Def. Si dice che un insieme X è infinito se esiste una funzione $f: X \to X$ iniettiva ma non surgettiva.

$\mathbb{N}$ è infinito e quindi sono infiniti $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ che contengono $\mathbb{N}$.

Def. Un insieme X si dice finito se è vuoto oppure se non è infinito

Teorema Se X è un insieme finito non vuoto allora esistono $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists f: \{1, \ldots, n\} \to X$ bigettiva.

Def. La cardinalità di $\emptyset$ è 0; la cardinalità di un insieme finito non vuoto è n previsto nel teorema precedente.

$$|\emptyset| = 0$$
$$|X| = n$$

Se $|X| = n$, allora si può scrivere $X = \{f(1), \ldots, f(n)\}$ dove f è la funzione bigettiva prevista nel teorema.

Prop. Due insiemi finiti non vuoti hanno la stessa cardinalità se e solo se sono equipotenti.

Osserv. Siano X, Y insiemi finiti non vuoti e poniamo $|X| = n$ $|Y| = m$.

Può esistere una funzione iniettiva da X in Y solo quando $n \leq m$;
Può esistere una funzione surgettiva da X in Y solo quando $m \leq n$;

può esistere una funzione bigettiva da X in Y solo se $n = m$.

Modello delle parole per funzioni tra insiemi finiti.

Siano A, B insiemi finiti, non vuoti e sia $f: A \to B$.
Per fissare le idee poniamo

$$A = \{a_1, \dots, a_n\} \qquad B = \{b_1, \dots, b_m\}$$

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad \exists k = 1, \dots, m \text{ tale che } f(a_i) = b_k$$

Gli elementi di A possono essere considerati come delle caselle; gli elementi di B possono essere considerati come lettere da inserire nelle caselle.

si inserisce la lettera b_k nella casella a_i se e solo se $f(a_i) = b_k$, dove $k = 1, \dots, m$
$i = 1, \dots, n$.

Esempio 1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$B = \{a, b, c, d\}$

$f : A \to B$ $\quad f(1) = a \quad f(2) = c \quad f(3) = a \quad f(4) = d$
$f(5) = b \quad f(6) = a \quad f(7) = a$

a	c	a	d	b	a	a
1	2	3	4	5	6	7

Allora con questo modello una funzione di A in B può essere considerata una parola di lunghezza n formata dagli elementi di B.

La funzione f dell'esempio corrisponde alla parola

$\underline{a\,c\,a\,d\,b\,a\,a}$.

Esempio 2. Siano A e B gli insiemi dell'esempio 1. Considero la parola $\underline{dadabcc}$.

La funzione corrispondente a questa parola è $g: A \longrightarrow B$ tale che

$g(1) = d \quad g(2) = a \quad g(3) = d \quad g(4) = a$

$g(5) = b \quad g(6) = c \quad g(7) = c$.

Oss. Una funzione ingettiva corrisponde a una parola priva di ripetizioni; una funzione surgettiva corrisponde a una parola che contiene tutti elementi di B.

Esempi Poiché $|A| = 7$ e $|B| = 4$ negli esempi 1. e 2., non si possono avere funzioni ingettive di A in B, e quindi f e g non sono ingettive; per come sono state costruite f e g sono surgettive.

Per esempio bbbcccc rappresenta una funzione di A in B che non è surgettiva

Esempio $B = \{a, b, c, d\}$ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$h: B \longrightarrow A \quad h(a) = 1 \quad h(b) = 3 \quad h(c) = 7 \quad h(d) = 6$

$\underset{a}{\boxed{1}}$ $\underset{b}{\boxed{3}}$ $\underset{c}{\boxed{7}}$ $\underset{d}{\boxed{6}}$ iniettiva non suriettiva

1136 rappresenta una funzione che non è iniettiva né suriettiva di B in A.

Permutazioni

Def Sia A un insieme finito. $A \neq \emptyset$ Si dice permutazione di A una funzione bigettiva $h: A \to A$.

$\exists n \in \mathbb{N}^*$ ed esiste $f: \{1, \dots, n\} \to A$ bigettiva.

$$A = \{f(1), \dots, f(n)\} \qquad |A| = n$$

Per studiare le permutazioni di un insieme di cardinalità n basta studiare le permutazioni dell'insieme $J_n = \{1, \dots, n\}$.

Si indica con S_n l'insieme delle permutazioni di J_n, che si dice insieme delle permutazioni su n oggetti.

Una permutazione f di J_n può essere rappresentata tramite una matrice di 2 righe e n colonne. Sulla prima riga si inseriscono i numeri $1, \dots, n$ in generale si rispetta l'ordine naturale; sulla seconda riga si inseriscono i valori $f(1), \dots, f(n)$ rispettando l'ordine della prima riga.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & & f(n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & \cdots & n \\ f(2) & f(1) & f(3) & & f(n) \end{pmatrix}.$$

Esempio. J_7

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 7 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad id_{J_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_3 = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{h_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{h_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{h_3},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{h_4}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{h_5}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{h_6} \Big\}$$

$h_1(1) = 1 \quad h_1(2) = 2 \quad h_1(3) = 3 \qquad h_1 = id_{J_3}$

$h_2(1) = 2 \quad h_2(2) = 1 \quad h_2(3) = 3$

$h_3(1) = 1 \quad h_3(2) = 3 \quad h_3(3) = 2$

h_4

h_5

h_6

completare

$J_n = \{1, \dots, n\}$

$f : J_n \longrightarrow J_n \qquad g : J_n \longrightarrow J_n$

$g \circ f : J_n \longrightarrow J_n$ sono permutazioni

$f \circ g : J_n \longrightarrow J_n$

Esempio:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$f, g \in S_6$

f muove tutti gli elementi tranne 4 che viene fissato

g muove tutti gli elementi

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$g \circ f$ fissa $1, 5, 6$

muove $2, 3, 4$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$f \circ g$ fissa $2, 5, 6$

muove $1, 3, 4$

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Def. Sia f una permutazione su n oggetti.
Si dice che f muove l'elemento a se $f(a) \neq a$;
si dice che f fissa l'elemento a se $f(a) = a$

Def. Siano f e g due permutazioni. Si dice che f e g sono disgiunte se gli elementi mossi da f sono fissati da g (e viceversa).

Esempio.

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

h muove 1, 2, 5, 6, 8 che sono fissati da k

$$k = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{2} & 3 & 4 & \underline{5} & \underline{6} & 7 & \underline{8} \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

k muove 3, 4 che sono fissati da h

$k = (3\ 4)$

h e k sono permutazioni disgiunte.

Prop Se f e g sono due permutazioni disgiunte, allora

$$f \circ g = g \circ f.$$

$$h \circ k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$k \circ h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$h \circ k = k \circ h$.

Def. Si dice ciclo di lunghezza h una permutazione di tipo:

$$f = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_h & c_{h+1} & \cdots & c_n \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_1 & \underbrace{c_{h+1} \; \cdots \; c_n}_{\text{fissati}} \end{pmatrix}$$

$$f = (c_1 \; c_2 \; c_3 \; \cdots \; c_{h-1} \; c_h).$$