Esercizi:

1. $a \in \mathbb{R}$ $\quad \sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ serie geometrica

Passo base $P(0)$ è vero $\quad \sum_{i=0}^{0} a^i = a^0 = 1$; $\frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-a}{1-a} = 1$

quindi $\sum_{i=0}^{0} a^i = \frac{1-a^{0+1}}{1-a}$ ok.

$$\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \left(a^0 + a^1 + \dots + a^{n-1} + a^n\right) + a^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a^i + a^{n+1}$$

Passo induttivo: ipotesi d'induzione : $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

tesi : $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$

$$\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \sum_{i=0}^{n} a^i + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} =$$

ipotesi d'induzione

$$= \frac{1-a^{n+1} + a^{n+1}(1-a)}{1-a} = \frac{1-\cancel{a^{n+1}} + \cancel{a^{n+1}} - \overbrace{a \cdot a^{n+1}}^{a^{n+2}}}{1-a} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$$

Per esempio se $a=2$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1}-1.$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$$

2. $$\sum_{i=1}^{n} i(1+i) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$P(1)$ vero : $\underbrace{\sum_{i=1}^{1} i(1+i)}$ $\overset{?}{=}$ $\frac{1 \cdot 2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} = 2$

$$\sum_{i=1}^{1} i(i+1) = 1 \cdot (1+1) = 2$$

l'uguaglianza è verificata

passo induttivo: ipotesi d'induzione: $\sum_{i=1}^{n} i(1+i) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

tesi : $\sum_{i=1}^{n+1} i(1+i) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

$$\underbrace{\underbrace{1(1+1)+2(1+2)+\dots+n(1+n)}+(n+1)(1+n+1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i(1+i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i(1+i)} + (n+1)(1+n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) =$$

ipotesi d'induzione

$$= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

3. $4^n \geq 1 + 3n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$

Passo base $\qquad P(0): \quad 4^0 \geq 1 + 3 \cdot 0$

$$\underbrace{1 \geq 1}$$ vero

Passo induttivo : $\quad$ ipotesi d'induzione: $4^n \geq 1 + 3n$

tesi $\qquad 4^{n+1} \geq 1 + 3(n+1) =$

$= 1 + 3n + 3 = \underbrace{4 + 3n}$

$$4^{n+1} = \underbrace{4^n} \cdot 4 \geq \underbrace{(1+3n)} \cdot 4 = 4 + 12n = \underbrace{4+3n} + \underbrace{9n} \geq \underbrace{4+3n}$$

ipotesi d'induzione

$a \geq b \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \; c > 0$

$a c \geq b \cdot c$

in effetti $\qquad 4^{n+1} \geq 4 + 3n = 1 + 3(n+1) \qquad$ OK.

4. $6 \mid n^3 + 6n^2 - n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$

Osserv. $\qquad p, q \in \mathbb{Z}$ numeri primi $\quad p \neq q$

$$(p \mid a \;\wedge\; q \mid a) \Rightarrow p \cdot q \mid a$$

$p \mid a \Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $a = p h \qquad$ inoltre $\; q \mid p \cdot h$

$q \mid p \cdot h$ ma q certamente non è un divisore di p perché p è primo.

$$q \mid p \cdot h \Rightarrow \underbrace{q \mid p}_{\text{non verificato}} \vee q \mid h \Rightarrow q \mid h$$

$\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tale che $h = q \cdot k$ e quindi

$$a = p \cdot h = p \cdot q \cdot k = (p \cdot q) \cdot k \Rightarrow p \cdot q \mid a.$$

Passo base: $P(0)$ vero: $6 \mid 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 0 \iff 6 \mid 0$ vero

Passo induttivo $P(n)$ vero : $6 \mid n^3 + 6 \cdot n^2 - n$ (ipotesi d'induz.)

tesi : $6 \mid (n+1)^3 + 6(n+1)^2 - (n+1)$

$$\underbrace{(n+1)^3 + 6(n+1)^2 - (n+1)}= n^3 + 3n^2 + 3n + \cancel{1} + 6n^2 + 12n + 6 - n - \cancel{1}$$

$$= \underbrace{(n^3 + 6n^2 - n) + 3n^2 + 15n + 6}$$

$6 \mid n^3 + 6n^2 - n$ per ipotesi induttive

se provo che $6 \mid 3n^2 + 15n + 6$

allora $6 \mid (n^3 + 6n^2 - n) + (3n^2 + 15n + 6)$

ovvero che $6 \mid (n+1)^3 + 6(n+1)^2 - (n+1)$

Resta da provare che $6 \mid \underbrace{3n^2 + 15n + 6}$

$3n^2 + 15n + 6 = 3(n^2 + 5n + 2) \Rightarrow \underbrace{3 \mid 3n^2 + 15n + 6}$

se si prova che $2 \mid 3n^2 + 15n + 6$, per l'osservazione risulterà che $6 \mid 3n^2 + 15n + 6$

1° modo per provare che $2 \mid \underbrace{3n^2 + 15n + 6}_{Q(n)}$ per induz.

$Q(0)$ vera: $2 \mid 3 \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 + 6$ ovvero $2 \mid 6$ ok.

$Q(n)$ vera $\Rightarrow Q(n+1)$ vera

$2 \mid 3(n+1)^2 + 15(n+1) + 6$

$3(n+1)^2 + 15(n+1) + 6 = \underbrace{3n^2} + 6n + 3 + \underbrace{15n} + 15 + \underbrace{6} =$

$= (3n^2 + 15n + 6) + 6n + 18$

$2 \mid 3n^2 + 15n + 6$ per ipotesi di induzione

$2 \mid 6n + 18$ perché $6n + 18 = 2(3n + 9)$

e quindi $2 \mid 3n^2 + 15n + 6 + 6n + 18$ cioè $2 \mid 3(n+1)^2 + 15(n+1) + 6$

altro modo per verificare che $2 \mid 3n^2 + 15n + 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

n pari: $\exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $n = 2h$

$$3n^2 + 15n + 6 = 3(2h)^2 + 15(2h) + 6 = 12h^2 + 30h + 6$$
$$= 2(6h^2 + 15h + 3)$$

multiplo di 2

n dispari $\exists k \in \mathbb{Z}$ tale che $n = 2k+1$

$$3n^2 + 15n + 6 = 3(2k+1)^2 + 15(2k+1) + 6 = 3(4k^2 + 4k + 1) +$$
$$+ 15(2k+1) + 6 = 12k^2 + 12k + 3 + 30k + 15 + 6 =$$
$$= 12k^2 + 42k + 24 = 2(6k^2 + 21k + 12)$$

multiplo di 2.

In ogni caso $2 \mid 3n^2 + 15n + 6$.

Principio d'induzione completa

1^a forma: Sia P una proprietà che ha senso $\forall n \in \mathbb{Z}(n_0) = \{x \in \mathbb{Z} : n_0 \leq x\}$

Se 1. $P(n_0)$ è vera

2. $P(n)$ vera $\Rightarrow P(n+1)$ vera

allora $P(x)$ è vera $\forall x \in \mathbb{Z}(n_0)$

2^a forma. Sia P una proprietà che ha senso $\forall n \in \mathbb{Z}(n_0)$

Se 1. $P(n_0)$ è vera

2. $P(m)$ vera $\forall m \in \mathbb{Z}(n_0)$ $m < n$ $\Rightarrow P(n)$ vera

allora $P(x)$ è vera $\forall x \in \mathbb{Z}(n_0)$

<u>Def</u>. Si dice successione di elementi di A una funzione

$f : \mathbb{N} \to A$

(può essere anche $f : X \to A$, dove $X \subset \mathbb{N}$).

In generale, se si pone $f(n) = a_n \in A$ $n \in \mathbb{N}$

una successione si indica col simbolo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Per es. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(n) = 3n + 2$

$a_n = 3n + 2$ $\to$ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definizione di una successione per ricorrenza

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Si definisce a_0, poi si suppone di aver definito a_{n-1} (oppure a_m per $m < n$) e si definisce a_n

Esempi

1. Potenze: Sia $a \in \mathbb{R}$. Si pone

$$a^0 = 1$$

$$a^n = a^{n-1} \cdot a$$

$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a$$
$$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$$
$$a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a$$
$$\vdots$$

2. fattoriale

$$0! = 1$$

$$n! = (n-1)!\, n$$

$0! = 1$

$1! = 0! \cdot 1 = 1$

$2! = 1! \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 2! \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 3! \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$

$5! = 4! \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$

$\vdots$

3. La progressione aritmetica

$a, d \in \mathbb{R} \qquad d \neq 0$

si pone: $\quad a_0 = a$

$\qquad a_n = a_{n-1} + d$

$a_0 = a$

$a_1 = a_0 + d = a + d$

$a_2 = a_1 + d = (a + d) + d = a + 2d$

$a_n - a_{n-1} = d$

4. progressione geometrica

$a, d \in \mathbb{R}^*$

$a_0 = a$

$a_n = a_{n-1} \cdot d$

$a_0 = a$

$a_1 = a_0 \cdot d \quad = a \cdot d$

$a_2 = a_1 \cdot d = (a \cdot d) \cdot d \quad = a \cdot d^2$

$\vdots$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = d$$

5. Torri di Hanoi

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

a_n = minimo numero di spostamenti per portare n dischi su un'altra asta

supponendo di conoscere a_{n-1}, si ha che

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$$

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$a_2 = 2 \cdot a_1 + 1 = 2+1 = 3$

$a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

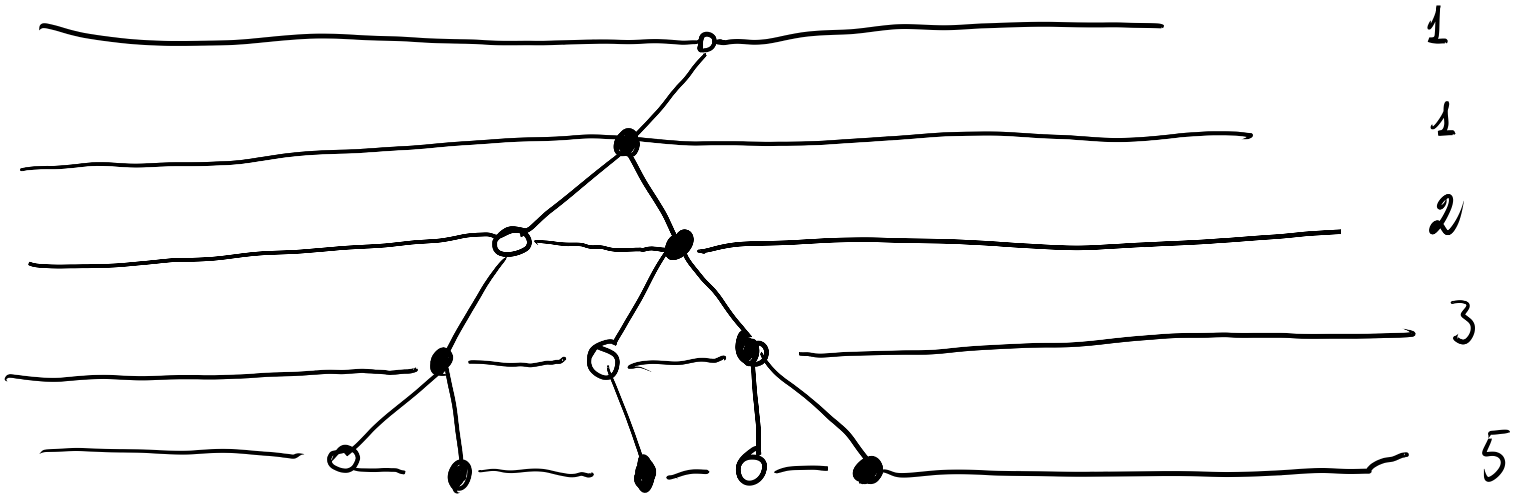
$a_4 = 2a_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

$\vdots$

6. Numeri di Fibonacci (1180 - 1250)

Liber abaci

Problema delle coppie di conigli.



$F_0 = 0$

$F_1 = 1$

$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$

$F_2 = F_0 + F_1 = 0+1 = 1$

$F_3 = F_1 + F_2 = 1+1 = 2$

$F_4 = F_2 + F_3 = 1+2 = 3$

$F_5 = F_3 + F_4 = 2+3 = 5$

$F_6 = F_4 + F_5 = 3+5 = 8$

$F_7 = F_5 + F_6 = 5+8 = 13$

$\vdots$

Esercizio $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad M.C.D.(F_n, F_{n-1}) = 1.$

Per induzione completa

$M.C.D.(F_1, F_0) = M.C.D.(1,0) = 1$

Supponiamo che $M.C.D.(F_n, F_{n-1}) = 1$ (ipotesi d'induz.)

tesi $M.C.D.(F_{n+1}, F_n) = 1.$

sia $d = M.C.D.(F_{n+1}, F_n)$

$d \mid F_{n+1} \wedge d \mid F_n$

$(d \mid F_n + F_{n-1} \wedge \underline{d \mid F_n}) \Rightarrow \underline{d \mid \cancel{F_n} + F_{n-1} - \cancel{F_n}}$

$\Rightarrow d \mid F_{n-1} \wedge d \mid F_n \Rightarrow d \mid M.C.D.(F_{n-1}, F_n) \Rightarrow$

$d \mid 1 \Rightarrow d = 1.$

Formula chiusa della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è l'espressione di a_n.

Esempi

1. $a^0 = 1$

$a^n = a^{n-1} \cdot a$

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}_{n\text{-volte}}$ formula chiusa

2. $n! = n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ formula chiusa

$0! = 1$

$1! = 0! \cdot 1 = 1$

$2! = 1! \cdot 2 = 1 \cdot 2$

$3! = 2! \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$

$4! = 3! \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$

$5! = 4! \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$

$\vdots$

$20! = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

3. $a_0 = a$

$a_n = a_{n-1} + d$

$a_0 = a$

$a_1 = a + d$

$a_2 = a_1 + d = a + d + d = a + 2d$

$a_3 = a_2 + d = a + 2d + d = a + 3d$

$\vdots$

$a_n = a + nd$ formula chiusa

4. $a_0 = a$

$a_n = a_{n-1} \cdot d$

$a_0 = a$

$a_1 = a_0 \cdot d = a d$

$a_2 = a_1 \cdot d = (a \cdot d) \cdot d = a \cdot d^2$

$a_3 = a_2 \cdot d = (a \cdot d^2) \cdot d = a \cdot d^3$

$a_n = a \cdot d^n$ formula chiusa.

5. $a_0 = 0$

$a_n = 2a_{n-1} + 1$

$$a_n = 2(2a_{n-2}+1)+1 = 4a_{n-2}+2+1 = 4(2a_{n-3}+1)+2+1 =$$

$$= 8a_{n-3}+4+2+1 = 8(2a_{n-4}+1)+2^2+2^1+2^0 =$$

$$= 16a_{n-4}+2^3+2^2+2^1+2^0 = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$$

formula chiusa $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$

Numeri di Fibonacci

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ rapporto aureo o proporzione divina.