אינטגרלים מרובים - הגדרות בלבד

אנליזה אלמנטרית רב-ממדית - 80116

מרצה: נועה ניצן

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

בסיכום זה נעסוק רק בפונקציות מהצורה $f:D\to\mathbb{R}$ כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^2$ (למרות שניתן היה להכליל את ההגדרות בקלות ל-$\mathbb{R}^n$) ולכן לא אטרח לציין זאת בכל פעם.

1 אינטגרביליות על מלבן

1.1 מושגים בסיסיים

הגדרה 1.1. מלבן:

מלבן ב-$\mathbb{R}^2$ הוא קבוצה מהצורה $[a,b]\times[c,d]$ כאשר $a,b,c,d\in\mathbb{R}$; הצגה ברורה יותר של הקבוצה היא:

$$R:=[a,b]\times[c,d]=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;a\leq x\leq b,\;\;c\leq y\leq d\right\}$$

את השטח של המלבן (שהוא $(b-a)(c-d)$) נסמן ב-$A(R)$.

הגדרה 1.2. שריג

יהי $R\subseteq\mathbb{R}^2$ מלבן, שריג על R הוא זוג סדור $P:=(P_1,P_2)$ כאשר P_1 היא חלוקה של $[a,b]$ ו-P_2 היא חלוקה של $[c,d]$.

♣ שריג הוא המושג המקביל של חלוקה מאינפי' 2.

הגדרה 1.3. עידון של שריג

יהי R מלבן, עידון של שריג $P:=(P_1,P_2)$ הוא כל שריג $Q:=(Q_1,Q_2)$ על R המקיים $Q_1\subseteq P_1$ ו-$Q_2\subseteq P_2$.

1.2 סכומי דארבו

יהי $R\subseteq\mathbb{R}^2$ מלבן, יהי P שריג על R, יהיו $R_1,R_2,\ldots,R_n\subseteq R$ כל תתי המלבנים שמגדירה P ותהא $f:R\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

הגדרה 1.4. סכומי דארבו[1]

נסמן (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$):

$$M_i:=\sup\{f(x)\mid x\in R_i\},\;\;m_i:=\inf\{f(x)\mid x\in R_i\}$$

ונגדיר:

$$U(f,P):=\sum_{i=1}^{n}M_i\cdot A(R_i),\;\;L(f,P):=\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot A(R_i)$$

ל-$U(f,P)$ נקרא סכום דארבו העליון של f עבור P ול-$L(f,P)$ נקרא סכום דארבו התחתון של f עבור P.

טענה 1.5. יהי Q עידון של P, מתקיים:

$$L(f,P)\leq L(f,Q)\leq U(f,Q)\leq U(f,P)$$

טענה 1.6. יהיו $m,M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $y\in\mathrm{Im}f$ מתקיים $m\leq y\leq M$, לכל שני שריגים Q ו-$\tilde{Q}$ על R מתקיים:

$$m\cdot A(R)\leq L(f,Q)\leq U\left(f,\tilde{Q}\right)\leq M\cdot A(R)$$

[1] ערך בוויקיפדיה: גסטון ז'אן דארבו.

נסמן ב-$\mathcal{L}$ את קבוצת סכומי דרבו התחתונים של f עבור כל השריגים על R וב-$\mathcal{U}$ את קבוצת סכומי דרבו העליונים של f עבור כל השריגים על R, כפי שראינו לעיל אלו קבוצות חסומות.

הגדרה 1.7. אינטגרל עליון ואינטגרל תחתון

- האינטגרל העליון של f ב-R הוא:

$$\overline{\iint\limits_R} f \ dA := \inf(\mathcal{U})$$

- האינטגרל התחתון של f ב-R הוא:

$$\underline{\iint\limits_R} f \ dA := \sup(\mathcal{L})$$

מסקנה 1.8. מתקיים:

$$\underline{\iint\limits_R} f \ dA \leq \overline{\iint\limits_R} f \ dA$$

הגדרה 1.9. אינטגרביליות

נאמר ש-f אינטגרבילית ב-R אם מתקיים:

$$\underline{\iint\limits_R} f \ dA = \overline{\iint\limits_R} f \ dA$$

ואז נסמן את הערך המשותף ב-$\iint\limits_R f \ dA$ ונקרא לו האינטגרל של f ב-R.

♣ למת החתכים נותנת תנאים שקולים לקיום השוויון.

הגדרה 1.10. נפח

אם f אי-שלילית נאמר ש-$\iint\limits_R f \ dA$ הוא הנפח של הקבוצה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R,\ 0 \leq z \leq f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$

2 אינטגרביליות על קבוצה כללית

הגדרה 2.1. אינטגרביליות על קבוצה שאינה מלבן

תהיינה $D\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצה חסומה ו-$f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה ויהי $R\subseteq\mathbb{R}^2$ מלבן כך ש-$R\subseteq D$, נאמר ש-f אינטגרבילית על D אם הפונקציה המוגדרת ע"י (לכל $(x,y)\in R$):

$$g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}:=\begin{cases}f\left(x,y\right) & \left(x,y\right)\in D\\0 & \left(x,y\right)\notin D\end{cases}$$

אינטגרבילית ב-R ובמקרה כזה נאמר שהאינטגרל של f ב-D הוא:

$$\iint\limits_{D}f\ dA=\iint\limits_{R}g\ dA$$

♣ נשים לב שלכל מלבן המקיים $D\subseteq R$ נקבל את אותו אינטגרל ולכן האינטגרל מוגדר היטב.

הגדרה 2.2. קבוצה בעלת שטח

תהא $D\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצה חסומה, נאמר ש-D בעלת שטח אם χ_D (הפונקציה המציינת של D) אינטגרבילית ב-D ואז נגדיר את השטח של D ע"י:

$$A\left(D\right):=\iint\limits_{D}\chi_{D}dA$$

הגדרה 2.3. קבוצה נורמלית

תהא $D\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצה.

- נאמר ש-D נורמלית ביחס לציר ה-x אם קיים קטע סגור $I\subseteq\mathbb{R}$ וקיימות שתי פונקציות $g_1,g_2:I\to\mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$D=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\mid x\in I,\ \ g_1\left(x\right)\le y\le g_2\left(x\right)\right\}$$

- נאמר ש-D נורמלית ביחס לציר ה-y אם קיים קטע סגור $I\subseteq\mathbb{R}$ וקיימות שתי פונקציות $g_1,g_2:I\to\mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$D=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\mid y\in I,\ \ g_1\left(x\right)\le x\le g_2\left(x\right)\right\}$$

- נאמר ש-D נורמלית בהצגה קוטבית אם קיים קטע סגור $I\subseteq[0,2\pi]$ וקיימות שתי פונקציות $g_1,g_2:I\to\mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$D=\left\{\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)\in\mathbb{R}^2\mid \theta\in I,\ \ 0\le g_1\left(x\right)\le r\le g_2\left(x\right)\right\}$$

♣ הרעיון מאחורי ההגדרה של קבוצה נורמלית הוא שקבוצות נורמליות הן "כמעט" מלבנים[2].

[2] בהצגה קוטבית המלבנים הם קבוצות מהצורה $\left\{\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)\in\mathbb{R}^2\mid a\le r\le b,\ \ c\le\theta\le d\right\}$.

3 החלפת משתנים

להוסיף כאן אינטואיציה להצבה במשתנה אחד - העיוות של הישר הממשי/המרחב ע"י הפונקציה והתיקון הנדרש.

תהא $D\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצה חסומה, תהיינה $x,y:D\to\mathbb{R}$ ותהא $f:D\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י (לכל $(s,t)\in D$):

$$f\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}:=\begin{bmatrix}x\left(s,t\right)\\y\left(s,t\right)\end{bmatrix}$$

♣ מטריצת יעקובי של f בנקודה פנימית $P\in D$ היא המטריצה הבאה:

$$J_f\left(P\right):=\begin{bmatrix}x'_s\left(P\right) & x'_t\left(P\right)\\ y'_s\left(P\right) & y'_t\left(P\right)\end{bmatrix}$$

אם כל הנגזרות החלקיות המופיעות במטריצה רציפות ב-P אז כפי שלמדנו הדבר גורר ש-f דיפרנציאבילית ב-P ויתרה מזאת מטריצת יעקובי היא המטריצה המייצגת (בבסיס הסטנרדטי) של ההעתקה הליניארית המהווה את הדיפרנציאל של f ב-P, הדטרמיננטה של מטריצה יעקובי בנקודה P נקראת היעקוביאן של f ב-P.