טורים - הוכחות נבחרות

חשבון אינפיניטסימלי (2) - 80132

מרצה: יורם לסט

מתרגלים: דניאל אופנר ומתן בן-אשר

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

הפרק העוסק בגבול עליון ובגבול תחתון הועבר לסיכומים של סדרות (אינפי' 1).

* * *

תודתי נתונה ל**מסכם אלמוני** על הסיכום שכתב בשנת הלימודים תשפ"א,
נעזרתי בו רבות על מנת לכתוב את הסיכום שלפניכם.
אשמח מאד לדעת מי הוא אותו מסכם אלמוני כדי שאוכל לציין זאת כאן.

* * *

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

משפט 1.1. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אי-שלילית, מתקיים:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

כלומר הטור מתכנס וסכומו שווה לסכום האינסופי של איברי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

הוכחה. נסמן ב-D את קבוצת הסכומים החלקיים של איברי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
תהא $(b_N)_{N=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י $b_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$, מהגדרה זו נובע ש-$(b_N)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלרע ומכאן שיש לה גבול במובן הרחב (כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ קיים).
יהי $d_0 \in D$, d_0 כזה הוא סכום סופי של איברים מ-$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ולכן יש בו איבר מהסדרה שהאינדקס שלו הוא הגדול ביותר, נסמן את האינדקס הזה ב-N_0 ומכאן ש-$b_{N_0} = \sum_{n=1}^{N_0} \geq d$.
כעת, אם $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \infty$ אז היות שלכל $d \in D$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש-$b_N \geq d$ ובנוסף $(b_N)_{N=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית עולה מוכרח להתקיים גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
במקרה שבו $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ סופי נשים לב ש-$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ הוא חסם מלעיל של $(b_N)_{n=1}^{\infty}$ שהרי לכל $N \in \mathbb{N}$ מתקיים $b_N \in D$ (ומהגדרה $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup D$).
מהאפיון הנוסף של הסופרמום נובע שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $d_1 \in D$ כך ש-$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n - \frac{1}{\varepsilon} < d \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, d_1 כזה הוא סכום סופי של איברים מ-$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ולכן יש בו איבר מהסדרה שהאינדקס שלו הוא הגדול ביותר, נסמן את האינדקס הזה ב-N_1 ומכאן ש-$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \geq b_{N_1} = \sum_{n=1}^{N_1} \geq d > \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n - \frac{1}{\varepsilon}$, מהיות $(b_N)_{N=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה נובע שהנ"ל מתקיים גם לכל האיברים הבאים בסדרה $(b_N)_{N=1}^{\infty}$ ומכאן ש-$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

מסקנה 1.2. לכל סדרה אי-שלילית $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו תלוי בסדר האיברים בסדרה.

משפט 1.3. תנאי קושי להתכנסות טורים
תנאי הכרחי ומספיק לכך שטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ יתכנס הוא שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ ולכל $K \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_n\right| < \varepsilon$$

♣ זהו מקרה פרטי של תנאי קושי להתכנסות סדרות אותו למדנו בקורס הקודם (נזכור שההגדרה של טור היא **גבול** של סדרת הסכומים החלקיים).

טענה 1.4. יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים ויהי $c \in \mathbb{R}$.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

♣ הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ יכולים להתכנס גם אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ אינם מתכנסים; למעשה, ע"פ סעיף 1 אם שניים מארבעת הטורים הללו מתכנסים אז גם שני האחרים מתכנסים.

♣ מסעיף 2 נובע שאם $c \neq 0$ אז התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$ גוררת את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

משפט 1.5. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה, אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

טענה 1.6. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס למספר $S \in \mathbb{R}$ אז $r_m = S - \sum_{n=1}^{m} a_n$, ואם קיים $m \in \mathbb{N}$ כך שה-m-זנב של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ל-S אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S + \sum_{n=1}^{m} a_n$.

מסקנה 1.7. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור.

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם לכל $m \in \mathbb{N}$ ה-m-זנב שלו מתכנס.
2. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי $\lim_{m\to\infty} r_m = 0$.
3. שינוי, הוספה או גריעה של מספר סופי מאיברי הטור אינה משנה את עצם ההתכנסות/התבדרות שלו.

טענה 1.8. יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים ויהי $c \in \mathbb{R}$.

1. אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq 0$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq 0$.
2. אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq b_n$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

♣ סעיף 2 אינו נכון אם $a_n \leq b_n$ רק ממקום מסוים ואילך, לדוגמה נגיד שלכל $100 \geq n \in \mathbb{N}$ $a_n = 100$ ואילו $b_n = 0$ ואח"כ לכל $100 < n \in \mathbb{N}$ $a_n = 2^{-n}$ ואילו $b_n = 2^{-(n-1)}$...

2 טורים חיוביים

משפט 2.1. מבחן ההשוואה

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים, אם קיימים $0 < c \in \mathbb{R}$ ו-$N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq c \cdot b_n$ אז:

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר (שואף ל-∞) אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר[1].

מסקנה 2.2. יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים, אם קיימים $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ כך שהחל ממקום מסוים ואילך מתקיים $0 < \alpha \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \beta$ אז הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד[2].

מסקנה 2.3. מבחן ההשוואה הגבולי

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים, אם הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ קיים וגדול מ-0 אז הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד (=אם אחד מהם מתכנס/מתבדר גם רעהו מתכנס/מתבדר).

משפט 2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים, אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ אז:

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר (שואף ל-∞) אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר (שואף ל-∞)[3].

♣ המשפט הזה בעצם מפרמל את האינטואיציה שלנו לגבי הקשר בין קצב בשאיפה לאפס של האיבר הכללי לבין התכנסות הטור.

[1] למעשה סעיף זה שקול לסעיף הראשון.
[2] כלומר אם אחד מהם מתכנס/מתבדר גם רעהו מתכנס/מתבדר.
[3] ושוב, סעיף זה שקול לסעיף הראשון.

הוכחה. מההנחה לכל $1 < K \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\frac{a_{N+K}}{a_{N+1}} = \prod_{n=N+1}^{N+K} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \prod_{n=N+1}^{N+K} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_{N+K}}{b_{N+1}}$$

ומכאן שגם:

$$a_{N+K} \leq \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} \cdot b_{N+K}$$

ממבחן ההשוואה לטורים חיוביים נקבל את סעיף 1 של המשפט (עד כדי הכפלה בקבוע $\frac{a_{N+1}}{b_{N+1}}$) וסעיף 2 שקול לו. ■

משפט 2.5. מבחן השורש של קושי
יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי.

1. אם קיימים $q \in (0,1)$ ו-$N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. אם עבור אינסוף ערכים של n מתקיים $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

♣ הסעיף השני הוא טריוויאלי, הוא אומר שישנם אינסוף ערכים של $n \in \mathbb{N}$ עבורם $a_n \geq 1$...

הוכחה. כדי להוכיח זאת די לשים לב לכך ש-$\sqrt[n]{a_n} \leq q$ גורר $a_n \leq q^n$, להיזכר ש-$|q| < 1$ גורר ש-$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ ולהפעיל את מבחן ההשוואה. ■

מסקנה 2.6. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי.

1. אם $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. אם $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

♣ סעיף 1 במסקנה שקול לסעיף 1 במשפט אף בסעיף 2 הדבר אינו נכון.

משפט 2.7. מבחן המנה של ד'אלמבר[4]
יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי כך ש-$a_n > 0$ ממקום מסוים ואילך.

1. אם קיים $q \in (0,1)$ כך שמתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ ממקום מסוים ואילך אז הטור מתכנס.
2. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ממקום מסוים ואילך אז הטור מתבדר.

♣ מבחן השורש של קושי חזק יותר ממבחן המנה של ד'אלמבר שכן אם קיימים $N \in \mathbb{N}$ ו-$q \in (0,1)$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ אז עבור אותו N מתקיים גם $a_n \leq a_{N+1} \cdot q^n$ לכל $N+1 < n \in \mathbb{N}$ ומכאן ש-$\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_{N+1}} \cdot q$ ולכן:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{a_{N+1}} \cdot q\right) = q \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{N+1}} = q \cdot 1 = q < 1$$

הוכחה. גם כאן המשפט נובע ישירות מהשוואה לטור הנדסי. ■

[4] ערך בוויקיפדיה: ז'אן לה רון ד'אלמבר.

מסקנה 2.8. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי ממש.

1. אם $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

2. אם $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

♣ גם כאן סעיף 1 במסקנה שקול לסעיף 1 במשפט אף בסעיף 2 הדבר אינו נכון.

דוגמה 2.9. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ מתכנס אם $\beta > 1$ ומתבדר אם $\beta \le 1$.

הוכחה. הטור מתבדר אם $\beta \le 1$ מכיוון שאז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\frac{1}{n^\beta} \ge \frac{1}{n}$, לכן נתמקד במקרים שבהם $1 < \beta$.
לכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2^m-1} \frac{1}{n^\beta} &= 1 + \left(\frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\beta}\right) + \left(\frac{1}{4^\beta} + \frac{1}{5^\beta} + \frac{1}{6^\beta} + \frac{1}{7^\beta}\right) + \ldots + \sum_{n=2^{m-1}}^{2^m-1} \frac{1}{n^\beta} \\
&< 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^\beta} + 4 \cdot \frac{1}{4^\beta} + \ldots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{\left(2^{m-1}\right)^\beta} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{\beta-1}} + \frac{1}{4^{\beta-1}} + \ldots + \frac{1}{\left(2^{m-1}\right)^{\beta-1}} \\
&= 1 + 2^{1-\beta} + 4^{1-\beta} + \ldots + \left(2^{m-1}\right)^{1-\beta} \\
&= \left(2^{1-\beta}\right)^0 + \left(2^{1-\beta}\right)^1 + \left(2^{1-\beta}\right)^2 + \ldots + \left(2^{1-\beta}\right)^{m-1} = \sum_{n=0}^{m-1} \left(2^{1-\beta}\right)^n
\end{aligned}$$

כעת נזכר ש-$\beta > 1$ וא"כ $1 - \beta < 0$ וממילא $2^{1-\beta} < 1$, כלומר $\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{1-\beta}\right)^n$ הוא טור מתכנס (מדובר בסכומים חלקיים של סדרה הנדסית המתכנסת ל-0).
מכאן שלסדרת הסכומים החלקיים של $\left(\frac{1}{n^\beta}\right)_{n=1}^{\infty}$ יש תת-סדרה חסומה מלעיל ומכיוון שסדרת הסכומים החלקיים היא סדרה מונוטונית עולה הדבר גורר שגם היא עצמה חסומה מלעיל[5]. ■

משפט 2.10. מבחן ראבה (Raabe)[6]

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי ממש ותהא $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י (לכל $n \in \mathbb{N}$):

$$r_n := n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

1. אם מתקיים $r_n \le 1$ ממקום מסוים ואילך אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

2. אם מתקיים $r_n > 1$ ממקום מסוים ואילך אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

♣ אופנר הציג את המשפט קצת אחרת: את הדרישה בסעיף 2 החליפה הדרישה ש-$\liminf\limits_{n\to\infty} r_n > 1$ (אלו דרישות שקולות) ואת הדרישה בסעיף 2 החליפה הדרישה ש-$\limsup\limits_{n\to\infty} r_n < 1$ (דרישה זו נובעת מהדרישה שלעיל).

♣ מבחן ראבה הוא שכלול של מבחן המנה של ד'אלמבר: הוא יצליח בכל מקום שבו מבחן המנה מצליח[7] אך הוא עשוי להצליח גם במקרים נוספים.

---

[5] יהי M חסם מלעיל של תת-הסדרה, לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $n < N \in \mathbb{N}$ כך ש-a_N הוא איבר בתת הסדרה ומתקיים $a_n \le a_N \le M$.

[6] ערך בוויקיפדיה האנגלית: Joseph Ludwig Raabe.

[7] אם קיים $q \in (0,1)$ כך ש-$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ ממקום מסוים ואילך אז מכיוון ש-$\lim_{n\to\infty} n \cdot (1-q) = \infty$ נקבל ממשפט הפרוסה שגם $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ ובפרט $r_n > 1$ ממקום מסוים ואילך, ואם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ ממקום מסוים ואילך אז $1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \le 0$ מאותו מקום ואילך ולכן גם $r_n \le 0$ עבור n גדול דיו.

הוכחה. ראשית נשים לב לכך שאם מתקיים $r_n \leq 1$ ממקום מסוים ואילך אז קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 0$$

כלומר מתקיים $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ממקום מסוים ואילך ולכן ע"פ מבחן המנה של ד'אלמבר $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתבדר. ■

א"כ הוכחנו את הסעיף הראשון, כעת נניח שמתקיים $r_n > 1$ ממקום מסוים ואילך ונביא שתי הוכחות עבור הסעיף השני.

הוכחה. <u>הוכחה 1 - משתמשת רק בידע שכבר נלמד</u>[8]
תהיינה $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י $b_n := n \cdot a_{n+1}$ לכל $n \in \mathbb{N}_0$ (א"כ $b_n \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}_0$) ו-$(c_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י $c_n := b_{n-1} - b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
א"כ לכל $N \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{N} c_n = \sum_{n=1}^{N} (b_{n-1} - b_n) = b_0 - b_N = 0 - b_N = -b_N$$

כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ והסדרה $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.
כעת נשים לב לכך שלכל $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\begin{aligned} c_{n+1} = b_n - b_{n+1} &= n \cdot a_{n+1} - (n+1) \cdot a_{n+2} = (n+1) \cdot a_{n+1} - (n+1) \cdot a_{n+2} - a_{n+1} \\ &= (n+1) \cdot (a_{n+1} - a_{n+2}) - a_{n+1} = a_{n+1} \cdot \left((n+1) \cdot \left(\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right) - \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}}\right) \\ &= a_{n+1} \cdot \left((n+1) \cdot \left(1 - \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

ומכאן שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\frac{c_n}{a_n} = n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1 = r_n - 1$$

אם מתקיים $r_n > 1$ ממקום מסוים ואילך אז מתקיים $c_n = b_n - b_{n+1} > 0$ ממקום מסוים ואילך, כלומר עבור $N \in \mathbb{N}$ גדול דיו הטור $\sum_{n=N}^{\infty} c_n$ הוא טור חיובי והסדרה $(b_n)_{n=N}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע ולכן מתכנסת. מכאן שגם $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסים ומתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} c_n = -\lim_{N \to \infty} b_N$$

מצד שני אם $r > 1$ אז מתקיים:

$$\frac{c_n}{a_n} = n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1 > 1$$

ממקום מסוים ואילך ולכן ממבחן ההשוואה נובע שהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ גוררת את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

[8] מצאתי אותה בספר "חשבון אינפיניסטימלי" של מיכאל הוכמן.

הוכחה. הוכחה 2 - משתמשת בידע על אינטגרלים[9]
נסמן:

$$r:=\liminf_{n\to\infty} r_n,\ \ \overline{r}=\frac{r+1}{2}$$

מההנחה נובע ש-$r>1$ ולכן $r>\overline{r}$, ומכאן שקיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N\le n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$n\cdot\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=r_n>\overline{r}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{\overline{r}}{n}$$
$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}<1-\frac{\overline{r}}{n}\le e^{-\frac{\overline{r}}{n}}$$

יהי N כנ"ל ומכאן שלכל $N\le n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$a_{n+1}=a_N\cdot\prod_{k=N}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k}<a_N\cdot\prod_{k=N}^{n}e^{-\frac{\overline{r}}{n}}=a_n\cdot e^{-\sum_{k=N}^{n}\frac{\overline{r}}{k}}=a_n\cdot e^{-\overline{r}\cdot\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k}}$$

לכל $N\le n\in\mathbb{N}$ מתקיים[10]:

$$\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k}\ge\ln(n+1)-\ln(N)$$

ולכן גם:

$$-\overline{r}\cdot\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k}\le-\overline{r}\cdot(\ln(n+1)-\ln(N))=\overline{r}\cdot\ln(N)-\overline{r}\cdot\ln(n+1)$$
$$=\ln\left(N^{\overline{r}}\right)-\ln\left((n+1)^{\overline{r}}\right)=\ln\left(\frac{N^{\overline{r}}}{(n+1)^{\overline{r}}}\right)$$

מכאן נובע שלכל $N\le n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$a_{n+1}\le a_N\cdot e^{-\overline{r}\cdot\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k}}\le a_N\cdot e^{\overline{r}\cdot\ln(N)-\overline{r}\cdot\ln(n+1)}=a_N\cdot\frac{N^{\overline{r}}}{(n+1)^{\overline{r}}}$$

והרי $\overline{r}>1$ ולכן ע"פ הדוגמה שלעיל (2.9) נובע ממבחן ההשוואה ש-$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. ■

[9] ניתנה ע"י דניאל אופנר באחד התרגולים.
[10] השטח מתחת לגרף של $\frac{1}{x}$ בין הנקודות N ו-$n+1$ הוא בדיוק $\ln(n+1)-\ln(N)$ (נראה זאת כשנלמד את הנוסחה היסודית של החשבון האינטגרלי), ואילו הסכום $\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k}$ מייצג את השטח מתחת לגרף של פונקציית המדרגות $\frac{1}{\lfloor x\rfloor}$ בין N ל-$n+1$; מהעובדה שלכל $0<x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\ge\frac{1}{x}$ נובע שהא"ש מתקיים גם בין השטחים. מבחינה פורמלית הנימוק הוא:

$$\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k}=\int_{N}^{n+1}\frac{1}{\lfloor x\rfloor}dx\ge\int_{N}^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1)-\ln(N)$$

משפט 2.11. מבחן העיבוי של קושי
תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ומונוטונית (יורדת) המתכנסת ל-0.
הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n \cdot a_{2^n})$ [11] מתכנס.

הוכחה. ראשית, מכיוון ש-$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חיובית מדובר בטורים חיוביים וככאלה הם גבולות של סדרות מונוטוניות עולות (של סכומים חלקיים).

- $\Leftarrow$
נניח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
מהיות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת וחיובית נובע שלכל $N \in \mathbb{N}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ המקיים $2^{N-1} \leq n < 2^N$ מתקיים $0 \leq a_{2^N} \leq a_n$.
מכאן שלכל $N \in \mathbb{N}$ מתקיים:
$$0 \leq 2^{N-1} \cdot a_{2^N} \leq \sum_{n=2^{N-1}}^{2^N-1} a_n$$
ומכאן שגם:
$$0 \leq 2^{N} \cdot a_{2^N} \leq \sum_{n=2^{N-1}}^{2^N-1} 2a_n$$
וממילא:
$$0 \leq \sum_{n=1}^{N}(2^n \cdot a_{2^n}) \leq \sum_{n=1}^{2^N-1} 2a_n \leq \sum_{n=1}^{2^N} 2a_n$$
מטענה 1.4 ומהיות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס נובע שגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n$ מתכנס, כלומר הסדרה $\left(\sum_{n=1}^{N} 2a_n\right)_{N=1}^{\infty}$ מתכנסת.
הסדרה $\left(\sum_{n=1}^{2^N} 2a_n\right)_{N=1}^{\infty}$ היא תת-סדרה של הסדרה $\left(\sum_{n=1}^{N} 2a_n\right)_{N=1}^{\infty}$ ולכן ממשפט הירושה היא מתכנסת וממילא גם חסומה.
מכאן שגם הסדרה $\left(\sum_{n=1}^{N}(2^n \cdot a_{2^n})\right)_{N=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה ומכיוון שהיא מונוטונית עולה הדבר גורר שהיא מתכנסת, כלומר הגבול $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(2^n \cdot a_{2^n})$ קיים והטור $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n \cdot a_{2^n})$ מתכנס.

- $\Rightarrow$
נניח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n \cdot a_{2^n})$ מתכנס.
מהיות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת וחיובית נובע שלכל $N \in \mathbb{N}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ המקיים $2^N \leq n < 2^{N+1}$ מתקיים: $0 \leq a_n \leq a_{2^N}$.
מכאן שלכל $N \in \mathbb{N}$ מתקיים:
$$0 \leq \sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1} a_n \leq 2^N \cdot a_{2^N}$$
ומכאן שגם:
$$0 \leq \sum_{n=2}^{2^{N+1}-1} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} 2^n \cdot a_{2^n}$$
מההנחה נובע שהסדרה $\left(\sum_{n=1}^{N}(2^n \cdot a_{2^n})\right)_{N=1}^{\infty}$ מתכנסת וממילא חסומה ומכאן שגם $\left(\sum_{n=2}^{2^{N+1}-1} a_n\right)_{N=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה.

[11] טור זה נקרה "הטור המעובה" של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ומכאן שם המשפט.

הסדרה $\left(\sum_{n=2}^{2^{N+1}-1} a_n\right)_{N=1}^{\infty}$ היא תת-סדרה של הסדרה $\left(\sum_{n=2}^{N} a_n\right)_{N=2}^{\infty}$ שכזכור היא סדרה מונוטונית עולה ולכן אם תת-סדרה שלה חסומה אז גם היא עצמה חסומה וממילא מתכנסת[12], כלומר הגבול $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=2}^{N} a_n$ קיים והטור $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ מתכנס; טור זה הוא ה-1-זנב של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ולכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

■

משפט 2.12. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית.

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם המכפלה $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ מתכנסת.
2. אם $a_n < 1$ לכל $n\in\mathbb{N}$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם המכפלה $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ מתכנסת.

הוכחה.

1. נשים לב שהן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ והן $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ הם גבולות של סדרות מונוטוניות עולות ולכן כל שעלינו להוכיח הוא שהסדרה של אחד חסומה אם"ם זו של רעהו חסומה.
מחוק הפילוג נובע ש לכל $N\in\mathbb{N}$ מתקיים:
$$1+\sum_{n=1}^{N} a_n \le \prod_{n=1}^{N}(1+a_n)$$
מצד שני הוכחנו בקורס הקודם שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $1+x\le\exp(x)$, א"כ לכל $N\in\mathbb{N}$ מתקיים:
$$\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)\le\exp\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)$$
והרי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חסום נובע שגם $\exp\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)$ חסומה ולכן קיבלנו חסם על המכפלה $\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)$.

2. נניח ש-$a_n<1$ לכל $n\in\mathbb{N}$, מכאן שסדרת המכפלות החלקיות של $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ היא סדרה חיובית מונוטונית יורדת ולכן מתכנסת;
א"כ המכפלה האינסופית עצמה מתכנסת אם"ם הגבול של סדרת המכפלות החלקיות שונה מ-0, וזה שקול לכך שהמכפלה האינסופית $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-a_n}$ מתכנסת.
תהא $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י (לכל $n\in\mathbb{N}$):
$$b_n:=\frac{a_n}{1-a_n}=\frac{a_n+1-a_n}{1-a_n}-1=\frac{1}{1-a_n}-1$$
$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חיובית ולכן מהסעיף הקודם נובע שהמכפלה $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ מתכנסת אם"ם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.
נשים לב לכך ש-$b_n\ge a_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן ממבחן ההשוואה אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, מצד שני, אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ולכן $a_n<\frac{1}{2}$ עבור n גדול דיו ומכאן שמתקיים גם $b_n\le 2a_n$ עבור n גדול דיו ושוב ממבחן ההשוואה נקבל שאם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
לסיכום קיבלנו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם המכפלה האינסופית $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ מתכנסת וזו שווה למפלה האינסופית $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-a_n}$ וכבר ראינו שהתכנסותה של האחרונה שקולה לכך שהמכפלה האינסופית $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ מתכנסת.

■

[12] ראו הערה 5 בהוכחה של דוגמה 2.9.

3 טורים בעלי סימנים משתנים

משפט 3.1. משפט לייבניץ

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית, מונוטונית יורדת ומתכנסת ל-0.

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}a_n\right)$ מתכנס.
2. $0\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}a_n\right)\leq a_1$.
3. ה-m זנב של הטור מקיים $|r_m|\leq a_{m+1}$ (כאשר $m\in\text{Odd}$ מתקיים $-a_{m+1}<r_m\leq 0$ וכאשר $m\in\text{Even}$ מתקיים $0\leq r_m<a_{m+1}$).

הוכחה. תהא $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ סדרת הסכומים החלקיים של הטור, כלומר הסדרה מוגדרת ע"י (לכל $N\in\mathbb{N}$):

$$\sum_{n=1}^{N}\left((-1)^{n+1}a_n\right)$$

לפני שנמשיך נשים לב שמהמונוטוניות של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ נובע כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n-a_{n+1}\geq 0$ ו-$-(a_n-a_{n+1})\leq 0$.

- לכל $N\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$S_{2(N+1)}-S_{2N}=\sum_{n=1}^{2N+2}\left((-1)^{n+1}a_n\right)-\sum_{n=1}^{2N}\left((-1)^{n+1}a_n\right)=a_{2N+1}-a_{2N+2}\geq 0$$

מכאן שתת-הסדרה $(S_{2N})_{N=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית עולה, מצד שני לכל $N\in\mathbb{N}$ מתקיים גם:

$$S_{2N}=\sum_{n=1}^{2N}\left((-1)^{n+1}a_n\right)=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-...-(a_{2N-2}-a_{2N-1})-a_{2N}\leq a_1$$

שהרי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n\geq a_{n+1}$ וא"כ $0\geq -a_n+a_{n+1}=-(a_n-a_{n+1})$ ומכאן שתת-הסדרה הנ"ל חסומה מלעיל ולכן היא סדרה מתכנסת, נסמן את גבולה ב-S.
לכל $N\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$S_{2N-1}+a_{2N}=\sum_{n=1}^{2N-1}\left((-1)^{n+1}a_n\right)+a_{2N}=\sum_{n=1}^{2N}\left((-1)^{n+1}a_n\right)=S_{2N}$$

מאריתמטיקה של גבולות נובע שמתקיים:

$$\lim_{N\to\infty}S_{2N-1}=\lim_{N\to\infty}S_{2N}+\lim_{N\to\infty}a_{2N}=S+0=S$$

כלומר תתי-הסדרות הנוצרות ע"י האינדקסים האי-זוגיים והזוגיים (בנפרד) מתכנסות לאותו גבול ולכן גם כל תת-סדרה של $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ תתכנס לגבול זה ומכאן שגם $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ עצמה מתכנסת אליו.

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}a_n\right)=\lim_{N\to\infty}S_N=S$$

כלומר הוכחנו את סעיף 1 במשפט.

- נשים לב כי לכל $N\in\mathbb{N}_0$ מתקיים (מאותו נימוק שלעיל):

$$S_{2N+1}=\sum_{n=1}^{2N+11}\left((-1)^{n+1}a_n\right)=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-...-(a_{2N}-a_{2N+1})\leq a_1$$

וגם:

$$S_{2N+1} = S_{2N} + a_{2N+1} \geq S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} \left((-1)^{n+1} a_n \right) = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2N-3} - a_{2N-2}) \geq 0$$

וא"כ לכל $N \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} \left((-1)^{n+1} a_n \right) \leq a_1$$

ומכאן שגם:

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} a_n \right) \leq a_1$$

ובכך הוכח הסעיף השני.

- כדי להוכיח את הסעיף השלישי יש לשים לכך שלכל $m \in \text{Even}$ מתקיים $m+1 \in \text{Odd}$ וא"כ ההוכחה שנתנו עבור הטור כולו תופסת גם במקרה זה; ולכל $m \in \text{Odd}$ מתקיים $m+1 \in \text{Even}$ ולכן יהיה צורך להכפיל את כל אי-השוויונות בהוכחה ב--1, כלומר להפוך את כיוונם.

■

מסקנה 3.2. לכל סדרה מונוטונית $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-0 הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \cdot a_n \right)$ מתכנס.

למה 3.3. הטרנספורמציה של אבל (Abel)[13]
יהיו $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m \in \mathbb{R}$ ולכל $m \geq k \in \mathbb{N}$ נגדיר $B_k := \sum_{i=1}^{k} \beta_i$; מתקיים השוויון הבא:

$$\sum_{i=1}^{m} (\alpha_i \cdot \beta_i) = \alpha_m \cdot B_m - \sum_{i=1}^{m-1} (B_i \cdot (\alpha_{i+1} - \alpha_i))$$

הוכחה. נגדיר $B_0 := \sum_{i=1}^{0} \beta_i = 0$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i \cdot \beta_i) &= \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i \cdot (B_i - B_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i \cdot B_i) - \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i \cdot B_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i \cdot B_i) - \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} \cdot B_i) \\
&= \alpha_m \cdot B_m - \alpha_1 \cdot B_0 + \sum_{i=1}^{m-1} (B_i \cdot (\alpha_i - \alpha_{i+1})) \\
&= \alpha_m \cdot B_m - \sum_{i=1}^{m-1} (B_i \cdot (\alpha_{i+1} - \alpha_i))
\end{aligned}$$

■

[13] ערך בוויקיפדיה: נילס הנריק אבל.

למה 3.4. נשתמש בסימוני הטרנספורמציה של אבל.
אם קיים $L \in \mathbb{R}$ כך שלכל $m \geq i \in \mathbb{N}$ מתקיים $|B_i| \leq L$, ובנוסף, הסדרה $(\alpha_i)_{i=1}^m$ היא סדרה מונוטונית אזי מתקיים הא"ש הבא:

$$\left|\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i \cdot \beta_i)\right| \leq L \cdot (2\,|\alpha_m| + |\alpha_1|)$$

הוכחה. מהיות $(\alpha_i)_{i=1}^m$ מונוטונית נובע שכל ההפרשים מהצורה $\alpha_{i+1}-\alpha_i$ (לכל $m-1 \geq i \in \mathbb{N}$) הם בעלי אותו סימן.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m-1}|\alpha_{i+1}-\alpha_i| = \left|\sum_{i=1}^{m-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\right| = |\alpha_m - \alpha_1|$$

מכאן, ע"פ הטרנספורמציה של אבל וא"ש המשולש, שמתקיים:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i \cdot \beta_i)\right| &= \left|\alpha_m \cdot B_m - \sum_{i=1}^{m-1}(B_i \cdot (\alpha_{i+1}-\alpha_i))\right| \\
&\leq |\alpha_m \cdot B_m| + \sum_{i=1}^{m-1}|B_i \cdot (\alpha_{i+1}-\alpha_i)| \\
&= |\alpha_m| \cdot |B_m| + \sum_{i=1}^{m-1}|B_i| \cdot |\alpha_{i+1}-\alpha_i| \\
&\leq |\alpha_m| \cdot L + \sum_{i=1}^{m-1} L \cdot |\alpha_{i+1}-\alpha_i| \\
&= L \cdot \left(|\alpha_m| + \sum_{i=1}^{m-1}|\alpha_{i+1}-\alpha_i|\right) \\
&= L \cdot (|\alpha_m| + |\alpha_m - \alpha_1|) \\
&\leq L \cdot (2\,|\alpha_m| + |\alpha_1|)
\end{aligned}$$

■

משפט 3.5. מבחן דיריכלה
יהא $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור חסום ותהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית המתכנסת ל-0, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$ מתכנס.

♣ מבחן דיריכלה הוא בעצם הכללה של משפט לייבניץ, שם $b_n = (-1)^{n+1}$.

הוכחה. תהא $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, מהנתון נובע שקיים $M \in \mathbb{R}$ כך ש-$|S_n| \leq M$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
יהי $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$, מהיות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0 נובע שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n| < \frac{\varepsilon}{6M}$ (יהי N כזה).
יהיו $N < m \in \mathbb{N}$ ו-$k \in \mathbb{N}$, לכל $k \geq l \in \mathbb{N}$ נגדיר:

$$B_l := \sum_{n=m+1}^{m+l} b_n = S_{m+l} - S_m$$

א"כ לכל $k \geq l \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$|B_l| \leq |S_{m+l}| + |S_m| \leq 2M$$

ומכאן, ע"פ הלמה האחרונה (3.4) ומהיות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית, שמתקיים:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+k} (a_n \cdot b_n)\right| \leq 2M \cdot (2\,|a_{m+k}| + |a_{m+1}|) < 2M \cdot \left(\frac{2\varepsilon}{6M} + \frac{\varepsilon}{6M}\right) = \varepsilon$$

מתנאי קושי נובע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$ מתכנס. ■

משפט 3.6. מבחן אבל (Abel)
יהא $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור מתכנס ותהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית וחסומה, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$ מתכנס.

הוכחה. הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא מונוטונית וחסומה ולכן היא מתכנסת, נגדיר $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ ומכאן ש-$(a_n - a)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית המתכנסת ל-0.
ממבחן דיריכלה נובע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} ((a_n - a) \cdot b_n)$ מתכנס; כעת נשים לב לכך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(a_n - a) \cdot b_n = a_n \cdot b_n - a \cdot b_n$, מכאן שע"פ טענה 1.4 הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-a \cdot b_n)$ מתכנס וממילא (ע"פ אותה טענה אך מסעיף אחר) גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$ מתכנס. ■

4 הכנסת סוגריים ושינוי סדר

משפט 4.1.

1. לכל טור מתכנס, כל הטורים המתקבלים ממנו ע"י הכנסת סוגריים מתכנסים לאותו סכום.
2. לכל טור,אם קיים טור המתקבל ממנו ע"י הכנסת סוגריים כך שבכל סוגריים מופיעים איברים בעלי אותו סימן[14] אז התכנסות הטור שהתקבל ע"י הכנסת סוגריים גוררת את התכנסות הטור המקורי לאותו סכום.

הוכחה. כדי להוכיח את הסעיף הראשון די בהבנה שהטור המתקבל ע"י הכנסת סוגריים הוא גבול של תת-סדרה של סדרת הסכומים החלקיים (של הטור המקורי[15]), א"כ נעבור להוכחת הסעיף השני.
יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור, יהי $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ טור המתקבל ממנו ע"י הכנסת סוגריים ותהא $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ תת-סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$\sigma_k = \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} a_l$ לכל $k \in \mathbb{N}$ (נסמן $n_0 := 0$).

[14] לעניין זה 0 נחשב שווה סימן הן לחיוביים והן לשליליים.
[15] שלוש פעמים "של" בשרשור אחד...

נניח ש-$\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k$ מתכנס (נסמן את סכומו ב-S) ושלכל $k\in\mathbb{N}$ האיברים ב-$\left\{a_{n_{k-1}+1},a_{n_{k-1}+2},...,a_{n_k}\right\}$ בעלי אותו סימן.
יהי $m\in\mathbb{N}$, קיים $k\in\mathbb{N}$ יחיד כך ש-$n_k<m\le n_{k+1}$[16], יהי k כנ"ל.

$$\begin{aligned}\Rightarrow\left|\left(\sum_{l=1}^{m}a_l\right)-S\right| &= \left|\left(\sum_{l=1}^{n_k}a_l\right)+\left(\sum_{l=n_k+1}^{m}a_l\right)-S\right|\\ &= \left|\left(\sum_{l=1}^{k}\sigma_l\right)-S+\left(\sum_{l=n_k+1}^{m}a_l\right)\right|\\ &\le \left|\left(\sum_{l=1}^{k}\sigma_l\right)-S\right|+\left|\sum_{l=n_k+1}^{m}a_l\right|\\ &\le \left|\left(\sum_{l=1}^{k}\sigma_l\right)-S\right|+\left|\sigma_{k+1}\right|\end{aligned}$$

כלומר לכל $m\in\mathbb{N}$ מתקיים אי-השוויון הנ"ל.
כעת נשים לב לכך ש-$k\longrightarrow\infty$ כאשר $m\longrightarrow\infty$[17] ושהביטוי שבצד ימין של אי-השוויון מתכנס ל-0 כאשר $k\longrightarrow\infty$ (ובפרט כאשר $m\longrightarrow\infty$), שהרי התכנסות $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k$ מחייבת ש-$\lim_{k\to\infty}\sigma_{k+1}=0$ ואת S הגדרנו להיות הסכום של הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k$ (כלומר הגבול של סדרת הסכומים החלקיים); מכאן שגם הביטוי שבצד שמאל מתכנס ל-0, כלומר סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת ל-S ומהגדרה $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$. ■

משפט 4.2. הוספת סוגריים מאורך חסום
יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור.
תהא $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת אינדקסים עולה ממש ונסמן $n_0:=0$.
תהא $(\sigma_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת כך (לכל $k\in\mathbb{N}$):

$$\sigma_k=\sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k}a_l$$

א"כ הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k$ מתקבל מהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ע"י הכנסת סוגריים.
אם קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $n_k-n_{k-1}<M$ וגם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אז הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k$ מתכנס אם"ם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס ואז הם מתכנסים לאותו סכום.

הוכחה. כדי להוכיח את המשפט עלינו לשים לב לכך שכל איבר בסדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ קרוב עד כדי סכום M האיברים המתאימים לאיבר בסדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k$ ושככל שמתקדמים בסדרה אחת יש להתקדם גם בשנייה עד לאינסוף, כעת מכיוון ש-$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ סכומם של M האיברים הנ"ל מתכנס ל-0 אף הוא כשמתקדמים בסדרה ולכן הגבול של ההפרש בין שתי הסדרות הוא 0 ולכן אם אחת מתכנסת גם רעותה מתכנסת ולאותו סכום, נוכיח זאת באופן פורמלי.
יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ ויהי $r\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n_r<n\in\mathbb{N}$ מתקיים $|a_n|<\frac{\varepsilon}{M}$ (מהעובדה ש-$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ו-$\lim_{k\to\infty}n_k=\infty$ נובע שאכן קיים r כזה).
יהי $n_r<N\in\mathbb{N}$ ויהי $k\in\mathbb{N}$ כך ש-$n_{k-1}<N\le n_k$[18].

$$\Rightarrow\left|\sum_{j=1}^{k}\sigma_j-\sum_{j=1}^{N}a_j\right|=\left|\sum_{j=1}^{n_k}a_j-\sum_{j=1}^{N}a_j\right|=\left|\sum_{j=N+1}^{n_k}a_j\right|\le\left|\sum_{j=N+1}^{N+M}a_j\right|\le\sum_{j=N+1}^{N+M}|a_j|\le M\cdot\frac{\varepsilon}{M}<\varepsilon$$

ε הנ"ל היה שרירותי ולכן הנ"ל נכון לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ ומכאן שקיבלנו את המבוקש. ■

[16] לקבוצה $\{n_k\mid k\in\mathbb{N}_0,\ n_k<m\}$ יש איבר מקסימלי והיא אינה ריקה שכן $n_0<m$ לכל $m\in\mathbb{N}$.
[17] ראינו לעיל שלכל $m\in\mathbb{N}$, k הוגדר להיות $\max\{n_k\mid k\in\mathbb{N}_0,\ n_k<m\}$.
[18] ראינו בהוכחה הקודמת איך מוצאים את ה-k הזה.

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור ונסמן (עבור כל $n \in \mathbb{N}$):

$$p_n := \frac{|a_n| + a_n}{2} = \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n \leq 0 \end{cases}$$

$$q_n := \frac{|a_n| - a_n}{2} = \begin{cases} 0 & a_n \geq 0 \\ -a_n & a_n \leq 0 \end{cases}$$

♣ נשים לב שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$a_n = p_n - q_n, \;\; |a_n| = p_n + q_n$$

משפט 4.3.

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אז גם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ מתכנסים ומתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

2. אם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ מתכנסים אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

מסקנה 4.4 אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אז $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \infty$.

משפט 4.5 אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, כל טור המתקבל ממנו ע"י שינוי סדר האיברים יתכנס לאותו הסכום.

הוכחה. נניח ש-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, ממשפט 4.3 נובע שהטורים $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ מתכנסים ומתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

כעת מכיוון ש-$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ הם טורים חיוביים מתקיים גם:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n, \;\; \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} q_n$$

ומכאן שמתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n - \sum_{n \in \mathbb{N}} q_n$$

ולכן שינוי סדר האיברים אינו משפיע על התכנסות הטור וסכומו. ■

משפט 4.6. משפט רימן
אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אז לכל $S \in \mathbb{R}$ ניתן לסדר את איברי הטור כך שסכום הטור המסודר מחדש יתכנס ל-S או ל-$\pm\infty$[19]; כמו כן ניתן לסדרם כך שהטור המסודר מחדש לא יתכנס כלל.

♣ כפי שנראה בהוכחת המשפט השיטה של רימן היא "להתנדנד" סביב הערך הרצוי לגבול או בין שני מספרים ממשיים / בין מספר ל-∞ / בין מספר ל-$-\infty$/ בין $-\infty$ ל-∞, העובדה שהתכנסות הטור אומרת שהאיבר הכללי מתכנס ל-0 גורמת לכך שכל ערך הנמצא בטווח הנדנוד הוא גבול חלקי של סדרת הסכומים החלקיים[20], וזאת משום שאנו עוברים בסביבתו בכל "איטרציה" של הנדנוד כשבכל פעם צעדינו הולכים וקטנים כך שאנו מתקרבים אליו יותר ויותר. נקודה נוספת שחשוב לשים לב אליה היא שא"א לבצע את התהליך הזה בדרך אחרת (שאינה "נדנוד") ולכן כל סידור של סדרת הסכומים החלקיים.

הוכחה. יהי $S \in \mathbb{R}$ ונניח בהג"כ שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \neq 0$.
היות ש-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי נדע (ע"פ מסקנה 4.4) שמתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \infty$.
נגדיר $n_0 := m_0 := A_0 := 0$; תהיינה $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ (סדרות אינדקסים עולות ממש) ו-$(A_k)_{k=1}^{\infty}$ המוגדרות כך (לכל $k \in \mathbb{N}$)[21]:

$$\begin{aligned} m_k &:= \min\left\{ n \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; A_{2(k-1)} - \textstyle\sum_{l=m_{k-1}+1}^{n} q_l < S \right\} \\ A_{2k-1} &:= A_{2(k-1)} - \sum_{l=m_{k-1}+1}^{m_k} q_l \\ n_k &:= \min\left\{ n \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; A_{2k-1} + \textstyle\sum_{l=n_{k-1}+1}^{n} p_l > S \right\} \\ A_{2k} &:= A_{2k-1} + \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} p_l \end{aligned}$$

הרעיון מאחורי הגדרת $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ ו-$(n_k)_{k=1}^{\infty}$ בצורה זו הוא שאנו סוכמים איברים שליליים עד שנעבור את S באיבר אחד בדיוק ואז עוברים לסכום איברים חיוביים עד שנעבור את S (לצד השני) באיבר אחד בדיוק וכך שוב ושוב. הסדרה $(A_k)_{k=0}^{\infty}$ "שומרת" את הסכום בכל מעבר על פני S.
נשים לב לכך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\begin{aligned} A_{2(k-1)} - \sum_{l=m_{k-1}+1}^{m_k} q_l < S \leq A_{2(k-1)} - \sum_{l=m_{k-1}+1}^{m_k-1} q_l \\ A_{2k-1} + \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} p_l > S \geq A_{2k-1} + \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k-1} p_l \end{aligned}$$

כמו כן לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים (ממש מהגדרה):

$$\begin{aligned} A_{2k-1} - A_{2(k-1)} &= -\sum_{l=m_{k-1}+1}^{m_k} q_l \\ A_{2k} - A_{2k-1} &= \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} p_l \end{aligned}$$

תהא $(\sigma_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י $\sigma_k = A_k - A_{k-1}$.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k = -\left(q_1 + q_2 + ... + q_{m_1}\right) + \left(p_1 + p_2 + ... + p_{n_1}\right) - \left(q_{m_1+1} + q_{m_1+2} + ... + q_{m_2}\right) + \left(p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + ... + p_{n_2}\right) ...$$

[19] אין שום בעיה בניסוח של המשפט, הפסוק "לכל $z \in \mathbb{C}$ משפט פיתגורס נכון" הוא פסוק אמת.
[20] כלומר קבוצת הגבולות החלקיים היא מקטע, ומכיוון שאם היא חסומה מלעיל/מלרע יש לה מקסימום/מינימום נדע שמקטע זה אינו קרן פתוחה / קטע פתוח / קטע חצי-פתוח, אלא מוכרח הוא להיות קטע סגור / קרן סגורה / כל הישר.
[21] ההגדרה כאן היא בעצם אינדוקטיבית, יש להגדיר (לפי הסדר) את m_1, A_1, n_1 ו-A_2 ורק אח"כ לעבור להגדרת m_2, A_3, n_2 ו-A_4 וחוזר חלילה...

כלומר הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k$ הוא טור המתקבל מ-$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ע"י שינוי סדר האיברים ואח"כ הכנסת סוגריים (כאשר בכל זוג סוגריים כל האיברים שווי סימן[22] ועד כדי השמטת אפסים[23])[24], בנוסף, לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\sum_{l=1}^{k}\sigma_l=(A_1-A_0)+(A_2-A_1)+...+(A_{k-1}-A_{k-2})+(A_k-A_{k-1})=A_k-A_0=A_k$$

מהגדרה, לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$|A_{2k-1}-S|<q_{m_k}$$
$$|A_{2k}-S|<p_{n_k}$$

כעת נזכור כי $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ (שהרי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס) ומכאן שגם $\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}q_n=0$ וממשפט הירושה גם $\lim_{k\to\infty}p_{n_k}=\lim_{k\to\infty}q_{m_k}=0$.

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k=\lim_{k\to\infty}A_k=S$$

מכיוון ש-$\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k$ מתקבל מ-$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ע"י שינוי סדר האיברים ואח"כ הכנסת סוגריים כאשר בכל זוג סוגריים כל האיברים בעלי אותו סימן, הדבר גורר שהטור המסודר מחדש מתכנס ל-S (משפט 4.1). ■

- ♣ עבור $\pm\infty$ יש להחליף את S ב-$\pm k$ בכל מקום שבו הוא מופיע בהוכחה.[25]
- ♣ כדי שהטור המסודר מחדש לא יתכנס כלל יש להחליף את S בשני ביטויים התלויים ב-k שגבולם באינסוף שונה[26], את האחד יש לשים בקבוצה המגדירה את m_k כמינימום שלה ואת השני יש לשים בקבוצה המגדירה את n_k כמינימום שלה (לכל $k\in\mathbb{N}$ כמובן); לאחר שעושים זאת אותה הוכחה תופסת גם למקרה זה (למעט שינויים זעירים המתבקשים מהחלפה זו ומכיוון שיש יותר מארבעה כאלה לא אפרט כאן ואסמוך על תבונתו של הקורא).

[22] לעניין זה 0 נחשב כשווה סימן גם לאיברים חיוביים וגם לאיברים שליליים.
[23] אפסים אלו נוצרו מאיברים ב-$(p_n)_{n=1}^{\infty}$ ומ-$(q_n)_{n=1}^{\infty}$ (ראו הערה הבאה) ואינם אפסים שהופיעו בטור $\sum_{n=1}^{\infty}$ במקור.
[24] כדי להבין זאת יש לזכור שהנחנו בהג"כ שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n\neq 0$, וכי לכל $n\in\mathbb{N}$: אם $a_n>0$ אז $p_n=a_n$ ו-$q_n=0$ ואם $a_n<0$ אז $q_n=-a_n$ ו-$p_n=0$.
[25] למעט בשלב האחרון כמובן, שבו יש להחליף את S ב-$\pm\infty$ כדי לקבל $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k=\lim_{k\to\infty}A_k=\pm\infty$ (וכן בשורה האחרונה).
[26] ניתן גם להחליף סתם בשני מספרים קבועים שונים.

5 מכפלות טורים

טענה 5.1. יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים המתכנסים ל-A ול-B בהתאמה, מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_n = A \cdot B$$

הוכחה. מטענה 1.4 נובע כי:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cdot A) = A \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A \cdot B$$

■

משפט 5.2. משפט קושי

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים בהחלט ויהיו $A, B \in \mathbb{R}$ כך ש-$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
כל טור המורכב מכל המכפלות מהצורה $a_i \cdot b_j$ (עבור כל $i, j \in \mathbb{N}$) ללא חזרות הוא טור מתכנס בהחלט וסכומו הוא $A \cdot B$.

הוכחה. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ טור העובר על כל המכפלות הנ"ל ללא חזרות בסדר כלשהו, כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימים $i, j \in \mathbb{N}$ יחידים כך ש-$w_n = a_i \cdot b_j$ ולכל $i, j \in \mathbb{N}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ יחיד כך ש-$w_n = a_i \cdot b_j$.
נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$.
יהי $N \in \mathbb{N}$ ויהי M האינדקס המקסימלי המופיע ב-$w_1, w_2, ..., w_N$.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} |w_n| \le \left(\sum_{n=1}^{M} |a_n|\right)\left(\sum_{n=1}^{M} |b_n|\right)$$

מהיות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים בהחלט נובע שסדרות הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ מתכנסות ומאריתמטיקה של גבולות נובע שהגבול $\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|\right)\left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|\right)$ קיים ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ חסום ומכיוון שהוא טור חיובי זהו טור מתכנס. מכאן שגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ מתכנס וממשפט 4.1 נובע שכל טור המתקבל ממנו ע"י שינוי סדר האיברים מתכנס לאותו סכום.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} W_n := \underbrace{a_1 \cdot b_1}_{W_1} + \underbrace{a_1 \cdot b_2}_{W_2} + \underbrace{a_2 \cdot b_2}_{W_3} + \underbrace{a_2 \cdot b_1}_{W_4} + \underbrace{a_1 \cdot b_3}_{W_5} + \underbrace{a_2 \cdot b_3}_{W_6} + \underbrace{a_3 \cdot b_3}_{W_7} + \underbrace{a_3 \cdot b_2}_{W_8} + \underbrace{a_3 \cdot b_1}_{W_9} \ldots$$

כלומר, אם נסדר את האיברים בטבלה:

$$\begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & a_1 \cdot b_3 & \ldots \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & a_2 \cdot b_3 & \ldots \\ a_3 \cdot b_1 & a_3 \cdot b_2 & a_3 \cdot b_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

אז סדר הסכימה יהיה כזה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & \ldots \\ 4 & 3 & 6 & \ldots \\ 9 & 8 & 7 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

נשים לב שלכל $N \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{N^2} W_n = \left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right)$$

ומכאן, ע"פ אריתמטיקה של גבולות שמתקיים:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N^2} W_n = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)\cdot\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right) = A\cdot B$$

ממשפט הירושה נובע שמתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} W_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} W_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N^2} W_n = A\cdot B$$

■

משפט 5.3. משפט מרטן (Mertens)[27]

יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ טורים המתכנסים ל-A ול-B בהתאמה כך שלפחות אחד מהם מתכנס בהחלט, מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot b_{n-k} = A\cdot B$$

הוכחה. נניח בהג"כ ש-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

תהיינה $(A_n)_{n=0}^{\infty}$, $(B_n)_{n=0}^{\infty}$, $(D_n)_{n=0}^{\infty}$ ו-$(\beta_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרות המוגדרות כך (לכל $n \in \mathbb{N}_0$):

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$$

$$D_n := \sum_{k=0}^{n} d_k$$

$$\beta_n := B - B_n$$

מכאן שלכל $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים $B_n = B - \beta_n$ ולכן לכל $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^{n} d_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i\cdot b_{n-i}\right) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0) + \ldots (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0) \\ &= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots a_nB_0 = a_0\left(B-\beta_n\right) + a_1\left(B-\beta_{n-1}\right) + \ldots + a_n\left(B-\beta_0\right) \\ &= A_n\cdot B - \left(a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0\right) \end{aligned}$$

מאריתמטיקה של גבולות נובע שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\left(A_n\cdot B\right) = A\cdot B$$

ולכן עלינו להוכיח כי:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} a_i\beta_{n-i} = 0$$

[27] ערך בוויקיפדיה האנגלית: Franz Mertens.

יהי $n \in \mathbb{N}_0$ ונסמן $m := \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left|\sum_{i=0}^{n} a_i\beta_{n-i}\right| &= \left|\sum_{i=0}^{m} a_i\beta_{n-i} + \sum_{i=m+1}^{n} a_i\beta_{n-i}\right| \le \left|\sum_{i=0}^{m} a_i\beta_{n-i}\right| + \left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i\beta_{n-i}\right| \\
&\le \sum_{i=0}^{m} |a_i\beta_{n-i}| + \sum_{i=m+1}^{n} |a_i\beta_{n-i}| = \sum_{i=0}^{m} (|a_i| \cdot |\beta_{n-i}|) + \sum_{i=m+1}^{n} (|a_i| \cdot |\beta_{n-i}|) \\
&\le \sup\{|\beta_k| : n-m \le k \in \mathbb{N}_0\} \cdot \sum_{i=0}^{m} |a_i| + \sup\{|\beta_k| : n-m > k \in \mathbb{N}_0\} \cdot \sum_{i=m+1}^{n} |a_i| \\
&\le \sup\left\{|\beta_k| : n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \le k \in \mathbb{N}_0\right\} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| + \sup\left\{|\beta_k| : n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > k \in \mathbb{N}_0\right\} \cdot \sum_{i=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}^{\infty} |a_i|
\end{aligned}$$

כעת נשים לב לעובדות הבאות:

1. הטור $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ מתכנס.
2. מכאן שע"פ מסקנה 1.7 מתקיים:
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}^{\infty} |a_i| = 0$$
3. $\lim_{n\to\infty} \sup\left\{|\beta_k| : n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \le k \in \mathbb{N}_0\right\} = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$.
4. הגבול $\lim_{n\to\infty} \sup\left\{|\beta_k| : n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > k \in \mathbb{N}_0\right\}$ קיים במובן הצר (כלומר הוא מספר ממשי) שכן הסדרה $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת וממילא חסומה.

לפיכך:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup\{|\beta_k| : n-m \le k\} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| + \sup\{|\beta_k| : n-m > k \ge 0\} \cdot \sum_{i=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}^{\infty} |a_i| \right) = 0$$

וממילא:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i\beta_{n-i} = 0$$

■

דוגמה 5.4. ראינו בקורס הקודם (כשעסקנו בפולינומי טיילור) שלכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים (עבור ξ בין 0 ל-x):

$$P_{n,\exp,0}\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{k!}$$
$$R_{n,\exp,0}\left(x\right) = \frac{\exp\left(\xi\right) \cdot x^{n+1}}{\left(n+1\right)!}$$

מהשוואה לסדרה הנדסית מתכנסת[28] ניתן להסיק כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\exp\left(\xi\right) \cdot x^{n+1}}{\left(n+1\right)!} = 0$$

ומכאן שגם:

$$\Rightarrow \exp\left(x\right) = \lim_{n \to \infty}\left(P_{n,\exp,0}\left(x\right) + R_{n,\exp,0}\left(x\right)\right) = \lim_{n \to \infty} P_{n,\exp,0}\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{x^k}{k!}\right| = \exp\left(\left|x\right|\right)$$

ממשפט מרטן נובע שלכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
\exp\left(x\right) \cdot \exp\left(y\right) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k \cdot y^{n-k}}{k! \cdot \left(n-k\right)!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n! \cdot x^k \cdot y^{n-k}}{k! \cdot \left(n-k\right)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot \left(n-k\right)!} \cdot x^k \cdot y^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x+y\right)^n}{n!} = \exp\left(x+y\right)
\end{aligned}$$

[28] קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש-$\frac{x}{n+1} < \frac{1}{2}$ לכל $N < n \in \mathbb{N}$.

6 נספח: רשימת מבחני התכנסות

6.1 מבחני התכנסות לטורים חיוביים

1. מבחן ההשוואה (משפט 2.1)
2. חסימת מנה של שני טורים בין שני חיוביים (מסקנה 2.2)
3. מבחן ההשוואה הגבולי (מסקנה 2.3)
4. א"ש בין מנת איברים עוקבים של שני טורים (מסקנה 2.4)
5. מבחן השורש של קושי (משפט 2.5) והמסקנה ממנו לגבי גבול עליון של השורש ביחס ל-1
6. מבחן המנה של ד'אלמבר (משפט 2.7) והמסקנה ממנו לגבי גבול עליון וגבול תחתון של המנה ביחס ל-1
7. מבחן ראבה (משפט 2.10)
8. מבחן העיבוי של קושי (משפט 2.11)
9. הקשר בין התכנסות טור של סדרה חיובית וההתכנסות של מכפלות מתאימות (משפט 2.12)

6.2 מבחני התכנסות לטורים בעלי סימנים משתנים

1. תנאי קושי (משפט 1.3)
2. משפט לייבניץ (משפט 3.1) והמסקנה ממנו לגבי כל סדרה מונוטונית שגבולה הוא 0
3. מבחן דיריכלה (משפט 3.5) - הכללה של משפט לייבניץ
4. מבחן Abel (משפט 3.6)