$\mathbb{Q}$ insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \}$$

$$\mathbb{Q} = \{ x : \exists p \in \mathbb{Z} \wedge \exists q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \quad \text{tali che} \quad x = p/q \}.$$

Gli elementi di $\mathbb{Q}$ sono i numeri decimali con cifre decimali periodiche

$$\frac{1}{2} = 0,5\overline{0} \qquad \frac{10}{3} = 3,\overline{3}.$$

$$c, a_1 a_2 \cdots a_h \overline{b_1 b_2 \cdots b_k} \qquad c \in \mathbb{Z}, \underbrace{a_1, \dots, a_h}_{\text{sono h numeri}}, \underbrace{b_1, \dots, b_k}_{\text{sono k numeri}} \in \mathbb{N}$$

$$c, a_1 \cdots a_h \overline{b_1 \cdots b_k} = \frac{c\, a_1 \cdots a_h}{10^h} + \frac{b_1 \cdots b_k}{\underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ volte}} \cdot 10^h}$$

formula che permette di scrivere un numero decimale come frazione.

Esempi.
$$0,\overline{9} = \frac{0}{10^0} + \frac{9}{9 \cdot 10^0} = 0 + \frac{9}{9} = 0 + 1 = 1$$

In generale $a,\overline{9} = a + 1$.

infatti: $a,\overline{9} = a + 0,\overline{9} = a + 1$

$$10,01\overline{211} = \frac{1001}{10^2} + \frac{211}{999\cdot 10^2} = \frac{1001\cdot 999 + 211}{99.900} = \frac{1.000.21\cancel{0}}{99.90\cancel{0}}.$$

$\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali, ovvero i numeri razionali e i numeri irrazionali che sono i numeri decimali non periodici.

Esempi di numeri irrazionali

$$\sqrt{2} = 1,414213\ldots$$

$$\sqrt{5} = 2,236067\ldots$$

$$\pi = 3,1415926\ldots$$

Una precisazione di logica

A, B formule $\qquad A \Longleftrightarrow B$ vuol dire che $A \longleftrightarrow B$ è una tautologia

D'ora in avanti $\quad A \Longleftrightarrow B \quad$ " A è equivalente a B "
" A se e solo se B ".

$A \Longrightarrow B \qquad$ " A implica B " $\qquad \cancel{A \Rightarrow B}$.

Simbolo di inclusione " $\subset$ "

Siano A e B insiemi. Si dice che A è un sottoinsieme di B oppure che A è contenuto in B o ancora che A è incluso in B se ogni elemento di A è anche elemento di B.

Esempi. 1. $\{3, -2, 5\} \subset \mathbb{Z}$

2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

3. $A = \{7, a, -1, *\}$ $\quad B = \{-3, 7, a, b, -1, *, \circ\}$

$$A \subset B$$

$\underline{\underline{\in}}$ $\quad \subset$ $\quad$ sono diversi!

$3 \subset \mathbb{N}$ è errato! $\quad 3 \in \mathbb{N}$

$\{3\} \subset \mathbb{N}$ giusto

<u>Def.</u> Siano A, B due insiemi. Si dice che $A = B$ se e solo se hanno gli stessi elementi, ovvero ogni elemento di A è anche elemento di B e ogni elemento di B è anche elemento di A.

<u>Osserv.</u> $A = B \Longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$.

In simboli $\quad A \subset B \Longleftrightarrow (\forall x \in A)(x \in B)$

$$A = B \Longleftrightarrow \big((\forall x \in A)(x \in B)\big) \wedge \big((\forall y \in B)(y \in A)\big).$$

Osserv. $\neg(A \subset B) \Leftrightarrow \neg((\forall x \in A)(x \in B)) \Leftrightarrow (\exists x \in A)(x \notin B)$

Esempi. 1. $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ perché per esempio $\exists\ -4 \in \mathbb{Z}$ tale che $-4 \notin \mathbb{N}$

2. $A = \{-2, a, 3, x\}$ $\qquad B = \{-2, a, 1, 3, y\}$

$$A \not\subset B \quad \wedge \quad B \not\subset A$$

Siano A e B insiemi

$$A \neq B \Leftrightarrow \neg(A = B) \Leftrightarrow \neg((\forall x \in A)(x \in B) \wedge (\forall y \in B)(y \in A))$$

$$\Leftrightarrow \neg((\forall x \in A)(x \in B)) \vee \neg((\forall y \in B)(y \in A)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in A)(x \notin B) \vee (\exists y \in B)(y \notin A).$$

$$A \not\subset B \Rightarrow A \neq B$$

$A \subset B$ contempla anche il caso che A e B siano uguali o che A è strettamente contenuto in B

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ $\qquad$ in generale: $\forall A$ insieme $A \subset A$

Si dice che A è un sottoinsieme proprio di B se A è contenuto in B ma è diverso da B.

Si usa il simbolo $\subsetneq$

$$A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subset B \wedge A \neq B.$$

Es. $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

$$A \subsetneq B \iff A \subset B \wedge B \not\subset A \iff \big((\forall x \in A)(x \in B)\big) \wedge \big((\exists x \in B)(x \notin A)\big)$$

C'è un unico insieme privo di elementi. Questo insieme si indica con il simbolo

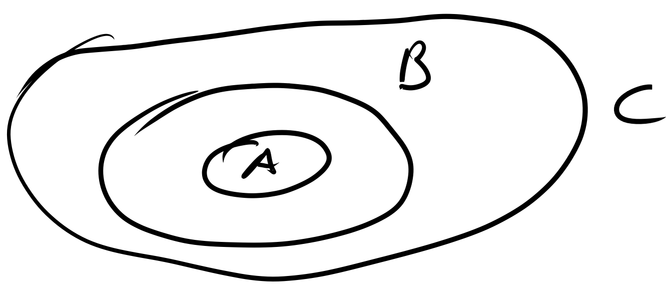
$$\emptyset$$

$(\forall x)(x \notin \emptyset)$

$\forall A$ insieme $\quad \emptyset \subset A$.

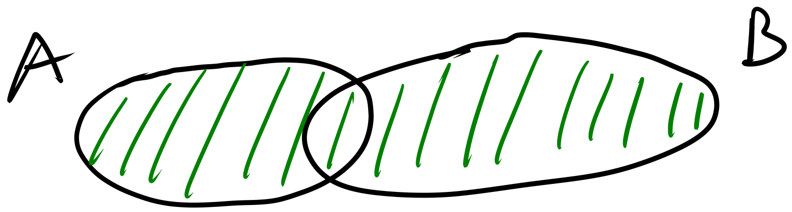
<u>Proposizione</u>. Siano A, B, C insiemi. Allora risulta

1. $A \subset A$
2. $A \subset B \wedge B \subset A \implies A = B$
3. $A \subset B \wedge B \subset C \implies A \subset C$.



Def. Siano A, B insiemi. Si dice insieme unione di A e B l'insieme $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$



Esempi: 1. $A = \{a, -1, b, -2\}$ $\quad B = \{3, 2, 1\}$

$A \cup B = \{a, -1, b, -2, 3, 2, 1\}$ $\quad A \cap B = \emptyset$

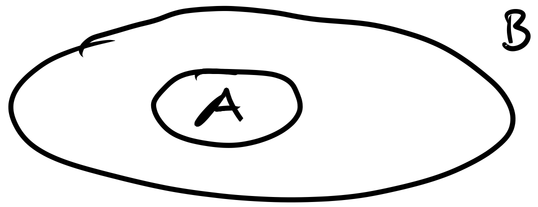
2. $X = \{a, b, c, d\}$ $\quad Y = \{b, e, f\}$

$X \cup Y = \{a, b, c, d, e, f\}$ $\quad X \cap Y = \{b\}$

3. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$

Proposizione Siano A, B insiemi. Allora risulta:

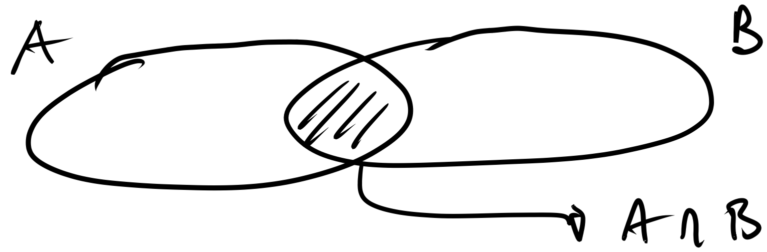
1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \subset A \cup B \wedge B \subset A \cup B$
3. $A \cup A = A$
4. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.



$A \cup B = B \Rightarrow A \subset A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$ (dim. della implicazione da destra verso sinistra di 4.)

<u>Def.</u> Siano A e B insiemi. Si dice insieme intersezione di A e B l'insieme

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$



Proposizione. Siano A, B insiemi. Allora risulta

1. $A \cap B \subset A \wedge A \cap B \subset B$
2. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap A = A$

<u>Proposizione</u> Siano A, B, C insiemi.

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \wedge (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

proprietà associative

2. $A \cup B = B \cup A \quad \wedge \quad A \cap B = B \cap A$

proprietà commutativa

3. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad \wedge \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

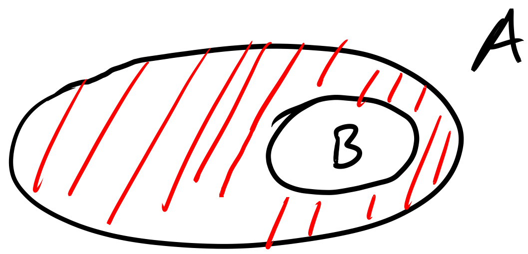
proprietà distributiva

$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ non è vero $(a \cdot b) + c \neq a + c \cdot b + c$

Def. Siano A insieme, B un sottoinsieme di A.
Si dice insieme complementare di B rispetto ad A l'insieme

$$\complement_A(B) = \{x \in A : x \notin B\}$$

$$x \in \complement_A(B) \iff x \in A \wedge x \notin B$$



Esempi: 1. $\complement_{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}) = \{n \in \mathbb{Z} : n$ è negativo$\} =$

$$= \{\dots; 3, -2, -1\}$$

2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad B = \{1, 3, 5\}$

$\complement_A(B) = \{2, 4, 6\}$

Proposizione. Siano A insieme, B e C sottoinsiemi di A. Risulta:

1. $\complement_A(A) = \emptyset$
2. $\complement_A(\emptyset) = A$
3. $B \cup \complement_A(B) = A$
4. $B \cap \complement_A(B) = \emptyset$
5. $\complement_A(B \cup C) = \complement_A(B) \cap \complement_A(C)$
6. $\complement_A(B \cap C) = \complement_A(B) \cup \complement_A(C)$.

$\left.\begin{matrix} 5. \\ 6. \end{matrix}\right\}$ leggi di De Morgan

Dim. 5. $\complement_A(B \cup C) \subset \complement_A(B) \cap \complement_A(C) \;\wedge\; \complement_A(B) \cap \complement_A(C) \subset \complement_A(B \cup C)$

sia $x \in A$

$x \in \complement_A(B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B \cup C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \overset{\vartheta}{\Leftrightarrow} (x \in A) \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)$

$\Longleftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \notin C) \Longleftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \wedge ((x \in A) \wedge (x \notin C))$

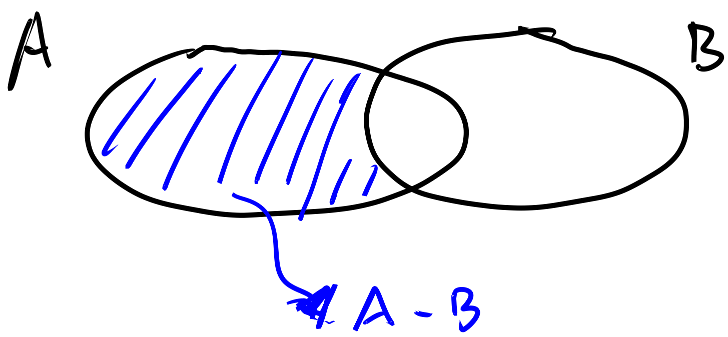
$\Longleftrightarrow x \in \complement_A(B) \wedge x \in \complement_A(C) \Longleftrightarrow \underline{x \in \complement_A(B) \cap \complement_A(C)}.$

X, Y insiemi per provare che $X = Y$ si può provare: $\quad x \in X \Longleftrightarrow x \in Y$

Def. Siano A, B insiemi. Si dice insieme differenza di A e B e si indica con uno dei simboli $A - B$ o $A \setminus B$ l'insieme

$$A - B = \{x \in A \,;\, x \notin B\}$$

Osserv. Se $B \subset A$ allora $A - B = \complement_A(B)$



$A - B = \complement_A(A \cap B)$

Esempi: 1. $A = \{x, y, z\}$ $\quad B = \{a, b, x\}$

$A - B = \{y, z\}$ $\quad B - A = \{a, b\}$

2. Si può indicare con $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri irrazionali

Def. Sia A un insieme. L'insieme di tutti i sottoinsiemi di A si dice insieme delle parti di A. Si indica con il simbolo

$$\mathcal{P}(A)$$

Esempi. 1. $A = \{a, b\}$ $\quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

2. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

3. $B = \{1\}$ $\quad \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}\}$

Osserv. $\forall A$ insieme $\quad \emptyset \in \mathcal{P}(A) \quad \wedge \quad A \in \mathcal{P}(A)$