Def. Si dice grafo una terna $\mathcal{G}=(V,L,\varphi)$ dove $V$ è un insieme $|V|\geq 2$, $L$ insieme non vuoto

$$\varphi : L \longrightarrow \mathcal{P}_2(V)$$

dove $\mathcal{P}_2(V)=\{A\subset V \,;\, |A|=2\}$.

elementi di $V$: nodi o vertici di $\mathcal{G}$
elementi di $L$: lati di $\mathcal{G}$
Se due vertici sono estremi di uno stesso lato si dicono adiacenti; se due lati hanno un vertice in comune si dicono incidenti. Un vertice che non è estremo di alcun lato si dice isolato.

Def.: Si dice grado o valenza di un vertice $v$ e si indica con $d(v)$ il numero dei lati che hanno $v$ come vertice.
Il grado complessivo di un grafo è la somma dei gradi di tutti i vertici

$$\sum_{v\in V} d(v)$$

Lemma delle strette di mano: $\displaystyle\sum_{v\in V} d(v) = 2|L|$.

Prop. Il numero dei vertici dispari di un grafo è pari

vertice dispari = vertice di grado dispari
vertice pari = " " " pari.

Def. Sia $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$ un grafo con $|V| = n \in \mathbb{N}^*$, $n \neq 1$.
Si dice matrice di adiacenza di $\mathcal{G}$ la matrice avente $n$ righe e $n$ colonne (matrice quadrata di ordine $n$)

$A = (a^i_j)$ $\quad i, j = 1, \dots, n$ $\qquad$ cioè:

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sia $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ l'insieme dei vertici.

$a^i_j$ = numero dei lati che hanno $v_i$ e $v_j$ come estremi

$\forall i = 1, \dots, n \qquad a^i_i = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & 0 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & & & \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

inoltre $\forall i, j = 1, \dots, n \qquad a^i_j = a^j_i$ $\qquad$ cioè la matrice è simmetrica

Se la funzione $\varphi$ è ingettiva, allora si dice che $G$ è un grafo semplice. In tal caso la matrice di adiacenza è formata soltanto da 0 e 1.
Infine la somma degli elementi della riga $i$-ma (e della colonna $i$-ma) è uguale al grado di $v_i$.

Def.: Sia $G=(V,L,\varphi)$ un grafo con $|V|=n$, $|L|=m$ e sia $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ $L=\{l_1,\dots,l_m\}$. Si dice matrice di incidenza di $G$ la matrice avente $m$ righe e $n$ colonne (matrice di tipo $(m,n)$) la matrice

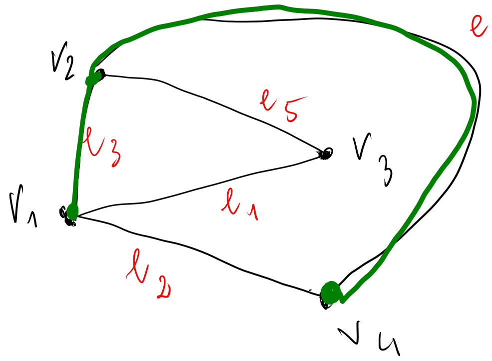
$$B=(b^i_j) \qquad \begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{matrix}$$

cioè

$$B=\begin{pmatrix} b^1_1 & b^1_2 & \dots & b^1_n \\ b^2_1 & b^2_2 & \dots & b^2_n \\ \vdots & \vdots & & \\ b^m_1 & b^m_2 & \dots & b^m_n \end{pmatrix}$$

così definita

$$b^i_j = \begin{cases} 1 & \text{se } v_j \text{ è estremo di } l_i \\ 0 & \text{se } v_j \text{ non è estremo di } l_i \end{cases}$$




$\varphi(e_1)=\{v_1,v_3\}$

$\varphi(e_2)=\{v_1,v_4\}$

$\varphi(e_3)=\{v_1,v_2\}$

$\varphi(e_4)=\{v_2,v_4\}$

$\varphi(e_5)=\{v_2,v_3\}$

$d(v_1)=3$

$d(v_2)=3$

$d(v_3)=2$

$d(v_4)=2$

ammette un cammino Euleriano

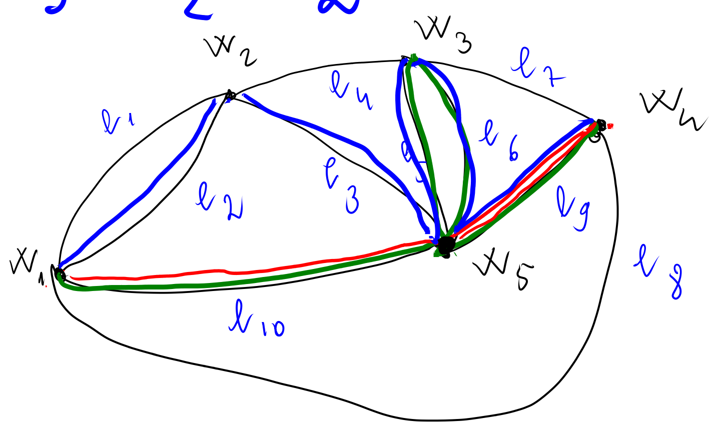
$e_3, e_4$ è un cammino di lunghezza 2 da $v_1$ a $v_4$

matrice di adiacenza

$$\begin{array}{c|cccc|c} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ v_4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ \hline & 3 & 3 & 2 & 2 & \end{array}$$

matrice di incidenza

$$\begin{array}{c|cccc|} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ e_2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ e_3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ e_4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e_5 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 3 & 3 & 2 & 2 \end{array}$$




$d(w_1)=4$

$d(w_2)=4$

$d(w_3)=4$

$d(w_4)=3$

$d(w_5)=5$

c'è un cammino Euleriano

grafo non semplice.

$e_{10}, e_5, e_6, e_9$ cammino di lunghezza 4 da $w_1$ a $w_4$.

$$
\begin{array}{c}
\\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 0
\end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccccc} 4 & 4 & 4 & 3 & 5 \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ \\
\end{array}
$$

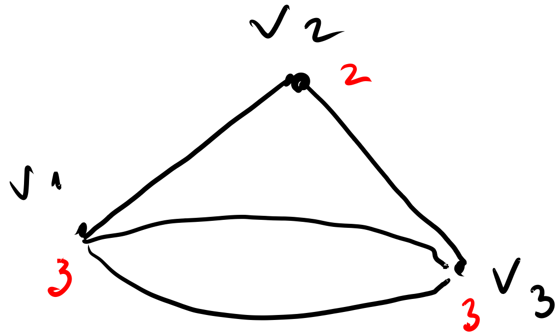
matrice di adiacenze

$$
\begin{array}{c}
\\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \\ l_7 \\ l_8 \\ l_9 \\ l_{10} \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccccc} 4 & 4 & 4 & 3 & 5 \end{array}
\end{array}
$$

matrice di incidenza

Esercizio

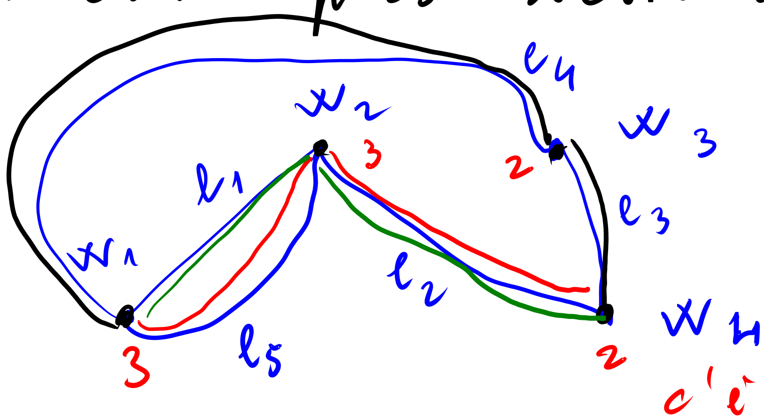
$$\begin{array}{c|ccc} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 2 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 \\ v_3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$




esiste un cammino Euleriano

Dalla matrice di adiacenza posso ricostruire il grafo.

$$\begin{array}{c|cccc} & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \hline e_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ e_4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ e_5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 3 & 3 & 2 & 2 \end{array}$$



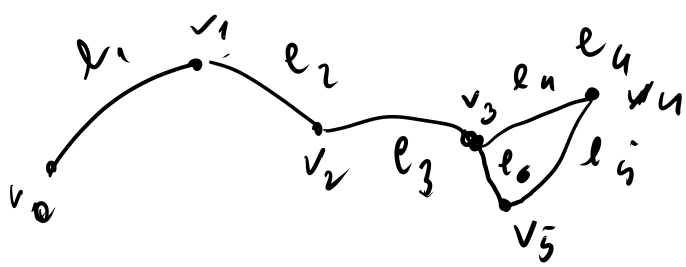

$e_1, e_2$ sono tre geodetiche tra $w_1$ e $w_4$
$e_5, e_2$
$e_4, e_3$

c'è un cammino Euleriano

Dalla matrice di incidenza posso ricostruire il grafo

Def. Sia $G = (V, L, \varphi)$ un grafo. Si dice cammino una successione di lati <u>distinti</u> di $G$:

$$e_1 = \{v_0, v_1\},\ e_2 = \{v_1, v_2\}, \ldots, e_n = \{v_{n-1}, v_n\} \qquad (*)$$

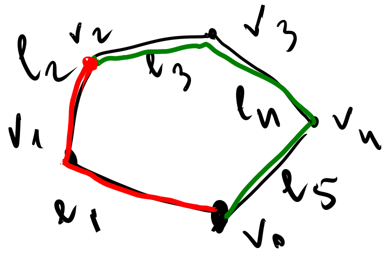



in modo che i lati siano incidenti nel senso che il secondo vertice del lato $e_i$ sia coincidente con il primo vertice

del lato $l_{i+1}$ e i lati devono essere tutti distinti.
Il numero di lati del cammino si dice lunghezza del cammino.
$l_1, \dots, l_n$ cammino di lunghezza $n$ da $v_0$ a $v_n$.

Osserv. C'è un unico cammino di lunghezza 0 da un vertice $v_0$ a sé stesso, $\forall v_0 \in V$: è un cammino privo di lati (con 0 lati) da $v_0$ a $v_0$. Esso si chiama cammino nullo da $v_0$ a $v_0$.
Un cammino da $v_0$ a $v_0$ si dice circuito.

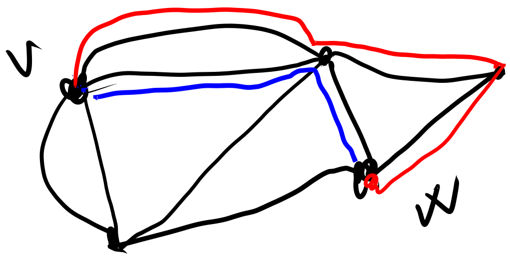
circuito Euleriano



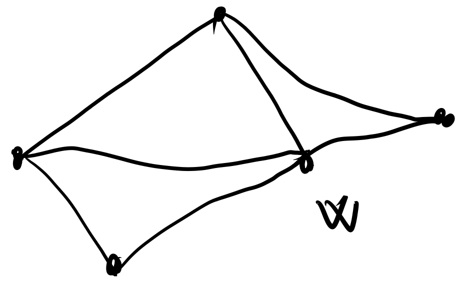

$v_0, v_2$ $\quad$ $l_1, l_2$ geodetica

$l_3, l_4, l_5$ più lungo

Def. Siano $v, w \in V$. Si dice <u>geodetica</u> un cammino di lunghezza minima tra $v$ e $w$.
La lunghezza di una geodetica tra $v$ e $w$ si chiama distanza da $v$ a $w$.
Def. Si dice connesso un grafo $G = (V, L, \varphi)$ tale che $\forall v, w \in V$ esiste un cammino tra $v$ e $w$.




è connesso

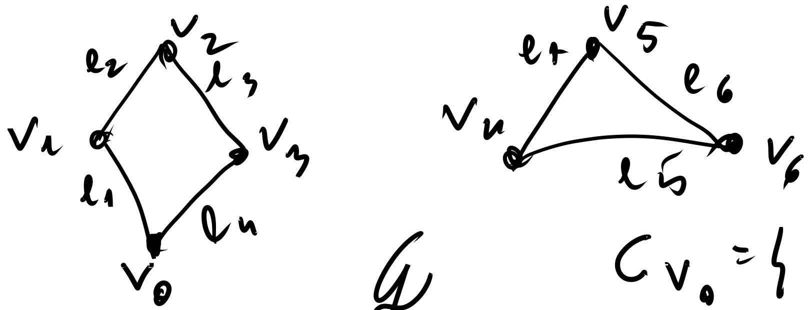



• $v_0$ vertice isolato

non è connesso

$L' = \{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ $(C_{v_0}, L')$ sottografo

$L'' = \{l_5, l_6, l_7\}$ $(C_{v_4}, L'')$ sottografo




non connesso

$\mathcal{G}$

$C_{v_0} = \{v_0, v_1, v_2, v_3\} = C_{v_1} = C_{v_2} = C_{v_3}$

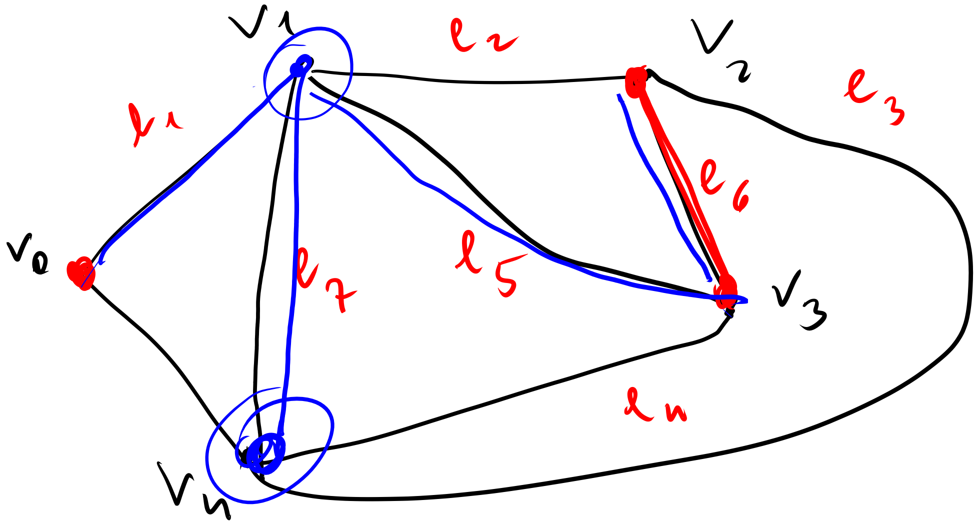
$C_{v_4} = C_{v_5} = C_{v_6} = \{v_4, v_5, v_6\}$.

**Def.** Sia $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$ un grafo e sia $v_0 \in V$. L'insieme

$$C_{v_0} = \{v \in V : \text{esiste un cammino da } v_0 \text{ a } v\}$$

si dice componente connessa di $v_0$

**Def.** Sia $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$ un grafo e siano $V' \subset V$, $L' \subset L$. Si dice che $(V', L')$ è un sottografo di $\mathcal{G}$ se $\forall\, l = \{v, w\} \in L'$, risulta $v, w \in V'$.




$V' = \{v_0, v_2, v_3\}$

$L' = \{e_6\}$

$(V', L')$ è un sottografo

$L'' = \{e_1, e_7, e_5, e_6\}$

$(V', L'')$ non è un sottografo

$v_1$ è vertice di $e_1, e_7, e_5$, ma $v_1 \notin V'$

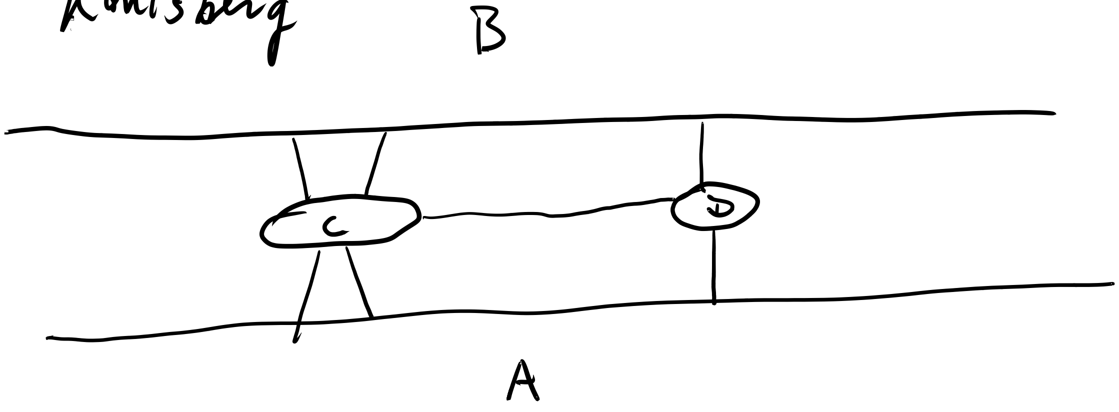
se si considera $V'' = \{v_0, v_1, v_4, v_3, v_2\}$

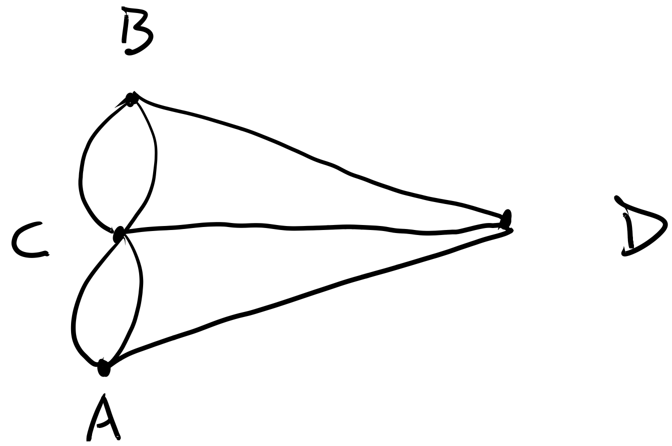
$(V'', L'')$ è un sottografo

Osserv. Sia $G = (V, L, \varphi)$ un grafo. Allora $\forall v \in V$ $C_v$ può essere considerato un sottografo considerando $L_v$ = insieme dei lati che hanno estremi in $C_v$.

Def. Si dice Euleriano un cammino di un grafo $G = (V, L, \varphi)$ che contiene tutti i lati. Si dice circuito Euleriano un circuito che contiene tutti i lati del grafo.

Eulero Könisberg



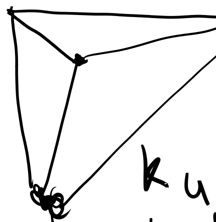




$d(B) = 3$
$d(C) = 5$
$d(A) = 3$
$d(D) = 3$

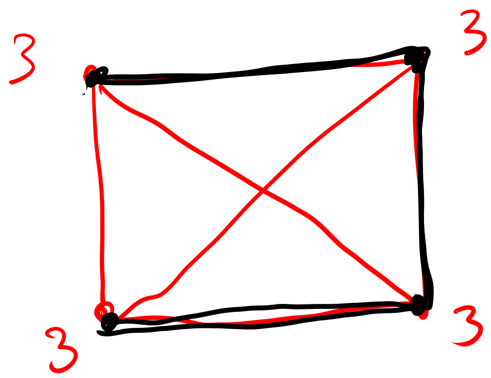
Teorema (Eulero 1736) Un grafo privo di punti isolati ammette un circuito Euleriano se e solo se è connesso e non ha vertici dispari.

Sicuramente il problema dei ponti di Könisberg ha risposta negativa, perché il grafo che lo rappresenta ha 4 vertici dispari.

Teorema Un grafo privo di punti isolati ammette un cammino Euleriano se e solo se è connesso e ha 0 o 2 vertici dispari (caso 0: circuito Euleriano).

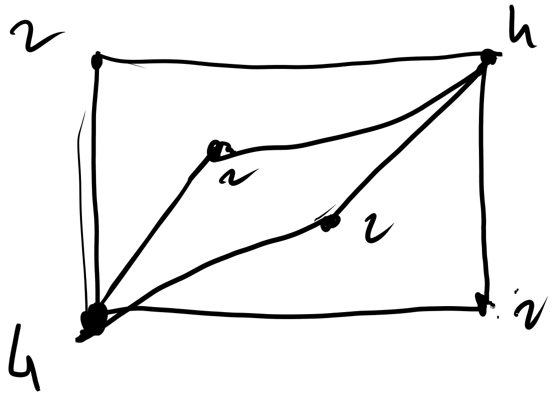



rappresentazione planare di K4




$K_4$ non ammette né un cammino né un circuito Euleriano

**Def.** Si dice Hamiltoniano un cammino che contenga tutti i vertici di un grafo, una volta sola, a esclusione del vertice di partenza (caso del circuito).




ammette un circuito Euleriano perché ha 0 vertici dispari ma non ammette un cammino Hamiltoniano

Def. Siano $\mathcal{G}=(V,L,\varphi)$ e $\mathcal{G}'=(V',L',\varphi')$ due grafi. Si dice isomorfismo tra $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ una funzione bigettiva

$$f: V\cup L \longrightarrow V'\cup L'$$

tale che

1° $f(V)=V'$ e $f(L)=L'$

2° $\forall \ell \in L$ tale che $\varphi(\ell)=\{v,w\}\subset V$

$$f(\ell)\in L'$$

$$\varphi(f(\ell))=\{f(v),f(w')\}$$

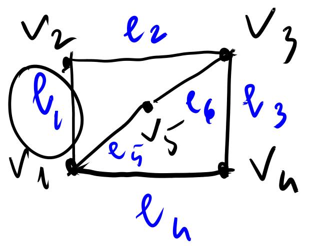
In tal caso si dice che i grafi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ sono isomorfi.

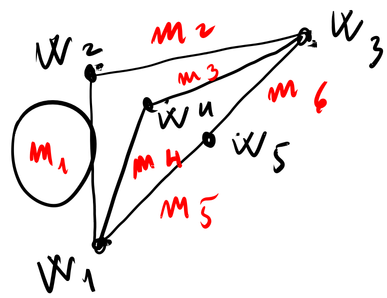
Osserv. Se due grafi sono isomorfi allora si ha

1) $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ hanno lo stesso numero di vertici e di lati

2) $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ hanno lo stesso numero di vertici di grado fissato

4) $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ hanno lo stesso numero di cammini di lunghezza fissata.



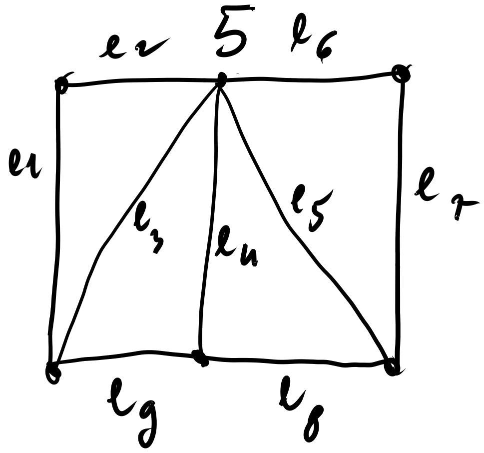

$f(v_i) = w_i$ isomorfismo

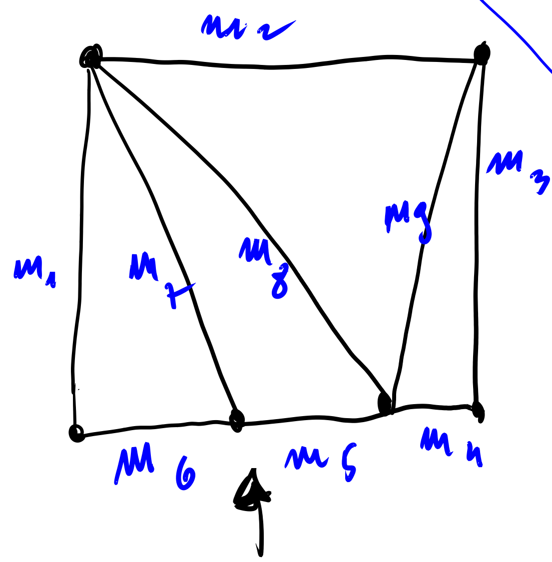
$f(l_i) = m_i$

$V \cup L = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\}$

$V' \cup L' = \ldots$

planari




non sono isomorfi

non ci sono vertici di grado 5

# GRAFI BIPARTITI

Osserv. Sia $\mathcal{G}=(V,L,\varphi)$ un grafo semplice, cioè la funzione $\varphi: L \longrightarrow \mathcal{P}_2(V)$ è ingettiva. Allora è sufficiente individuare $\mathcal{G}$ tramite l'insieme $V$ dei vertici e l'insieme $L$ dei lati. D'ora in avanti indicheremo con $\mathcal{G}=(V,L)$ un grafo semplice.

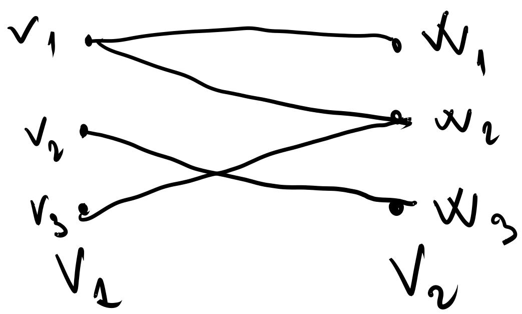
Def. Sia $\mathcal{G}=(V,L)$ un grafo semplice. Si dice che $\mathcal{G}$ è bipartito se esistono $V_1, V_2$ sottoinsiemi di $V$ tali che $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1, V_2$ non vuoti tali che

$\forall\, v, w \in V_1$ $\quad$ $v, w$ non sono adiacenti

$\forall\, v, w \in V_2$ $\quad$ $v, w$ " " " .

$V_1$ e $V_2$ si dicono i due partiti.

Esempio



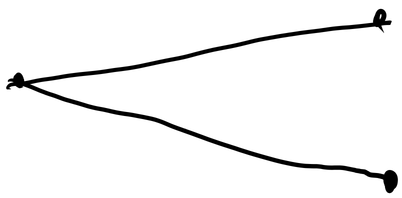

Def. Sia $\mathcal{G}=(V,L)$ un grafo bipartito. Si dice che $\mathcal{G}$ è completo se $\forall\, v \in V_1$ $\forall\, w \in V_2$ $v$ e $w$ sono adiacenti

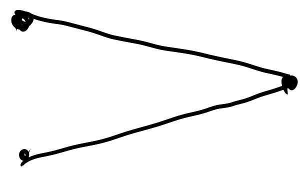
Se $|V_1| = n$ $|V_2| = m$ si indica con $K_{n,m}$

il grafo completo che ha $V_1$ e $V_2$ come partiti

Esempi $K_{1,1}$

$K_{1,2}$

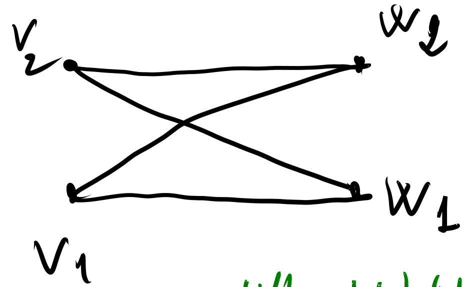


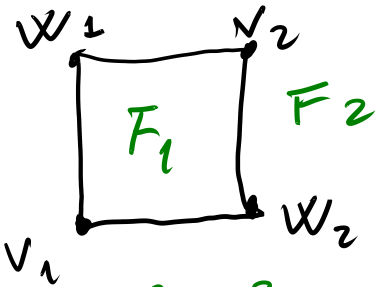


$K_{2,1}$

Sono la stessa cosa

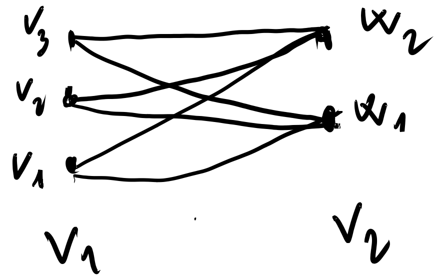
$K_{2,2}$ planare

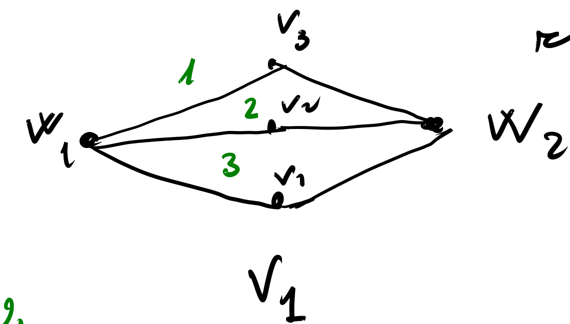



$|V| - |L| + |F| = 4 - 4 + 2 = 2$

$K_{3,2}$ è planare

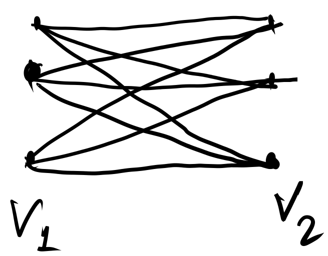


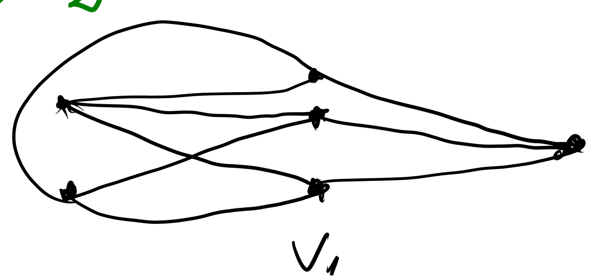




rappresentaz. planare di $K_{3,2}$

$5 - 6 + 3 = 2$

$K_{3,3}$

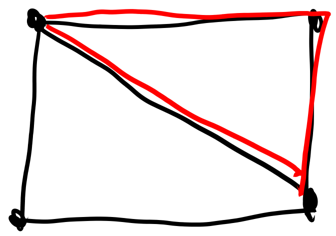



non planare

Teorema. Sia $G=(V,L)$ un grafo semplice. $G$ è bipartito se e solo se non ammette circuiti di lunghezza dispari.

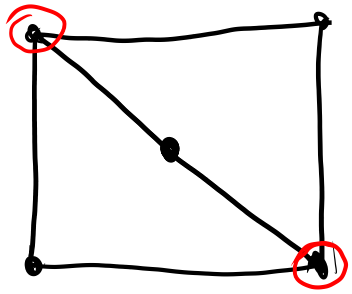
planare



→ circuito di lunghezza 3 (dispari) quindi il grafo non è bipartito

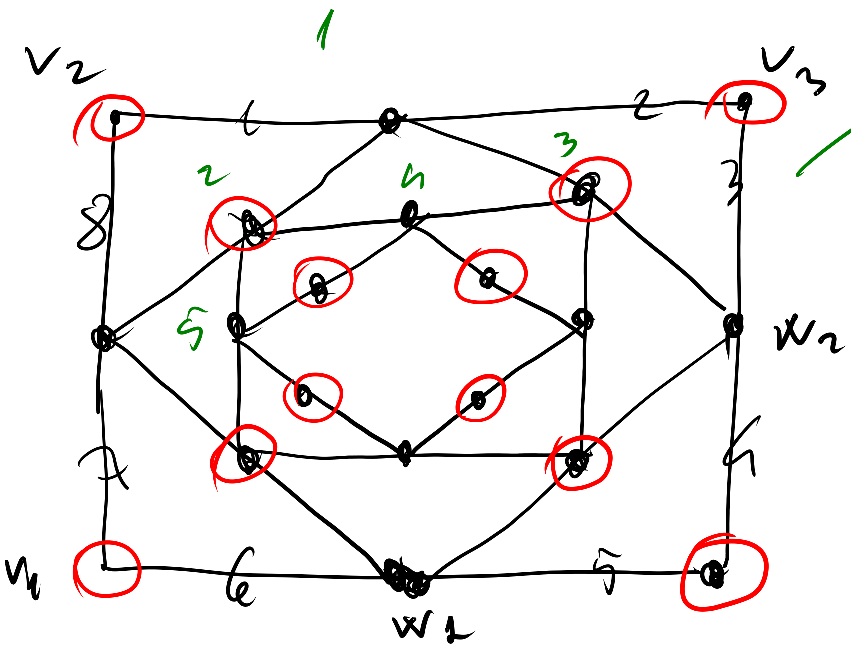
planare

$K_{3,2}$



è bipartito perché tutti i circuiti sono di lunghezza pari

planare




→ verificare la formula di Eulero

è bipartito

1° partito formato dai vertici segnati in rosso

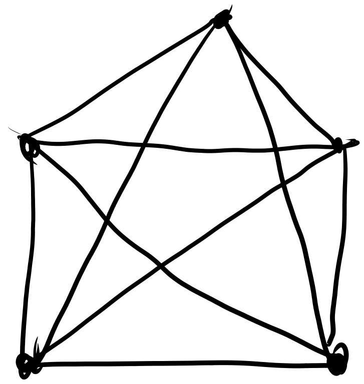
2° partito formato dai rimanenti.

$V_1 = \{v_1, v_2, v_3 \text{ ------ } \}$

$V_2 = \{w_1, w_2, w_3, \text{ ------ } \}$

Def. Sia $\mathcal{G}=(V,L,\varphi)$ un grafo. Si dice che $\mathcal{G}$ è planare se ammette una rappresentazione nella quale non ci sono intersezioni tra i lati, ad esclusione dei vertici.

Non è planare $K_5$



Teorema. Se un grafo $\mathcal{G}=(V,L,\varphi)$ è planare, allora

$$|L| \leq 3|V| - 6$$

Per $K_5$: grafo completo di ordine 5

Ciascun vertice ha grado 4 : grado complessivo $4 \cdot 5$

$$|L| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$$

$$3|V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 15 - 6 = 9$$

$$10 \nleq 9$$

e quindi $K_5$ non è planare.

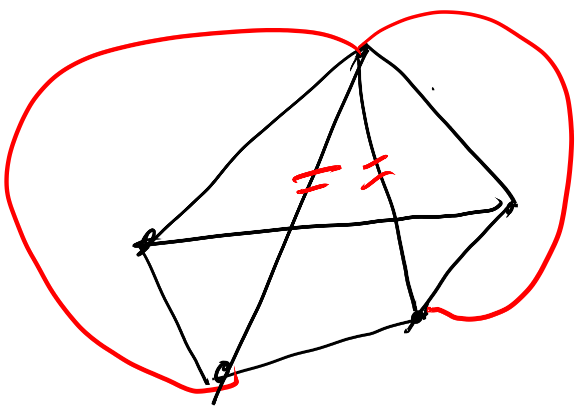
Per $K_{3,3}$: $\quad |V| = 6 \quad 2|L| = 6 \cdot 3 = 18 \quad |L| = 9$

$$3 \cdot |V| - 6 = 3 \cdot 6 - 6 = 18 - 6 = 12$$

$9 \leq 12$ è vero

però il grafo $K_{3,3}$ non è planare.

Prop. Sia $G = (V, L, \varphi)$ un grafo. Se $|L| < 9$ allora il grafo è planare.



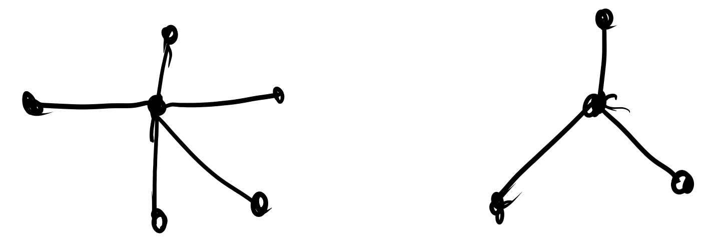
ha 8 lati e quindi è planare

Teorema. Sia $G = (V, L, \varphi)$ un grafo planare. Allora vale la formula di Eulero

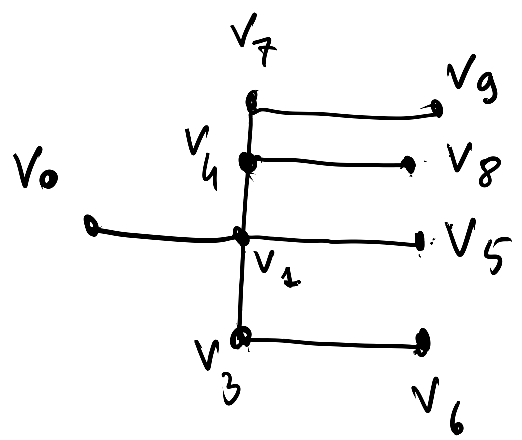
$$|V| - |L| + |F| = 2.$$

Def. Sia $G=(V,L)$ un grafo semplice. Si dice che $G$ è una foresta se è privo di circuiti. Si dice che $G$ è un albero se $G$ è connesso ed è privo di circuiti.

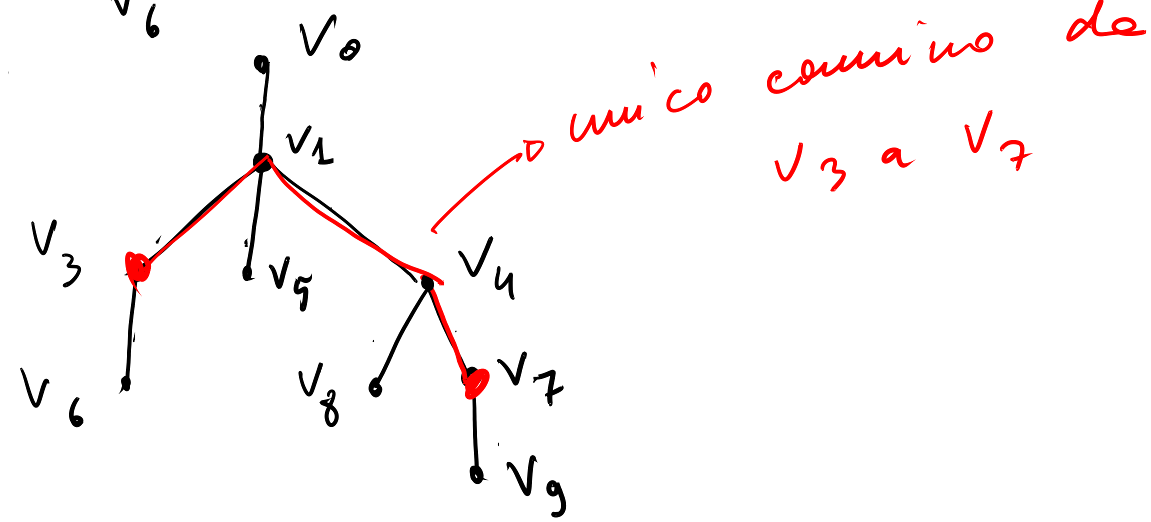
Es.



foresta




albero




Prop. Sia $G=(V,L)$ un albero. Se $|V|=n$ allora $|L|=n-1$.

Prop. Un albero ha almeno un vertice di grado 1.

**Teorema** Sia $G=(V,L)$ un grafo semplice, con $|V|=n$. $G$ è un albero se e solo se vale una delle seguenti proprietà:

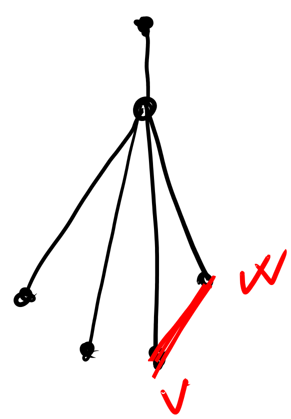
(a) $G$ è connesso e ha $n-1$ lati

(b) $G$ ha $n-1$ lati ed è privo di circuiti

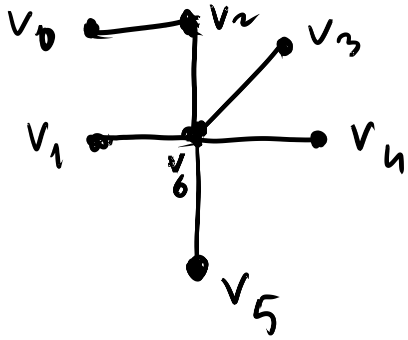
(c) $\forall v,w \in V$ esiste un unico cammino da $v$ a $w$

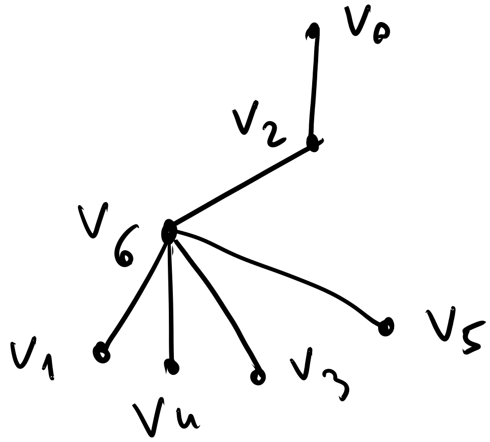
(d) $G$ è connesso e $\forall \ell \in L$ il grafo $(V, L-\{\ell\})$ è sconnesso

(e) $G$ è privo di circuiti e $\forall v,w \in V$ tali che $\{v,w\}$ non è un lato di $G$, $(V, L \cup \{v,w\})$ ammette un circuito.

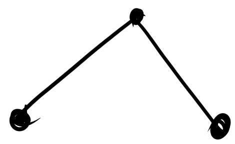



**Osserv.** Sia $G=(V,L)$ un albero. Se $v,w \in V$ c'è un unico cammino da $v$ a $w$ la cui lunghezza si dice distanza da $v$ a $w$.

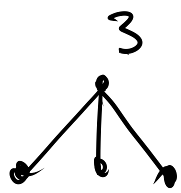


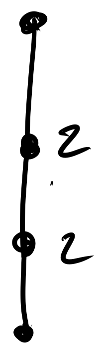

 l'unico albero di ordine 2.

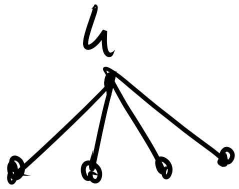


3

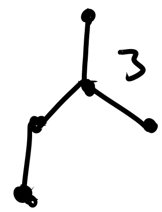


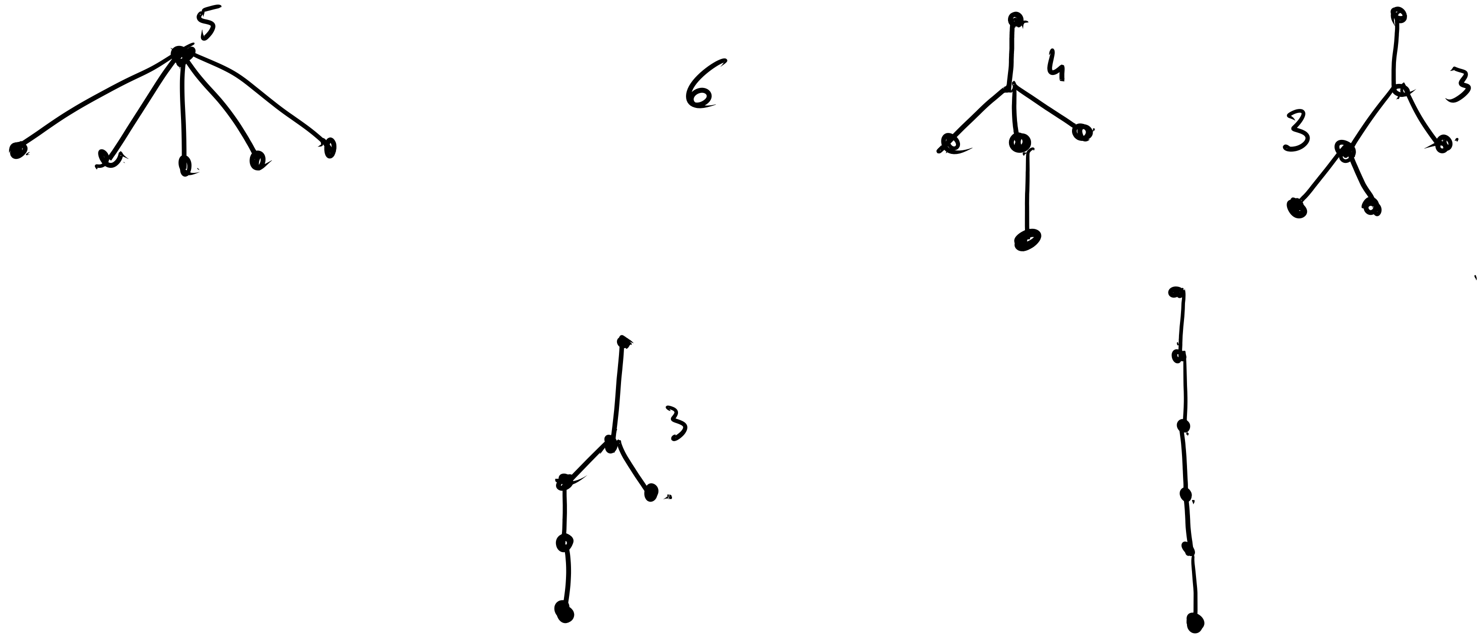

4




5




Prop Un albero è un grafo planare.

Verifichiamo la formula di Eulero:

$$|V| = n$$

$$|V| - |L| + |F| = n - (n-1) + 1 = \cancel{n} - \cancel{n} + 1 + 1 = 2.$$

Ricevimento online domani 16,30.