אינטגרלים מרובים - טענות בלבד

אנליזה אלמנטרית רב-ממדית - 80116

מרצה: נועה ניצן

סוכם ע״י: שריה אנסבכר

סמסטר ב׳ תשפ״ג, האונ׳ העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

בסיכום זה נעסוק רק בפונקציות מהצורה $f:D\to\mathbb{R}$ כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ (למרות שניתן היה להכליל את ההגדרות בקלות ל-$\mathbb{R}^{n}$) ולכן לא אטרח לציין זאת בכל פעם.

1 אינטגרביליות על מלבן

1.1 תכונות בסיסיות של אינטגרביליות

יהי $R:=[a,b]\times[c,d]\subseteq\mathbb{R}^{2}$ מלבן ותהיינה $f,g:R\to\mathbb{R}$ שתי פונקציות אינטגרביליות ב-R.

משפט 1.1. תכונות בסיסיות של אינטגרביליות

1. אם f אי-שלילית אז גם $0\leq\iint\limits_{R}f\ dA$.
2. אם $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$ לכל $x\in R$ אז גם $\iint\limits_{R}f\ dA\geq\iint\limits_{R}g\ dA$.
3. הפונקציות $f\pm g$ אינטגרביליות ב-R ומתקיים:
$$\iint\limits_{R}f\pm g\ dA=\iint\limits_{R}f\ dA\pm\iint\limits_{R}g\ dA$$
4. לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ הפונקציה $\lambda\cdot f$ אינטגרבילית ב-R ומתקיים:
$$\iint\limits_{R}\lambda\cdot f\ dA=\lambda\cdot\iint\limits_{R}f\ dA$$

הפונקציה $f\cdot g$ אינטגרבילית ב-R.

טענה 1.2. אם קיים $0<m\in\mathbb{R}$ כך ש-$\left|g\left(x\right)\right|\geq m$ לכל $x\in R$ אז הפונקציה $\frac{1}{g}$ אינטגרבילית ב-R.

מסקנה 1.3. אם קיים $0<m\in\mathbb{R}$ כך ש-$\left|g\left(x\right)\right|\geq m$ לכל $x\in R$ אז הפונקציה $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית ב-R.

טענה 1.4. אם $f\left(x\right)\equiv1$ אז $\iint\limits_{R}f\ dA=A\left(R\right)$.

משפט 1.5. הפונקציה $\left|f\right|$ אינטגרבילית ב-R ומתקיים:
$$\left|\iint\limits_{R}f\ dA\right|\leq\iint\limits_{R}\left|f\right|dA$$

♣ נשים לב לדמיון לא"ש המשולש, גם כאן הערך המוחלט של ה"סכום" קטן או שווה לסכום של הערכים המוחלטים ומבחינה אינטואיטיבית זה קורה מאותה סיבה.

טענה 1.6. יהי $R'\subseteq R$ מלבן, f אינטגרבילית ב-R'.

טענה 1.7. יהי $\gamma\in(a,b)$, נסמן $R_{1}:=[a,\gamma]\times[c,d]$ ו-$R_{2}:=[\gamma,b]\times[c,d]$ ותהא h פונקציה אינטגרבילית על R_{1} ועל R_{2}, h אינטגרבילית על $R=R_{1}\cup R_{2}$ ומתקיים:
$$\iint\limits_{R}h\ dA=\iint\limits_{R_{1}}h\ dA+\iint\limits_{R_{2}}h\ dA$$

1.2 משפט פוביני ופונקציות רציפות

יהי $R := [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ מלבן ותהא $f : R \to \mathbb{R}$.

משפט 1.8. אם f רציפה אז f אינטגרבילית ב-R.

משפט 1.9. משפט פוביני[1]

- אם f אינטגרבילית ב-R ולכל $y \in [c,d]$ קיים האינטגרל $\int_a^b f(x,y)\,dx$ אז קיים האינטגרל הנשנה $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$ ומתקיים:

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx\right) dy = \iint\limits_R f\,dA$$

- אם f אינטגרבילית ב-R ואם לכל $x \in [a,b]$ קיים האינטגרל $\int_c^d f(x,y)\,dx$ אז קיים האינטגרל הנשנה $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dx\right) dy$ ומתקיים:

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dx\right) dy = \iint\limits_R f\,dA$$

♣ הרעיון הוא שאנחנו "פורסים" את הנפח המבוקש לפרוסות דקות וסוכמים אותן.

♣ **לכתוב על הקשר בין משפט פוביני למשפט שוורץ (הנוסחה היסודית).**

מסקנה 1.10. אם f אינטגרבילית ב-R ובנוסף לכל $y \in [c,d]$ קיים האינטגרל $\int_a^b f(x,y)\,dx$ ולכל $x \in [a,b]$ קיים האינטגרל $\int_c^d f(x,y)\,dx$ אז מתקיים:

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx\right) dy = \iint\limits_R f\,dA = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dx\right) dy$$

♣ זה דומה מאד לעובדה שמתקיים[2]:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}$$

רק שכאן הסכימה רציפה ולא בדידה.

טענה 1.11. אם f רציפה אז לכל y הפונקציה $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $g(x) := f\binom{x}{y}$ רציפה וכמו כן גם הפונקציה $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $h(x) := f\binom{x}{y}$ רציפה.

מסקנה 1.12. אם f רציפה אז מתקיים:

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx\right) dy = \iint\limits_R f\,dA = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dx\right) dy$$

[1] ערך בוויקיפדיה: גווידו פוביני.
[2] שהרי לא משנה באיזה סדר סוכמים איברים בטבלה.

2 אינטגרביליות על קבוצה כללית

טענה 2.1. כל קבוצה נורמלית היא קבוצה בעלת שטח.

טענה 2.2. כל הטענות והמשפטים שראינו בסעיף 1.1 לגבי אינטגרביליות על מלבן נכונות גם עבור קבוצות בעלות שטח[3] מלבד טענה 1.7 שדורשת ניסוח שונה מעט:

תהיינה $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצות בעלות שטח כך ש-$D_1 \cap D_2$ בעלת שטח 0, נסמן $D := D_1 \cup D_2$ ותהא $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית על D_1 ועל D_2; f אינטגרבילית על D ומתקיים:

$$\iint\limits_D f\ dA = \iint\limits_{D_1} f\ dA + \iint\limits_{D_2} f\ dA$$

משפט 2.3. קבוצה חסומה $D \subseteq \mathbb{R}^2$ היא בעלת שטח אם"ם ∂D (קבוצת נקודות השפה של D) היא בעלת שטח 0.

משפט 2.4. תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה[4] ב-D.

- נניח ש-D קבוצה נורמלית לפי x, יהי $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ קטע סגור ותהיינה $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ שתי פונקציות כך שמתקיים

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b],\ \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\right\}$$

מתקיים גם:

$$\iint\limits_D f\ dA = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy\right) dx$$

- נניח ש-D קבוצה נורמלית לפי y, יהי $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$ קטע סגור ותהיינה $h_1, h_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ שתי פונקציות כך שמתקיים

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d],\ \ h_1(x) \le y \le h_2(x)\right\}$$

מתקיים גם:

$$\iint\limits_D f\ dA = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx\right) dy$$

[3] כלומר בכל אחת מהטענות הללו ניתן להחליף את המלבן R בקבוצה בעלת שטח D והטענה תישאר נכונה.

[4] **האם לא מספיק שלכל $x \in [a, b]$ קיים האינטגרל**

$$\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy$$

???

3 החלפת משתנים

משפט 3.1. הצבה

תהא $g:R\to\mathbb{R}$ ‏($R\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצה חסומה שאינה בהכרח מלבן), תהא $D\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצה חסומה, תהיינה $x,y:D\to\mathbb{R}$ ותהא $f:D\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י (לכל $(s,t)\in D$):

$$f\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}:=\begin{bmatrix}x(s,t)\\y(s,t)\end{bmatrix}$$

כך ש-$\operatorname{Im}(f)=R$. מתקיים:

$$\iint\limits_R g\ dA=\iint\limits_D (g\circ f)\cdot|J_f|\ dA$$

- ♣ הרעיון הוא בדיוק כמו במשפט ההצבה של האינטגרל המסוים באינפי' 2: אנחנו מציבים בתוך הפונקציה שעליה מתבצעת האינטגרציה פונקציה פנימית אבל מכיוון שהאחרונה מעוותת את המרחב עלינו לבצע תיקון, וזה מתבצע ע"י כפל בדטרמיננטה של ההעתקה הליניארית המהווה את הדיפרנציאל של הפונקציה הפנימית בכל נקודה[5].
- ♣ לא הבאנו כאן את התנאים למשפט מפני שלא למדנו אותם בכיתה, בספר שנועה המליצה עליו (היא קראה לו "הספר של אנטון") נכתב שהתנאים הם ש-f חח"ע, g רציפה, הנגזרות החלקיות של x ו-y בכל נקודה ב-D רציפות בנקודה זו (כלומר f דיפרנציאבילית ב-D) ו-"התחומים R ו-D אינם מסובכים מדי".

תהא $h:[0,\infty)\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$ הפונקציה המעבירה מהצגה קוטבית להצגה קרטזית[6], כלומר לכל $(r,\theta)\in[0,\infty)\times[0,2\pi)$ מתקיים:

$$h\begin{pmatrix}r\\\theta\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{bmatrix}$$

מהגדרה לכל $(r,\theta)\in[0,\infty)\times[0,2\pi)$ מתקיים:

$$J_h\begin{pmatrix}r\\\theta\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}$$

ולכן גם:

$$|J_h(r,\theta)|=r\cos^2\theta-\left(-r\sin^2\theta\right)=r\cdot\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=r$$

מסקנה 3.2. מעבר להצגה קוטבית

תהא $D\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצה נורמלית בהצגה קוטבית, יהי $[\theta_1,\theta_2]\subseteq[0,2\pi]$ קטע סגור ותהיינה $s_1,s_2:[\theta_1,\theta_2]\to\mathbb{R}$ שתי פונקציות כך שמתקיים:

$$D=\left\{(r\cos\theta,r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2\mid\theta\in[\theta_1,\theta_2],\ 0\le s_1(\theta)\le r\le s_2(\theta)\right\}$$

תהא $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, מתקיים:

$$\iint\limits_D f\ dA=\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\int\limits_{s_1(\theta)}^{s_2(\theta)}f\begin{pmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{pmatrix}\cdot r\ dr\right)d\theta$$

---

[5] כלומר $|J_f|$ היא בעצמה פונקציה המוגדרת ע"י הדטרמיננטה של J_f בנקודה.

[6] למעשה יש להגביל את התחום ל-$(0,\infty)\times[0,2\pi)$ איחוד עם $\{(0,0)\}$ כדי ש-h תהיה חח"ע.