הקדמה - אורך, זווית והמכפלה הסקלרית

מרצה: איתמר צביק

מתרגלים: גיל לבנה ויואב כהן

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

סיכומי קורס זה מוקדשים לאהרון כהן;
אהרון, הידיעה שתקרא את הסיכומים הללו דרבנה אותי לאורך כל הדרך.
בהצלחה!

* * *

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 אורך

כפי שהזכרתי בהקדמה שלי לאלגברה ליניארית האובייקט שנותן את המוטיבציה לשני הקורסים הללו הוא המרחב התלת-ממדי הלא הוא $\mathbb{R}^3$, אך למרות זאת כמתמטיקאים היינו מוכרחים להפשיט את המושג עד שקיבלנו את המרחב הווקטורי מעל לשדה כלשהו. עד כה כל מה שעשינו הוא לנתח כיצד פועלות העתקות ליניאריות על מרחבים וקטוריים אך בכך לא סיימנו להבין את המרחב התלת-ממדי, חסרים לנו שני מרכיבים חשובים מאד במבנה שלו: במרחב התלת-ממדי ניתן למדוד מרחקים בין נקודות וזוויות בין ישרים[1].

תהא $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ נקודה במרחב התלת-ממדי, ממשפט פיתגורס נובע שהמרחק של הנקודה $(x,y,0)$ מראשית הצירים הוא $\sqrt{x^2+y^2}$ ולכן מהפעלה נוספת של משפט פיתגורס נובע שהמרחק של הנקודה (x,y,z) מראשית הצירים הוא:

$$\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

שכן ראשית הצירים, $(x,y,0)$ ו-(x,y,z) הן קודקודים של משולש ישר זווית שהיתר שלו הוא הצלע המחברת את (x,y,z) לראשית הצירים.

♣ ניתן להוכיח באינדוקציה שהמרחק של הנקודה $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ מראשית הצירים הוא $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}$.[2]

♣ טבעי מאוד להגדיר את $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ בתור **האורך** של הווקטור $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ וכך אכן נעשה.

בצורה דומה לחישוב המרחק בין נקודה לראשית הצירים ניתן להראות שהמרחק בין שתי נקודות (x_1,y_1,z_1) ו-(x_2,y_2,z_2) הוא:

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

כלומר המרחק בין שתי נקודות הוא הגודל של וקטור ההפרש שלהן.

♣ ושוב: ניתן להוכיח באינדוקציה שגם ב-$\mathbb{R}^n$ המרחק בין שתי נקודות הוא הגודל של וקטור ההפרש שלהן.

2 זווית

יופי, היה לנו מזל: משפט פיתגורס נחלץ לעזרתנו והצלחנו למצוא את האורך הגאומטרי של וקטור ע"י הייצוג האלגברי שלו, אבל איך בכלל אפשר למצוא את הזווית בין שני וקטורים בהתבסס על הייצוג האלגברי שלהם?!?

3 המכפלה הסקלרית

יהיו $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$, ממשפט הקוסינוסים (שהוא הכללה של משפט פיתגורס) נובע שמתקיים:

$$\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2=\|\vec{a}\|^2+\left\|\vec{b}\right\|^2-2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|\cdot\cos\theta$$

כאשר θ היא הזווית שבין a ל-b[3] ו-$\|v\|$ הוא האורך של וקטור $v\in\mathbb{R}^n$.

[1] לא התייחסתי לגדלים של קטעים מפני שגודל של קטע הוא פשוט המרחק בין שני קצותיו.

[2] המשמעות של מרחק ב-$\mathbb{R}^n$ היא בדיוק אותה משמעות שיש למרחק ב-$\mathbb{R}^3$, אנחנו אולי לא יודעים אם קיימים במציאות מרחבים ממימד גבוה מ-3 אך לו היו כאלה הם היו מתנהגים באותה צורה ולכן אנחנו יכולים להפעיל את משפט פיתגורס בכל מישור שבמרחב וע"י אינדוקציה להגיע לתוצאה זו.

[3] זה לא משנה באיזו זווית בוחרים מפני ש-$\cos(2\pi-\theta)=\cos(-\theta)=\cos(\theta)$.

יהיו $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_3 \in \mathbb{R}$ כך ש-$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ו-$\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_3)$, א"כ מתקיים:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2}$$

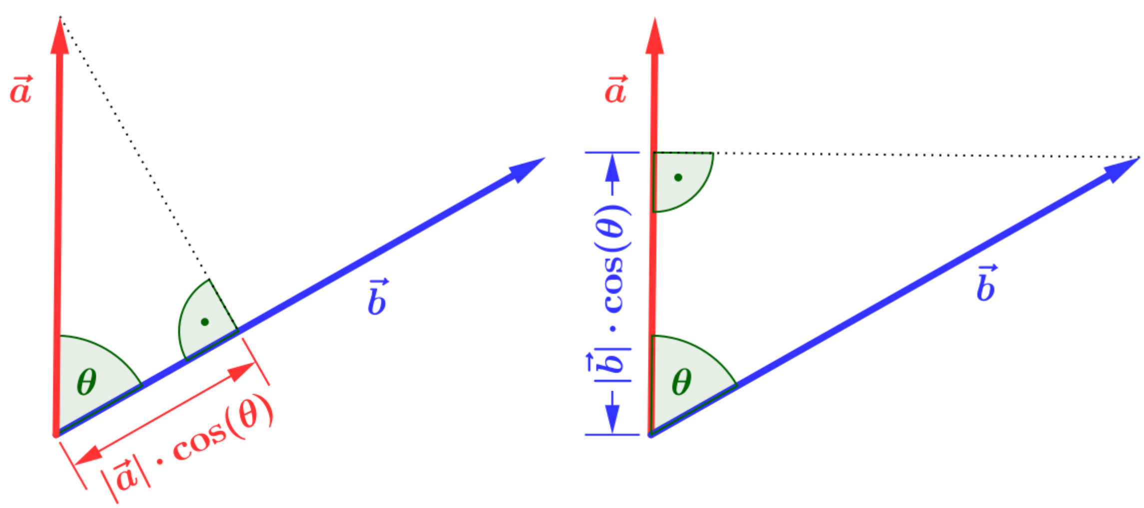
$$\left\|\vec{b}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i)^2}$$

$$\left\|\vec{a} - \vec{b}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 &= \left\|\vec{a} - \vec{b}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2 - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\theta \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (b_i)^2 - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left((a_i)^2 - 2 \cdot a_i \cdot b_i + (b_i)^2\right) &= \sum_{i=1}^{n} \left((a_i)^2 + (b_i)^2\right) - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\theta \\ \Rightarrow -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i &= -2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\theta \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i &= \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\theta\end{aligned}$$

$\left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\theta$ הוא גודל הרכיב של $\vec{b}$ בכיוון $\vec{a}$ ו-$\|\vec{a}\| \cdot \cos\theta$ הוא גודל הרכיב של $\vec{a}$ בכיוון $\vec{b}$ כפי שמומחש באיור הבא:



איור 1: ההגדרה הגאומטרית של המכפלה הסקלרית

מקור: התמונה נלקחה מוויקישיתוף והיא מופיעה כאן ברישיון CC BY-SA 4.0.

א"כ $\left\|\vec{b}\right\|\cdot\cos\theta\cdot\|\vec{a}\|$ הוא גודל הרכיב של $\vec{b}$ בכיוון $\vec{a}$ כשהוא מוכפל בגודל של $\|\vec{a}\|$ וכמו כן זהו גם גודל הרכיב של $\vec{a}$ בכיוון $\vec{b}$ כשהוא מוכפל בגודל של $\left\|\vec{b}\right\|$.

המשוואה הנ"ל נותנת את המוטיבציה להגדרת המכפלה הסקלרית:

הגדרה. <u>המכפלה הסקלרית</u>[4] היא פעולה $\cdot:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$):

$$x\cdot y=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}:=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+\ldots+x_n\cdot y_n$$

♣ ניתן להסתכל על המכפלה הסקלרית גם כך: $x\cdot y=x^ty$ כאשר הכפל באגף ימין הוא כפל מטריצות ואנו משתמשים באיזומורפיזם בין $M_1(\mathbb{R})$ ל-$\mathbb{R}$; כלומר כל וקטור ב-$\mathbb{R}^n$ מייצג העתקה ליניארית מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}$[5] באמצעות המכפלה הסקלרית. האינטואיציה הגאומטרית לכך היא שכל העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ כך ש-$\text{rk}T=1$ עובדת תמיד באותה צורה: היא מטילה את הווקטורים על ישר כלשהו ואז מותחת/מכווצת אותם ע"י כפל בסקלר, כפי שראינו לעיל זה בדיוק מה שעושה המכפלה הסקלרית אלא שבניגוד להעתקה מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}^n$ המכפלה הסקלרית מחזירה סקלר שהוא הגודל של הווקטור לאחר ההטלה והמתיחה/כיווץ. הנה סרטון נפלא של 3blue1brown שמטיב להסביר את האינטואיציה הזו ואת הקשר שבין ההגדרה האלגברית של המכפלה הסקלרית למשמעותה הגאומטרית.

♣ נשים לב לכך שלכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$x\cdot x=\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2=\|x\|^2$$

ולכן $\|x\|=\sqrt{x\cdot x}$.

♣ כמו כן לכל $0\neq v,w\in\mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$\theta=\arccos\left(\frac{v\cdot w}{\|v\|\cdot\|w\|}\right)$$

כאשר θ היא הזווית הקטנה שבין v ל-w, בפרט מתקיים $\theta=\frac{\pi}{2}$ (כלומר v ו-w **מאונכים** זה לזה) אם"ם $v\cdot w=0$.

♣ אם נזכור שכל הסיפור הזה התחיל ממשפט פיתגורס נבין מהי הסיבה לכך שהמכפלה הסקלרית מגדירה אורכים וזוויות יחדיו.

♣ הבחירה להגדיר את המכפלה הסקלרית בצורה $\cos\theta\cdot\left\|\vec{b}\right\|\cdot\|\vec{a}\|$ נראית קצת מוזרה במבט ראשון, אני הייתי רוצה לדבר על הטלה של וקטור אחד בכיוון של וקטור שני מבלי להתייחס לאורכו של הווקטור השני - כלומר הייתי רוצה לדבר על $\left\|\vec{b}\right\|\cdot\cos\theta$ שהיא ההטלה של $\vec{b}$ בכיוון של $\vec{a}$; לעיל הבאנו סיבה אחת שמתקבלת על הדעת וכאן אני רוצה להביא אחת נוספת: המכפלה הסקלרית בודקת עד כמה שני וקטורים מצביעים לאותו כיוון ועד כמה "חזק" הם מצביעים לכיוון זה. אבל הנימוק הזה עדיין לא מספיק - מה שאמרתי כאן הוא שאני מבצע מן "ממוצע משוקלל" שבו אני משקלל את ההבדל בכיוון של שני הווקטורים (הזווית שביניהם) עם הגודל של שניהם, זה אמנם הגיוני לתת לשני הווקטורים את אותו המשקל אך מדוע בחרתי לשקלל את הזווית והאורכים דווקא בצורה זו?

---

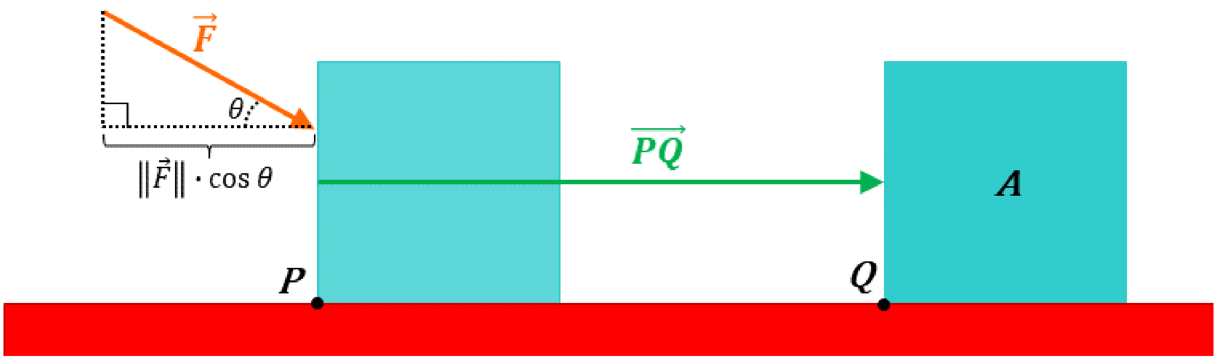
[4] באנגלית נקראת גם "Dot Product".

[5] העתקה כזו נקראת פונקציונל.

למי שמתקשה לחשוב על דרך נוספת לבצע את השקלול הזה הנה פונקציה נוספת שיכולה להחליף את $\cos$ במכפלה הסקלרית[6]:

$$f\left(\theta\right):=\begin{cases} 1-\frac{2\theta}{\pi} & \theta\in\left[0,\pi\right]\\ -1+\frac{2\theta}{\pi} & \theta\in\left[\pi,2\pi\right] \end{cases}$$

ובכן חברים, המתמטיקה לא נולדה מהחלל הריק, לא ירדה כתורה למשה מסיני ולא ניתנה לנו מגזע חייזרים תבוני עלום - המתמטיקה תמיד נוצרה ותמיד תיווצר מתוך צרכים מהשטח ובפרט צרכים פיזיקליים; הסיבה האמיתית להגדרה של המכפלה הסקלרית היא הפיזיקה: אם אני מפעיל על גוף $\boldsymbol{A}$ כוח קבוע $\vec{F}$ ובכך מזיז אותו מנקודה P לנקודה Q, אז העבודה שביצעתי היא המכפלה הסקלרית $\vec{F}\cdot\overrightarrow{PQ}$ (כאשר $\overrightarrow{PQ}$ הוא וקטור ההעתק מ-P ל-Q). שימו לב - חלק מהכוח שהפעלתי לא תרם לכך שהגוף זז מפני שהוא מאונך לכיוון התנועה של הגוף $\boldsymbol{A}$ (ראו באיור)[7], כלומר המכפלה הסקלרית בדקה עד כמה "הצלחתי" להזיז את הגוף בכיוון הרצוי ע"י הכוח[8] ועשתה זאת ע"י הטלת וקטור הכוח בכיוון של וקטור ההעתק וכפל באורכו של וקטור ההעתק[9].



איור 2: העבודה היא המכפלה הסקלרית של וקטור הכוח בווקטור ההעתק

אני מקווה שגם מי שלא למד פיזיקה בתיכון קיבל רושם טוב ממה שהולך כאן, לא הייתה לי שום דרך להסביר זאת מבלי לערב מושגים פיזיקליים ולא במקרה...

[6] כלומר f היא בעצם חיקוי ליניארי של $\cos$ (על הקטע $[0,2\pi]$) - היא מקבלת את הערכים $1,0,-1$ בדיוק במקומות שבהם $\cos$ מקבלת אותם (ובפרט $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$) אך בין הנקודות הללו היא מותחת קו ישר במקום העיקול ש-$\cos$ עושה.

[7] ולמעשה בוטל מפני שהרצפה דחפה את הגוף $\boldsymbol{A}$ בחזרה (החוק השלישי של ניוטון).

[8] למיטב ידיעתי (אוני לא יודע הרבה פיזיקה, אשמח אם אחד הקוראים יעיר את עיני בנושא) ניתן לתאר את כל השימושים של המכפלה הסקלרית בפיזיקה באופן אינטואיטיבי בצורה זו: אני מנסה לשנות את המציאות ע"י אובייקט פיזיקלי הניתן לייצוג ע"י וקטור ובודק עד כמה הצלחתי כאשר השינוי במציאות ניתן גם הוא לייצוג וקטורי.

[9] מבחינה פיזיקלית התפקידים של שני הווקטורים בסיפור הזה שונים לחלוטין אך מבחינת החישוב המתמטי אין ביניהם כל הבדל ולכן במתמטיקה בכלל לא מדברים בצורה זו.