מרחבי מכפלה פנימית - הגדרות בלבד

אלגברה ליניארית (2) - 80135

מרצה: איתמר צביק

מתרגלים: גיל לבנה ויואב כהן

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

תודתי נתונה לגלעד שרם על סיכומיו המצוינים שהיו לי לעזר רב עד כדי כך שניתן לומר שהסיכום הזה מבוסס על סיכומיו.

סיכומי קורס זה מוקדשים לאהרון כהן;
אהרון, הידיעה שתקרא את הסיכומים הללו דרבנה אותי לאורך כל הדרך.
בהצלחה!

* * *

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 מכפלות פנימיות

1.1 התחלה

1.1.1 ההגדרות הבסיסיות

הגדרה 1.1. מכפלה פנימית מעל הממשיים

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$, פונקציה $\langle\cdot\mid\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$ תקרא מכפלה פנימית על V אם לכל $v,w,u\in V$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיימות התכונות הבאות:

1. בי-ליניאריות:

$$\begin{aligned}\langle v\mid w+u\rangle &= \langle v\mid w\rangle+\langle v\mid u\rangle\\ \langle v\mid \lambda\cdot w\rangle &= \lambda\cdot\langle v\mid w\rangle\\ \langle v+u\mid w\rangle &= \langle v\mid w\rangle+\langle u\mid w\rangle\\ \langle \lambda\cdot v\mid w\rangle &= \lambda\cdot\langle v\mid w\rangle\end{aligned}$$

2. סימטריה:

$$\langle w\mid v\rangle=\langle v\mid w\rangle$$

3. חיוביות בהחלט:

$$\langle v\mid v\rangle\geq 0$$

$$\langle v\mid v\rangle=0\iff v=0_V$$

מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ שמוגדרת עליו מכפלה פנימית נקרא מרחב מכפלה פנימית, ואם הוא נוצר סופית נקרא גם מרחב אוקלידי.

♣ אם נקבע את אחד הרכיבים נקבל העתקה ליניארית: ההעתקה $l_v : V\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $l_v(w):=\langle v\mid w\rangle=\langle w\mid v\rangle$ לכל $w\in V$ היא העתקה ליניארית - הליניאריות נובעת מהליניאריות של המכפלה הפנימית ברכיב השני.

הגדרה 1.2. מכפלה פנימית מעל המרוכבים
יהי V מ"ו מעל $\mathbb{C}$, פונקציה $\langle\cdot\mid\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{C}$ תקרא מכפלה פנימית או מכפלה הרמיטית[1] על V אם היא לכל $v,w,u\in V$ ולכל $\lambda\in\mathbb{C}$ מתקיימות התכונות הבאות:

1. ליניאריות למחצה[2]:

$$\begin{aligned}\langle v\mid w+u\rangle &= \langle v\mid w\rangle+\langle v\mid u\rangle\\ \langle v\mid \lambda\cdot w\rangle &= \lambda\cdot\langle v\mid w\rangle\\ \langle v+u\mid w\rangle &= \langle v\mid w\rangle+\langle u\mid w\rangle\\ \langle \lambda\cdot v\mid w\rangle &= \overline{\lambda}\cdot\langle v\mid w\rangle\end{aligned}$$

2. סימטריה הרמיטית:

$$\langle w\mid v\rangle=\overline{\langle v\mid w\rangle}$$

3. חיוביות בהחלט:

$$\langle v\mid v\rangle\geq 0$$

$$\langle v\mid v\rangle=0\Longleftrightarrow v=0_V$$

- ♣ נשים לב שלכל $v\in V$ מתקיים $\overline{\langle v\mid v\rangle}=\langle v\mid v\rangle$ ולכן $\langle v\mid v\rangle\in\mathbb{R}$, מסיבה זו לא היינו צריכים לדרוש ש-$\langle v\mid v\rangle\in\mathbb{R}$ לכל $v\in V$ במסגרת החיוביות בהחלט.
- ♣ אם נקבע את הרכיב השמאלי נקבל העתקה ליניארית: ההעתקה $l_v:V\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $l_v(w):=\langle v\mid w\rangle$ לכל $w\in V$ היא העתקה ליניארית - הליניאריות נובעת מהליניאריות של המכפלה הפנימית ברכיב הימני.
- ♣ במקומות אחרים (כמו ויקיפדיה) מחליפים בין שני הרכיבים: ברכיב השמאלי יש ליניאריות מלאה וברכיב הימני מתקיים $\langle v\mid\lambda\cdot w\rangle=\overline{\lambda}\cdot\langle v\mid w\rangle$.

הגדרה 1.3. מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ שמוגדרת עליו מכפלה הרמיטית נקרא גם הוא מרחב מכפלה פנימית, ואם הוא נוצר סופית נקרא בנוסף מרחב הרמיטי או מרחב אוניטרי.

[1] על שם שארל הרמיט.
[2] תכונה זו נקראת גם "אנטי-ליניארית" או "ליניארית-צמודה".

♣ ניתן היה להגדיר את שתי המכפלות בבת אחת בצורה המינימליסטית הבאה:

הגדרה. יהי V מ"ו מעל לשדה $\mathbb{F}$ כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ או $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, פונקציה $\langle\cdot\mid\cdot\rangle:V\times V\to\mathbb{C}$ תקרא מכפלה פנימית על V אם היא לכל $v,w,u\in V$ ולכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיימות התכונות הבאות:

1. ליניאריות ברכיב הימני:

$$\langle v\mid w+u\rangle=\langle v\mid w\rangle+\langle v\mid u\rangle$$
$$\langle v\mid\lambda\cdot w\rangle=\lambda\cdot\langle v\mid w\rangle$$

2. סימטריה הרמיטית:

$$\langle w\mid v\rangle=\overline{\langle v\mid w\rangle}$$

3. חיוביות בהחלט:

$$\langle v\mid v\rangle\geq 0$$

$$\langle v\mid v\rangle=0\iff v=0_V$$

כשמדובר ב-$\mathbb{R}$ ההצמדה של הסימטריה ההרמיטית אינה משנה דבר ומדובר בסימטריה רגילה, אנחנו נשתמש בקיצור הדרך הזה פעמים רבות מבלי להזכיר זאת.
את הליניאריות למחצה ברכיב השמאלי היינו מקבלים מהליניאריות ברכיב הימני ומהסימטריה ההרמיטית:

$$\langle v+u\mid w\rangle=\overline{\langle w\mid v+u\rangle}=\overline{\langle w\mid v\rangle+\langle w\mid u\rangle}=\overline{\langle w\mid v\rangle}+\overline{\langle w\mid u\rangle}=\langle v\mid w\rangle+\langle u\mid w\rangle$$
$$\langle\lambda\cdot v\mid w\rangle=\overline{\langle w\mid\lambda\cdot v\rangle}=\overline{\lambda\cdot\langle w\mid v\rangle}=\overline{\lambda}\cdot\overline{\langle w\mid v\rangle}=\overline{\lambda}\cdot\langle v\mid w\rangle$$

למעשה זוהי הסיבה לכך שלא היינו יכולים לדרוש ליניאריות מלאה ברכיב השמאלי (במכפלה ההרמיטית), היינו מקבלים סתירה.

♣ א"א אפשר לדרוש סימטריה רגילה במקום סימטריה הרמיטית (מעל $\mathbb{C}$) מפני שתכונת החיוביות במכפלה הפנימית מחייבת ש-$\langle v\mid v\rangle\in\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ לכל $v\in V$ (שהרי $\mathbb{C}$ אינו שדה סדור), ולכן הדרישה לסימטריה רגילה תוביל לדרישת הסימטריה ההרמיטית שכן לכל $v,w\in V$ יתקיים:

$$\overline{\langle v\mid v\rangle}+\overline{\langle v\mid w\rangle}+\overline{\langle w\mid v\rangle}+\overline{\langle w\mid w\rangle}=\overline{\langle v+w\mid v+w\rangle}=\langle v+w\mid v+w\rangle=\langle v\mid v\rangle+\langle v\mid w\rangle+\langle w\mid v\rangle+\langle w\mid w\rangle$$

$$\Rightarrow\overline{\langle v\mid w\rangle}+\overline{\langle w\mid v\rangle}=\langle v\mid w\rangle+\langle w\mid v\rangle$$

סימטריה רגילה תיתן כאן $2\cdot\overline{\langle v\mid w\rangle}=2\cdot\langle v\mid w\rangle$ ומכאן שנקבל סימטריה הרמיטית.

1.1.2 דוגמאות חשובות

יהי $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

דוגמה 1.4. הדוגמה הקלאסית למכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ היא פונקציית <u>המכפלה הסקלרית</u> $\cdot : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ המוגדרת ע"י (לכל $x, y \in \mathbb{F}^n$):

$$x \cdot y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \overline{x_1} \cdot y_1 + \overline{x_2} \cdot y_2 + \ldots + \overline{x_n} \cdot y_n$$

סימון: לכל $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ נסמן ב-A^* את המטריצה המוגדרת ע"י $[A^*]_{ij} := \overline{[A^t]_{ij}}$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ ולכל $m \geq j \in \mathbb{N}$ (כלומר A^* היא A לאחר שחלוף והצמדת כל איבר ולכן אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז $A^* = A^t$), A^* נקראת <u>הצמודה ההרמיטית</u> של A ופעולה זו נקראת <u>הצמדת מטריצה</u>. מהליניאריות של פעולת ההצמדה במרוכבים נובעות כל התכונות של המטריצה המשוחלפת, לכל $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ולכל מטריצה הפיכה $P \in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים:

$$(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^* \qquad (A^*)^* = A$$
$$\left(P^{-1}\right)^* = (P^*)^{-1} \qquad (A + B)^* = A^* + B^*$$
$$(\lambda \cdot A)^* = \overline{\lambda} \cdot A^*$$

♣ כל ניתן להסתכל על המכפלה הסקלרית ככפל מטריצות - מתקיים $x \cdot y = x^* \cdot y$ כאשר הכפל באגף שמאל הוא המכפלה הסקלרית והכפל באגף ימין הוא מכפלת מטריצת שורה במטריצת עמודה ואנו משתמשים באיזומורפיזם בין $M_1(\mathbb{F})$ ל-$\mathbb{F}$.

דוגמה 1.5. הפונקציה $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : M_n(\mathbb{F}) \times M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ המוגדרת ע"י (לכל $A, B \in M_n(\mathbb{F})$)[3]:

$$\langle A \mid B \rangle := \operatorname{tr}(A^* \cdot B)$$

היא מכפלה פנימית על המרחב הווקטורי $M_n(\mathbb{F})$.

הגדרה 1.6. יהיו $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ממ"פ מעל ל-$\mathbb{F}$ (נסמן ב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_i$ את המכפלה הפנימית של V_i לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$) - בקורס הקודם ראינו ש-$V := V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ הוא מרחב וקטורי מעל ל-$\mathbb{F}$ כשהחיבור הווקטורי והכפל בסקלר מוגדרים איבר איבר, הפונקציה $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ המוגדרת ע"י (לכל $(v_1, v_2, \ldots, v_n), (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in V$):

$$\langle (v_1, v_2, \ldots, v_n) \mid (w_1, w_2, \ldots, w_n) \rangle := \langle v_1 \mid w_1 \rangle_1 + \langle v_2 \mid w_2 \rangle_2 + \ldots + \langle v_n \mid w_n \rangle_n$$

היא מכפלה פנימית על המרחב הווקטורי $V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$.

♣ נניח לרגע ש-$V_i = \mathbb{F}^m$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$, א"כ ראינו בקורס הקודם ש-V איזומורפי למרחב הווקטורי $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ (ניתן להסתכל על מטריצה ב-$M_{m \times n}(\mathbb{F})$ כסדרה באורך n של וקטורים ב-$\mathbb{F}^m$), וראו איזה פלא - ע"פ אותו איזומורפיזם המכפלה הפנימית של V זהה למכפלה הפנימית של $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ($\langle A \mid B \rangle := \operatorname{tr}(A^* \cdot B)$).

[3] נזכיר ש-$\operatorname{tr}(M)$ היא <u>העקבה</u> (trace) של המטריצה M, כלומר זהו סכום האיברים על האלכסון הראשי שלה.

דוגמה 1.7. יהי $C\left[a,b\right]$ מרחב הפונקציות הרציפות על קטע סגור $\left[a,b\right]$, הפונקציה $\langle\cdot\mid\cdot\rangle:C\left[a,b\right]\times C\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $f,g\in C\left[a,b\right]$):

$$\langle f\mid g\rangle:=\int\limits_{a}^{b}f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)dx$$

היא מכפלה פנימית על המרחב הווקטורי $C\left[a,b\right]$ מעל $\mathbb{R}$.

♣ ראינו באינפי' 2 ש-$R\left[a,b\right]$ (קבוצת הפונקציות האינטגרביליות רימן על $\left[a,b\right]$) היא מרחב וקטורי, הסיבה לדרישה שהפונקציות תהיינה רציפות דווקא היא החיוביות בהחלט של המכפלה הפנימית: אם נתיר גם לפונקציות לא רציפות להצטרף יהיו לנו וקטורים (פונקציות) שונים מאפס שהמכפלה הפנימית שלהם עם עצמם היא 0, לעומת זאת ראינו שפונקציית האפס היא הפונקציה הרציפה היחידה שמקיימת $\int_{a}^{b}f\left(x\right)\cdot f\left(x\right)dx=0$.

1.1.3 הטלות על וקטורים

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל לשדה $\mathbb{F}$ (מהגדרה $\mathbb{F}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$) ונסמן ב-$\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ את המכפלה הפנימית.

טענה. יהי $0_{V}\neq w\in V$, לכל $v\in V$ קיים $c\in\mathbb{F}$ יחיד כך שמתקיים $(v-c\cdot w)\perp w$, את אותו c הוא:

$$c=\frac{\langle w\mid v\rangle}{\langle w\mid w\rangle}$$

♣ נשים לב: $v=(v-c\cdot w)+c\cdot w$, כלומר $c\cdot w$ הוא הרכיב של v בכיוון של w ו-$v-c\cdot w$ הוא הרכיב של v בכיוון המאונך על המישור שפורשים שניהם.

הגדרה 1.8. <u>פונקציית ההטלה האורתוגונלית</u> של וקטור $0_{V}\neq w\in V$ היא הפונקציה $p_{w}:V\to V$ המוגדרת ע"י (לכל $v\in V$):

$$p_{w}\left(v\right):=\frac{\langle w\mid v\rangle}{\langle w\mid w\rangle}\cdot w$$

♣ זוהי אכן הטלה שכן לכל $v\in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned}p_{w}\left(p_{w}\left(v\right)\right)&=\frac{\langle w\mid p_{w}\left(v\right)\rangle}{\langle w\mid w\rangle}\cdot w=\frac{\left\langle w\ \middle|\ \frac{\langle w\mid v\rangle}{\langle w\mid w\rangle}\cdot w\right\rangle}{\langle w\mid w\rangle}\cdot w\\&=\frac{\langle w\mid v\rangle}{\langle w\mid w\rangle}\cdot\frac{\langle w\mid w\rangle}{\langle w\mid w\rangle}\cdot w=\frac{\langle w\mid v\rangle}{\langle w\mid w\rangle}\cdot w=p_{w}\left(v\right)\end{aligned}$$

1.2 נורמה ומרחק

למה 1.9. לכל $v,w\in V$ ולכל $c\in\mathbb{F}$ מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. חיוביות בהחלט - $\sqrt{\langle v\mid v\rangle}\geq0$ ו-$\sqrt{\langle v\mid v\rangle}=0\Longleftrightarrow v=0_{V}$
2. הומוגניות - $\sqrt{\langle c\cdot v\mid c\cdot v\rangle}=|c|\cdot\sqrt{\langle v\mid v\rangle}$
3. א"ש המשולש[4] - $\sqrt{\langle v+w\mid v+w\rangle}\leq\sqrt{\langle v\mid v\rangle}+\sqrt{\langle w\mid w\rangle}$ ומתקיים שוויון אם"ם קיים $0\leq c\in\mathbb{R}$ כך ש-$v=c\cdot w$.

[4] א"ש המשולש מופיע בסימונים אחרים בקובצי הטענות וההוכחות.

הגדרה 1.10. לכל $v\in V$ נגדיר את <u>הנורמה</u> של v ע"י $|v|:=\|v\|:=\sqrt{\langle v\mid v\rangle}$.

♣ הנורמה היא בעצם "האורך" של וקטור, עבור המכפלה הסקלרית על $\mathbb{R}^3$ זה ממש מתקיים גאומטרית (ראו הסבר מפורט בקובץ "הקדמה - מרחק, זווית והמכפלה הסקלרית"), עבור ממדים גבוהים יותר זה עדיין ממש מתקיים גאומטרית אולם קשה יותר לראות זאת, ועבור מכפלות פנימיות אחרות היא רק מקיימת את התכונות שהיינו מצפים מאורך לקיים (ראו בלמה שלעיל).

למה 1.11. לכל $v,w,u\in V$ מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים[5]:

1. סימטריה - $\|v-w\|=\|w-v\|$
2. חיוביות בהחלט $\|v-w\|\geq 0$ ו-$v=w \iff \|v-w\|=0$
3. א"ש המשולש - $\|v-w\|\leq\|v-u\|+\|u-w\|$

הגדרה 1.12. מרחק
לכל $v,w\in V$ נגדיר את <u>המרחק</u> בין v ל-w ע"י $d(v,w):=\|v-w\|$.

♣ א"כ הנורמה של וקטור היא המרחק שלו מווקטור האפס.

הגדרה 1.13. לכל שתי קבוצות $\emptyset\neq S,T\subseteq V$ ולכל $v\in V$ <u>המרחק</u> בין S ל-v מוגדר להיות $d(v,S):=\inf\{d(v,w)\mid w\in S\}$ ו<u>המרחק</u> בין S ל-T מוגדר להיות $d(S,T):=\inf\{d(v,w)\mid v\in S,\ w\in T\}$.

1.3 ניצבות

הגדרה 1.14. יהיו $v,w\in V$ תהיינה $S,T\subseteq V$.

1. נאמר ש-v ו-w <u>מאונכים זה לזה</u> ונסמן $v\perp w$ אם מתקיים $\langle v\mid w\rangle=0$.
2. נאמר ש-v <u>מאונך</u> ל-S ונסמן $v\perp S$ אם $v\perp s$ לכל $s\in S$.
3. נאמר ש-S ו-T <u>מאונכות זו לזו</u> ונסמן $S\perp T$ אם מתקיים $s\perp t$ לכל $s\in S$ ולכל $t\in T$.

♣ נשים לב: לכל $v\in V$ מתקיים $\langle v\mid 0_V\rangle=\langle v\mid 0\cdot v\rangle=0\cdot\langle v\mid v\rangle=0$, וקטור האפס מאונך לכל וקטור אחר.

♣ מי שלמד פיזיקה בתיכון או למד וקטורים כחלק מ-5 יחידות מתמטיקה אולי זוכר שב-$\mathbb{R}^3$[6] לכל שני וקטורים v ו-w מתקיים $v\cdot w=|v|\cdot|w|\cdot\cos\theta$ עבור המכפלה הסקלרית (באגף שמאל) כאשר θ היא הזווית שבין v ל-w על המישור שפורשים שניהם ואז אכן מתקיים $v\cdot w=0$ אם"ם $\cos\theta=0$[7], כלומר כאשר $\theta=\frac{\pi}{2}$ (הוכחה והסבר מפורט של כל זה מופיעה בקובץ "הקדמה - מרחק, זווית והמכפלה הסקלרית").

♣ מההערה הקודמת ניתן להבין שהמכפלה הפנימית בעצם בודקת עד כמה שני וקטורים מצביעים באותו כיוון (כאשר מושג הזווית והכיוון מוגדר ע"י המכפלה הפנימית).

מסקנה 1.15. תהא $S\subseteq V$, הקבוצה $\{v\in V\mid \forall s\in S\ v\perp s\}$ היא תמ"ו של V.

הגדרה 1.16. נסמן $S^{\perp}:=\{v\in V\mid \forall s\in S\ v\perp s\}$ ונקרא ל-$S^{\perp}$ בשם המפתיע <u>המרחב הניצב ל-S</u>[8].

הגדרה 1.17. קבוצה/סדרה של וקטורים ב-V תקרא <u>אורתוגונלית</u> אם כל שני וקטורים בה מאונכים זה לזה.

---
[5] אלו שלוש התכונות שהיינו מצפים שכל פונקציית מרחק תקיים.
[6] המשוואה הזו מתקיימת גם עבור ממדים גבוהים יותר.
[7] בהנחה שאף אחד מהם אינו וקטור האפס.
[8] ראינו גם את הביטוי העילג S-ניצב.

למה 1.18. יהיו $0_V \neq v, w \in V$ כך ש-$v \perp w$, v ו-w אינם תלויים ליניארית.

מסקנה 1.19. קבוצה/סדרה אורתוגונלית שאינה מכילה את וקטור האפס היא קבוצה/סדרה בת"ל.

הגדרה 1.20. וקטור $v \in V$ יקרא <u>וקטור יחידה</u> אם $\|v\| = 1$.

הגדרה 1.21. קבוצה/סדרה אורתוגונלית של וקטורים ב-V תקרא <u>אורתונורמלית</u> אם כל וקטור בה הוא וקטור יחידה.

♣ קבוצה/סדרה אורתונורמלית היא קבוצה/סדרה בת"ל.

♣ ניתן לראות בקלות יחסית שלכל בסיס $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ של $\mathbb{F}^n$ יש מכפלה פנימית המגדירה אותו כבסיס אורתונורמלי, השיטה היא כזו: נשים את וקטורי הבסיס בעמודות מטריצה $U \in M_n(\mathbb{F})$ ונגדיר את הפונקציה $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_U : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ ע"י (לכל $v, w \in \mathbb{F}^n$):

$$\langle v \mid w \rangle_U := v^* \cdot \left(U^{-1}\right)^* \cdot U^{-1} \cdot w$$

כאשר אנו משתמשים באיזומורפיזם בין $M_1(\mathbb{F})$ ל-$\mathbb{F}$.
מהגדרת כפל מטריצות מתקיימת תכונת הבי-ליניאריות / ליניאריות ברכיב הימני, הסימטריה נובעת מן התכונות של שחלוף מטריצות[9]:

$$\begin{aligned}
\langle w \mid v \rangle_U &= w^* \cdot \left(U^{-1}\right)^* \cdot U^{-1} \cdot v \\
&= \left(w^* \cdot \left(U^{-1}\right)^* \cdot U^{-1} \cdot v\right)^t \\
&= v^t \cdot \left(U^{-1}\right)^t \cdot \left(\left(U^{-1}\right)^*\right)^t \cdot \left(w^*\right)^t \\
&= \overline{v^* \cdot \left(U^{-1}\right)^* \cdot U^{-1} \cdot w} = \overline{\langle v \mid w \rangle_U}
\end{aligned}$$

כדי להוכיח את תכונת החיוביות בהחלט נחכה לשלב הבא.
נשים לב לכך שמתקיים:

$$U^* \cdot \left(U^{-1}\right)^* \cdot U^{-1} \cdot U = \left(U^{-1} \cdot U\right)^* \cdot \left(U^{-1} \cdot U\right) = I_n$$

ולכן $\langle u_i \mid u_j \rangle_U = \delta_{ij}$ לכל $n \geq i, j \in \mathbb{N}$, כלומר $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ הוא בסיס אורתונורמלי (בהנחה שאכן מדובר במכפלה פנימית).
כעת נסיים להוכיח שמדובר במכפלה פנימית, לשם כך עלינו להוכיח את תכונת החיוביות בהחלט, נציג את v כצר"ל של $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ - $v = \sum_{i=1}^n z_i \cdot u_i$ ומכאן שמתקיים:

$$\begin{aligned}
\langle v \mid v \rangle_U &= \left\langle \sum_{i=1}^n z_i \cdot u_i \;\middle|\; \sum_{j=1}^n z_j \cdot u_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{z_i} \cdot z_j \cdot \langle u_i \mid u_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \overline{z_i} \cdot z_i = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

כמו כן ניתן לראות מהשורה הקודמת ש-$v = 0_V \iff \langle v \mid v \rangle = 0$.

[9] לכל $A \in M_1(\mathbb{F})$ מתקיים $A^t = A$.

♣ ההערה הקודמת נותנת לנו אינטואיציה כיצד למצוא - בכל מ"ו נ"ס V מעל לשדה $\mathbb{F}$ (כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ או $\mathbb{F}=\mathbb{C}$), ולכל בסיס $\mathcal{B}$ של V - מכפלה פנימית על V כך ש-$\mathcal{B}$ הוא בסיס אורתונורמלי:
נגדיר את הפונקציה $\langle\cdot\mid\cdot\rangle_{\mathcal{B}}:V\times V\to\mathbb{F}$ ע"י (לכל $v,w\in V$):

$$\langle v\mid w\rangle:=\left([v]_{\mathcal{B}}\right)^{*}\cdot\left(\left([\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}\right)^{-1}\right)^{*}\cdot\left([\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}\right)^{-1}\cdot[w]_{\mathcal{B}}$$

מההערה הקודמת נובע שזוהי אכן מכפלה פנימית, ומאותה סיבה שראינו לעיל $\mathcal{B}$ הוא בסיס אורתונורמלי ביחס אליה.

♣ בקובץ הטענות אנחנו נראה (בהערה שאחרי זהות פרסבל) שלא רק שלכל בסיס קיימת מכפלה פנימית המגדירה כאורתונורמלי אלא שקיימת מכפלה יחידה כזו, הדבר מאפשר להגדיר יחס שקילות על בסיסים של מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ - שני בסיסים יהיו שקולים זה לזה אם הם מוגדרים כאורתונורמליים ע"י אותה מכפלה פנימית.

1.4 הטלות על תתי-מרחבים וקטוריים

נניח ש-V נ"ס.

טענה. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו, מתקיים $V=W\oplus W^{\perp}$.

הגדרה 1.22. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו, $W^{\perp}$ ייקרא <u>המשלים האורתוגונלי</u> של W.

תזכורת: בהינתן תמ"וים $W,U\subseteq V$ כך ש-$V=W\oplus U$, <u>ההטלה על</u> W <u>במקביל</u> ל-U היא הפונקציה $p:V\to V$ המוגדרת ע"י $p(w+u):=w$ לכל $w\in W$ ולכל $u\in U$, כלומר p מפרקת כל וקטור $v\in V$ לרכיביו ב-W וב-U ומחזירה את הרכיב שב-W בלבד.

הגדרה 1.23. הטלה אורתוגונלית על תמ"ו
<u>ההטלה האורתוגונלית</u> על תמ"ו היא ההטלה עליו ביחס למשלים האורתוגונלי שלו, כלומר עבור תמ"ו $W\subseteq V$ זוהי ההטלה $p_W:V\to V$ (זהו הסימון המקובל) המוגדרת ע"י $p(v):=w$ כאשר w הוא הווקטור היחיד ב-W שעבורו קיים $w^{\perp}\in W^{\perp}$ המקיים $v=w+w^{\perp}$.

2 מרחבים דואליים וההעתקה הצמודה

♣ אנחנו לוקחים כעת הפסקה מנושא המכפלה הפנימית ועוברים לעסוק במרחב הדואלי של מרחב וקטורי - שהוא מרחב ההעתקות הליניאריות מהמרחב לשדה, בהמשך נראה כיצד נושא מתקשר למרחבי מכפלה פנימית.
רוב מה שנכתב בפרק זה לא היה חלק מהקורס כשלמדתי אותו - החלק הפשוט של מרחבים דואליים נלמד אצל ערן נבו בקורס הקודם ואת השאר מצאתי ברשת או גיליתי בעצמי, למרות זאת ראיתי לנכון להביא את הפרק במלואו מפני שהוא ענה על שאלה שהציקה לי במשך יותר משנה: מהי המשמעות הגאומטרית של שחלוף מטריצה?!!

תזכורת: בקורס הקודם הגדרנו את $\text{Hom}\left(V,W\right)$ להיות מרחב ההעתקות הליניאריות מ-V ל-W (כאשר V ו-W הם מרחבים וקטוריים מעל לשדה $\mathbb{F}$), וראינו שאם V ו-W נ"ס אז מתקיים:

$$\dim\left(\text{Hom}\left(V,W\right)\right)=\dim\left(V\right)\cdot\dim\left(W\right)$$

שכן הממד של מרחב ההעתקות הוא בדיוק הממד של מרחב המטריצות המתאים למטריצות המייצגות של ההעתקות הללו.
נזכיר גם שכל שדה הוא מ"ו מעל עצמו כאשר החיבור והכפל של השדה משמשים כחיבור וקטורי וכפל בסקלר.

יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים מעל לשדה $\mathbb{F}$.

2.1 במרחבים וקטוריים כלליים

הגדרה 2.1. <u>המרחב הדואלי</u> של V מוגדר ע"י $V^{*}:=\text{Hom}\left(V,\mathbb{F}\right)$, איברי V^{*} נקראים <u>פונקציונלים</u>.

♣ נשים לב שאם V נ"ס אז $\dim V^{*}=\dim V$.

סימון: המרחב הדואלי של המרחב הדואלי של V ($\left(V^{*}\right)^{*}=\text{Hom}\left(V^{*},\mathbb{F}\right)$) מסומן ב-$V^{**}$ וכן הלאה ($V^{***}:=\left(V^{**}\right)^{*}$), בהמשך אנחנו נראה שאין שום עניין להמשיך מעבר ל-V^{**}.

הגדרה 2.2. נניח ש-V נ"ס יהי $\mathcal{B}:=\left(v_{1},v_{2},\ldots,v_{n}\right)$ בסיס של V, <u>הבסיס הדואלי</u> (של V^{*}) ביחס ל-$\mathcal{B}$ הוא $\mathcal{B}^{*}:=\left(v_{1}^{*},v_{2}^{*},\ldots,v_{n}^{*}\right)$ כאשר, לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$, v_{i}^{*} היא ההעתקה ליניארית המוגדרת ע"י (לכל $n\geq j\in\mathbb{N}$):

$$v_{i}^{*}\left(v_{j}\right)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$$

♣ $\mathcal{B}^{*}$ הוא אכן בסיס של V^{*} שכן מדובר בסדרה בת"ל בגודל הממד של V שהוא הממד של V^{*}.

♣ כבר ראינו שהעתקת בסיס במרחב אחד לבסיס של מרחב אחר כאשר שניהם מאותו ממד היא **איזומורפיזם** בין שני המרחבים הללו, א"כ V^{*} איזומורפי ל-V אך מכיוון שהאיזומורפיזם תלוי בבחירת הבסיס כל איזומורפיזם כזה אינו טבעי, בהמשך נראה שבנוכחות מכפלה פנימית קיים איזומורפיזם טבעי בין מרחב מכפלה פנימית למרחב ההעתקות ממנו לשדה.

סימון: נניח ש-W הוא תמ"ו של V ($W\subseteq V$), נסמן $W^{0}:=\left\{ f\in V^{*}\mid f\left(W\right)=\left\{ 0\right\} \right\}$, כלומר W^{0} היא קבוצת כל הפונקציונלים שמתאפסים על W (נקראת גם <u>המאפס</u> של W).

סימון: לכל $v\in V$ נגדיר את ההעתקה הליניארית $f_{v}:V^{*}\to\mathbb{F}$ ע"י $f_{v}\left(T\right):=T\left(v\right)$ לכל $T\in V^{*}$ (מהגדרה $f_{v}\in V^{**}$).

♣ הליניאריות של f_{v} נובעת מהליניאריות של ההעתקות ב-V^{*}, לכל $T_{1},T_{2}\in V^{*}$ ולכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}f_{v}\left(T_{1}+T_{2}\right)&=\left(T_{1}+T_{2}\right)\left(v\right)=T_{1}\left(v\right)+T_{2}\left(v\right)=f_{v}\left(T_{1}\right)+f_{v}\left(T_{2}\right)\\f_{v}\left(\lambda\cdot T_{1}\right)&=\left(\lambda\cdot T\right)\left(v\right)=\lambda\cdot T\left(v\right)=\lambda\cdot f_{v}\left(T_{1}\right)\end{aligned}$$

♣ נשים לב לכך ש-$f_v \in V^{**}$ - א"כ מצאנו דרך קלה "לייצר" איברים ב-V^{**}, במשפט הבא נראה שאם V נ"ס אז כל האיברים ב-V^{**} ניתנים להצגה בצורה זו.

משפט. נניח ש-V נ"ס ותהא $\varphi : V \to V^{**}$ **העתקת ההצבה** המוגדרת ע"י $\varphi\left(v\right) := f_v$ (לכל $v \in V$), φ היא איזומורפיזם בין V ל-V^{**}.

♣ מבלבל למדי, נכון? שימו לב: φ לוקחת וקטור ב-V וצריכה להחזיר וקטור ב-V^{**}, אבל וקטור ב-V^{**} הוא העתקה ליניארית המקבלת העתקה ליניארית ב-V^* ומחזירה סקלר ב-$\mathbb{F}$, כעת נזכור שגם וקטור ב-V^* הוא העתקה ליניארית המקבלת וקטור ב-V ומחזירה סקלר ב-$\mathbb{F}$ - לכן טבעי מאד ש-φ תחזיר העתקה ליניארית ב-V^{**} שפעולתה היא להציב את הווקטור המתקבל מ-V בכל ה"ל ב-V^*.
כן, אני מודע לכך שגם ההסבר המפורט יותר מבלבל, אין מה לעשות, קחו נשימה ארוכה וקראו את הכל לאט לאט.

♣ המשפט מראה שאם V נ"ס אז ישנו איזומורפיזם טבעי בין V ל-V^{**}, מהמשפט נובע גם שאין שום טעם לדבר על V^{***} (וכן הלאה) שכן ישנו איזומורפיזם טבעי בין V^* ל-V^{***}.

הגדרה 2.3. תהא $T : V \to W$ העתקה ליניארית, ההעתקה הצמודה (הרמיטית) של T (נקראת גם האופרטור הצמוד של T אם $V = W$) היא ההעתקה הליניארית $T^* : W^* \to V^*$ המוגדרת ע"י (לכל $f \in W^*$):

$$T^*\left(f\right) := f \circ T$$

♣ $f \circ T$ הוא אכן פונקציונל ב-V^*: התחום שלו הוא V שהרי זהו התחום של T והטווח שלו הוא $\mathbb{F}$ משום שזהו הטווח של f (כמובן שהוא העתקה ליניארית).

סימון: ההעתקה הצמודה של ההעתקה הצמודה של T ($\left(T^*\right)^*$) מסומנת ב-T^{**} וכן הלאה ($T^{***} := \left(T^{**}\right)^*$), אך כפי שראינו אין שום עניין מעבר ל-V^{**} ולכן גם אין שום עניין לאחר T^{**}.

♣ מהגדרה התחום של T^{**} הוא V^{**}, הטווח שלו הוא W^{**} והוא מוגדר ע"י $T^{**}\left(f\right) := f \circ T^*$ לכל $f \in V^{**}$, טבעי מאד לצפות לכך שאם V ו-W נ"ס אז ע"פ אותו איזומורפיזם בין V ל-V^{**} ובין W ל-W^{**} (העתקת ההצבה שבמשפט לעיל) גם T ו-T^{**} יהיו איזומורפיים זה לזה, ציפייה זו אכן תתממש ונראה אותה בקובץ הטענות.

2.2 במרחבי מכפלה פנימית

נניח ש-V ו-W הם מרחבי מכפלה פנימית ($\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) ונסמן ב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$ וב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_W$ את המכפלות הפנימיות שלהם[10].

הגדרה 2.4. פונקציה $f : V_1 \to V_2$ בין שני מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{C}$ נקראת אנטי-ליניארית אם היא מקיימת (לכל $v, w \in V_1$ ולכל $\lambda \in \mathbb{C}$):

$$f\left(v + w\right) = f\left(v\right) + f\left(w\right)$$
$$f\left(\lambda \cdot v\right) = \overline{\lambda} \cdot f\left(v\right)$$

ואם היא גם חח"ע ועל אז תקרא גם אנטי-איזומורפיזם.

[10] את המכפלה הפנימית של V נסמן גם ב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ כשנעסוק בו בלבד.

סימון: לכל מרחב מכפלה פנימית V ולכל $v\in V$ נסמן ב-l_v את ההעתקה $l_v:V\to\mathbb{F}$ המוגדרת ע"י $l_v(w):=\langle v\mid w\rangle$ לכל $w\in V$ (מהגדרה $l_v\in V^*$).

משפט. משפט ההצגה של ריס[11]

נניח ש-V נ"ס, לכל $l\in V^*$ קיים $v\in V$ יחיד כך ש-$l(w)=\langle v\mid w\rangle$ לכל $w\in V$ (כלומר $l=l_v$).

- ♣ זה לא כל כך מפתיע כשזוכרים שפונקציונל $f:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}$ הוא בעצם כפל במטריצה מגודל $1\times n$ (וקטור שורה) וכפל מטריצות כזה שקול לחלוטין למכפלה הסקלרית עם המשוחלפת שלה (כווקטור עמודה), כלומר כל פונקציונל הוא בעצם הטלה על הכיוון של וקטור מסוים (כדי לקבל איבר ב-$\mathbb{F}$) ואז כפל בגודל של אותו וקטור (ראו בקובץ ההקדמה).

סימון: נניח ש-V נ"ס ולכל $l\in V^*$ נסמן ב-v_l את אותו וקטור יחיד $v\in V$ המקיים $l=l_v$.

מסקנה. נניח ש-V נ"ס ותהא $\varphi:V\to V^*$ פונקציה המוגדרת ע"י $\varphi(v):=l_v$ (לכל $v\in V$), אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז φ היא איזומורפיזם בין V ל-V^* ואם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז φ היא אנטי-איזומורפיזם בין V ל-V^*.

- ♣ זהו איזומורפיזם / אנטי-איזומורפיזם טבעי מאד, ממש כשם שהאיזומורפיזם בין V ל-V^{**} היה טבעי, אך מכיוון שהוא טבעי רק **אחרי** הגדרת מכפלה פנימית על V אין בו שום דבר קנוני משום שכפי שראינו כבר הגדרת מכפלה פנימית שקולה לבחירת בסיס - לכל בסיס של V קיימת מכפלה פנימית המגדירה אותו כאורתונורמלי.
- ♣ כזכור הגדרנו את ההעתקה הצמודה של העתקה ליניארית $T:V\to W$ להיות הפונקציה $T^*:W^*\to V^*$ המוגדרת ע"י $T^*(f):=f\circ T$, φ הנ"ל נותנת לנו מוטיבציה להגדיר את ההעתקה הצמודה באופן שונה מעט כאשר אנו עוסקים במרחבי מכפלה פנימית: במקום שהתחום והטווח של T^* יהיו W^* ו-V^* טבעי להגדיר את T^* מ-W ל-V כאשר $T^*(w)$ יהיה הווקטור היחיד ב-V שעבורו יתקיים $l_v=l_w\circ T$.

הגדרה 2.5. נניח ש-V ו-W נ"ס ותהא $T:V\to W$ העתקה ליניארית <u>ההעתקה הצמודה</u> של T (נקראת גם <u>האופרטור הצמוד</u> של T אם $V=W$) היא ההעתקה הליניארית $T^*:W\to V$ המוגדרת ע"י (לכל $w\in W$):

$$T^*(w)=v_{(l_w\circ T)}$$

כלומר $T^*(w)$ הוא הווקטור היחיד ב-V המקיים (לכל $v\in V$):

$$\langle T^*(w)\mid v\rangle_V=l_{T^*(w)}(v)=(l_w\circ T)(v)=l_w(T(v))=\langle w\mid T(v)\rangle_W$$

- ♣ כלומר כדי לדעת מיהו $T^*(w)$ עלינו לשאול את עצמנו איזה וקטור ב-V יקיים שהמכפלה הפנימית איתו (ב-V) תהיה שווה למכפלה הפנימית עם w (ב-W) - כשלפני ביצוע המכפלה הפנימית עם w אנו מפעילים את T כדי לקבל וקטורים ב-W.
- ♣ שימו לב: העובדה שאם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז V **אנטי-איזומורפי** ל-V^* אומרת ש-T^* כפי שהוגדר על ממ"פ **אינו איזומורפי** ל-T^* כפי שהוגדר מעל מרחבים וקטוריים כלליים אלא **אנטי-איזומורפי** אליו, כלומר מתקיים $(\lambda\cdot T)^*=\overline{\lambda}\cdot T^*$.

---

[11] ערך בוויקיפדיה: פרידיש ריס.

3 העתקות אוניטריות

♣ בקורס הקודם למדנו על העתקות ליניאריות שהן פונקציות בין שני מרחבים וקטוריים המשמרות את המבנה שלהן, כשאנו עוסקים במרחבי מכפלה פנימית טבעי מאד לעסוק בפונקציות המשמרות את לא רק את המבנה שלהם כמרחבים וקטוריים אלא גם כמרחבי מכפלה פנימית.

יהיו V ו-W מרחבי מכפלה פנימית מעל לשדה $\mathbb{F}$ ונסמן ב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$ וב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_W$ את המכפלות הפנימיות שלהם.

3.1 העתקות אוניטריות שאינן בהכרח אופרטורים

הגדרה 3.1. העתקה ליניארית $T : V \to W$ תקרא העתקה אוניטרית (אופרטור אוניטרי אם $V = W$) אם לכל $v_1, v_2 \in V$ מתקיים:

$$\langle T(v_1) \mid T(v_2) \rangle_W = \langle v_1 \mid v_2 \rangle_V$$

אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ נאמר גם ש-T היא העתקה אורתוגונלית (אופרטור אורתוגונלי אם $V = W$).

תהא $T : V \to W$ העתקה אוניטרית.

מסקנה 3.2. העתקה אוניטרית מעתיקה סדרות אורתוגונליות לסדרות אורתוגונליות וסדרות אורתונורמליות לסדרות אורתונורמליות, כלומר:

- לכל סדרה אורתוגונלית $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ב-V גם הסדרה $(T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n))$ הוא סדרה אורתוגונלית ב-W.
- לכל סדרה אורתונורמלית $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ב-V גם הסדרה $(T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n))$ הוא סדרה אורתונורמלית ב-W.

מסקנה 3.3. אם V ו-W נ"ס ובעלי ממד זהה אז T מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי ולכן הפיכה.

הגדרה 3.4. תהא $T : V \to W$ העתקה אוניטרית, אם V ו-V נ"ס ובעלי ממד זהה נאמר גם ש-T היא איזומטריה ליניארית וש-V ו-W איזומטריים זה לזה.

♣ איזומטריה היא איזומורפיזם על מרחבי מכפלה פנימית: היא הפיכה, משמרת את החיבור הווקטורי והכפל בסקלר מהיותה העתקה ליניארית, ומשמרת את המכפלה הפנימית מהיותה העתקה אוניטרית.

♣ ראינו בקורס הקודם שכל בסיס של מ"ו נ"ס מגדיר איזומורפיזם בינו לבין $\mathbb{F}^n$ (כאשר $\mathbb{F}$ הוא השדה שמעליו נמצא המרחב הווקטורי), כעת אנו רואים שכל בסיס אורתונורמלי מגדיר איזומטריה בין מרחב אוקלידי ל-$\mathbb{R}^n$: כשהראינו לעיל (בסוף הסעיף "ניצבות") שלכל בסיס $\mathcal{B}$ של מ"ו נ"ס V מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ יש מכפלה פנימית המגדירה אותו כאורתונורמלי, מה שעשינו הוא בעצם להגדיר העתקה ליניארית T המעתיקה את $\mathcal{B}$ לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^n/\mathbb{R}^n$ ואז הגדרנו את המכפלה הפנימית ב-V ע"י המכפלה הסקלרית ב-$\mathbb{C}^n/\mathbb{R}^n$; במובן הזה המכפלה הסקלרית היא המכפלה הפנימית היחידה על מ"ו נ"ס (עד כדי איזומורפיזם).

♣ כל אופרטור על ממ"פ נ"ס הוא איזומטריה ליניארית מהמרחב לעצמו, יחד עם העובדה שאופרטור הזהות הוא אוניטרי נקבל שקבוצת האופרטורים האוניטריים על V, שתסומן ב-$\mathrm{O}(V)$, היא חבורה כאשר פעולת הכפל של החבורה היא ההרכבה.

מסקנה 3.5. כל מרחב מכפלה פנימית נ"ס V איזומטרי ל-$\mathbb{R}^n$ (כאשר $n := \dim V$) עם המכפלה הסקלרית.

3.2 אופרטורים אוניטריים

משפט. אם T הפיכה אז $T^{-1}=T^{*}$ וזוהי העתקה אוניטרית.

הגדרה 3.6. מטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ תקרא אוניטרית אם $A^{*}\cdot A=I_{n}=A\cdot A^{*}$, אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ נאמר גם ש-A אורתוגונלית.

♣ מטריצה אוניטרית מגדירה אופרטור אוניטרי על $\mathbb{F}^{n}$ ביחס מכפלה הסקלרית, לכל $v,w\in\mathbb{F}^{n}$ מתקיים:

$$\left\langle T_{A}\left(v\right)\mid T_{A}\left(w\right)\right\rangle =\left(A\cdot v\right)^{*}\cdot\left(A\cdot w\right)=v^{*}\cdot A^{*}\cdot A\cdot w=v^{*}\cdot I_{n}\cdot w=v^{*}\cdot w=\left\langle v\mid w\right\rangle$$

כאשר אנו משתמשים באיזומורפיזם בין $M_{1}\left(\mathbb{F}\right)$ ל-$\mathbb{F}$.
כמובן, כל זה עובד כל כך יפה מפני שכפל מטריצות הוגדר כך שכל כניסה במטריצה היא בעצם מכפלה סקלרית של שני וקטורים (מעל $\mathbb{C}$ יש צורך גם בהצמדה לפני כן).

♣ למעשה ניתן היה להסתפק בדרישה ש-$A^{*}\cdot A=I_{n}$ משום שאז $A^{*}=A^{-1}$ ולכן ודאי ש-$A\cdot A^{*}=I_{n}$.

♣ נשים לב מה קורה כאן: השוויון $A^{*}\cdot A=I_{n}$ אומר שלכל עמודה ב-A המכפלה הסקלרית שלה עם עצמה (כווקטור ב-$\mathbb{F}^{n}$) היא 1 והמכפלה הסקלרית שלה עם כל עמודה אחרת היא 0, כלומר העמודות של A מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^{n}$ ביחס למכפלה הסקלרית.

♣ נניח ש-V נ"ס, אופרטור $f:V\to V$ הוא אופרטור אוניטרי אם"ם לכל בסיס אורתונורמלי U המטריצה $\left[f\right]_{U}$ אוניטרית,
לסיכום: מטריצות אוניטריות הן מטריצות מייצגות של העתקות אוניטריות בבסיסים אורתונורמליים (איזה כיף לומר משפטים מבלבלים כאלה: "גנן גידל דגן בגן...", "שרה שרה שיר שמח...").
הסיבה לכך היא כפי שראינו לעיל: לייצג את f בבסיס אורתונורמלי שקול להעתקת וקטורי הבסיס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^{n}$.

הגדרה 3.7. לכסון בבסיס אורתונורמלי
נניח ש-V נ"ס ויהי $f:V\to V$ אופרטור.

- נאמר ש-f לכסין בבסיס אורתונורמלי אם קיים בסיס אורתונורמלי U של V כך ש-$\left[f\right]_{U}$ אלכסונית,
אם V אוקלידי ($\mathbb{F}=\mathbb{R}$) נאמר גם ש-f לכסין אורתוגונלית ואם V הרמיטי ($\mathbb{F}=\mathbb{C}$) נאמר גם ש-f לכסין אוניטרית.
- נאמר שמטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ לכסינה אורתוגונלית אם קיימת מטריצה אורתוגונלית $O\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ כך ש-$O^{-1}AO$ היא מטריצה אלכסונית (כלומר האופרטור T_{A} לכסין אורתוגונלית).
- נאמר שמטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה אוניטרית $U\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ כך ש-$U^{-1}AU$ היא מטריצה אלכסונית (כלומר האופרטור T_{A} לכסין אוניטרית).

♣ כלומר f לכסין בבסיס אורתונורמלי אם"ם קיים בסיס אורתונורמלי שכל איבריו הם וקטורים עצמיים של f.

♣ בלכסון רגיל אחרי שמצאנו את הבסיס המלכסן היינו יכולים לשים את הבסיס בעמודות מטריצה P ולקבל שמתקיים $P^{-1}AP=D$ (כאשר D היא הצורה האלכסונית של A), אבל איזו מטריצה היא P^{-1}? - זו שאלה חשובה, כפי שראינו בחלק שעסק באופרטורים התשובה לה מאפשר לנו להעלות מטריצות לכסינות בחזקות באופן מהיר מאד, מתקיים:

$$A^{n}=\left(P^{-1}DP\right)\left(P^{-1}DP\right)\ldots\left(P^{-1}DP\right)=P^{-1}D^{n}P$$

ולהעלות מטריצה אלכסונית בחזקה זה פשוט מאד - מעלים את הערכים שעל האלכסון הראשי באותה חזקה.
כדי למצוא את P^{-1} היינו צריכים לדרג את P - זה אמנם אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי[12] אבל לא כ"כ כיף לביצוע באופן ידני, היופי בלכסון אורתוגונלי/אוניטרי הוא שאם מצאנו בדרך פלא בסיס מלכסן (אנחנו נראה בקובץ הטענות דרך פלא כזו) אז מתקיים $P^{-1}=P^{*}$, והצמדת מטריצה היא פעולה פשוטה מאד.

[12] $O\left(n^{3}\right)$ אם לדייק - ראו כאן.

4 אופרטורים נורמליים ואופרטורים הרמיטיים

♣ בקובץ הטענות ראינו בפרק הקודם שאופרטור אורתוגונלי אינו לכסין בהכרח מפני שבמקרים מסוימים יש לו תתי-מרחבים שמורים שעליהם הוא פועל כאופרטור סיבוב, לעומתו ראינו שם שכל אופרטור אוניטרי מעל המרוכבים דווקא לכסין תמיד. הסיבה להבדל הזה היא שבעוד שבממשיים אי אפשר לתאר סיבוב ככפל בסקלר הרי שבמרוכבים כל כפל בסקלר הוא סיבוב ומתיחה של המרחב, בואו נתבונן בזה מקרוב.

כשהגדרנו את המרוכבים אמרנו ש-$\mathbb{C}$ הוא $\mathbb{R}^2$ עם פעולת החיבור הווקטורי שלו שעליו אנו מגדירים פעולת כפל חדשה:

$$\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := (c+is)(x+iy) = (cx+sy) + i\cdot(sx+cy) = \begin{bmatrix} cx-sy \\ sx+cy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

כלומר כל פונקציית כפל בקבוע $z \in \mathbb{C}$[13] שקולה כפל במטריצת הסיבוב והמתיחה $r \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ כאשר $z = r\cdot\text{cis}\theta$, עם קצת עבודה נוספת ניתן להראות שהשקילות הנ"ל מגדירה איזומורפיזם מ-$\mathbb{C}$ לקבוצת מטריצות הסיבוב והמתיחה על $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ r\cdot\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \;\middle|\; 0 \le r \in \mathbb{R},\quad \theta \in [0,2\pi) \right\}$$

בשדה המרוכבים יש לנו שלוש קבוצות מיוחדות: הממשיים הטהורים, המדומים הטהורים ומעגל היחידה מרוכב, איך זה מתבטא במטריצת הסיבוב שלהם?

יהי $z \in \mathbb{C}$ ויהיו $0 \le r \in \mathbb{R}$ ו-$\theta \in [0,2\pi)$ כך ש-$z = r\cdot\text{cis}\theta$,

- אם z הוא ממשי טהור אז $\theta = 0$ או ש-$\theta = \pi$ ולכן המטריצה המתאימה היא:

$$\begin{bmatrix} \pm r & 0 \\ 0 & \pm r \end{bmatrix}$$

  נשים לב לכך שכל מטריצות הסיבוב הסימטריות מוכרחות להיות מהצורה הזו.

- אם z הוא מדומה טהור אז $\theta = \frac{\pi}{2}$ או ש-$\theta = \frac{3\pi}{2}$ ולכן המטריצה מתאימה היא:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mp r \\ \pm r & 0 \end{bmatrix}$$

  נשים לב לכך שכל מטריצות הסיבוב האנטי-סימטריות מוכרחות להיות מהצורה הזו.

- אם z נמצא על מעגל היחידה המרוכב אז $r = 1$ ולכן המטריצה המתאימה היא:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

  נשים לב לכך שאלו כל מטריצות הסיבוב שאינן מבצעות מתיחה ובכך הן שומרות על הערך המוחלט של המספר המרוכב ועל הזוויות שלו ביחס למספרים מרוכבים אחרים.
  אחד הדברים שמייחדים את מעגל היחידה המרוכב משאר המישור הוא שלכל איבר במעגל היחידה ההופכי שלו הוא גם הצמוד שלו, כעת הדמיון לעולם האופרטורים זועק לשמיים: לא רק שכבר ראינו שכל מטריצה כזו היא אופרטור אוניטרי על $\mathbb{R}^2$ אלא גם ההופכית שלה היא בדיוק המטריצה המתאימה לצמוד המרוכב ממש כמו שעבור אופרטור אוניטרי ההופכי שלו הוא האופרטור הצמוד.

האם גם לשתי הקבוצות הראשונות מקבילות לסוג מסוים של אופרטורים?

[13] יהי $z \in \mathbb{C}$ ותהא $f_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f_z(w) := z \cdot w$ לכל $w \in \mathbb{C}$.

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל לשדה $\mathbb{F}$.

הגדרה 4.1. אופרטורים ומטריצות הרמיטיים

- אופרטור $f:V\to V$ יקרא אופרטור הרמיטי או צמוד לעצמו אם $f^{*}=f$ (אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ נאמר גם ש-f סימטרי).
- מטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ תקרא מטריצה הרמיטית או צמודה לעצמה אם $A^{*}=A$ (אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז $A=A^{*}=A^{t}$ וכבר קראנו למטריצה כזו סימטרית).

♣ נניח ש-V נ"ס ויהי $f:V\to V$ אופרטור, f הוא אופרטור הרמיטי / צמוד לעצמו אם"ם לכל בסיס U אורתונורמלי המטריצה $\left[f\right]_{U}$ הרמיטית / צמודה לעצמה.

♣ אופרטורים הרמיטיים הם סוג האופרטורים המקביל לממשיים טהורים - לכל מספר ממשי מתקיים $\overline{z}=z$.

משפט 4.2. אופרטורים ומטריצות אנטי-הרמיטיים

- אופרטור $f:V\to V$ יקרא אופרטור אנטי-הרמיטי אם $f^{*}=-f$ (אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ נאמר גם ש-f אנטי-סימטרי).
- מטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ תקרא מטריצה אנטי-הרמיטית אם $A^{*}=-A$ (אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז $-A=A^{*}=A^{t}$ וכבר קראנו למטריצה כזו אנטי-סימטרית).

♣ נניח ש-V נ"ס ויהי $f:V\to V$ אופרטור, f הוא אופרטור אנטי-הרמיטי אם"ם לכל בסיס U אורתונורמלי המטריצה $\left[f\right]_{U}$ אנטי-הרמיטית.

♣ אופרטורים אנטי-הרמיטיים הם סוג האופרטורים המקביל למדומים טהורים - לכל מספר מדומה $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $\overline{z}=-z$.

♣ כמו ש-$\text{Re}\left(z\right)=\frac{z+\overline{z}}{2}$ ו-$\text{Im}\left(z\right)=\frac{z-\overline{z}}{2}$ לכל $z\in\mathbb{C}$ כך גם $\frac{f+f^{*}}{2}$ הוא אופרטור הרמיטי ו-$\frac{f-f^{*}}{2}$ הוא אופרטור אנטי-הרמיטי לכל $f\in\text{End}\left(V\right)$, ובנוסף בשני המקרים מתקיים:

$$z=\frac{z+\overline{z}}{2}+\frac{z-\overline{z}}{2}$$
$$f=\frac{f+f^{*}}{2}+\frac{f-f^{*}}{2}$$

כלומר כמו שניתן להציג כל מספר מרוכב כסכום של ממשי ומדומה כך ניתן להציג כל אופרטור כסכום של הרמיטי ואנטי-הרמיטי.

הגדרה 4.3. אופרטורים ומטריצות נורמליים

- אופרטור $f:V\to V$ יקרא אופרטור נורמלי אם $f\circ f^{*}=f^{*}\circ f$.
- מטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ תקרא מטריצה נורמלית אם $A\cdot A^{*}=A^{*}\cdot A$.

♣ נניח ש-V נ"ס ויהי $f:V\to V$ אופרטור, f הוא אופרטור נורמלי אם"ם לכל בסיס U אורתונורמלי המטריצה $\left[f\right]_{U}$ נורמלית.

♣ אופרטורים אוניטריים, הרמיטיים ואנטי-הרמיטיים הם בפרט אופרטורים נורמליים.

האם גם לאופרטורים הנורמליים יש קבוצה מקבילה במרוכבים???

5 רשימות לזיכרון

♣ בקובץ זה הגדרנו אובייקטים מתמטיים רבים ונתנו להם שמות דומים למדי ופעמים שאלו שמות מטעים, כמו כן בניגוד לרבים מן השמות שאנו נפגשים בהם בקורסי מתמטיקה כאן לא כל כך ברור מהי הסיבה הלשונית לשם זה, בפרק זה נסדר קצת את כל השמות ונסביר מה עומד מאחוריהם. תודה לאיתמר סלהוב שהאיר את עיניי בראותו לי את הצורך בפרק זה.

מכפלה סקלרית

- מקור לשוני: בניגוד לכל פעולה על וקטורים שראינו עד כה פעולה זו מחזירה סקלר.
- אוריינטציה:
  - המספרים הממשיים (גאומטריה אוקלידית)
  - המספרים המרוכבים
- משמעות פורמלית:
  - מעל הממשיים

$$x \cdot y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} := x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta$$

* מעל המרוכבים

$$x \cdot y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} := \overline{x_1} \cdot y_1 + \overline{x_2} \cdot y_2 + \ldots + \overline{x_n} \cdot y_n$$

- הערה: ראינו שעל ממ"פ נ"ס זוהי המכפלה הפנימית היחידה עד כדי איזומורפיזם.

מכפלה פנימית

- מקור לשוני: בניגוד לכל פעולת כפל שנעשתה עד כה על וקטורים (כפל בסקלר וכפל מטריצה בווקטור) פעולה זו היא פנימית למרחב - היא נעשית בין שני וקטורים.
- אוריינטציה:
  - אורך
  - זווית
- משמעות פורמלית:
  פעולה דו-מקומית על שני וקטורים המקיימת שלוש תכונות:
  - בי-ליניאריות (מעל הממשיים) או ליניאריות למחצה (מעל המרוכבים)
  - סימטריה (מעל הממשיים) או סימטריה הרמיטית (מעל המרוכבים)
  - חיוביות בהחלט
- הערה: מכפלה פנימית היא הכללה של המכפלה הסקלרית ובממ"פ נ"ס היא תמיד איזומורפית אליה.

נורמה

- מקור לשוני: **צריך לבדוק, מה הקשר בין נורמלי שפירושו עומד בתקן / רגיל לנורמל שהוא שפירושו אנך ומה הקשר של כל זה למדידת אורך???**
- אוריינטציה:
  - אורך
  - מרחק
- משמעות פורמלית:
  - האורך (נורמה של וקטור) הוא השורש של המכפלה הפנימית של וקטור עם עצמו ($\|v\| := \sqrt{\langle v \mid v\rangle}$).
  - המרחק בין שני וקטורים הוא האורך של וקטור ההפרש ביניהם
- הערה: הנורמה הוגדרה דווקא כך בגלל משפט פיתגורס והמכפלה הסקלרית ב-$\mathbb{R}^3$.

ניצב

- <u>מקור לשוני:</u> עברית פשוטה, עבור המכפלה הסקלרית ב-$\mathbb{R}^3$ לניצבות יש את אותה משמעות שיש לה בגאומטריה.
- <u>אוריינטציה:</u>
  - וקטורים
  - קבוצות של וקטורים
  - תתי-מרחבים וקטוריים
- <u>משמעות פורמלית:</u>
  - המכפלה הפנימית של וקטורים ניצבים היא 0.
  - מרחב ניצב לקבוצה (ובפרט לתמ"ו) הוא המרחב שמכיל את כל הווקטורים הניצבים לכל הווקטורים בקבוצה.
  - תמ"ו והתמ"ו הניצב לו מהווים סכום ישר בממ"פ נ"ס.
- <u>הערה:</u> ניצבות של וקטורים הוגדרה דווקא כך מפני שזה המצב במכפלה הסקלרית, המכפלה הסקלרית של שני וקטורים ניצבים (גאומטרית) היא 0.

אורתוגונלי

- <u>מקור לשוני:</u> אנגלית (orthogonal), "ortho" היא תחילית שמשמעויותיה הן אנכי, ניצב, ישר, נכון (webster); ו-"gon" היא "noun combining form"[14] שמקורה במילה היוונית לזווית (webster).
- <u>אוריינטציה:</u>
  - וקטורים
  - העתקות ליניאריות
  - מטריצות
  - המספרים הממשיים
- <u>משמעות פורמלית:</u>
  - קבוצה/סדרה אורתוגונלית היא קבוצה/סדרה שבה כל זוג וקטורים שונים ניצבים זה לזה.
  - העתקה אורתוגונלית היא העתקה ליניארית מעל הממשיים השומרת על המכפלה הפנימית - $\langle T(v_1) \mid T(v_2)\rangle_W = \langle v_1 \mid v_2\rangle_V$.
  - מטריצה אורתוגונלית היא מטריצה שהכפל בה מגדיר העתקה אורתוגונלית על $\mathbb{R}^n$ ביחס למכפלה הסקלרית.
- <u>הערה:</u> העתקה אורתוגונלית מעתיקה קבוצות/סדרות אורתונורמליות לקבוצות/סדרות אורתונורמליות, העתקה לינארית שידוע עליה רק שהיא מעתיקה קבוצות/סדרות אורתוגונליות לקבוצות/סדרות אורתוגונליות אינה בהכרח העתקה אורתוגונלית!

---

[14] **איך אומרים את זה בעברית?**

אורתונורמלי

- מקור לשוני: אנגלית (orthonormal), "ortho" היא תחילית שמשמעויותיה הן אנכי, ניצב, ישר, נכון (webster); ו-"normal" הוא עומד בתקן או אנך - שניהם מתאימים לנו כאן מפני שאנו רוצים וקטורי באורך 1 המאונכים זה לזה.
- אוריינטציה:
  - וקטורים ניצבים
  - וקטורי יחידה
- משמעות פורמלית: קבוצה/סדרה אורתונורמלית היא קבוצה/סדרה שכל איבריה הם וקטורי יחידה (הנורמה שלהם היא 1) שכולם ניצבים זה לזה.
- הערה: העתקה המעתיקה קבוצות/סדרות אורתונורמליות נקראת אוניטרית ומעל הממשיים גם אורתוגונלית.

צמוד

- מקור לשוני: התואר "צמוד" ניתן לצמד אובייקטים מתמטיים המקיימים תכונות מסוימות באופן הדדי, הפעם הראשונה שבה אנו נפגשים בתואר זה הוא בצמוד המרוכב אך כפי שראינו ישנם צמדים נוספים.
- אוריינטציה:
  - העתקות ליניאריות
  - מטריצות
  - המספרים המרוכבים
- משמעות פורמלית:
  - ההעתקה הצמודה של העתקה $T:V\to W$ היא ההעתקה $T^*:W^*\to V^*$ המוגדרת ע"י $T^*(f)=f\circ T$ לכל $f\in W^*$.
    מעל ממ"פ כל $v\in V$ וכל $w\in W$ מגדירים פונקציות ע"י המכפלה הפנימית - $l_v(\cdot):=\langle v\mid\cdot\rangle_V$ ו-$l_w(\cdot):=\langle w\mid\cdot\rangle_W$, וכל האיברים ב-$V^*$ וב-W^* הם מצורה זו; מה ש-T^* עושה במקרה כזה הוא:
    $$\langle T^*(w)\mid\cdot\rangle_V=T^*(\langle w\mid\cdot\rangle_W)=T^*(l_w)=l_w\circ T=\langle w\mid T(\cdot)\rangle_W=\overline{\langle T(\cdot)\mid w\rangle_W}$$
  - המטריצה הצמודה מוגדרת ע"י $[A^*]_{ij}=\overline{[A^t]_{ij}}=\overline{[A]_{ji}}$.
  - הצמוד המרוכב של מספר $x+iy=r\cdot\text{cis}(\theta)$ הוא $x-iy=r\cdot\text{cis}(-\theta)$.

אוקלידי

- מקור לשוני: אוקלידס, מתמטיקאי יווני הנחשב לאבי הגאומטריה, כתב את הספר "יסודות" שעוסק בגאומטריה האינטואיטיבית לכולנו אך נכתב בצורה אקסיומטית; בתחילת המאה ה-19 הבינו המתמטיקאים שאין כל הכרח לקבל את כל האקסיומות של אוקלידס וכך נתגלו גאומטריות נוספות, לפיכך הגאומטריה האינטואיטיבית נקראת גאומטריה אוקלידית ואילו גאומטריות אחרות נקראות גאומטריות לא אוקלידיות.
- אוריינטציה: המספרים הממשיים.
- משמעות פורמלית: מרחב אוקלידי הוא ממ"פ נ"ס מעל הממשיים.
- הערה: מרחבים אוקלידיים איזומטריים ל-$\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלרית ושם עובדת אותה גאומטריה אוקלידית של $\mathbb{R}^3$.

אוניטרי

- מקור לשוני: אנגלית (unitary), מלשון unit - יחידה (כמו וקטור יחידה).
- אוריינטציה:
  - מרחבים וקטוריים
  - העתקות ליניאריות
  - המספרים המרוכבים
- משמעות פורמלית:
  - מרחב אוניטרי הוא ממ"פ נ"ס מעל המרוכבים.
  - העתקה אוניטרית היא העתקה ליניארית השומרת על המכפלה הפנימית - $\langle T(v_1) \mid T(v_2)\rangle_W = \langle v_1 \mid v_2\rangle_V$, מכיוון שלהעתקה כזו מעל הממשיים קוראים "אורתוגונלית" לניסוח "העתקה אוניטרית" יש אוריינטציה למספרים המרוכבים.
- הערה: מרחבים אוניטריים איזומטריים ל-$\mathbb{C}^n$ עם המכפלה הסקלרית.

הרמיטי

- מקור לשוני: שארל הרמיט - מתמטיקאי צרפתי שעל שמו נקראת תכונות הסימטריה ההרמיטית (סימטריה ביחס להצמדה).
- אוריינטציה:
  - מרחבים וקטוריים
  - אופרטורים
  - המספרים המרוכבים
- משמעות פורמלית:
  - מרחב הרמיטי הוא ממ"פ נ"ס מעל המרוכבים.
  - אופרטור על ממ"פ נקרא הרמיטי אם הוא שווה לצמוד שלו, מכיוון שלאופרטור כזה מעל הממשיים קוראים "סימטרי" לניסוח "אופרטור הרמיטי" יש אוריינטציה למספרים המרוכבים.
  - אופרטור על ממ"פ נקרא אנטי-הרמיטי אם הוא נגדי לצמוד שלו, מכיוון שלאופרטור כזה מעל הממשיים קוראים "אנטי-סימטרי" לניסוח "אופרטור אנטי-הרמיטי" יש אוריינטציה למספרים המרוכבים.

נורמלי

- מקור לשוני: **צריך לבדוק, האם זה קשור לכך שאופרטורים נורמליים מקיימים** $\langle f(v) \mid f(w)\rangle = \langle f^*(v) \mid f^*(w)\rangle$ **ובכך "שומרים" על הנורמה?**
- אוריינטציה: אופרטורים.
- משמעות פורמלית: אופרטור על ממ"פ נקרא נורמלי אם הוא מתחלף עם הצמוד שלו.