מאגר פונקציות פתולוגיות

חשבון אינפיניטסימלי (1) - 80131

מרצה: רז קופרמן

מתרגלים: אור יער ודניאל רוזנבלט

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

-

חשבון אינפיניטסימלי (2) - 80132

מרצה: יורם לסט

מתרגלים: דניאל אופנר ומתן בן-אשר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

-

נכתב ע"י: שריה אנסבכר

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

* * *

המאגר עדיין בתהליכי בנייה, אשמח אם תעזרו לי לאסוף פונקציות פתולוגיות, סדרות פתולוגיות וטורים פתולוגיים; בעתיד בכוונתי להוסיף גם הסברים וגרפים עבור כל פונקציה.

חלק I

רציפות וגזירות

1 דיריכלה ובנותיה

תהא $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית דיריכלה[1] המוגדרת ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$D\left(x\right):=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

♣ זוהי בעצם הפונקציה המציינת של $\mathbb{Q}$.

תכונות פתולוגיות

- רציפות: פונקציית דיריכלה אינה רציפה ולו בנקודה אחת (אי-רציפות מסדר שני).
- גזירות: מאי-הרציפות נובע שפונקציית דיריכלה אינה גזירה ולו בנקודה אחת.
- אינטגרביליות: פונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית רימן על אף קטע סגור.

♣ פונקציית דיריכלה (והדומות לה) היא הפונקציה החסומה היחידה שאני מכיר שגם אינה אינטגרבילית רימן.

1.1 הכפלה ב-x

תהא $D_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$D_{1}\left(x\right):=x\cdot D\left(x\right)=\begin{cases}x & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

תכונות פתולוגיות

- רציפות: הנקודה היחידה שבה D_1 רציפה היא 0, כל נקודה אחרת היא נקודת אי-רציפות מסדר שני.
- גזירות: D_1 אינה גזירה בשום נקודה.
- אינטגרביליות: D_1 אינה אינטגרבילית רימן על אף קטע סגור.

[1] ערך בוויקיפדיה: יוהאן פטר גוסטב לז'ן דיריכלה.

1.2 הכפלה ב-x^2

תהא $D_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$D_2\left(x\right):=x^2\cdot D\left(x\right)=\begin{cases}x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

תכונות פתולוגיות

- רציפות: הנקודה היחידה שבה D_2 רציפה היא 0, כל נקודה אחרת היא נקודת אי-רציפות מסדר שני.
- גזירות: הנקודה היחידה שבה D_2 גזירה היא 0.
- אינטגרביליות: D_2 אינה אינטגרבילית רימן על אף קטע סגור.

1.3 הכללה של הסעיף הקודם

יהי $a\in\mathbb{R}$ ותהא $D_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$D_3\left(x\right):=\begin{cases}x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ 2a\cdot\left(x-a\right)+a^2 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}=\begin{cases}x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ 2a\cdot x-a^2 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

תכונות פתולוגיות

- רציפות: הנקודה היחידה שבה D_2 רציפה היא a, כל נקודה אחרת היא נקודת אי-רציפות מסדר שני.
- גזירות: הנקודה היחידה שבה D_2 גזירה היא a.
- אינטגרביליות: D_2 אינה אינטגרבילית רימן על אף קטע סגור.

♣ מה שקרה כאן הוא ששילבנו בין הפרבולה x^2 לישר המשיק לה בנקודה a ע"י פונקציית דיריכלה: ברציונליים קיבלנו את x^2 ובאי-רציונליים קיבלנו את הישר המשיק, את הטריק הזה ניתן לעשות עם כל שתי פונקציות וכך לדאוג שהפונקציה החדשה תירש את תכונה של אחת מהפונקציות המקוריות אם"ם התכונה שייכת גם לפונקציה האחרת.

2 סינוס "משוגעת" ובנותיה

תהא $S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$S\left(x\right)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

מכאן שלכל $0\neq x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}S'\left(x\right)&=-\frac{1}{x^{2}}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\\ S''\left(x\right)&=\frac{2}{x^{3}}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^{2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)\\ &=\frac{2}{x^{3}}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^{4}}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

תכונות פתולוגיות

- רציפות: S אינה רציפה ב-0 (אי-רציפות מסדר שני), אך היא רציפה בכל נקודה אחרת.
- גזירות: S אינה גזירה ב-0, אך היא גזירה בכל נקודה אחרת.
- אינטגרביליות: S אינטגרבילית על כל קטע סגור.

טענה 2.1. S אינה קעורה וגם אינה קמורה בכל מקטע הכולל את 0.

טענה 2.2. לכל $m\in\mathbb{R}$ ולכל $0<\delta\in\mathbb{R}$ קיים $x\in B_{\delta}\left(0\right)$ כך ש-$S'\left(x\right)=m$, בפרט 0 היא נקודת אי-רציפות מסדר שני של S'.

2.1 הכפלה ב-x

תהא $S_{1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$S_{1}\left(x\right):=x\cdot S\left(x\right)=\begin{cases}x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

מכאן שלכל $0\neq x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}S_{1}'\left(x\right)&=1\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\\ S_{1}''\left(x\right)&=\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\cdot\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)\right)=-\frac{1}{x^{3}}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

תכונות פתולוגיות

- רציפות: S_{1} רציפה.
- גזירות: S_{1} אינה גזירה ב-0, אך היא גזירה בכל נקודה אחרת.
- אינטגרביליות: מהרציפות נובע ש-S_{1} אינטגרבילית רימן על כל קטע סגור.

טענה 2.3. S_{1} אינה קעורה וגם אינה קמורה בכל מקטע הכולל את 0.

טענה 2.4. לכל $m\in\mathbb{R}$ ולכל $0<\delta\in\mathbb{R}$ קיים $x\in B_{\delta}\left(0\right)$ כך ש-$S_{1}'\left(x\right)=m$, בפרט 0 היא נקודת אי-רציפות מסדר שני של S_{1}'.

2.2 הכפלה ב-x^2

תהא $S_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$S_2\left(x\right)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

מכאן שלכל $0\neq x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}S_2'\left(x\right)&=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\&=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\\S_2''\left(x\right)&=2\cdot S_1'\left(x\right)-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\&=\left(-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

בנוסף מתקיים:

$$\begin{aligned}S_2'\left(0\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{S_2\left(x\right)-S_2\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0\end{aligned}$$

תכונות פתולוגיות

- רציפות: S_2 רציפה.
- גזירות: S_2 גזירה.
- אינטגרביליות: מהרציפות נובע ש-S_1 אינטגרבילית רימן על כל קטע סגור.

טענה 2.5. S_2 אינה קעורה וגם אינה קמורה בכל מקטע הכולל את 0.

טענה 2.6. הנגזרת של S_2 מוגדרת ב-0 אך אינה רציפה ב-0 (אי-רציפות מסדר שני).

♣ S_2' היא הפונקציה היחידה שאני מכיר[2] שיש לה קדומה אך היא אינה רציפה.

[2] עדי כדי הזזה, כיווץ/מתיחה ושיקוף.

2.3 "נדנוד" של פונקציה

תהא $S_3:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $0\neq x\in\mathbb{R}$):

$$S_3\left(x\right):=\frac{1}{x}+\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

מכאן שלכל $0\neq x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}S_3'\left(x\right)&=-\frac{1}{x^2}\cdot\left(1+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\S_3''\left(x\right)&=\frac{2}{x^3}\cdot\left(1+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)-\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\&=\frac{2}{x^3}\cdot\left(1+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)-\frac{1}{x^4}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

תכונות פתולוגיות

- <u>רציפות:</u> S_3 רציפה בכל תחום הגדרתה (היא אינה מוגדרת ב-0).
- <u>גזירות:</u> S_3 גזירה בכל תחום הגדרתה (היא אינה מוגדרת ב-0).
- <u>אינטגרביליות:</u> מהרציפות נובע ש-S_3 אינטגרבילית רימן על כל קטע סגור שאינו כולל את 0.

טענה 2.7. S_3 אינה קעורה וגם אינה קמורה בכל מקטע הכולל את 0.

טענה 2.8. לכל $m\in\mathbb{R}$ ולכל $0<\delta\in\mathbb{R}$ קיים $x\in B_\delta\left(0\right)$ כך ש-$S_3'\left(x\right)=m$, בפרט 0 היא נקודת אי-רציפות מסדר שני של S_3'.

3 פונקצייתויירשטראס

יהיו $1 < a \in \mathbb{R}$ ו-$b \in \text{Odd}$ כך ש-$\frac{b}{a} > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

תהא $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית ויירשטראס המוגדרת ע"י (לכל $x \in \mathbb{R}$):

$$W(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(b^n \pi x)}{a^n}$$

תכונות פתולוגיות

- רציפות: W רציפה.
- גזירות: W אינה גזירה באף נקודה.
- אינטגרביליות: מהרציפות נובע ש-W אינטגרבילית רימן על כל קטע סגור.

טענה 3.1. W רציפה.

הוכחה. נשים לב לכך שלכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left|\frac{\cos(b^n \pi x)}{a^n}\right| \leq \frac{1}{a^n}$$

מכאן שע"פ מבחן ה-M של ויירשטראס טור הפונקציות הנ"ל מתכנס במ"ש ל-W על כל $\mathbb{R}$, ומכיוון שזהו טור פונקציות רציפות נובע מכאן ש-W היא פונקציה רציפה. ∎

טענה 3.2. W אינה גזירה באף נקודה.

הוכחה. **צריך להוסיף הוכחה.** ∎

חלק II

אינטגרביליות

4 פונקציית רימן

תהא $R:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית רימן המוגדרת ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$R\left(x\right):=\begin{cases} 0 & x\notin\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q},\ q>0,\ \gcd\left(p,q\right)=1 \end{cases}$$

כלומר הערך שהפונקציה מקבלת ברציונליים הוא ההופכי של המכנה בהצגה המצומצמת.

תכונות פתולוגיות

- רציפות: פונקציית רימן רציפה אך ורק בנקודות אי-רציונליות.
- גזירות: פונקציית רימן אינה גזירה בשום נקודה.
- אינטגרביליות: פונקציית רימן אינטגרבילית רימן על כל קטע סגור (האינטגרל הוא 0).

טענה 4.1. לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\lim_{x\to a}R\left(x\right)=0$.

הוכחה. יהי $a\in\mathbb{R}$ ויהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$.
יהי $N\in\mathbb{N}$ כך ש-$\eta:=\frac{1}{N}<\varepsilon$, מכאן שלכל $N\geq q\in\mathbb{N}$ קיים לכל היותר $p\in\mathbb{Z}$ אחד ויחיד כך שמתקיים $\frac{p}{q}\in B_{\eta}^{\circ}\left(a\right)$.
א"כ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $N\geq q\in\mathbb{N}$ ולכל $p\in\mathbb{Z}$ מתקיים $\frac{p}{q}\notin B_{\delta}^{\circ}\left(a\right)$, תהא δ כנ"ל.
מכאן שלכל $x\in B_{\delta}^{\circ}\left(a\right)$ מתקיים $-\varepsilon<0\leq R\left(x\right)\leq\frac{1}{N}<\varepsilon$.

$$\Rightarrow\lim_{x\to a}R\left(x\right)=0$$

■

מסקנה 4.2. פונקציית רימן רציפה בכל הנקודות האי-רציונליות ואינה רציפה בכל הנקודות הרציונליות.

טענה 4.3. פונקציית רימן אינה גזירה בשום נקודה.

הוכחה. ראינו שהיא אינה רציפה בכל נקודה רציונלית ומכאן שהיא גם אינה גזירה בנקודות אלו.
יהי $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, כשהתחלנו ללמוד על קירובים דיופנטיים[3] ראינו שקיימות סדרת טבעיים עולה ממש $\left(q_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ וסדרת שלמים $\left(p_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left|x-\frac{p_{n}}{q_{n}}\right|<\frac{1}{\left(q_{n}\right)^{2}}$$

ובפרט $\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n}}{q_{n}}=x$; מכאן שאם הנגזרת $R'\left(x\right)$ קיימת אז גם הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R\left(\frac{p_{n}}{q_{n}}\right)-R\left(x\right)}{\frac{p_{n}}{q_{n}}-x}$$

[3] בקורס "תורת המספרים האלמנטרית".

קיים ושווה לה. אבל לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $R\left(\frac{p_n}{q_n}\right)=\frac{\gcd(p_n,q_n)}{q_n}\geq\frac{1}{q_n}$ ולכן גם:

$$\left|\frac{R\left(\frac{p_n}{q_n}\right)-R(x)}{\frac{p_n}{q_n}-x}\right|\geq\frac{\left|\frac{1}{q_n}-0\right|}{\left|\frac{p_n}{q_n}-x\right|}>\frac{\frac{1}{q_n}}{\frac{1}{(q_n)^2}}=q_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$$

מכאן שהנגזרת שפונקציית רימן אינה גזירה ב-x ומכיוון שהוא היה שרירותי הרי שהיא אינה גזירה בשום נקודה אי-רציונלית. ■

טענה 4.4. פונקציית רימן אינטגרבילית רימן על $[0,1]$.

הוכחה. לכל חלוקה P של $[0,1]$ מתקיים $L(R,P)=0$ ומכאן שמתקיים $\underline{I}(R)$, כלומר סכום דארבו התחתון של פונקציית רימן עבור חלוקה כלשהי של $[0,1]$ הוא 0 ולכן גם האינטגרל התחתון שלה בקטע זה הוא 0.

יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$, נניח בהג"כ ש-$\varepsilon<1$ ונסמן $N:=\left\lceil\frac{2}{\varepsilon}\right\rceil+1$ (כלומר $\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{2}$ ו-$\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{4}$), א"כ קיימות לכל היותר N^2 נקודות רציונליות ב-$[0,1]$ שהמכנה המצומצם שלהן גדול או שווה ל-N; תהיינה $a_1,a_2,\ldots,a_n\in[0,1]$ כל הנקודות הללו כך שהן מסודרות בסדר עולה ($a_i<a_{i+1}$ לכל $n>i\in\mathbb{N}$), א"כ (בהנחה ש-$\varepsilon<1$) לכל $n>i\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_{i+1}-a_i\geq\frac{1}{N}>\frac{\varepsilon}{4}$.

תהיינה $x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1},y_0,y_1,y_2,\ldots,y_n\in(0,1)$ נקודות המוגדרות ע"י (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}y_0&:=0\\x_i&:=a_i-\frac{\varepsilon}{8n}\\y_i&:=a_i+\frac{\varepsilon}{8n}\\x_{n+1}&:=1\end{aligned}$$

א"כ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ מתקיים $y_i-x_i=\frac{\varepsilon}{4n}$ (כלומר $y_i>x_i$) ולכל $n>i\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$x_{i+1}-y_i=\left(a_{i+1}-\frac{\varepsilon}{8n}\right)-\left(a_i+\frac{\varepsilon}{8n}\right)>0$$

כמו כן מתקיים:

$$\begin{aligned}x_1-y_0&=a_1-\frac{\varepsilon}{8}=\frac{1}{N}-\frac{\varepsilon}{8}>0\\x_{n+1}-y_n&=1-\left(a_n+\frac{\varepsilon}{8n}\right)=1-\left(\frac{N-1}{N}+\frac{\varepsilon}{8}\right)=\frac{1}{N}-\frac{\varepsilon}{8}>0\end{aligned}$$

מכאן שלכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$(y_i-x_i)\cdot\sup\{R(x):x\in[x_i,y_i]\}\leq(y_i-x_i)\cdot1=y_i-x_i$$

ולכל $n\geq i\in\mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$(x_{i+1}-y_i)\cdot\sup\{R(x):x\in[y_i,x_{i+1}]\}<(x_{i+1}-y_i)\cdot\frac{1}{N}<(x_{i+1}-y_i)\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

הקבוצה $P:=\{y_0,x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots,x_n,y_n,x_{n+1}\}$ היא חלוקה של $[0,1]$ המקיימת:

$$U(R,P)<\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)+\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-y_i)\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{4n}\cdot n+(1-0)\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

ε הנ"ל היה שרירותי ולכן $\overline{I}(R)=0$.

$$\Rightarrow\int_0^1R(x)\,dx=0$$

■

טענה 4.5. פונקציית רימן היא פונקציה מחזורית ו-1 הוא מחזור שלה.

הוכחה. לכל $x \in \mathbb{R}$, אם $x \notin \mathbb{Q}$ אז גם $x+1 \notin \mathbb{Q}$ ולכן $R(x) = 0 = R(x+1)$, ואם $x \in \mathbb{Q}$ כאשר $\frac{p}{q}$ היא ההצגה המצומצמת שלו אז $\frac{p+q}{q}$ היא ההצגה המצומצמת של $x+1$[4] ולכן $R(x) = \frac{1}{q} = R(x+1)$. ■

מסקנה 4.6. פונקציית רימן אינטגרבילית על כל קטע סגור.

♣ אם נגדיר $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

נקבל:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases} = D(x)$$

וזאת למרות שגם g אינטגרבילית, כלומר הרכבה של אינטגרביליות אינה בהכרח אינטגרבילית.

[4] מהעובדה שמתקיים $\gcd(p,q) = 1$ נובע שמתקיים $\gcd(p,q+q) = 1$.

5 פונקציות משולשים

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(h_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות כך ש-$0 < a_n \leq \frac{1}{2}$ ו-$h_n \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
תהא $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in [n, n+1]$):

$$f(x) := \begin{cases} \frac{h_n}{a_n} \cdot (x - n) & x \in [n, n + a_n] \\ -\frac{h_n}{a_n} \cdot (x - (n + 2a_n)) & x \in [n + a_n, n + 2a_n] \\ 0 & x \in [n + a_n, n + 1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{h_n}{a_n} \cdot (x - n) & x \in [n, n + a_n] \\ -\frac{h_n}{a_n} \cdot (x - n) + 2h_n & x \in [n + a_n, n + 2a_n] \\ 0 & x \in [n + a_n, n + 1] \end{cases}$$

♣ הרעיון הוא שבכל קטע $[n, n+1]$ הקטע $[n, n+2a_n]$ הוא הבסיס של משולש שווה שוקיים שקודקודו בנקודה $(n + a_n, h_n)$ ועל כן שטחו הוא בדיוק:

$$\frac{2a_n \cdot h_n}{2} = a_n \cdot h_n$$

תכונות פתולוגיות

- רציפות: f רציפה.
- גזירות: f אינה גזירה בכל נקודה מהצורה n, $n + a_n$ או $n + 2a_n$ (לכל $n \in \mathbb{N}_0$), אך היא גזירה בכל נקודה אחרת.
- אינטגרביליות: f אינטגרבילית רימן על כל תת-קטע סגור של $[0, \infty)$.

טענה 5.1. מתקיים (מדובר בשוויון פורמלי בלבד):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot h_n = \int_{1}^{\infty} f(x)\, dx$$

♣ ע"פ השוויון הזה והידע שלנו על טורים נוכל לבנות פונקציות רציפות חסומות/לא חסומות שעבורן האינטגרל הנ"ל מתכנס/מתבדר כרצוננו, כל מה שצריך לעשות הוא לבחור את הסדרות המתאימות (דוגמאות בהמשך).

הוכחה. מהנוסחה היסודית נובע שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
\int_{n}^{n+a_n} f(x)\,dx &= \int_{n}^{n+a_n} \frac{h_n}{a_n}\cdot(x-n)\,dx = \frac{h_n}{a_n}\cdot\int_{n}^{n+a_n} x-n\ \,dx \\
&= \frac{h_n}{a_n}\cdot\left(\frac{(n+a_n)^2}{2}-n\cdot(n+a_n)\right)-\frac{h_n}{a_n}\cdot\left(\frac{n^2}{2}-n\cdot n\right) \\
&= \frac{h_n}{a_n}\cdot\left(\frac{n^2+2n\cdot a_n+(a_n)^2}{2}-n^2-n\cdot a_n\right)+\frac{h_n}{a_n}\cdot\frac{n^2}{2} \\
&= \frac{h_n}{a_n}\cdot\frac{(a_n)^2}{2}=\frac{a_n\cdot h_n}{2} \\
\int_{n+a_n}^{n+2a_n} f(x)\,dx &= \int_{n+a_n}^{n+2a_n} -\frac{h_n}{a_n}\cdot(x-n)+2h_n\ \,dx = -\int_{n+a_n}^{n+2a_n}\frac{h_n}{a_n}\cdot(x-n)\,dx+\int_{n+a_n}^{n+2a_n} 2h_n\ \,dx \\
&= -\frac{h_n}{a_n}\cdot\left(\frac{(n+2a_n)^2}{2}-n\cdot(n+2a_n)\right)+\frac{h_n}{a_n}\cdot\left(\frac{(n+a_n)^2}{2}-n\cdot(n+a_n)\right)+2h_n\cdot a_n \\
&= -\frac{h_n}{a_n}\cdot\left(\frac{2n\cdot a_n+3(a_n)^2}{2}-n\cdot a_n\right)+2h_n\cdot a_n=\frac{4h_n\cdot a_n}{2}-\frac{h_n\cdot 3(a_n)^2}{2a_n} \\
&= \frac{a_n\cdot h_n}{2} \\
\int_{n+2a_n}^{n+1} f(x)\,dx &= \int_{n+2a_n}^{n+1} 0\ \,dx = 0
\end{aligned}$$

ועל כן גם:

$$\int_{n}^{n+1} f(x)\,dx = a_n\cdot h_n$$

וממילא:

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_{1}^{N+1} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\int_{n}^{n+1} f(x)\,dx\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_n\cdot h_n) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cdot h_n)
\end{aligned}$$

■

5.1 דוגמאות

דוגמה 5.2. אם נבחר $a_n = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ ו-$h_n = \frac{2}{\sqrt{n}}$ נקבל:

$$\int\limits_1^{\infty} f\left(x\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

כלומר האינטגרל מתבדר למרות ש-$\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) = 0$ ו-f אי-שלילית.

דוגמה 5.3. אם נבחר $a_n = \frac{1}{2n}$ ו-$h_n = \frac{2}{n}$ נקבל[5]:

$$\int\limits_1^{\infty} f\left(x\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

כלומר האינטגרל מתכנס.

דוגמה 5.4. אם נבחר $a_n = \frac{1}{2n^3}$ ו-$h_n = 2n$ נקבל:

$$\int\limits_1^{\infty} f\left(x\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

כלומר האינטגרל מתכנס למרות ש-f אי-שלילית ואינה חסומה מלעיל.

[5] להסבר מדוע הטור מתכנס ל-$\frac{\pi^2}{6}$ לחצו כאן, אין זה מעניינו כעת, כל מה שרציתי לומר הוא שהטור מתכנס.

חלק III

שונות

6 טורים וסדרות

צריך לכתוב את הפרק הזה.

7 "הלחמה" של פונקציות

♣ בסעיף זה נראה כיצד ניתן לשלב בין שתי פונקציות על מנת לקבל את התכונות של שתיהן.

נניח שנתבקשנו למצוא פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שיתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}\int\limits_{-x}^{2x} f\left(t\right)dt=c$$

עבור $0\neq c\in\mathbb{R}$ כלשהו[6]. הדבר הראשון שעולה לי בראש הוא שמהנוסחה היסודית נובע שלכל $0<x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\int\limits_{x}^{2x}\frac{1}{t}\ dt=\ln\left(2x\right)-\ln\left(x\right)=\ln\left(\frac{2x}{x}\right)=\ln\left(2\right)$$

הבעיה היא כמובן שנתבקשתי שהאינטגרל יהיה מ-$-x$ ל-$2x$ ולא מ-x ל-$2x$.
כדי לתקן זאת אני רוצה למצוא פונקציה שתחזיר $\ln\left(-x\right)$ לכל x שלילי קטן מספיק ו-$\ln\left(x\right)$ לכל x חיובי גדול מספיק; הבעיה היא שאני זקוק לפונקציה שהיא לא רק רציפה, אלא גם גזירה בכל נקודה כדי שהיא תהווה קדומה של פונקציה אחרת ואז אוכל להשתמש בנוסחה היסודית.
הפתרון הוא כזה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$F\left(x\right):=\begin{cases}\ln\left(x\right) & x\geq1\\ \frac{x^{2}-1}{2} & -1\leq x\leq1\\ \ln\left(-x\right) & x\leq-1\end{cases}$$

כיצד הפונקציה הזו פותרת את הבעיה? הרעיון הוא כזה בתחילה רצינו שהפונקציה תוגדר כך:

$$F_{0}\left(x\right):=\begin{cases}\ln\left(x\right) & x>0\\ \ln\left(-x\right) & x<0\end{cases}$$

אבל לפונקציה הזו יש אי-רציפות מסדר שני ב-0, זו בעיה שא"א לתקן בקלות, א"כ נרצה לבטל את כלל ההתאמה של F_0 בקטע $(-1,1)$ ולהכניס בקטע זה פונקציה גזירה F_1 שתתלכד עם F_0 בנקודות הקצה ולא זו אף זו גם הנגזרות שלהן תתלכדנה בנקודות הקצה של $(-1,1)$; לשיטה הזו אני קורא "הלחמה" של פונקציות.

[6] זה לא באמת משנה באיזה c מדובר כי תמיד יהיה ניתן להכפיל את f בקבוע ולקבל את הנדרש עבור c אחר.

בד"כ הדרך הכי פשוטה לבצע "הלחמה" היא באמצעות פולינום, ואכן הפולינום $F_1\left(x\right) := \frac{x^2-1}{2}$ מקיים את המבוקש, שכן מתקיים:

$$F_1\left(\pm1\right) = \frac{\left(\pm1\right)^2-1}{2} = 0 = \ln\left(1\right) = F_0\left(\pm1\right)$$
$$F_1'\left(\pm1\right) = \pm1 = \left(\pm1\right)\cdot\frac{1}{1} = \left(\pm1\right)\cdot\ln'\left(1\right) = F_0'\left(\pm1\right)$$
$$\int\limits_{-1}^{0} F_1\left(x\right)dx = \int\limits_{-1}^{0}\frac{x^2-1}{2}dx = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{0^3}{3}-0\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\left(-1\right)^3}{3}-\left(-1\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1^3}{3}-1\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{0^3}{3}-0\right) = \int\limits_{0}^{1} F_1\left(x\right)dx$$

כעת לאחר שאנו מבינים את הרעיון נעבור להוכחה הפורמלית.

לכל $\pm1 \neq x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$F'\left(x\right) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 1 \\ x & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & x < -1 \end{cases}$$

וכמו כן מתקיים $F'\left(1^-\right) = 1 = \frac{1}{1} = F'\left(1^+\right)$ ו-$F'\left(-1^-\right) = -1 = \frac{1}{-1} = F'\left(-1^+\right)$ ומכאן ש-$F'\left(\pm1\right) = \pm1$, כלומר לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$F'\left(x\right) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & x \leq -1 \end{cases}$$

נסמן $f := F'$, מכאן שע"פ הנוסחה היסודית מתקיים לכל $1 < x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\int\limits_{x}^{2x} f\left(t\right)dt = F\left(2x\right) - F\left(x\right) = \ln\left(2x\right) - \ln\left(x\right) = \ln\left(2\right)$$