f(A) \quad \text{tale che } \forall x \in A \quad f_{\#}(x) = f(x).$$

$f_{\#}$ si dice funzione ridotta di f ed è surgettiva.

Esempio. $g: \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q} \qquad g(q) = \dfrac{3}{q} + 2 \quad \forall q \in \mathbb{Q}^*$

$g(\mathbb{Q}^*) = \mathbb{Q} - \{2\}$ perché 2 è l'unico elemento di $\mathbb{Q}$ tale che $\forall q \in \mathbb{Q}^*$ $g(q) \neq 2$.

$$g_{\#} : \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Q} - \{2\}$$ funzione ridotta di g.

$g_{\#}$ è surgettiva e quindi è bigettiva,

per cui esiste la funzione inversa $g_{\#}^{-1} : \mathbb{Q} - \{2\} \to \mathbb{Q}^*$

$\forall z \in \mathbb{Q} - \{2\}$ $\quad g_{\#}^{-1}(z) = \dfrac{3}{z-2}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q} - \{5\} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g_{\#} \circ f"'] & \mathbb{Q}^* \arrow[r, "g_{\#}"] & \mathbb{Q} - \{2\} \end{tikzcd}$$

$g_{\#} \circ f$ è bigettiva

$\forall x \in \mathbb{Q} - \{5\}$ $\quad (g_{\#} \circ f)(x) = g_{\#}(f(x)) = g(f(x)) =$

$= (g \circ f)(x) = \dfrac{2x+5}{x-5}$

Esercizio: calcolare la funzione inversa di $g_{\#} \circ f$.

Def. Siano X e Y insiemi. Si dice che X e Y sono <u>equipotenti</u> se esiste una funzione bigettiva tra X e Y.

Def. Sia X un insieme. Si dice che X è <u>infinito</u> se esiste una funzione iniettiva ma non suriettiva di X in sé: in simboli $\exists f: X \to X$ iniettiva ma non suriettiva

Esempio. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto 2n$

f è iniettiva: siano $n, m \in \mathbb{N}$ $f(n) = f(m) \Rightarrow$

$2n = 2m \Rightarrow n = m$.

f non è suriettiva: esiste $15 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f(n) \neq 15.$$

Quindi $\mathbb{N}$ è un insieme infinito.

Osserv. Se X è un insieme infinito e Y è

un insieme che lo contiene ($X \subset Y$), allora anche Y è infinito.
Quindi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sono infiniti perché contengono $\mathbb{N}$.

Def. Un insieme X si dice finito se è vuoto oppure se non è infinito.

Osserv. Un insieme X è finito se è vuoto o se ogni funzione iniettiva di X in sé è anche surgettiva.

$[1,5] = \{ x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 5 \}$ è limitato ma non finito.

Teorema. Sia X un insieme finito, $X \neq \emptyset$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}^*$ ed esiste $f : J_n \longrightarrow X$ funzione bigettiva, dove

$$J_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Def Sia X un insieme finito $X \neq \emptyset$. Allora il numero n per cui esiste $f : J_n \to X$ bigettiva si dice cardinalità di n. La cardinalità dell'insieme vuoto è 0. Si scrive

$$|X| = n$$

$$|\emptyset| = 0$$

Il simbolo $|X|$ indica la cardinalità di X.

Osserv. Se X è un insieme finito $X \neq \emptyset$, e se $f : J_n \to X$ è una funzione bigettiva di $\{1, \dots, n\}$ su X, si può scrivere

$$X = \{ f(1), f(2), \dots, f(n) \}.$$

Prop. Siano X e Y due insiemi finiti, $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$. Allora X e Y hanno la stessa cardinalità se e solo se sono equipotenti.

$$|X| = |Y| \iff \exists\, h : X \to Y \quad \text{funzione bigettiva.}$$

Esempio. $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono equipotenti.
Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ in modo che $\forall x \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 2|x| & \text{se } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

f è bigettiva.

f è iniettiva. Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ $\quad f(x_1) = f(x_2)$

$f(x_1), f(x_2)$ siano entrambi uguali a 0 in tal caso $x_1 = x_2 = 0$

$f(x_1), f(x_2)$ siano entrambi pari

e quindi x_1, x_2 sono negativi

$$2|x_1| = 2|x_2| \Rightarrow$$

perché $|x_1| = -x_1$
$|x_2| = -x_2$

$$\Rightarrow -2x_1 = -2x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

Se $f(x_1)$, $f(x_2)$ sono entrambi dispari, allora

x_1, x_2 sono positivi

$f(x_1) = 2x_1 - 1$ $\qquad$ $f(x_2) = 2x_2 - 1$

$$2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

f è suriettiva

Sia $n \in \mathbb{N}$

$n = 0$ $\qquad$ $\exists\, 0 \in \mathbb{Z}$ tale che $f(0) = n$

n pari e quindi $\exists\, h \in \mathbb{N}$ tale che $n = 2h$

$-h \in \mathbb{Z}$ e $n = -2(-h) = 2|-h|$

$\exists\, k = -h \in \mathbb{Z}$ tale che $f(k) = f(-h) = 2|k|$

$-(-7) = 7$ $\qquad$ $\boxed{-h \in \mathbb{Z} \quad -h < 0 \quad |-h| = -(-h)}$

n dispari $\exists\, h \in \mathbb{N}$ tale che $n = 2h - 1$
$n \neq 0$

$\exists\, h \in \mathbb{Z}$ tale che $n = f(h)$

$n \in \mathbb{Z}$ dispari $\quad \exists\, t \in \mathbb{Z}$ tale che $n = 2t - 1$