הקדמה - מהות המספרים המרוכבים

אלגברה ליניארית (1) - 80134

מרצה: ערן נבו

מתרגלים: איתמר ישראלי ושני שלומי

סמסטר ב' תשפ"ב, האוניברסיטה העברית

-

אלגברה ליניארית (2) - 80135

מרצה: איתמר צביק

מתרגלים: גיל לבנה ויואב כהן

סמסטר א' תשפ"ג, האוניברסיטה העברית

-

פונקציות מרוכבות - 80519

מרצה: אילון לינדנשטראוס

מתרגל: שאול (שאולי) רגימוב

סמסטר א' תשפ"ד, האוניברסיטה העברית

-

נכתב ע"י שריה אנסבכר

תוכן העניינים

בדרך כלל לומדים על המספרים המרוכבים כבר בליניארית 1; למרות זאת בחרתי להביא את הנושא הזה רק בליניארית 2 מפני שבליניארית 1 אין שום דבר המייחד את שדה המספרים המרוכבים ביחס לשדות אחרים, ולעומת זאת בליניארית 2 הוא חלק מהותי מהקורס, סיבה נוספת היא שחלק קטן מהבנייה הפורמלית של המספרים המרוכבים מסתמך על ידע בסיסי מליניארית 1.

* * *

סיכומי קורס זה מוקדשים לאהרון כהן;
אהרון, הידיעה שתקרא את הסיכומים הללו דרבנה אותי לאורך כל הדרך.
בהצלחה!

* * *

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

המוטיבציה המקובלת להגדרת המספרים המרוכבים היא "חיסרון" הנמצא במספרים הממשיים: קיימים פולינומים בעלי מקדמים ממשיים שאין להם שורש ממשי (המפורסם שבהם הוא x^2+1), אישית אני לא רואה בכך שום בעיה או חיסרון של המספרים הממשיים, וזאת בניגוד לחיסרון שאני רואה במספרים הרציונליים שאינם מתארים כל קטע גאומטרי אפשרי. בפרק השני של קובץ זה אתאר בקצרה את הרעיון הפורמלי שבאמצעותו מרחיבים את שדות ע"י "המצאת" שורשים לפולינומים חסרי שורשים[1]; אך את התפיסה הפילוסופית בדבר הבעיה שבפולינומים חסרי שורשים לא אוכל לייצג נאמנה, ולכן אפנה אתכם לסדרת פוסטים של גדי אלכסנדרוביץ' בבלוג שלו "לא מדויק" (מומלץ בחום בלי שום קשר), הנה קישור לפוסט הראשון "איי!".
מבחינה היסטורית הגילוי (או ההמצאה, תלוי את מי שואלים) של המספרים המרוכבים היה בדרך לפתרון משוואות ממעלה שלישית: אנחנו יודעים שלכל משוואה ממעלה אי-זוגית יש לפחות פתרון **ממשי** אחד (הוכחנו זאת באינפי' 1), אבל בניגוד למשוואות ממעלה שנייה "נוסחת השורשים" של משוואות ממעלה שלישית מערבת מספרים מרוכבים. במשך שבע שנים זו הייתה הסיבה היחידה שראיתי בקיום של מספרים מרוכבים אמת פילוסופית ולא סיפורי אלף לילה ולילה, עד שבמהלך החופשה הכפויה שקיבלנו בעקבות מתקפת הפתע של שמחת תורה תשפ"ד, מצאתי את האינטואיציה שחיפשתי זמן רב כל כך. באותה עת עסקתי בשיפוץ שני הפרקים הראשונים של הקובץ "הקדמה למתמטיקה אוניברסיטאית", ובכתיבת הפרק השלישי מאפס. מאז שלמדתי את אינפי' 1 רציתי לתאר כיצד (באופן תאורטי) הייתי מפתח את אקסיומות השדה הסדור השלם בעצמי, לו רק היה לי מספיק זמן ולו הייתי חכם מספיק. עניין זה מופיע במלואו בפרק השלישי של הקובץ הנ"ל, ואת הפרק הרביעי כלל לא תכננתי לכתוב: הוא פשוט צץ באופן טבעי במוחי בתור ההמשך הישיר של הרעיונות אותם פיתחתי בפרק שלפניו. בהקדמה זו אני עומד להביא בקצרה את מה שתיארתי שם בהרחבה, אני ממליץ לכם לעיין גם בקובץ ההוא מפני שלטעמי זהו הקובץ היפה ביותר שכתבתי מעודי אודות המתמטיקה.

2 מהם מספרים?

באופן טבעי כולנו מתחילים מהמספרים הטבעיים המתארים כמויות בדידות של עצמים כגון כדורים, תפוחים וכיסאות; לאחר מכן אנחנו עוברים אל הרציונליים החיוביים שמספרים לנו על משולשי פיצה ופרוסות עוגה; ובשלב הבא נדבר על המספרים הממשיים החיוביים שמכמתים דברים רציפים כגון אורכי קטעים ושטחי בתים. ומה אז? פתאום צצים להם שני יצורים מוזרים: האפס והמספר השלילי, זה לא מיקרי שעברו אלפי שנים בין זיהוי המספרים האי-רציונליים ככאלה לבין קבלת האפס כמספר לגיטימי; יש כאן קפיצת מדרגה עצומה: ממספרים שמתארים כמויות ולכן חיוביים במהותם אנחנו עוברים למספרים שמייצגים... ובכן, את מה מייצגים המספרים השליליים בכלל?
יש לשאלה הזו כמה תשובות נפוצות (אתם מוזמנים להקליד ב-Google את השאלה האלמותית "למה מינוס כפול מינוס שווה פלוס?"), אך התשובה הטובה ביותר לדעתי היא כדלהלן. ניתן להפשיט את המספרים הממשיים החיוביים כך שייצגו נקודות על קרן אין-סופית הנמצאות במרחק נתון מהקצה הסופי של הקרן - ההתאמה בין המספרים לנקודות תתבצע ע"י המרחק של הנקודות מהקצה: נקבע נקודה שרירותית נוספת ונקרא לה "אחד", נקודה זו תשמש בתור אמת המידה שלנו, כעת יש משמעות לאמירה שנקודה מסוימת נמצאת במרחק של 10 יחידות מקצה הקרן. האינטואיציה לחיבור של מספרים ממשיים חיוביים תהיה ע"י השאלה "אם קצה הקרן היה בנקודה a, היכן הייתה נקודה b?" התשובה לשאלה היא הסכום $a+b$, והאינטואיציה לכפל תהיה השאלה "לו היינו בוחרים בנקודה a בתור ה-1, כלומר לו a הייתה אמת המידה, איפה תימצא נקודה b?" התשובה לשאלה היא המכפלה $a\cdot b$. ומה עם קצה הקרן? האין היא נקודה לגיטימית? מה גם שישנו חוסר סימטריה בין השאלה הראשונה לשנייה: בראשונה אין שם למה שבעתיד ייקרא "האיבר האדיש לפעולת החיבור", ואילו בשנייה אנו מכנים את האיבר האדיש לכפל בשם "אחד"; לפיכך נוסיף את קצה הקרן לקבוצת המספרים שלנו ונקרא לה "אפס". אבל למה לעצור כאן? במה חטאו שאר הנקודות על הישר המכיל את הקרן? ומה פשען של שאר הנקודות במישור המכיל את הישר? ושל כל הנקודות במרחב?
רגע רגע, אני לא יכול לענות על כל השאלות הללו ביחד, בואו נענה עליהן אחת אחת ולפי הסדר. אכן אין שום סיבה להפלות את שאר הנקודות בישר, אך באיזה שם נכנה כל אחת מהן? הדרך האינטואיטיבית ביותר היא להעתיק את הקרן המקורית שלנו על החלק השני של הישר, כך שכל נקודה תקבל את המרחק שלה מ-0 בתוספת סימן מינוס המתאר את היותה ב**כיוון** ההפוך מזה של

[1] אני לא בקיא בתחום הזה וייתכן שנפלו בפרק זה טעויות גסות.

הקרן המקורית. כלומר נבחר נקודה שרירותית במרחב ונקרא לה "אפס", נבחר נקודה **אחרת** ונקרא לה "אחד", שוב יהיה ה-1 אמת המידה שלנו אלא שכעת אמת המידה כוללת יותר מאשר גודל - היא כוללת גם **כיוון**! א"כ כל נקודה על הישר שמגדירות הנקודות 0 ו-1 תיקרא בשם ע"פ מרחקה מ-0 והכיוון שלה ביחס לאפס כשהכיוון שבו נמצא 1 ייקרא הכיוון "החיובי" והכיוון ההפוך ייקרא הכיוון "השלילי". השרירותיות בבחירה של 0 ו-1 מובילה אותנו שוב לשאלות "מה אם היינו בוחרים בנקודה אחרת בתור ה-0?" או "מה אם היינו בוחרים בנקודה אחרת בתור ה-1?", ושוב נגדיר את החיבור והכפל ע"י התשובות לשאלות אלו. זוהי הסיבה לכך שסכום מספרים שליליים הוא שלילי בעוד שמכפלת שליליים היא מספר חיובי.

אבל למה שנגביל את עצמנו לישר? מה עם המישור והמרחב התלת-ממדי? בליניארית 1 ראינו דרך לחשוב על שני אלו כמרחבים וקטוריים, אולם דרך זו דרשה מאיתנו לוותר על היכולת לכפול כל שני איברים שנרצה זה בזה ואפשרה לנו לכפול רק במספרים ממשיים. במרחב התלת-ממדי אין דרך מוכרת להיפטר מהבעיה הזו[2], אך במישור ניתן לבצע זאת בצורה מרהיבה. כמו שאת הישר הממשי יצרנו ע"י העתקת הקרן בכיוון השלילי נוכל לבצע את אותה פעולה בכל זווית שהיא, 360° מעלות: שוב נבחר נקודה שרירותית שנכנה בשם "אפס" ונקודה נוספת שתיקרא "אחד", שוב תוביל אותנו שרירותיות זו לשאלה מה היה קורה לו היינו בוחרים באופן אחר ולהגדרת החיבור והכפל באמצעות התשובות לשאלות אלו. זו הסיבה לכך שחיבור מספרים מרוכבים מזדהה עם חיבור וקטורים ב-$\mathbb{R}^2$, ואילו הכפל מוגדר לכל נקודה במישור ע"י כיווץ/מתיחה וסיבוב בזווית המתאימה.

♣ שימו לב לשינוי הגדול שחל במושג "אחד": בתחילה הוא הכיל גודל בלבד ובכך היה אמת מידה במובן המקובל, אח"כ הוספנו לו רכיב כיוון אך עוד ניתן היה לחשוב שמדובר בשיקוף בלבד[3], וכעת משמעותו היא גודל ובנוסף כיוון יחיד ממעגל שלם.

3 הרחבת שדות

♣ בהינתן שדה $\mathbb{F}$ כך שבחוג הפולינומים $\mathbb{F}[x]$ קיימים פולינומים חסרי שורשים ניתן "להרחיב" את $\mathbb{F}$ לשדה גדול יותר[4] ע"י "המצאת" איברים חדשים שיהוו שורשים של אותם פולינומים והוספת כל האיברים הנדרשים ע"מ שהקבוצה תישאר שדה[5], בואו נראה את זה בפעולה.

3.1 דוגמה ראשונה: שדה בעל ארבעה איברים

בקובץ "על שדות" ראינו את השדה בעל שני האיברים הנקרא $\mathbb{F}_2$ שפעולות החיבור והכפל שלו מוגדרות ע"י הטבלאות:

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

נשים לב לכך שלפולינום $x^2+x+1\in\mathbb{F}_2[x]$ אין שורשים ב-$\mathbb{F}_2$ (קל לוודא זאת בשדה סופי), א"כ נגדיר קבוצה חדשה $\mathbb{F}_4$ (כי יהיו בה ארבעה איברים) שתקיים שלושה דברים: היא שדה, $\mathbb{F}_2$ הוא תת-שדה שלה (כלומר הוא תת-קבוצה של $\mathbb{F}_2$ והוא שדה ביחס לאותן פעולות) ובנוסף קיים $a\in\mathbb{F}_4$ כך ש-a הוא שורש של הפולינום הנ"ל. אנחנו יודעים שאם λ הוא שורש של פולינום אז הפולינום $x-\lambda$ מחלק את אותו פולינום, עוד אנחנו יודעים שהדרגה של מכפלת פולינומים היא סכום דרגות המוכפלים, מכאן שקיים פולינום ליניארי $x-b\in\mathbb{F}_4[x]$ כך שמתקיים $x^2+x+1=(x-a)(x-b)$[6].

---

[2] **אולי אפילו יש הוכחה שגם לעולם לא תימצא כזו?**

[3] וזו אכן הדרך לחשוב עליו במרחבים וקטוריים - כך עדיין יש תשובה ברורה לשאלה "מה היה קורה אם היינו בוחרים בנקודה אחרת בתור ה-1 שלנו?"

[4] כלומר ליצור שדה ש-$\mathbb{F}$ מהווה תת-שדה שלו, אתם מוזמנים לקרוא עוד על הרחבת שדות בוויקיפדיה.

[5] כלומר תקיים את תשע אקסיומות השדה שהכרנו.

[6] כמובן שהמשמעות של $x-a$ היא $x+(-a)$, כלומר הזכרנו כאן את הנגדי של a מבלי לומר זאת בפירוש; כנ"ל לגבי $-b$ ו-b.

א"כ $\{0,1,a,b\} \subseteq \mathbb{F}_4$ וטבלאות החיבור והכפל נראות כך:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	?	?
a	a	?	?	?
b	b	?	?	?

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	?	?
b	0	b	?	?

מהפילוג בחוג הפולינומים נובע ש-$x^2+x+1 = x^2+(-a-b)x+a\cdot b$, כלומר: $a\cdot b=(-a)(-b)=1$ (ומכאן ש-$a^{-1}=b$ ו-$b^{-1}=a$) ו-$-(a+b)x=-ax-bx=x$ (ומכאן ש-$a+b=-1$ ולכן גם $a+1=-b$ ו-$b+1=-a$). א"כ מצאנו את הנגדיים וההופכיים של a ו-b ובינתיים מילאנו את לוחות החיבור והכפל שלנו כך:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	$-b$	$-b$
a	a	$-b$	?	-1
b	b	$-a$	-1	?

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	?	1
b	0	b	1	?

נשים לב שנכון לעכשיו ייתכן ש-$-a$ ו-$-b$ הם איברים שאינם נמצאים בקבוצה $\{0,1,a,b\}$.
אנחנו יודעים ש-$1+1=0$ שהרי $\mathbb{F}_2$ הוא תת-שדה, מכאן ש-$-1=1$ וגם:

$$0=a\cdot 0=a\cdot(1+1)=a\cdot 1+a\cdot 1=a+a$$
$$0=b\cdot 0=b\cdot(1+1)=b\cdot 1+b\cdot 1=b+b$$

כלומר $a=-a$ ו-$b=-b$ ולכן טבלת החיבור שלנו הושלמה והיא נראית כך:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	b
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

כעת נותרת השאלה מי הם $a\cdot a$ ו-$b\cdot b$; מיחידות האיבר האדיש לכפל נובע ש-$a\cdot a\neq a$ ו-$b\cdot b\neq b$, מהעובדה שמכפלת שני מספרים שונים מאפס אינה יכולה להיות 0 בשדה נובע ש-$a\cdot a\neq 0$ ו-$b\cdot b\neq 0$, מיחידות ההופכי[7] נובע ש-$a\cdot a\neq 1$ ו-$b\cdot b\neq 1$ ולכן האפשרות היחידה שנותרה[8] היא $a\cdot a=b$ ו-$b\cdot b=a$. א"כ השלמנו את טבלאות החיבור והכפל שלנו והן נראות כך:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	b
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

כעת ניתן לעבור על תשע אקסיומות השדה ולראות שהן אכן מתקיימות וא"כ $\mathbb{F}_4$ הוא שדה בעל ארבעה איברים ו-$\mathbb{F}_2$ הוא תת-שדה שלו.

♣ ראינו בעבר את השדות מהצורה $\mathbb{F}_p$ כאשר p הוא ראשוני, מעניין לדעת גם שהגודל של כל שדה סופי הוא מהצורה p^n כאשר p ראשוני ו-n טבעי ולכל מספר כזה קיים בדיוק שדה אחד מגודל זה.

[7] ראינו ש-$a=-a$ ו-$b=-b$ אך לא ייתכן ש-$a=b$ משום שאז $0=a+a=a+b=1$.
[8] כל עוד נרצה שלא להוסיף איברים אם לא ברור שיש בכך צורך.

3.2 דוגמה שנייה: שדה ההרחבה של שורש 2

לפולינום $x^2-2\in\mathbb{Q}[x]$ אין שורש מעל $\mathbb{Q}$, א"כ נוסיף ל-$\mathbb{Q}$ איבר שיהיה שורש חיובי של פולינום זה ונסמן אותו ב-$\sqrt{2}$ (מיחידות הנגדי נובע ש-$\left(\sqrt{2}\right)^2=2$); כעת, כדי שנוכל לשמור על הסגירות לחיבור ולכפל עלינו להוסיף את כל האיברים מהצורה $x+\sqrt{2}$ או מהצורה $y\cdot\sqrt{2}$ כאשר $x,y\in\mathbb{Q}$ ולכן נצטרך להוסיף את כל האיברים מהצורה $x+y\cdot\sqrt{2}$. א"כ נגדיר קבוצה חדשה להיות $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right):=\left\{x+y\cdot\sqrt{2}\mid x,y\in\mathbb{Q}\right\}$ כאשר החיבור והכפל בה מוגדרים ע"י:

$$\begin{aligned}\left(a+b\cdot\sqrt{2}\right)+\left(c+d\cdot\sqrt{2}\right)&=(a+c)+(b+d)\cdot\sqrt{2}\\ \left(a+b\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(c+d\cdot\sqrt{2}\right)&=a\cdot c+(a\cdot d+b\cdot c)\cdot\sqrt{2}+b\cdot d\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2\\ &=ac+(ad+bc)\cdot\sqrt{2}+2bd\\ &=(ac+2bd)+(ad+bc)\cdot\sqrt{2}\end{aligned}$$

כעת ניתן לעבור על אקסיומות השדה ולראות שהן אכן מתקיימות וא"כ $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ הוא אכן שדה ו-$\mathbb{Q}$ הוא תת-שדה שלו.

♣ במובן מסוים ניתן לומר שגם בניית המספרים השליליים והרציונליים נעשתה ע"י "המצאת" שורשים לפולינומים חסרי שורשים: רצינו שלפולינומים מהצורה $x+n$ כש-n טבעי יהיה שורש ולכן "המצאנו" את המספרים השליליים וכמו כן רצינו שלפולינומים מהצורה $nx-m$ כש-n טבעי ו-m שלם יהיו שורשים ולכן "המצאנו" את המספרים הרציונליים.

3.3 שדה המספרים המרוכבים

נתבונן ב-$\mathbb{R}$ כשדה, לאו דווקא כשדה סדור שלם[9], ונשים לב לכך שהפולינום $x^2+1\in\mathbb{R}[x]$ הוא חסר שורשים[10], א"כ נגדיר קבוצה חדשה $\mathbb{C}$ שתקיים שלושה דברים: היא שדה, $\mathbb{R}$ הוא תת-שדה שלה ובנוסף קיים $i\in\mathbb{C}$ כך ש-i הוא שורש של הפולינום הנ"ל, מהגדרה i מקיים $i^2+1=0$ ולכן מיחידות הנגדי נקבל ש-$i^2=-1$.

♣ חשוב מאד: לביטוי $\sqrt{-1}$ אין משמעות מפני שגם הנגדי של i מקיים $(-i)^2=-1$ [11] ומכיוון ש-$\mathbb{C}$ אינו שדה סדור אי אפשר להחליט ש-$\sqrt{-1}$ הוא דווקא ה"חיובי" מביניהם; הנקודה הזו היא ה"פתרון" ל"סתירה" הבאה:

$$-1=i\cdot i=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$$

כפי שראינו לעיל אם $\mathbb{C}$ הוא שדה אז קיים $j\in\mathbb{C}$ כך ש-$x^2+1=(x-i)(x-j)$, אותו j צריך לקיים $x^2+1=x^2+(-i-j)x+i\cdot j$, כלומר $-i-j=0$ (ולכן $i+j=0$ ו-$j=-i$) ו-$i\cdot j=1$ (ולכן $j=i^{-1}$).

כדי ש-$\mathbb{C}$ יהיה סגור לחיבור ולכפל אנחנו צריכים שלכל $x,y\in\mathbb{R}$ יתקיים $x+i\in\mathbb{C}$ ו-$y\cdot i\in\mathbb{C}$ ומכאן שגם $x+y\cdot i\in\mathbb{C}$, נשים לב שניתן לכתוב כל מספר $x\in\mathbb{R}$ בצורה זו: $x=x+0\cdot i$ (כמו כן ניתן לכתוב כך גם מספר ש"אין" להם רכיב ממשי, כך: $0+y\cdot i$).

עד כה הסברנו את המוטיבציה להגדיר את השדה החדש שלנו בתור $\mathbb{C}:=\{x+y\cdot i\mid x,y\in\mathbb{R}\}$, בקובץ ההגדרות של המספרים המרוכבים נראה שאכן מדובר בשדה אך כבר כעת ברור שאת פעולות החיבור והכפל של $\mathbb{C}$ עלינו להגדיר כך שיתקיים:

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di)&=(a+c)+(b+d)\cdot i\\ (a+bi)\cdot(c+di)&=a\cdot(c+di)+bi\cdot(c+di)\\ &=ac+ad\cdot i+bc\cdot i+bd\cdot i^2\\ &=ac+(ad+bc)\cdot i+bd\cdot(-1)\\ &=(ac-bd)+(ad+bc)\cdot i\end{aligned}$$

[9] נראה בהמשך ששדה המרוכבים אינו יכול להיות סדור ולא נעסוק בקובץ בתכונת השלמות.

[10] הריבוע של כל מספר ממשי הוא אי-שלילי ולכן לכל $x\in\mathbb{R}$ יתקיים $x^2+1\geq 1>0$, זו תהיה הפעם האחרונה שבה השתמשנו בהיותו של $\mathbb{R}$ שדה סדור.

[11] שהרי $i^2+1=0$ $(-i)^2+1=(-1)^2\cdot i^2+1=1\cdot i^2+1=i^2+1=0$ ולכן מיחידות הנגדי נובע ש-$(-i)^2=-1$.