$f : A \to B$ funzione

f si dice ingettiva se e solo se

$\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

equivalentemente

$\forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

equivalentemente

$\forall y \in B \quad f^{-1}(y) \overset{\text{def}}{=} f^{-1}(\{y\}) \overset{\text{def}}{=} \{x \in A : f(x) = y\}$

ha al massimo un elemento

(non può avere più di un elemento).

Si dice che f è surgettiva

$\forall y \in B \quad \exists x \in A$ tale che $f(x) = y$

equivalentemente

$\forall y \in B \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset$

equivalentemente

$f(A) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ tale che } f(x) = y\} = B$.

f si dice bigettiva se è ingettiva e surgettiva.
Si esprimere in questo modo

$$\forall y \in B \quad \exists!\, x \in A \quad \text{tale che} \quad f(x) = y$$

Infatti surgettività: $\forall y \in B$ $\exists x \in A$ tale che $f(x)=y$
però per l'ingettività questo x deve essere unico.
se esistesse $x' \in A$ tale che $f(x') = y = f(x)$
si avrebbe $f(x') = f(x)$ e quindi $x = x'$.

La bigettività si può anche esprimere in questo modo
$\forall y \in B$ $f^{-1}(y)$ è formato da un unico elemento.

Esempi: 1. Si consideri $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$(-(-5) = 5$ per es.)

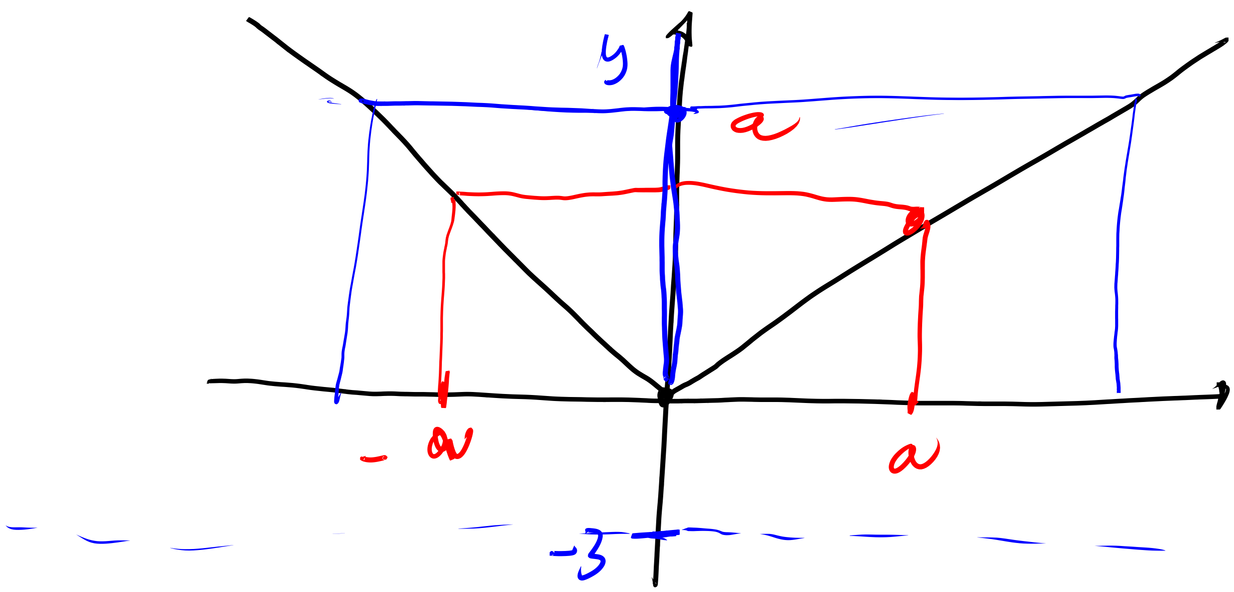
f non è ingettiva: infatti esistono $x_1 = -2$, $x_2 = 2$
tali che $f(-2) = f(2)$

$$f(-2) = |-2| = -(-2) = 2 \ ; \ f(2) = |2| = 2$$

f non è iniettiva

Inoltre f non è surgettiva

$\exists\, y = -3 \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = |x| \neq -3$.



f non è bigettiva.

2. $g: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ $\quad \forall q \in \mathbb{Q} \quad g(q) = 2q + 3$

q_1
q_2
z

g è iniettiva e surgettiva.

- $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \qquad g(q_1) = g(q_2) \Rightarrow$

$2q_1 + 3 = 2q_2 + 3 \Rightarrow$

$2q_1 = 2q_2 \Rightarrow$

$$q_1 = q_2.$$

g è iniettiva

- Sia $z \in \mathbb{Q}$ si cerca $q \in \mathbb{Q}$ tale che $g(q) = z$

ovvero $2q + 3 = z$

$2q = z - 3$

$q = \frac{z-3}{2} \in \mathbb{Q}$

Verifica $g\left(\frac{z-3}{2}\right) = \cancel{2}\left(\frac{z-3}{\cancel{2}}\right) + 3 = z - \cancel{3} + \cancel{3} = z.$

g è suriettiva e dunque g è biiettiva

Esempi importanti

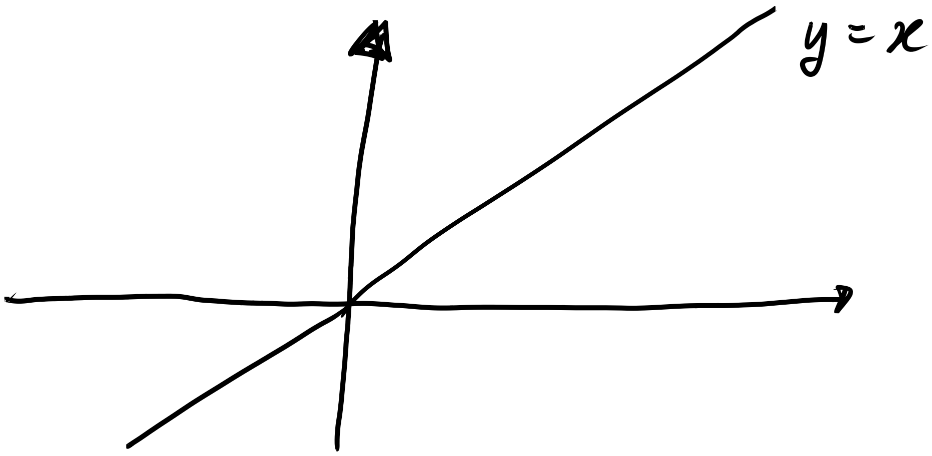
(1) funzione identità o funzione identica

Sia A un insieme $id_A : A \to A$

$\forall x \in A \quad id_A(x) = x.$

In particolare, se $A = \mathbb{R}$ $\quad id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad id_{\mathbb{R}}(x) = x$



$y = x$

$f(x) = y$

$y = id_{\mathbb{R}}(x) = x$

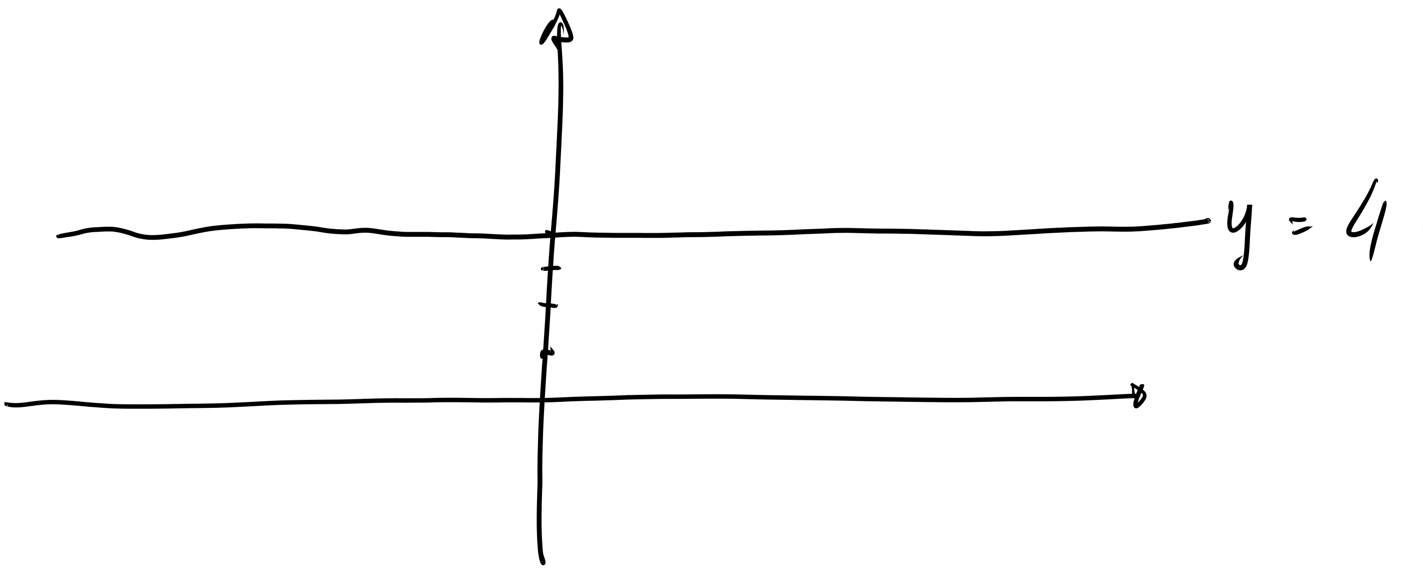
(2) A, B insiemi $\quad y_0 \in B \quad$ f_{y_0} funzione costante di valore costante y_0.

$f_{y_0} : A \longrightarrow B$ tale che $\forall x \in A \quad f_{y_0}(x) = y_0$

caso particolare

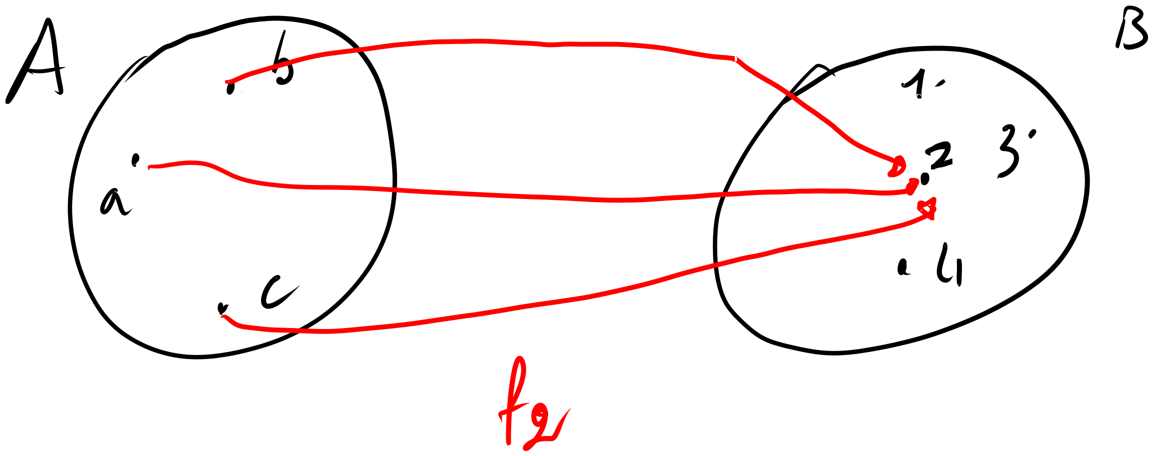
$A = B = \mathbb{R} \quad y_0 = 4 \quad f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 4$

$y = f(x) = 4$



poniamo $A = \{a, b, c\}$ $\qquad B = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad 2 \in B$

$$f_2 : A \longrightarrow B \qquad f_2(a) = f_2(b) = f_2(c) = 2$$

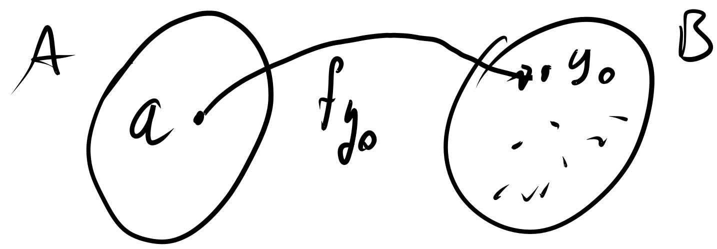


Risulta che $id_A : A \longrightarrow A$ è una funzione bigettiva

Invece la funzione costante di valore costante y_0

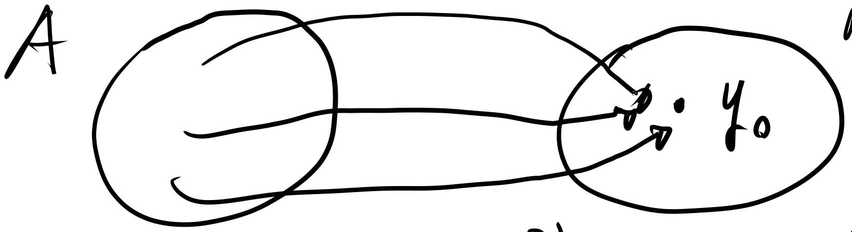
$$f_{y_0} : A \to B$$

è iniettiva se e solo se A è formato da un solo elemento ed è surgettiva se e solo se B è formato da un solo elemento.



iniettiva

$A = \{a\}$



$B = \{y_0\}$

surgettiva $\quad f^{-1}(y_0) \neq \emptyset$.

Funzioni composte.

Def. Siano A, B, C insiemi

$f : A \to B \qquad g : B \to C \qquad$ funzioni

Osserv: l'insieme di partenza di g coincide con l'insieme di arrivo di f.

Si può considerare la funzione

$$g \circ f : A \to C$$

tale che $\forall x \in A \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Esempi. 1a. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ $f(n) = 2n+1$

$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad \forall x \in \mathbb{Z}$ $g(x) = 3x$

si può considerare $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tale che

$\forall n \in \mathbb{Z}$ $\quad (g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(\underbrace{2n+1}_{x}) = 3(2n+1) = 6n+3.$

si può considerare $f \circ g$? NO perché l'insieme di arrivo di g è diverso dall'insieme di partenza di f.

$g: \mathbb{Z} \to \underline{\underline{\mathbb{Z}}}$

$f: \underline{\underline{\mathbb{N}}} \to \mathbb{Z}$

2a. $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $\quad h(x) = x^2$ $\quad \forall x \in \mathbb{Z}$

$k: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $\quad k(m) = 3m-2$ $\quad \forall m \in \mathbb{N}$

$k \circ h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "k \circ h"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "k"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

$h \circ k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right, "h \circ k"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "h"] & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

$\forall x \in \mathbb{Z} \qquad (k \circ h)(x) = k(h(x)) = k(x^2) = 3x^2 - 2$

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (h \circ k)(n) = h(k(n)) = h(3n-2) = (3n-2)^2 =$
$= 9n^2 - 12n + 4$

$h \circ k \neq k \circ h$ ovviamente perché

$h \circ k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad k \circ h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

3a. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n^3$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{N} \quad g(x) = 2x + 1$.

Si possono considerare $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

ha senso chiedersi se $g \circ f = f \circ g$

sia $n \in \mathbb{N} \qquad (g \circ f)(\underline{n}) = g(f(n)) = g(\underbrace{n^3}_{x}) = 2 \cdot n^3 + 1$

sia $x \in \mathbb{N} \qquad (f \circ g)(\underline{x}) = f(g(x)) = f(\underbrace{2x+1}_{n}) = (2x+1)^3 =$

$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

$\forall t \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{aligned}(g\circ f)(t) &= 2t^3+1\\ (f\circ g)(t) &= 8t^3+12t^2+6t+1\end{aligned}\right\}$$ diversi!

In generale considerate due funzioni g e f,

può capitare che non esiste una delle due composizioni

può capitare che esistano entrambe ma che abbiano diversi insiemi di partenza e di arrivo,

o infine che esistano entrambe le composizioni e che abbiano lo stesso insieme di partenza e di arrivo, ma in generale le due composizioni sono diverse (es. 3a.).

Prop. Siano $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ funzioni. Risulta allora

1. $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$ (proprietà associativa di $\circ$)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h\circ g"'] & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[rr, bend right, "h\circ(g\circ f)"'] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "(h\circ g)\circ f"'] & B \arrow[r, "h\circ g"] & D \end{tikzcd}$$

2. $id_B \circ f = f \circ id_A = f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "id_B \circ f"'] & B \arrow[r, "id_B"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "id_A"] \arrow[rr, bend right, "f\circ id_A"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

3. Se f e g sono iniettive, allora $g\circ f$ é iniettiva

Se f e g sono surgettive, allora $g\circ f$ é surgettiva

Se f e g sono bigettive allora $g\circ f$ é bigettiva.

<u>Dim</u> 1. Sia $x \in A$

$$h\circ(g\circ f)(x) = h\left((g\circ f)(x)\right) = h\left(g(f(x))\right)$$

$$(h\circ g)\circ f(x) = (h\circ g)(f(x)) = h\left(g(f(x))\right)$$

2. Sia $x \in A$ $\quad (id_B \circ f)(x) = id_B(f(x)) = f(x)$

$id_B \circ f : A \to B$
$f : A \to B$

assumono in ogni $x \in A$ lo stesso valore.

in modo analogo si verifica che $f \circ id_A = f$.

3. f, g siano iniettive

siano $\underbrace{x_1, x_2 \in A}$, $\underbrace{(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)}$ $\Rightarrow$

$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \underbrace{x_1 = x_2}$.

g è iniettiva

f è iniettiva

f, g siano surgettive

per provare che $g \circ f$ è surgettiva, si fissa $z \in C$

$g \circ f : A \to C$

$\exists\, y \in B$ tale che $g(y) = z$ (poiché g è surgettiva)

$y \in B$ e quindi $\exists\, x \in A$ tale che $f(x) = y$
(poiché f è surgettiva)

quindi $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

In conclusione $\exists\, x \in A$ tale che $(g \circ f)(x) = z$

e quindi $g \circ f$ è surgettiva.

se f e g sono bigettive allora ovviamente $g \circ f$ è bigettiva.

<u>Non è vero</u> che se $g \circ f$ è ingettiva allora lo siano g e f, e che se $g \circ f$ è surgettiva, allora lo siano g e f.

<u>Esempio</u> $A = \{a\}$ $\quad B = \{1, 2, 3\}$ $\quad C = \{z\}$

$f : A \to B$ $\quad f(a) = 2$ $\quad$ non è surgettiva

$g : B \to C$ $\quad g(1) = g(2) = g(3) = z$ $\quad$ non è ingettiva

$g \circ f : A \longrightarrow C$ $\quad (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(2) = z$

$g \circ f$ è ingettiva e surgettiva.

<u>Def.</u> Sia $f : A \to B$. Si dice che f è invertibile se esiste $g : B \longrightarrow A$ tale che

$$g \circ f : A \longrightarrow A \qquad g \circ f = id_A$$

$$f \circ g : B \longrightarrow B \qquad f \circ g = id_B$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right, "g \circ f = id_A"'] & B \arrow[r, "g"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g = id_B"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

la funzione g si dice funzione inversa di f. Naturalmente anche f è funzione inversa di g.

Prop. Sia $f: A \to B$ una funzione. Se f è invertibile allora f ha un'unica funzione inversa.

Dim. Siano $g: B \to A$ $h: B \to A$ due funzioni inverse di f.

$$g \circ f = id_A \qquad h \circ f = id_A$$
$$f \circ g = id_B \qquad f \circ h = id_B.$$

$$\underbrace{f \circ g} = \underbrace{f \circ h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g \circ (f \circ g) = g \circ (f \circ h) \Rightarrow (g \circ f) \circ g = (g \circ f) \circ h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow id_A \circ g = id_A \circ h \Rightarrow g = h.$$

Teorema. Sia $f: A \to B$ una funzione.

f è invertibile $\iff$ f è bigettiva.

Dim. $\Rightarrow$) ipotesi f è invertibile
tesi f è bigettiva.

esiste la funzione inversa $g: B \to A$

$f \circ g = id_B$ $g \circ f = id_A$

f è iniettiva: Siano $\underline{x_1, x_2 \in A}$ con $\underline{f(x_1) = f(x_2)}$

$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$

$\Rightarrow \underline{X_1 = X_2}$

f è surgettiva. Sia $y \underline{\in B}$ $g(y) \in A$

$\exists \, \underline{x = g(y) \in A}$ tale che $\underline{f(x)} = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = \underline{y}$.

$\Leftarrow$) ipotesi f è bigettiva
tesi f è invertibile

dobbiamo costruire
$g : B \to A$ che sia l'inversa di f

$y \in B$ $g(y) = x$ tale che $f(x) = y$

si può fare perché
x esiste ed è unico.

si verifica che g è la funzione inversa
di f.