על פתרון משוואות ונוסחת השורשים

חשבון אינפיניטסימלי (1) - 80131

מרצה: רז קופרמן

מתרגלים: אור יער ודניאל רוזנבלט

נכתב ע"י שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האוניברסיטה העברית

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 הקדמה

קובץ זה נכתב לאחר שראיתי סטודנטים רבים שמתקשים לפרמל את דרך פתרון המשוואות שלמדנו בחטיבת הביניים ובתיכון, בקובץ הזה אפרמל את "שיטת ההפיכה"[1] שלמדנו ובנוסף אשים את האצבע על כמה טעויות נפוצות ואסביר כיצד יש להימנע מהן. ובכן, ניגש ישר לעניין, הדוגמה שנעסוק בה היא פתרון משוואה ריבועית ונוסחת השורשים: תלמיד תיכון מקבל שלושה מספרים ממשיים a,b,c כך ש-$a\neq 0$ ומתבקש למצוא פתרון למשוואה:

$$ax^2+bx+c=0$$

נעזוב את העובדה שברוב התיכונים בארץ המורים נותנים לתלמידים את נוסחת השורשים ללא כל הוכחה ועל התלמידים לקבל אותה כתורה למשה מסיני, ונתמקד בתלמיד מסוים שאינו מסתפק בכך שהמורה אמר מהי התשובה, הוא חייב למצוא הוכחה. מה עושה אותו תלמיד? פותח את הספר של בני גורן בעמוד המתאים ומתחיל לקרוא, "ההוכחה" שהוא רואה שם היא כזו:

נשתמש בשיטה הנקראת "השלמה לריבוע".

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c=0 &\Rightarrow ax^2+bx=-c\\
&\Rightarrow 4a\cdot\left(ax^2+bx\right)=4a\cdot(-c)\\
&\Rightarrow 4a^2x^2+4abx=-4ac\\
&\Rightarrow 4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac\\
&\Rightarrow (2ax)^2+2\cdot(2ax)\cdot b+b^2=b^2-4ac\\
&\Rightarrow (2ax+b)^2=b^2-4ac\\
&\Rightarrow 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}\\
&\Rightarrow 2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}\\
&\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

יש כאן שלוש בעיות שמיודענו התלמיד לא שם את ליבו אליהן:

1. הראשונה, פורמלית וקטנונית: מי זה x בכלל? a, b ו-c מוגדרים היטב (אמרנו לעיל שהם מספרים ממשיים) וכמו כן גם פעולות החיבור, הכפל והחזקה אך x אינו מוגדר, אין לנו מושג אפילו לאיזו קבוצה הוא שייך.
2. השנייה היא שגם אם נצליח לפרמל את ההוכחה, כל מה שהצלחנו להוכיח הוא שלכל $x\in\mathbb{R}$, **אם** x מקיים $ax^2+bx+c=0$ **אז** x מקיים גם:
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
בכלל לא הראנו ש**קיים** $x\in\mathbb{R}$ המקיים $ax^2+bx+c=0$.
3. שלישית, הפירוש של הפסוק $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ הוא:
$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ \vee\ x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
כלומר אפילו אם נניח שקיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש-$ax^2+bx+c=0$ וש-$b^2-4ac>0$ עדיין לא הצלחנו להוכיח ששני המספרים שמצאנו מהווים פתרון למשוואה ולא רק אחד מהם.

[1] המקור היחיד שמצאתי לשם זה הוא הערך בוויקיפדיה העברית אודות המתמטיקאי ההודי "אריאבהטה" שהוכחתו למשפט פיתגורס היא האלגנטית ביותר שראיתי (ראו כאן).

♣ בעיה נוספת היא שיש כאן רק אלגברה ללא טיפת אינטואיציה, אבל זו כבר בעיה פילוסופית שאינה קשורה לענייננו; למרות זאת ראיתי לנכון לצרף כאן נספח המסביר את האינטואיציה שמאחורי נוסחת השורשים.

♣ נ"ב: התלמיד שבו עסקנו לעיל אינו תלמיד היפותטי: התלמיד הזה הוא אני בכיתה י' או י"א, ואת "ההוכחה" שמופיעה שם אכן ראיתי בספר של בני גורן ועד היום אני זוכר אותה...

2 אז איך באמת פותרים משוואות?

2.1 הגדרות

הגדרה 2.1. משוואה בנעלם אחד מעל הממשיים היא ביטוי מהצורה $f(x)=g(x)$ כאשר f ו-g הן פונקציות שהתחום והטווח שלהן הם תתי-קבוצות של $\mathbb{R}$.

♣ בדרך כלל נבצע "העברת אגפים" כדי לקבל בצד אחד את 0 ובצד השני פונקציה כלשהי.

הגדרה 2.2. תהיינה $f,g:A\to B$ שתי פונקציות כך ש-$A,B\subseteq\mathbb{R}$,

- פתרון של המשוואה $f(x)=g(x)$ הוא מספר $y\in\mathbb{R}$ המקיים $f(y)=g(y)$.
- קבוצת הפתרונות של המשוואה $f(x)=g(x)$ היא הקבוצה $\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=g(x)\}$.

♣ קבוצת הפתרונות יכולה להיות גם הקבוצה הריקה ואז מהגדרה אין למשוואה פתרונות.

הגדרה 2.3. משוואה ריבועית מעל הממשיים היא ביטוי מהצורה $p(x)=q(x)$ כאשר p ו-q הן פונקציות פולינומיאליות מעל $\mathbb{R}$ ($p,q\in\mathbb{R}[x]$[2]) שדרגתן קטנה או שווה ל-2 ($\deg p,\deg q\le 2$).

♣ ניתן להכליל בקלות את כל ההגדרות גם ליותר מנעלם אחד ולמשוואות מעל קבוצות שאינן שדה הממשיים או אפילו תת-קבוצה שלו, אך מכיוון שאנו נעסוק כאן רק במשוואות מהסוג שלעיל הגדרה כוללת יותר הייתה מסרבלת את ההסבר שלא לצורך.

2.2 טענות עזר

טענה 2.4. לכל שתי פונקציות $f,g:A\to B$ כך ש-$A,B\subseteq\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=g(x)\}=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)-g(x)=0\}$$

טענה 2.5. לכל שני פולינומים $p,q\in\mathbb{R}[x]$ הדרגה של פולינום ההפרש $(p-q)$ קטנה או שווה לדרגה המקסימלית מבין אלו של p ו-q, כלומר:

$$\deg(p-q)\le\max\{\deg p,\deg q\}$$

♣ משתי הטענות ביחד נובע שכדי לפתור כל משוואה ריבועית מעל $\mathbb{R}$ מספיק לדעת כיצד לפתור כל משוואה מהצורה $f(x)=0$ כאשר f היא פונקציה פולינומיאלית מעל $\mathbb{R}$ שדרגתה קטנה או שווה ל-2.

[2] כן, אני מודע לכך ש-$\mathbb{R}[x]$ אינה קבוצה של פונקציות אך מכיוון שישנה העתקה טריוויאלית חח"ע ועל בין הפולינומים לפונקציות אני מרשה לעצמי "לזגזג" מכאן לשם ובחזרה.

2.3 פתרון משוואה ריבועית בשיטה ראשונה

תהא f פונקציה פולינומיאלית מעל $\mathbb{R}$ שדרגתה קטנה או שווה ל-2 ויהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש-$f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$ לכל $x\in\mathbb{R}$; מהגדרה, קבוצת הפתרונות של המשוואה $f\left(x\right)=0$ היא:

$$\left\{x\in\mathbb{R}\mid f\left(x\right)=0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\mid ax^{2}+bx+c=0\right\}$$

טענה 2.6. נניח ש-$a=0$ ונחלק למקרים:

- אם $b\neq0$ אז מתקיים:

$$\left\{x\in\mathbb{R}\mid ax^{2}+bx+c=0\right\}=\left\{-\frac{c}{b}\right\}$$

- אם $b=0$ וגם $c=0$ אז מתקיים:

$$\left\{x\in\mathbb{R}\mid ax^{2}+bx+c=0\right\}=\mathbb{R}$$

- אם $b=0$ אך $c\neq0$ אז מתקיים:

$$\left\{x\in\mathbb{R}\mid ax^{2}+bx+c=0\right\}=\emptyset$$

♣ כלומר אם $b\neq0$ אז למשוואה $bx+c=0$ יש פתרון יחיד והוא $-\frac{c}{b}$, אם $b=c=0$ אז כל מספר ממשי הוא פתרון של המשוואה ואם $b=0$ אך $c\neq0$ אין למשוואה פתרון כלל.

♣ אסטרטגיה ראשונה לפתרון משוואות: נניח שיש למשוואה פתרון ואחרי שנמצא את כל המועמדים נציב אותם אחד אחד בביטוי $bx+c$ ונראה אם אנחנו אכן מקבלים 0.

הוכחה. נסמן $S:=\left\{x\in\mathbb{R}\mid ax^{2}+bx+c=0\right\}$ ונניח שיש למשוואה פתרון (כלומר הקבוצה S אינה ריקה).
יהי x פתרון (כלומר יהי $x\in S$), מהגדרה מתקיים:

$$ax^{2}+bx+c=0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 0\cdot x^{2}+bx+c=0\\
&\Rightarrow 0+bx+c=0\\
&\Rightarrow 0+bx+c-c=0-c\\
&\Rightarrow bx+0=-c\\
&\Rightarrow bx=-c
\end{aligned}$$

כעת נחלק למקרים:

- אם $b \neq 0$ אז יש לו הופכי ומכאן שמתקיים:

$$b^{-1} \cdot b \cdot x = b^{-1} \cdot -c$$

$$\Rightarrow x = 1 \cdot x = \frac{-c}{b} = -\frac{c}{b}$$

א"כ הוכחנו **שאם** יש למשוואה פתרון ו-$b \neq 0$ אז קיים פתרון יחיד והוא $-\frac{b}{c}$, כלומר $S \subseteq \left\{-\frac{b}{c}\right\}$; אם נציב $x := -\frac{b}{c}$ נקבל שאכן מתקיים $ax^2 + bx + c = 0$ ולכן $\left\{-\frac{b}{c}\right\} \subseteq S$.

$$\Rightarrow \left\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c = 0\right\} = \left\{-\frac{c}{b}\right\}$$

- אם $b = c = 0$ אז קיבלנו שמתקיים $0 = -0 = -c = b \cdot x = 0 \cdot x = 0$ ומכאן שאיננו יכולים לומר דבר על פתרונות המשוואה, זה רומז לנו (למרות שאין זה מוכרח) שכל $x \in \mathbb{R}$ הוא פתרון של המשוואה ואכן לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$ax^2 + bx + c = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot c + 0 = 0 + 0 = 0$$

כלומר $\mathbb{R} \subseteq S$ ומכיוון שמהגדרה $S \subseteq \mathbb{R}$ הרי שקיבלנו את השוויון $S = \mathbb{R}$.

- אם $b = 0$ ו-$c \neq 0$ אז קיבלנו שלכל $x \in \mathbb{R}$ המקיים $ax^2 + bx + c = 0$ מתקיים $0 = -0 \neq -c = b \cdot x = 0 \cdot x = 0$ וזה לא יכול להיות ומכאן שלא קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$ax^2 + bx + c = 0$.

$$\Rightarrow \left\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c = 0\right\} = \emptyset$$

■

♣ ההוכחה הזו הייתה מסורבלת למדי: לא מספיק שעבדנו קשה כדי להוכיח שאם קיים פתרון אז הוא צריך להיות פתרון מסוים, אלא שגם היינו צריכים אחר להציב את הפתרון במשוואה כדי לוודא שהוא אכן פתרון; במקרה הזה היה מדובר בפעולה פשוטה, אך כפי שניווכח כשננסה ליישם את האסטרטגיה הזו בהוכחת נוסחת השורשים ישנם מקרים שבהם הדבר מסרבל את ההוכחה עד מאד.

משפט 2.7. נוסחת השורשים

נניח ש-$a \neq 0$ ונחלק למקרים:

- אם $b^2 - 4ac > 0$ אז מתקיים:

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c = 0\right\} = \left\{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$$

- אם $b^2 - 4ac = 0$ אז מתקיים:

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c = 0\right\} = \left\{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\} = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$$

- אם $b^2 - 4ac < 0$ אז מתקיים:

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c = 0\right\} = \emptyset$$

הוכחה. <u>הוכחה 1 - פירמול ההוכחה של בני גורן ע"פ האסטרטגיה הראשונה</u>
כמו מקודם נסמן $S := \left\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c = 0\right\}$ ונניח ש-$S \neq \emptyset$.
יהי $x \in S$ פתרון, מהגדרה מתקיים:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow ax^2 + bx + c - c = 0 - c \\
&\Rightarrow ax^2 + bx + 0 = -c \\
&\Rightarrow ax^2 + bx = -c \\
&\Rightarrow 4a \cdot \left(ax^2 + bx\right) = 4a \cdot (-c) \\
&\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac \\
&\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2 \\
&\Rightarrow (2ax)^2 + 2 \cdot (2ax) \cdot b + b^2 = b^2 - 4ac \\
&\Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac
\end{aligned}$$

אנחנו יודעים שלכל $d \in \mathbb{R}$ מתקיים $d^2 \geq 0$ ומכאן ש-$b^2 - 4ac \geq 0$.
א"כ הוכחנו כבר עכשיו שאם יש למשוואה פתרון אז $b^2 - 4ac \geq 0$ ומכאן שאם $b^2 - 4ac < 0$ אז אין למשוואה פתרון.
נמשיך בשרשרת הגרירות תוך הנחה שיש למשוואה פתרון, כפי שראינו לעיל זה אומר ש-$b^2 - 4ac \geq 0$ ולכן $d := \sqrt{b^2 - 4ac}$[3] מוגדר, אבל האם d הוא המספר היחיד המקיים $d^2 = b^2 - 4ac$?
לא בהכרח, אנחנו יודעים שמתקיים גם $(-d)^2 = d^2 = b^2 - 4ac$ וש-$-d \neq d$ אם"ם $d \neq 0$, כמו כן אנחנו יודעים שלא קיימים מספרים ממשיים נוספים המקיימים זאת ולכן נוכל להמשיך את שרשרת הגרירות:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (2ax + b = d) \vee (2ax + b = -d) \\
&\Rightarrow (2ax + b - b = d - b) \vee (2ax + b - b = -d - b) \\
&\Rightarrow (2ax + 0 = -b + d) \vee (2ax + 0 = -b - d) \\
&\Rightarrow (2ax = -b + d) \vee (2ax = -b - d)
\end{aligned}$$

כעת נזכור ש-$a \neq 0$ ולכן גם $2a \neq 0$ ומכאן שיש ל-$2a$ הופכי.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (2ax = -b + d) \vee (2ax = -b - d) \\
&\Rightarrow \left((2a)^{-1} \cdot 2ax = (2a)^{-1} \cdot (-b + d)\right) \vee \left((2a)^{-1} \cdot 2ax = (2a)^{-1} \cdot (-b - d)\right) \\
&\Rightarrow \left(1 \cdot x = \frac{-b + d}{2a}\right) \vee \left(1 \cdot x = \frac{-b - d}{2a}\right) \\
&\Rightarrow \left(x = \frac{-b + d}{2a}\right) \vee \left(x = \frac{-b - d}{2a}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S \subseteq \left\{\frac{-b + d}{2a}, \frac{-b - d}{2a}\right\}$$

א"כ הוכחנו שאם יש למשוואה פתרון אז כל פתרון הוא $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + d}{2a}$ ו/או $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - d}{2a}$, כעת כל מה שנותר לנו הוא להציב את המועמדים שמצאנו ולוודא שהם אכן מהווים פתרונות של המשוואה.

[3] נזכור שהגדרנו את $\sqrt{b^2 - 4ac}$ להיות המספר **האי-שלילי** היחיד שהכפלתו בעצמו נותנת את $b^2 - 4ac$.

הפעם ארשה לעצמי להשתמש בסימון $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm d}{2a}$ משום שאני מאמין שכעת כולנו מבינים למה הכוונה, וכמו כן לא אכתוב במפורש כיצד מתבצע כל מעבר בין השוויונות.

$$\begin{aligned}
a\cdot\left(\frac{-b\pm d}{2a}\right)^2+b\cdot\left(\frac{-b\pm d}{2a}\right)+c &= a\cdot\left(\frac{b^2\pm 2\left(-b\right)d+d^2}{4a^2}\right)+\frac{-b^2\pm bd}{2a}+c\\
&=\frac{b^2\mp 2bd+d^2}{4a}+\frac{-b^2\pm bd}{2a}+c\\
&=\frac{b^2\mp 2bd+d^2}{4a}+\frac{-2b^2\pm 2bd}{4a}+\frac{4ac}{4a}\\
&=\frac{-b^2+d^2+4ac}{4a}\\
&=\frac{-b^2+\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2+4ac}{4a}\\
&=\frac{-b^2+b^2-4ac+4ac}{4a}=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\left\{\frac{-b+d}{2a},\frac{-b-d}{2a}\right\}\subseteq S\\
&\Rightarrow\left\{\frac{-b+d}{2a},\frac{-b-d}{2a}\right\}=S
\end{aligned}$$

כלומר קבוצת הפתרונות של המשוואה $ax^2+bx+c=0$ היא:

$$\left\{x\in\mathbb{R}\mid ax^2+bx+c=0\right\}=\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

כעת נשים לב לכך שאם $b^2-4ac=0$ אז גם $\pm\sqrt{b^2-4ac}=0$ ולכן:

$$\begin{aligned}
\left\{x\in\mathbb{R}\mid ax^2+bx+c=0\right\}&=\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\\
&=\left\{\frac{-b+0}{2a},\frac{-b-0}{2a}\right\}\\
&=\left\{\frac{-b}{2a},\frac{-b}{2a}\right\}=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}
\end{aligned}$$

■

♣ שימו לב שתהליך הצבת הפתרונות דרש כמעט את אותו אורך של מציאת הפתרונות האפשריים וזאת למרות שבו הרשיתי לעצמי להשתמש בסימון "$\pm$" כדי לקצר את ההסבר, בנוסף, זה נראה כאילו הדרך שבה פתרנו משוואות בתיכון היא קשקוש מוחלט: כל החלק של הצבת המועמדים כדי לוודא שהם אכן פתרונות נעדרת לחלוטין מהדרך שבה השתמשנו בתיכון כדי לפתור משוואות. אנחנו יכולים להירגע, הדרך שבה פתרנו משוואות בתיכון ניתנת לפירמול אלא שהפירמול אינו משתמש באסטרטגיה הראשונה שראינו אלא באסטרטגיה אחרת שתפורט להלן.

2.4 פתרון משוואה ריבועית בשיטה שנייה

♣ אסטרטגיה שנייה לפתרון משוואות: נשים לב לכך שכמעט כל הפעולות שביצענו כשניסינו למצוא מועמדים לפתרונות הן פעולות הפיכות ולכן ניתן לבצע גם גרירה בכיוון ההפוך ובכך לבטל את הצורך בהצבת המועמדים במשוואה כדי לוודא את היותם פתרונות, בואו נראה את השיטה הזו בפעולה.

הוכחה. הוכחה 2 - פירמול ההוכחה של בני גורן ע"פ האסטרטגיה השנייה
לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\iff ax^2+bx=-c \\ &\iff 4a^2x^2+4abx=-4ac \\ &\iff 4a^2x^2+4abx+b^2=-4ac+b^2 \\ &\iff (2ax)^2+2\cdot(2ax)\cdot b+b^2=b^2-4ac \\ &\iff (2ax+b)^2=b^2-4ac \end{aligned}$$

כאן עלינו להיזהר מפני שלכאורה אי אפשר להמשיך את שרשרת השקילויות שכן ייתכן שלא קיים $d \in \mathbb{R}$ כך ש-$d^2=b^2-4ac$ ובנוסף עלולים להיות שני מספרים $d_1,d_2 \in \mathbb{R}$ שונים זה מזה המקיימים $(d_1)^2=(d_2)^2=b^2-4ac$, במילים אחרות: הוצאת שורש ריבועי מעל הממשיים היא פעולה שאינה הפיכה (ראו כאן את הקשר לפונקציה הפיכה). למרות זאת אנחנו יכולים להמשיך את שרשרת השקילויות כך:
לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\iff ax^2+bx+c-c=0-c \\ &\vdots \\ &\iff (2ax+b)^2=b^2-4ac \\ &\iff \left(\exists d\in\mathbb{R}: d^2=b^2-4ac\right)\wedge\left(2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}\right) \\ &\iff \left(b^2-4ac\ge 0\right)\wedge\left(2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right) \\ &\iff \left(b^2-4ac\ge 0\right)\wedge\left(x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \end{aligned}$$

א"כ הצלחנו להוכיח שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $ax^2+bx+c=0$ אם"ם מתקיים $b^2-4ac\ge 0$ ובנוסף $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ו/או $x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
ראשית נובע מזה שאם $b^2-4ac<0$ אז לא קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$ax^2+bx+c=0$, כלומר אין למשוואה פתרון; ושנית, אם $b^2-4ac\ge 0$ אז אוסף הפתרונות הוא:

$$\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

ושוב, אם $b^2-4ac=0$ אז "שני" הפתרונות הם בעצם אחד... ■

3 נספח: אינטואיציה לנוסחת השורשים

♣ נתבונן בפרבולה $p\cdot(x-d)^2+r$, שימו לב מה קורה כאן: לקחנו את הפרבולה הכי פשוטה שהיא x^2, מתחנו אותה בכיוון ציר ה-y פי p (או כיווצנו פי p^{-1}), הזזנו אותה ימינה ב-d (או שמאלה ב-$-d$), אם $p<0$ אז גם שיקפנו אותה סביב ציר ה-x ולבסוף הזזנו אותה כלפי מעלה ב-r (או מטה ב-$-r$). הרעיון הוא כזה: אנו עומדים להראות שניתן להציג כל פרבולה ע"י הפרבולה הבסיסית x^2 לאחר מתיחה/כיווץ, הזזה ושיקוף סביב ציר ה-x; לאחר שנציג אותה כך יקל עלינו למצוא את השורשים (אם יש כאלה) שהרי הם:

$$x=\pm\sqrt{-\frac{r}{p}}+d$$

יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש-$a\neq 0$ ותהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה פולינומיאלית המוגדרת ע"י $f(x)=ax^2+bx+c$ (לכל $x\in\mathbb{R}$).

נניח שאכן קיימים $p,d,r\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים (זה מזכיר לכם משהו?):

$$f(x)=ax^2+bx+c=p\cdot(x-d)^2+r$$

ונפתח את הריבוע כדי לראות מי הם:

$$\begin{aligned}p\cdot(x+d)^2+r&=p\cdot\left(x^2-2dx+d^2\right)+r\\&=px^2-2pdx+pd^2+r\end{aligned}$$

א"כ נקבל:

$$\begin{aligned}a&=p\\b&=-2pd\\c&=pd^2+r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow p=a\\&\Rightarrow d=-\frac{b}{2p}=-\frac{b}{2a}\\&\Rightarrow r=c-pd^2=c-a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)^2\\&\quad=c-a\cdot\frac{b^2}{4a^2}=c-\frac{b^2}{4a}\end{aligned}$$

♣ כבר כעת ניתן לראות שקודקוד הפרבולה נמצא בנקודה $x=-\frac{b}{2a}$ שכן d הוא בדיוק המרחק שבו הזזנו את הפרבולה בכיוון ציר ה-x.

אם נציב את p, d ו-r במקומותיהם נקבל את ההוכחה לטענה שהרי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
p \cdot (x-d)^2 + r &= a \cdot \left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \\
&= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \\
&= a \cdot \left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \\
&= ax^2 + 2ax \cdot \frac{b}{2a} + \frac{ab^2}{4a^2} + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \\
&= ax^2 + bx + c
\end{aligned}$$

לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$p \cdot (x-d)^2 + r = 0 \iff p \cdot (x-d)^2 = -r \iff (x-d)^2 = -\frac{r}{p}$$

מכאן שאם $-\frac{r}{p} < 0$ אז אין לפרבולה נקודות חיתוך עם ציר ה-x.
נמשיך בחיפוש אחר הפתרונות תוך הנחה ש-$-\frac{r}{p} \geq 0$.

$$\begin{aligned}
p \cdot (x-d)^2 + r = 0 &\iff p \cdot (x-d)^2 = -r \iff (x-d)^2 = -\frac{r}{p} \\
&\iff x - d = \pm\sqrt{-\frac{r}{p}} \iff x = \pm\sqrt{-\frac{r}{p}} + d
\end{aligned}$$

למעשה בזה היינו אמורים לסיים שהרי מצאנו את קבוצת הפתרונות של המשוואה, אך נמשיך מעט בשביל מי שרוצה לבדוק שאכן קיבלנו את נוסחת השורשים.

נשים לב לכך שמתקיים:

$$-\frac{r}{p} = -\frac{c - \frac{b^2}{4a}}{a} = -\frac{4ac - b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

ומכאן נובע כי:

$$-\frac{r}{p} < 0 \iff \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0 \iff b^2 - 4ac < 0$$

כלומר אם $b^2 - 4ac < 0$ אז אין לפרבולה נקודות חיתוך עם ציר ה-x. בנוסף, מתקיים:

$$\begin{aligned}
\pm\sqrt{-\frac{r}{p}} + d &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} + \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} \\
&= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$