העתקות ליניאריות - טענות בלבד

אלגברה ליניארית (1) - 80134

מרצה: ערן נבו

מתרגלים: איתמר ישראלי ושני שלומי

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים מעל לשדה $\mathbb{F}$.

משפט 1.1. תכונות של העתקות ליניאריות
תהא $T:V\to W$ העתקה ליניארית, מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. $T\left(0_V\right)=0_W$.
2. לכל $v\in V$ מתקיים $T\left(-v\right)=-T\left(v\right)$.
3. T מכבדת צירופים ליניאריים - לכל $v_1,v_2,\ldots,v_n\in V$ ולכל $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ מתקיים $T\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot T\left(v_i\right)$.

משפט 1.2. נניח ש-V נ"ס ויהי $\mathcal{B}:=\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)$ בסיס של V, לכל $w_1,w_2,\ldots,w_n\in W$ קיימת העתקה ליניארית $T:V\to W$ יחידה כך ש-$T\left(v_i\right)=w_i$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$.

♣ כלומר ניתן להגדיר העתקה ליניארית ע"י הגדרת פעולתה על איברי בסיס בלבד.

מסקנה 1.3. תהא $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ העתקה ליניארית, קיימת $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ יחידה כך ש-$T=T_A$.

♣ כבר ראינו שהעמודה ה-j של מטריצה $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ היא $T_A\left(e_j\right)=A\cdot e_j$ ולכן ניתן למצוא את המטריצה המתאימה ע"י הפעלת T על איברי הבסיס הסטנדרטי.

טענה 1.4. לכל $A,B\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ מתקיים $\text{tr}\left(AB\right)=\text{tr}\left(BA\right)$.

2 גרעין ותמונה, הרכבה והפיכות

יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים מעל לשדה $\mathbb{F}$, ותהא $T:V\to W$ העתקה ליניארית.

טענה 2.1. הגרעין והתמונה של T הם תתי-מרחבים של V ו-W בהתאמה.

תזכורת: עבור פונקציה $f:A\to B$ ותת-קבוצה $S\subseteq B$ אנו מגדירים $f^{-1}\left(S\right):=\left\{a\in A\mid f\left(a\right)\in S\right\}$, גם אם f אינה הפיכה.

טענה 2.2. לכל תמ"ו $U\subseteq W$ גם $T^{-1}\left(U\right)$ הוא תמ"ו (של V), כמו כן לכל ישריה $S\subseteq W$ הקבוצה $T^{-1}\left(S\right)$ היא ישריה או הקבוצה הריקה.

טענה 2.3. T חח"ע אם"ם $\ker T=\left\{0_V\right\}$.

מסקנה 2.4. T חח"ע אם"ם לכל תת-קבוצה $S\subseteq V$ בת"ל גם $T\left(S\right)$ בת"ל.

טענה 2.5. תהא $S\subseteq V$ תת-קבוצה, אם $T\left(S\right)$ בת"ל אז גם S בת"ל.

טענה 2.6. תהא $S\subseteq V$ תת-קבוצה פורשת ($\text{span}S=V$), הקבוצה $T\left(S\right)$ פורשת את $\text{Im}T$ ($\text{span}T\left(S\right)=\text{Im}T$).

מסקנה 2.7. אם V נ"ס אז גם $\text{Im}T$ נ"ס.

מסקנה 2.8. נניח ש-V ו-W נ"ס, T חח"ע ועל אם"ם לכל בסיס $\mathcal{B}\subseteq V$ (של V) גם $T\left(\mathcal{B}\right)$ בסיס (של W).

טענה 2.9. לכל מטריצה $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ מתקיים $\text{rk}T_A=\text{rk}A$.

משפט 2.10. משפט הדרגה (משפט הממדים השני)
מתקיים:

$$\dim V=\dim\left(\ker T\right)+\dim\left(\mathrm{Im}T\right)=\mathrm{null}T+\mathrm{rk}T$$

מסקנה 2.11. אם V נ"ס ו-T חח"ע ועל אז W נ"ס ומתקיים $\dim V=\dim W$.

מסקנה 2.12. נניח ש-V נ"ס, מתקיימים ארבעת הפסוקים הבאים:

1. $\dim V\geq\dim\left(\mathrm{Im}T\right)$.
2. אם T על אז $\dim V\geq\dim W$.
3. אם T חח"ע אז $\dim V=\dim\left(\mathrm{Im}T\right)$ ומכאן שאם W נ"ס אז $\dim V\leq\dim W$.
4. נניח ש-W נ"ס וש-$\dim V=\dim W$, T על אם"ם היא חח"ע.

טענה 2.13. נניח שקיימת העתקה ליניארית הפיכה $S:V\rightarrow W$, גם ההופכית שלה $S^{-1}:W\rightarrow V$ היא העתקה ליניארית.

טענה 2.14. יהי U מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ותהא $S:W\rightarrow U$ העתקה ליניארית, גם $S\circ T$ היא העתקה ליניארית.

טענה 2.15. יהי U מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ותהא $S:W\rightarrow U$ העתקות ליניאריות, מתקיים:

- אם T על אז $\mathrm{rk}\left(S\circ T\right)=\mathrm{rk}S$.
- אם S חח"ע אז $\mathrm{rk}\left(S\circ T\right)=\mathrm{rk}T$.

3 המטריצה המייצגת

יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל לשדה $\mathbb{F}$, יהיו $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ בסיסים סדורים של V ו-W בהתאמה ותהא $T:V\rightarrow W$ העתקה ליניארית.

3.1 התחלה

טענה 3.1. תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ויהיו E_1 ו-E_2 הבסיסים הסטנדרטיים של $\mathbb{F}^n$ ו-$\mathbb{F}^m$ בהתאמה, מתקיים $\left[T_A\right]_{E_2}^{E_1}=A$.

טענה 3.2. נסמן $n:=\dim V$ ו-$m:=\dim W$ ותהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$, קיימת ה"ל $S:V\rightarrow W$ יחידה כך ש-$A=\left[S\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

♣ בהינתן מטריצה $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ נוכל למצוא את אותה S יחידה ע"י הפעלת $\tau_{\mathcal{C}}$ על כל אחת מעמודות A בנפרד ובכך למצוא לאן מעתיקה T את איברי $\mathcal{B}$ (מה שמגדיר ה"ל יחידה).

משפט 3.3. לכל $v\in V$ מתקיים:

$$\left[T\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\cdot\left[v\right]_{\mathcal{B}}=\left[T\left(v\right)\right]_{\mathcal{C}}$$

♣ משפט זה הוא הסיבה העיקרית לכך שהמטריצה המייצגת נקראת בשם זה.

מסקנה 3.4. יהי U מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$, יהי $\mathcal{A}$ בסיס סדור של U ותהא $S : W \to U$ העתקה ליניארית; מתקיים:
$$[S \circ T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} \cdot [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

מסקנה 3.5. נסמן $A := [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, מתקיים:
$$T = \tau_{\mathcal{C}} \circ T_A \circ \omega_{\mathcal{B}}$$
$$T_A = \omega_{\mathcal{C}} \circ T \circ \tau_{\mathcal{B}}$$

מסקנה 3.6. מתקיים $\text{rk}\,[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \text{rk}T$.

מסקנה 3.7. שלושת הפסוקים הבאים שקולים.

- T הפיכה.
- **קיים** זוג בסיסים B ו-C (של V ו-W בהתאמה) כך ש-$[T]_C^B$ הפיכה.
- **לכל** זוג בסיסים B ו-C (של V ו-W בהתאמה) המטריצה $[T]_C^B$ הפיכה.

♣ נשים לב לכך שכל אחד מהתנאים דורש שיתקיים $\dim V = \dim W$.

3.2 מטריצת מעבר בסיס

מסקנה 3.8. תכונות של מטריצת מעבר בסיס
יהי $\mathcal{A}$ בסיס סדור של V ונסמן $n := \dim V$,

1. מתקיים $[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n$.
2. לכל $v \in V$ מתקיים $[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot [v]_{\mathcal{A}} = [v]_{\mathcal{B}}$.
3. יהי $\mathcal{D}$ בסיס סדור של V, מתקיים $[\text{Id}]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}} = [\text{Id}_V]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}} \cdot [\text{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.
4. מתקיים $[\text{Id}_V]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot [\text{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = I_n$, כלומר אלו מטריצות הפיכות והופכיות זו לזו.
5. יהי $B := (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ בסיס סדור של $\mathbb{F}^k$ ונסמן ב-E את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$, $[\text{Id}]_E^B$ היא מטריצה שהעמודה ה-j שלה היא b_j (לכל $k \geq j \in \mathbb{N}$).

♣ ראינו כבר שמטריצה הפיכה היא מטריצה שהעמודות שלה מהוות בסיס למרחב הקואורדינטות, כעת (לאחר שראינו את סעיפים 4 ו-5) אנו יכולים לומר שכל המטריצות ההפיכות הן מהצורה $[\text{Id}]_E^B$ כאשר B הוא בסיס של מרחב הקואורדינטות המתאים ולכל אחת מהן המטריצה ההופכית היא $[\text{Id}]_B^E$.

מסקנה 3.9. יהיו $\mathcal{B}'$ ו-$\mathcal{C}'$ בסיסים סדורים של V ו-W בהתאמה, מתקיים:

$$[T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}_W]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \cdot [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

♣ כלומר ניתן לעבור ממטריצה מייצגת אחת של העתקה ליניארית להצגה אחרת ע"י כפל במטריצות מעבר בסיס מתאימות.

מסקנה 3.10. תהא $f : V \to V$ העתקה לינארית ויהי $\mathcal{B}'$ בסיס סדור של V, מתקיים:

$$\begin{aligned}[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} &= [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \\ &= \left([\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\end{aligned}$$

4 דמיון מטריצות

יהי V מ"ו נ"ס מעל לשדה $\mathbb{F}$ ונסמן $n := \dim V$.

טענה 4.1. לכל בסיס $\mathcal{B}$ של V ולכל מטריצה הפיכה $P \in M_n(\mathbb{F})$, קיים בסיס יחיד $\mathcal{C}$ של V כך ש-$P = [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

מסקנה 4.2. תהא $f : V \to V$ העתקה ליניארית, לכל בסיס $\mathcal{B}$ של V ולכל מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש-$A \sim [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ קיים בסיס $\mathcal{C}$ של V כך ש-$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = A$.

מסקנה 4.3. תהא $f : V \to V$ העתקה ליניארית, לכל זוג בסיסים $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ של V מתקיים $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \sim [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

משפט 4.4. תכונות של מטריצות דומות

תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש-$A \sim B$, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}B$.
2. $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B$.
3. $c \cdot A \sim c \cdot B$ לכל $c \in \mathbb{F}$.
4. לכל $c \in \mathbb{F}$ מתקיים $A + c \cdot I_n \sim B + c \cdot I_n$.
5. אם A היא מטריצה סקלרית[1] אז $A = B$.
6. $A^m \sim B^m$ לכל $m \in \mathbb{N}$.
7. אם $A^2 = A$ אז $B^2 = B$.[2]

♣ כשנלמד על הדטרמיננטה נראה שגם הדטרמיננטות של מטריצות דומות הן שוות.

♣ כל התכונות הללו יכולות לקבוע ששתי מטריצות **אינן** דומות (אם אחת התכונות אינה מתקיימת) אך אינן יכולות לומר ששתי מטריצות נתונות דומות זו לזו, בקורס הבא אנחנו נראה כיצד ניתן (בתנאים מסוימים) לקבוע באופן חד משמעי אם שתי מטריצות דומות זו לזו אם לאו.

[1] כזכור A היא מטריצה סקלרית אם"ם קיים $c \in \mathbb{F}$ כך ש-$A = c \cdot I_n$.

[2] כלומר אם A מייצגת הטלה (בפרק הבא) אז גם B מייצגת הטלה.

5 נספחים

יהי V מרחב וקטורי מעל לשדה $\mathbb{F}$.

5.1 הטלות ושיקופים

נניח שניתן להציג את V כסכום ישר של שני תמ"וים שלו.

טענה 5.1. תהא $p: V \to V$ העתקה ליניארית, p היא הטלה אם"ם $p^2 = p$.

משפט 5.2. תכונות של הטלות
תהא $p: V \to V$ הטלה על תמ"ו W במקביל לתמ"ו U ($V = W \oplus U$), מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

- $\mathrm{Id}_V - p$ היא ההטלה על U במקביל ל-W.
- נסמן ב-q את ההטלה על U במקביל ל-W, מתקיים $p + q = \mathrm{Id}_V$.
- $p \circ q = 0 = q \circ p$.

טענה 5.3. כל שיקוף $r: V \to V$ הוא העתקה הפיכה ובנוסף הוא ההעתקה ההופכית של עצמו.

5.2 סיבובים

טענה 5.4. כל מטריצת סיבוב היא מטריצה הפיכה וההופכית שלה היא מטריצת הסיבוב בזווית הנגדית, כלומר ההופכית של $R(\theta)$ היא $R(-\theta)$ (לכל θ).

מסקנה 5.5. כל מטריצת סיבוב ומתיחה שאינה מטריצת האפס היא מטריצה הפיכה, וההופכית שלה היא מטריצת הסיבוב והמתיחה המהווה את מטריצת הסיבוב בזווית הנגדית כשהיא מוכפלת בסקלר ההופכי, כלומר המטריצה ההופכית של מטריצת סיבוב ומתיחה $c \cdot R(\theta)$ היא $c^{-1} \cdot R(-\theta)$ (לכל $c, \theta \in \mathbb{R}$ כך ש-$c \neq 0$).

טענה 5.6. יהיו $a, b \in \mathbb{R}$, המטריצה:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

היא מטריצת סיבוב ומתיחה, כלומר קיימים $c, \theta \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $a = c \cdot \cos\theta$ ו-$b = c \cdot \sin\theta$.

♣ כמובן שגם הכיוון ההפוך נכון: כל מטריצת סיבוב ומתיחה היא מהצורה הנ"ל.

טענה 5.7. לכל שתי מטריצות סיבוב ומתיחה $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ מתקיים $A \cdot B = B \cdot A$, כלומר כפל מטריצות סיבוב ומתיחה מקיים את חוק החילוף.

מסקנה 5.8. קבוצת מטריצות הסיבוב והמתיחה היא שדה.

♣ למעשה מדובר בשדה מוכר למדי - זהו שדה המרוכבים!
לכל $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ bc + ad & -bd + ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & -(bc + ad) \\ bc + ad & ac - bd \end{bmatrix}$$

וגם: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$.

5.3 מרחב ההעתקות

טענה 5.9. יהי W גם הוא מ"ו מעל $\mathbb{F}$, קבוצת ההעתקות הליניאריות $\operatorname{Hom}(V,W)$, יחד עם פעולות החיבור והכפל בסקלר שלה[3], היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ (לכל מ"ו W מעל $\mathbb{F}$).

♣ כלומר סכום של העתקות ליניאריות וכפל העתקה ליניארית בסקלר הם העתקות ליניאריות, ובנוסף, מתקיימות 8 האקסיומות של מרחב וקטורי.

טענה 5.10. נניח ש-V נ"ס ויהי W גם הוא מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$, ונסמן $n:=\dim V$ ו-$m:=\dim W$.
יהיו $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ בסיסים של V ו-W בהתאמה ותהא $\omega_{\mathcal{B},\mathcal{C}}:\operatorname{Hom}(V,W)\to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ פונקציה המוגדרת ע"י $\omega_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(T):=[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ (לכל ה"ל $T:V\to W$).
המרחבים $\operatorname{Hom}(V,W)$ ו-$M_{m\times n}(\mathbb{F})$ איזומורפיים זה לזה ו-$\omega_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ היא איזומורפיזם ביניהם ובפרט היא העתקה ליניארית.

מסקנה 5.11. נניח ש-V נ"ס ויהי W גם הוא מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$, ונסמן $n:=\dim V$ ו-$m:=\dim W$.
מתקיים $\dim(\operatorname{Hom}(V,W))=\dim M_{m\times n}(\mathbb{F})=m\cdot n$.

5.4 מרחבי מנה

טענה 5.12. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו, מחלקת השקילות של וקטור $v\in V$ ביחס ל-W היא הישרייה $\{v\}+W$.

♣ כלומר מה שיחס המנה עושה הוא "לפרוס" את המרחב V לפרוסות שכל אחת מהן היא ישרייה שמרחב הכיוונים שלה הוא W.

טענה 5.13. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו, לכל $v,u\in V$ ולכל $c\in\mathbb{F}$ מתקיים $[v]+[u]=[v+u]$ ו-$c\cdot[v]=[c\cdot v]$.

מסקנה 5.14. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו, קבוצת מחלקות השקילות (שתסומן ב-V/W), יחד עם פעולות החיבור והכפל בסקלר שלה, היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

טענה 5.15. העתקת המנה של תמ"ו $W\subseteq V$ היא פונקציה על וגרעינה הוא W.

מסקנה 5.16. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו, לכל תמ"ו $U\subseteq V$ כך ש-$V=W\oplus U$ הצמצום של העתקת המנה ל-U הוא איזומורפיזם בין U ל-V/W.

מסקנה 5.17. נניח ש-V נ"ס ויהי $W\subseteq V$ תמ"ו, מתקיים $\dim V=\dim W+\dim V/W$.

5.5 כפל סדרות וקטורים בווקטורים ממרחב הקואורדינטות ובמטריצות

טענה 5.18. נניח ש-V נ"ס.

- לכל $v\in V$ ולכל בסיס סדור $\mathcal{B}$ (של V) מתקיים $v=\mathcal{B}\cdot[v]_{\mathcal{B}}$.
- לכל שני בסיסים סדורים $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ (של V) מתקיים $\mathcal{C}=\mathcal{B}\cdot[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.
- תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה ותהא $S:=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ סדרת וקטורים ב-V, אם A אינה הפיכה אז $S\cdot A$ תלויה ליניארית.
- תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה, A הפיכה אם"ם **קיים** בסיס סדור $\mathcal{B}$ (של V) כך ש-$\mathcal{B}\cdot A$ בת"ל (וממילא $\mathcal{B}\cdot A$ בסיס).
- תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה, A הפיכה אם"ם **לכל** בסיס סדור $\mathcal{B}$ (של V) הסדרה $\mathcal{B}\cdot A$ בת"ל (וממילא $\mathcal{B}\cdot A$ בסיס).

[3] לכל $f,g:A\to\mathbb{F}$ הגדרנו את $f+g$ ע"י $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$ (לכל $x\in\mathbb{F}$), ולכל $f:A\to\mathbb{F}$ ו-$c\in\mathbb{F}$ הגדרנו את $c\cdot f$ ע"י $(c\cdot f)(x):=c\cdot f(x)$.