$A = \mathbb{Z}_8$ $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$

$(A, +, \cdot)$ anello $\rightsquigarrow$ non si deve risolvere perché $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ è un anello

divisori dello zero

elementi unitari

sottogruppi di $(A, +)$.

---

$(\mathbb{Z}_8, +)$ gruppo abeliano $(\mathbb{Z}_8, \cdot)$ monoide commutativo con unità $[1]_8$

$\forall [a]_8, [b]_8, [c]_8 \in \mathbb{Z}_8$ $[a]_8 \cdot ([b]_8 + [c]_8) = [a]_8 \cdot [b]_8 + [a]_8 \cdot [c]_8$

vale la proprietà distributiva

---

$[a]_n \in \mathbb{Z}_n$ è divisore dello zero se e solo se $M.C.D.(a, n) \neq 1$.

---

Def: $(B, +, \cdot)$ anello $a \in B$ è divisore dello zero se
1. $a \neq 0$
2. $\exists b \in B$ $b \neq 0$ tale che $a \cdot b = 0$

---

$[2]_8, [4]_8, [6]_8 \longrightarrow$ i divisori dello zero di $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$

$[2]_8 \cdot [4]_8 = [8]_8 = [0]_8$

$[6]_8 \cdot [4]_8 = [24]_8 = [0]_8$

gli altri elementi non nulli sono unitari (ovvero sono gli elementi invertibili rispetto a $\cdot$).

$[1]_8$, $[3]_8$, $[5]_8$, $[7]_8$ sono gli elementi unitari di $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$

$[a]_n \in \mathbb{Z}_n$ è unitario $\Leftrightarrow$ M.C.D. $(a, n) = 1$

Gli inversi:

$[1]_8^{-1} = [1]_8$

$[3]_8^{-1} = [3]_8$ perché $[3]_8 \cdot [3]_8 = [9]_8 = [1]_8$

$[5]_8^{-1} = [5]_8$ perché $[5]_8 \cdot [5]_8 = [25]_8 = [1]_8$

$[7]_8^{-1} = [7]_8$ perché $[7]_8 \cdot [7]_8 = [49]_8 = [1]_8$

---

$(\mathbb{Z}_8, +)$ è un gruppo ciclico.

Teorema: Ogni sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico

$< [0]_8 > = \{ [0]_8 \}$ M.C.D.$(3,8) = 1$ $\quad h \cdot [0]_8 = [0]_8$

$< [1]_8 > = \mathbb{Z}_8 = < [3]_8 > = < [5]_8 > = < [7]_8 >$

$< [2]_8 > = \{ [2]_8, 2 \cdot [2]_8 = [4]_8, 3 \cdot [2]_8 = [6]_8, 4 \cdot [2]_8 = [8]_8 = [0]_8 \} =$

$= \{ [2]_8, [4]_8, [6]_8, [0]_8 \}$

$< [4]_8 > = \{ [4]_8, 2 \cdot [4]_8 = [8]_8 = [0]_8 \} = \{ [4]_8, [0]_8 \}$

$\langle [6]_8 \rangle$ $\qquad\qquad\qquad$ $[6]_8 = 6 \cdot [1]_8$

$$|[6]_8| = \frac{8}{M.C.D.(6,8)} = \frac{\cancel{8}}{2} = 4$$

quindi $\quad \langle [6]_8 \rangle = \langle [2]_8 \rangle \quad$ perché $\quad |[6]_8| = |[2]_8|$

Teorema (inverso del Teorema di Lagrange per i gruppi ciclici)
Sia $(G,+)$ un gruppo ciclico $|G| = n$, allora per ogni $h \in \mathbb{N}^*$ con $h | n$ esiste un unico sottogruppo $H$ di $(G,+)$ tale che $|H| = h$.

---

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{10} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}
\end{array}$$

Albero $G=(V,L)$ avente

| | |
|---|---|
| 3 | 5 |
| 3 | 4 |
| 2 | 3 |
| 4 | 2 |
| $x$ | 1 |

$|V| = 12 + x$

$|L| = 11 + x$

$$2(11+x) = \sum_{v\in V} d(v) = 3\cdot 5 + 3\cdot 4 + 2\cdot 3 + 4\cdot 2 + x\cdot 1 =$$
$$= 15 + 12 + 6 + 8 + x = 41 + x$$

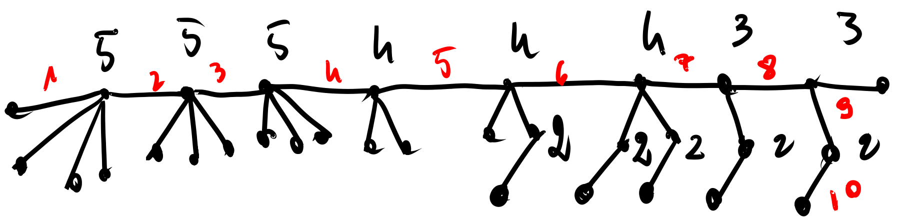
$$22 + \cancel{2}x = 41 + \cancel{x}$$

$x = 41 - 22 = 19$ vertici di grado 1

$|V| = 12 + 19 = 31$

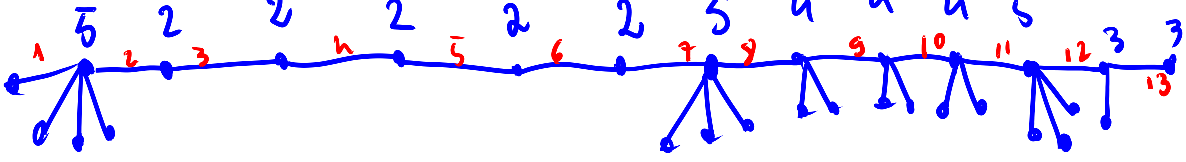
$|L| = 30$

$G_1$



la massima lunghezza di $G_1$ è 10

$G_2$



2 vertici di grado 5 che hanno distanza 6

c'è un cammino di lunghezza 13.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i^2-1} = \frac{n}{2n+1} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Passo base: $P(1)$ vero

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{4i^2-1} = \frac{1}{4\cdot 1^2-1} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

$n=1$: $$\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \quad \text{ok}$$

Passo induttivo: $P(n)$ vero

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i^2-1} = \frac{n}{2n+1}$$ ipotesi d'induz.

$P(n+1)$ vero

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{4i^2-1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$$ tesi

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{4i^2-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i^2-1} + \frac{1}{4(n+1)^2-1} =$$

ipotesi d'induz.

$$= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4(n^2+2n+1)-1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4n^2+8n+4-1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4n^2+8n+3} =$$

$$\begin{array}{rrr|l}
4n^2 & +8n & +3 & 2n+1 \\
-4n^2 & -2n & & \hline 2n+3 \\
\hline
 & 6n & +3 & \\
 & -6n & -3 & \\
\hline
 & // & // &
\end{array}$$

$$4n^2+8n+3 = (2n+1)(2n+3)$$

$$(2n+1)(2n+3) = 4n^2+6n+2n+3 = 4n^2+8n+3 \quad \text{ok!}$$

$$\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}\overset{(*)}{=}$$

$$n_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot 2\cdot 1}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{-3\pm 1}{4}=$$

$$\left( ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) \quad x_1, x_2 \text{ sono le radici} \right)$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{4}=-\frac{1}{2} \\ -\frac{4}{4}=-1 \end{cases}$$

$$2n^2+3n+1=2\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)=(2n+1)(n+1)$$

$$=\frac{\cancel{(2n+1)}(n+1)}{\cancel{(2n+1)}(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}$$

---

$(\mathbb{Z},*)$ $\qquad *:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$

$$(x,y)\longmapsto x*y=x-y+3$$

(a) $*$ associativa, commutativa NO

(b) elemento neutro non esiste

(c) inversi non ha senso

(d) $(\mathbb{Z},*)$ monoide, gruppo ( NO )

(e) $\mathbb{N}$ chiuso in $(\mathbb{Z},*)$

(f) ...

(a) $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} \quad x * (y * z) = (x * y) * z \quad ?$

$$x * (y * z) = x * \underbrace{(y - z + 3)}_{y'} = x - y' + 3 = x - (y - z + 3) + 3 =$$
$$= x - y + z \cancel{-3} \cancel{+3} = \underline{x - y + z}$$

$$((x * y) * z) = \underbrace{(x - y + 3)}_{x'} * z = x' - z + 3 = (x - y + 3) - z + 3 =$$
$$= x - y + 3 - z + 3 = \underline{x - y - z + 6}$$

per es. $\quad 2 * (1 * (-2)) = 2 * (1 - (-2) + 3) = 2 * 6 = 2 - 6 + 3 = -1$

$$(2 * 1) * (-2) = (2 - 1 + 3) * (-2) = 4 * (-2) = 4 - (-2) + 3 =$$
$$= 4 + 2 + 3 = 9$$

$*$ non è una legge associativa

$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x * y = y * x$

$x - y + 3 = y - x + 3 \quad$ falso

per es: $\quad 1 * 2 = 1 - 2 + 3 = 2$

$2 * 1 = 2 - 1 + 3 = 4$

$(\mathbb{Z}, *)$ non è né associativa né commutativa

Cerchiamo, se esiste, $e \in \mathbb{Z}$ tale che $\forall x \in \mathbb{Z}$

$$e * x = x * e = x$$

$$e * x = x \iff e - x + 3 = x \iff e = 2x - 3$$

$e$ dipende da $x$ e quindi non può andare bene

$$x * e = x$$

$$\cancel{x} - e + 3 = \cancel{x} \qquad e = 3$$

esiste un elemento neutro a destra

$$3 * x = 3 - x + 3 = 6 - x \neq x$$

3 non funziona come elemento neutro

Allora non ha senso parlare di elementi invertibili

$\mathbb{N}$ chiuso in $(\mathbb{Z}, *)$ $\quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad n * m \in \mathbb{N}$, $m * n \in \mathbb{N}$

$0, 4 \in \mathbb{N} \qquad 0 * 4 = 0 - 4 + 3 = -1 \notin \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ non è chiuso perché $0, 4 \in \mathbb{N}$ e $0 * 4 \notin \mathbb{N}$.

Siano $x, y \in \mathbb{P} \Rightarrow \exists\, h, k \in \mathbb{Z}$ tali che $x = 2h$, $y = 2k$

$$x * y = x - y + 3 = 2h - 2k + 3 = 2h - 2k + 2 + 1 =$$
$$= 2(h - k + 1) + 1 \quad \text{dispari}$$

Siano $x, y \in \mathbb{D} \Rightarrow \exists\, t, s \in \mathbb{Z}$ tali che $x = 2t + 1$ $\quad y = 2s + 1$

$$x * y = x - y + 3 = 2t + 1 - (2s + 1) + 3 = 2t \cancel{+1} - 2s \cancel{-1} + 3 =$$
$$= 2t - 2s + 2 + 1$$
$$= 2(t - s + 1) + 1 \quad \text{dispari}$$

$\forall x, y \in \mathbb{D}$ $\quad x * y \in \mathbb{D}$ per cui $\mathbb{D}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ chiuso rispetto ad $*$.

$(\mathbb{D}, *)$ struttura algebrica.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ $\qquad$ $g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$n \mapsto \frac{n-3}{2n+2}$ $\qquad$ $x \mapsto -\frac{2}{3}x + 1$

$n \in \mathbb{N}$ $\quad$ $2n+2 \neq 0$ sempre

$f, g$ ingettive, surgettive

$f^{-1}, g^{-1}$ ?

$g \circ f$, $f \circ g$ ?

$f(4)$, $g(\{1, \frac{2}{3}, -1\})$ $\qquad$ $f^{-1}(\{\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\})$

$f$ è ingettiva? $\quad$ $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $f(n) = f(m)$

$$f(n) = f(m) \Leftrightarrow \frac{n-3}{2n+2} = \frac{m-3}{2m+2} \Leftrightarrow \frac{(n-3)(2m+2) - (m-3)(2n+2)}{(2n+2)(2m+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{2nm} + 2n - 6m - \cancel{6} - (\cancel{2nm} + 2m - 6n - \cancel{6})}{(2n+2)(2m+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2n - 6m - 2m + 6n = 0 \Leftrightarrow 8n - 8m = 0 \Leftrightarrow n = m$$

$f(n) = f(m) \Leftrightarrow n = m$

$f$ è ingettiva.

$f$ è surgettiva? Sia $x \in \mathbb{Q}$. Cerchiamo, se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) = x$

$$f(n) = x \iff \frac{n-3}{2n+2} = x \iff \frac{n-3 - x(2n+2)}{2n+2} = 0 \iff$$

$$n - 3 - 2nx - 2x = 0 \iff n(1-2x) = 3 + 2x \iff$$

$$\iff n = \frac{3+2x}{1-2x} \notin \mathbb{N}$$

per es. $x = 4$ $\qquad n = \frac{3+8}{1-8} = -\frac{11}{7} \notin \mathbb{N}$.

$f$ non è surgettiva e quindi non è bigettiva per cui non è invertibile ($\nexists f^{-1}$).

$$g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \ni y$$
$$x \longmapsto -\frac{2}{3}x + 1$$

$g$ è iniettiva? Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ tali che $g(x_1) = g(x_2)$

$$g(x_1) = g(x_2) \iff -\frac{2}{3}x_1 \cancel{+1} = -\frac{2}{3}x_2 \cancel{+1} \iff \cancel{-\frac{2}{3}}x_1 = \cancel{-\frac{2}{3}}x_2 \iff x_1 = x_2$$

g è iniettiva.

g è suriettiva? Sia $y \in \mathbb{Q}$: cerchiamo, se esiste, $x \in \mathbb{Q}$ tale che $g(x) = y \iff -\frac{2}{3}x + 1 = y \iff -\frac{2}{3}x = y - 1 \iff$

$x = -\frac{3}{2}(\underset{\uparrow}{y} - 1) \in \mathbb{Q}$

g è suriettiva: se $y \in \mathbb{Q}$ allora esiste $x = -\frac{3}{2}y + \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ tale che $g(x) = y$

g è bigettiva e quindi è invertibile.

$g^{-1}: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ $\quad \forall y \in \mathbb{Q}$ $\quad g^{-1}(y) = -\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}$.

$g \circ g^{-1}: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ $\quad \forall y \in \mathbb{Q}$ $\quad g \circ g^{-1} = id_{\mathbb{Q}}$

$(g \circ g^{-1})(y) = g(g^{-1}(y)) = g\left(-\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}\right) + 1 =$

$= y - 1 + 1 = y$

verificate $(g^{-1} \circ g)(x) = x$ $\qquad g^{-1} \circ g = id_{\mathbb{Q}}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{Q} \arrow[r, "g"] & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

l'insieme di arrivo di $f$ coincide con l'insieme di partenza di $g$, per cui esiste $g \circ f$

$g \circ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad (g \circ f)(n) = g(f(n)) = g\left(\frac{n-3}{2n+2}\right) =$

$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{n-3}{2n+2}\right) + 1 = \frac{-2n+6+6n+6}{6n+6} =$$

$$= \frac{4n+12}{6n+6} = \frac{\cancel{2}(2n+6)}{\cancel{6}_3(n+1)} = \frac{2n+6}{3(n+1)}$$

$$\mathbb{Q} \xrightarrow{g} \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{Q}$$

non esiste $f \circ f$ perché l'insieme di arrivo di $g$ è diverso dall'insieme di partenza di $f$.

$$f(4) = \frac{4-3}{2 \cdot 4 + 2} = \frac{1}{8+2} = \frac{1}{10}$$

$$g\left(\left\{1, \frac{2}{3}, -1\right\}\right)$$

$$g(1) = -\frac{2}{3}\cdot 1+1 = -\frac{2}{3}+1 = \frac{-2+3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+1 = -\frac{4}{9}+1 = \frac{-4+9}{9} = \frac{5}{9}$$

$$g(-1) = -\frac{2}{3}\cdot(-1)+1 = \frac{2}{3}+1 = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g\left(\left\{1, \frac{2}{3}, -1\right\}\right) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{3}\right\}.$$

$$f^{-1}\left(\left\{\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right\}\right) = \left\{n \in \mathbb{N} : f(n) = \frac{2}{3} \lor f(n) = -\frac{3}{2}\right\}$$

Cerchiamo $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) = \frac{2}{3}$

$$f(n) = \frac{2}{3} \iff \frac{n-3}{2n+2} = \frac{2}{3} \iff \frac{3(n-3)-2(2n+2)}{3(2n+2)} = 0 \iff 3n-9-4n-4 = 0$$

$$\iff -n-13 = 0 \iff n = -13 \notin \mathbb{N}$$

Cerchiamo, se esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $f(m) = -\frac{3}{2}$

$$f(m) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{m-3}{2m+2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{m-3}{\cancel{2}(m+1)} = -\frac{3}{\cancel{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-3+3(m+1)}{m+1} = 0 \Leftrightarrow m - \cancel{3} + 3m + \cancel{3} = 0 \Leftrightarrow 4m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \in \mathbb{N}$$

$$f(0) = -\frac{3}{2} \Rightarrow f^{-1}\left(\left\{\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right\}\right) = \{0\}$$

e risulta: $f^{-1}\left(\left\{\frac{2}{3}\right\}\right) = \emptyset$