$$\sum_{i=1}^{n+2} 2(i-1) = n^2 + 3n + 2 \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

$$P(0): \quad \sum_{i=1}^{2} 2(i-1) = 0^2 + 3\cdot 0 + 2$$

OK $\left\{ \begin{array}{l} P(1): \quad \sum_{i=1}^{3} 2(i-1) = 1^2 + 3\cdot 1 + 2 = 6 \\ 2(1-1) + 2(2-1) + 2\cdot(3-1) = 6 \end{array} \right.$

sinistra: $2(\cancel{1-1}) + 2(2-1) = 2$

destra: $0^2 + 3\cdot 0 + 2 = 2$

$\rightarrow$ $P(0)$ è vera

$P(n)$ sia vera $\quad \sum_{i=1}^{n+2} 2(i-1) = n^2 + 3n + 2$ ipotesi d'induzione

$P(n+1)$ è vera $\quad \sum_{i=1}^{n+3} 2(i-1) = (n+1)^2 + 3(n+1) + 2$ tesi

$$(n+1)^2 + 3(n+1) + 2 = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 2 = n^2 + 5n + 6$$

$$\sum_{i=1}^{n+3} 2(i-1) = \sum_{i=1}^{n+2} 2(i-1) + 2(n+3-1) = n^2 + 3n + 2 + 2(n+2) =$$

ipotesi d'induzione

$$= n^2 + 3n + 2 + 2n + 4 = n^2 + 5n + 6$$

Passo induttivo verificato.

$(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$

(a) generatore

(b) tutti i sottogruppi

(c) ordine degli elementi

(a) $[1]_{11}$ non è generatore in quanto è l'elemento neutro di $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$.

$$\langle [1]_{11} \rangle = \{[1]_{11}^h : h \in \mathbb{Z}\} = \{[1]_{11}\} \neq \mathbb{Z}_{11}^*$$

$[2]_{11}$ è generatore di $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$?

$$|\mathbb{Z}_{11}^*| = 10 \qquad \forall [a]_{11} \in \mathbb{Z}_{11}^* \qquad |[a]_{11}| = \begin{cases} 1 & [a]_{11} = [1]_{11} \\ 2 \\ 5 \\ 10 & [a]_{11} \text{ generatore} \end{cases}$$

$$[2]_{11}^2 = [4]_{11} \neq [1]_{11} \implies |[2]_{11}| \neq 2$$

$$[2]_{11}^3 = [8]_{11} \neq [1]_{11}$$

$$[2]_{11}^4 = [16]_{11} = [5]_{11} \neq [1]_{11}$$

$$[2]_{11}^5 = [32]_{11} = [10]_{11} \neq [1]_{11} \qquad 32 - 10 = 22 \text{ multiplo di } 11$$

$$|[2]_{11}| \neq 5$$

quindi $|[2]_{11}| = 10 \implies [2]_{11}$ è generatore di $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$

$$[2]_{11}^6 = [2]_{11}^5 \cdot [2]_{11} = [10]_{11} \cdot [2]_{11} = [20]_{11} = [9]_{11} \qquad 20 - 9 = 11 \text{ multiplo di } 11$$

$$[2]_{11}^7 = [2]_{11}^6 \cdot [2]_{11} = [9]_{11} \cdot [2]_{11} = [18]_{11} = [7]_{11} \qquad 18 - 7 = 11$$

$$[2]_{11}^8 = [2]_{11}^7 \cdot [2]_{11} = [7]_{11} \cdot [2]_{11} = [14]_{11} = [3]_{11} \qquad 14 - 3 = 11$$

$$[2]_{11}^9 = [2]_{11}^8 \cdot [2]_{11} = [3]_{11} \cdot [2]_{11} = [6]_{11}$$

$\mathbb{Z}_{11}^* = \langle [2]_{11} \rangle$

(b) Tutti i sottogruppi di $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$.

$(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$ è ciclico e dunque i suoi sottogruppi sono ciclici.
Per il teorema inverso del teorema di Lagrange, per ogni $h \in \mathbb{N}^*$, con $h / 10$, esiste H sottogruppo di $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$ tale che $|H| = h$.

$|\mathbb{Z}_{11}^*| = 10$

c'è un unico sottogruppo di ordine 1 $\quad \langle [1]_{11} \rangle = \{[1]_{11}\}$

" " " " " " 2

" " " " " " 5

" " " " " " 10 $\quad \mathbb{Z}_{11}^*$

$$|[3]_{11}| = |[2]_{11}^8| = \frac{10}{M.C.D.(8,10)} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\langle [3]_{11} \rangle = \{ [3]_{11}, [3]_{11}^2 = [9]_{11}, [3]_{11}^3 = [27]_{11} = [5]_{11}, [3]_{11}^4 = [81]_{11} = [4]_{11}, [3]_{11}^5 = [4]_{11} \cdot [3]_{11} = [12]_{11} = [1]_{11} \}$$

$$= \{ [3]_{11}, [9]_{11}, [5]_{11}, [4]_{11}, [1]_{11} \}$$

$$|[4]_{11}| = |[2]_{11}^2| = \frac{10}{M.C.D.(2,10)} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow \langle [4]_{11} \rangle = \langle [3]_{11} \rangle$$

$$|[5]_{11}| = |[2]_{11}^4| = \frac{10}{M.C.D.(4,10)} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow \langle [5]_{11} \rangle = \langle [3]_{11} \rangle$$

$$|[6]_{11}| = |[2]^9_{11}| = \frac{10}{M.C.D.(9,10)} = \frac{10}{1} = 10 \Rightarrow \langle [6]_{11} \rangle = \mathbb{Z}_{11}^*$$

$$|[7]_{11}| = |[2]_{11}^7| = \frac{10}{M.C.D.(7,10)} = \frac{10}{1} = 10 \Rightarrow \langle [7]_{11} \rangle = \mathbb{Z}_{11}^*$$

$$|[8]_{11}| = |[2]_{11}^3| = \frac{10}{M.C.D.(3,10)} = \frac{10}{1} = 10 \Rightarrow \langle [8]_{11} \rangle = \mathbb{Z}_{11}^*$$

$$|[9]_{11}| = |[2]_{11}^6| = \frac{10}{M.C.D.(6,10)} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow \langle [9]_{11} \rangle = \langle [3]_{11} \rangle$$

$$|[10]_{11}| = |[2]_{11}^5| = \frac{10}{M.C.D.(5,10)} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\langle [10]_{11} \rangle = \{ [10]_{11}, [10]_{11}^2 = [100]_{11} = [1]_{11} \} =$$

$$= \underline{\{ [10]_{10}, [1]_{11} \}}$$

(c) $|[1]_{11}| = 1$, $|[2]_{11}| = 10$, $|[3]_{11}| = 5$, $|[4]_{11}| = 5$

$|[5]_{11}| = 5$, $|[6]_{11}| = 10$, $|[7]_{11}| = 10$, $|[8]_{11}| = 10$

$|[9]_{11}| = 5$, $|[10]_{11}| = 2$.

$(\mathbb{Z}_8, +)$ (a) $[1]_8 - [5]_8$

(b) generatori di $(\mathbb{Z}_8, +)$

(c) $|[2]_8|$, $|[4]_8|$, $|[6]_8|$.

(a) $[1]_8 - [5]_8 = [1]_8 + (-[5]_8) = [1]_8 + [3]_8 = [4]_8$

(b) $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$ è generatore di $(\mathbb{Z}_n, +)$

se e solo se $M.C.D.(a, n) = 1$

$[1]_8$, $[3]_8$, $[5]_8$, $[7]_8$ tutti e soli i generatori di $(\mathbb{Z}_8, +)$.

(c) $$|[2]_8| = |\underline{2}\cdot[1]_8| = \frac{8}{M.C.D.(\underline{2}, 8)} = \frac{8}{2} = 4$$

$$|[4]_8| = |4 \cdot [1]_8| = \frac{8}{M.C.D.(4, 8)} = \frac{8}{4} = 2$$

$$|[6]_8| = |6\cdot[1]_8| = \frac{8}{M.C.D.(6,8)} = \frac{8}{2} = 4 .$$

$$\underbrace{1025}_{a}x + \underbrace{315}_{b}y = \underbrace{155}_{c}.$$

$$\begin{array}{r|l} 1025 & 5 \\ 205 & 5 \\ 41 & 41 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 315 & 5 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 155 & 5 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array}$$

$$\bar{a} = \frac{a}{5} = 205 \qquad \bar{b} = \frac{b}{5} = 63 \qquad \bar{c} = \frac{c}{5} = 31$$

$M.C.D.(1025, 315) = 5$ $\qquad 5 / 155 \Rightarrow$ esistono soluzioni

$205x + 63y = 31$ $\qquad M.C.D.(205, 63) = 1$

esprimiamo 1 come combinazione lineare di 205 e 63 tramite le divisioni successive

$$205 = 63\cdot 3 + 16 \Rightarrow 16 = 205 + 63\cdot(-3)$$
$$63 = 16\cdot 3 + 15 \Rightarrow 15 = 63 + 16(-3)$$
$$16 = 15\cdot 1 + 1 \Rightarrow 1 = 16 + 15(-1)$$

$$1 = 16 + 15(-1) = 16 + \big(63 + 16(-3)\big)(-1) = 16 + 63(-1) + 16\cdot 3$$

$$= 16\cdot 4 + 63(-1) = \big(205 + 63(-3)\big)\cdot 4 + 63(-1) =$$

$$= 205\cdot 4 + 63(-12) + 63(-1) = 205\cdot 4 + 63\cdot(-13)$$

$$1 = 205 \cdot 4 + 63 \cdot (-13)$$

$$31 = 205 \cdot 124 + 63(-403)$$

$$\bar{c} = \frac{c}{d}$$

una soluzione dell'eq. diofantea è $(124, -403)$

$$(124 + \bar{b}h, -403 - \bar{a}h) \qquad h \in \mathbb{Z}$$

$$(124 + \underbrace{63}_{\bar{b} = \frac{b}{d}} h, -403 - \underbrace{205}_{\bar{a} = \frac{a}{d}} h) \qquad h \in \mathbb{Z}$$

tutte e sole le soluzioni

$8x + 12y = 14$ M.C.D. $(8, 12) = 4$ $\quad 4 \nmid 14$

$\underbrace{4x + 6y = 7}_{\text{non ha soluzioni}}$ M.C.D. $(4, 6) = 2$ $\quad 2 \nmid 7$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - \frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_3}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

matrice a scala

3 pivot e quindi il rango di A è 3 $\Rightarrow$ A invertibile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-\frac{1}{2}R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{controllare}$$

Secondo metodo

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(2-1) = -1 \neq 0$$

A è invertibile

$$Agg(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Agg(A) = \frac{1}{-1} Agg(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$S = \{ A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1 \}$ sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$

$SG_1)$ $S \neq \emptyset$ perché $I_n \in S$ $\det I_n = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Per induzione completa: $I_1 = (1)$ $\det I_1 = 1$

$\det I_n = 1$

$$\det I_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{n+1} = 1 \det I_n = 1 \cdot 1 = 1$$

$SG_2)$ $A, B \in S$ $A \cdot B \in S$

$$\det(A \cdot B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formula di Binet}}}{=} \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1$$

$SG_3)$ $A \in S$ $A^{-1} \in S$ perché $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{1} = 1$.

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det I_n = 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formula di Binet.}}}{\Rightarrow} \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

$R = \{ (p,q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \quad : \quad \exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $p - q = h \}$

(a) R è di equiv.

(b) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right) \notin R$

(c) $(p,q) \in R$

(d) $[0]_R$

(a) R è riflessiva: $\forall p \in \mathbb{Q} \quad (p,p) \in R$

$p - p = 0 \Rightarrow \exists h = 0 \in \mathbb{Z}$ tale che $p - p = h \Rightarrow (p,p) \in R$

R è simmetrica: $\forall p,q \in \mathbb{Q} \quad (p,q) \in R \Rightarrow (q,p) \in R$

siano $p,q \in \mathbb{Q}$ tali che $(p,q) \in R \Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z}$ tale che

$p - q = h \Rightarrow q - p = -(p-q) = -h \Rightarrow \exists k = -h \in \mathbb{Z}$ tale che

$q - p = k \Rightarrow (q,p) \in R$

R è transitiva: $\forall p,q,r \in \mathbb{Q} \quad \big((p,q) \in R \wedge (q,r) \in R\big) \Rightarrow (p,r) \in R$

siano $p,q,r \in \mathbb{Q}$ tali che $(p,q) \in R \wedge (q,r) \in R \Rightarrow \exists h, k \in \mathbb{Z}$

tali che $p - q = h \wedge q - r = k \Rightarrow p - r = p - q + q - r = h + k$

quindi $\exists t = h + k \in \mathbb{Z}$ tale che $p - r = t \Rightarrow (p,r) \in R$.

(b) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right) \notin R$ perché $\frac{1}{2} - \frac{5}{3} = \frac{3-10}{6} = -\frac{7}{6} \notin \mathbb{Z}$

(c) $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) \in R$ perché $\frac{2}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{3}{3} = -1 \in \mathbb{Z}$

$(3, 20)$ $\qquad 3 - 20 = -17 \notin \mathbb{Z}$

(d) $[0]_R = \{q \in \mathbb{Q} : (0,q) \in R\}$

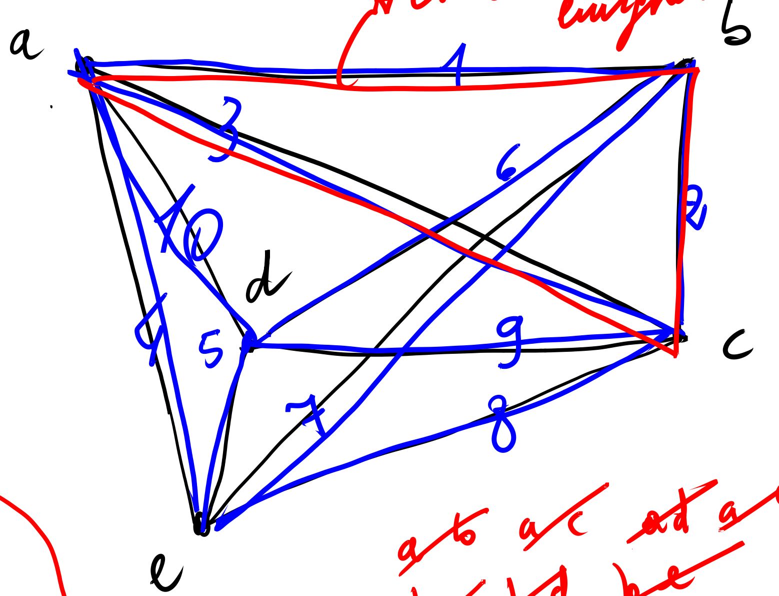
$x \in [0]_R \iff (0,x) \in R \iff \exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $0 - x = h$

$\iff \exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $-x = h \iff x \in \mathbb{Z}$

$[0]_R = \mathbb{Z}$

---

circuito di lunghezza dispari



5 vertici di grado 4

K_5 non è planare

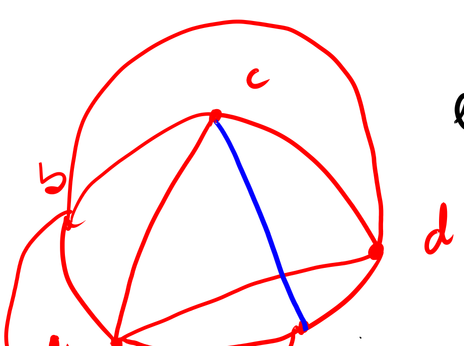
$|L| \leq 3|V| - 6 \to$ se G è planare allora vale

$|L| = \frac{1}{2} 5 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$

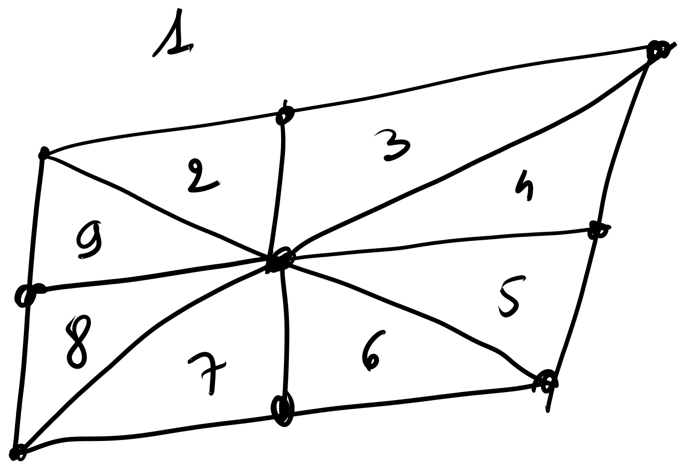
$3 \cdot 5 - 6 = 15 - 6 = 9$

$10 \not\leq 9 \Rightarrow$ non è planare.

~~ab~~ ~~ac~~ ~~ad~~ ~~ae~~
~~bc~~ ~~bd~~ ~~be~~
~~cd~~ ~~ce~~
~~dc~~



(b) esiste un circuito Euleriano perché ci sono 0 vertici dispari.



Planare