מבוא לאנליזה מרוכבת - הוכחות נבחרות

פונקציות מרוכבות - 80519

מרצה: אילון לינדנשטראוס

מתרגל: שאול (שאולי) רגימוב

סוכם ע"י שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ד, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

הפרק הראשון של סיכום זה הוא הסיכום המקביל מאינפי' 2 שעבר עריכה כדי שיתאים עבור המרוכבים, לכן יש להניח שנפלו בו טעויות מתמטיות רבות. אנא מכם, אל תסתמכו עליו ללא מחשבה שנייה, ועדכנו אותי בכל טעות שמצאתם. תודה!

* * *

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

הקדמה

סיכומי קורס זה מניחים את כל הכתוב בסיכומים שלי עבור אינפי' 3 בנושאים "מרחבים מטריים" ו-"דיפרנציאביליות", בכל מקום נתייחס ל-$\mathbb{C}$ כמו למרחב הנורמי $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$ - כלומר המישור עם הנורמה האוקלידית.
אזכיר רק ש-$\mathbb{C}$ הוא מרחב נורמי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$, ולכן הוא מקיים את המשפטים הבאים:

- $\mathbb{C}$ הוא מרחב מטרי שלם.
- קבוצה $K \subseteq \mathbb{C}$ היא קומפקטית אם"ם היא סגורה וחסומה.
- תהא K קבוצה קומפקטית, ותהא $f : K \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
  - עיקרון המינימום והמקסימום של ויירשטראס - f מקבלת מקסימום ומינימום.
  - משפט קנטור - f רציפה במידה שווה.
- הלמה של קנטור - תהא $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות סגורות כך ש-$C_{n+1} \subseteq C_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, אם $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(C_n) = 0$ אז קיים $c \in \mathbb{C}$ יחיד כך ש-$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n = \{c\}$.
- תהא $A \subseteq \mathbb{R}^2$, תהא $f : A \to \mathbb{R}^2$, ותהיינה $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ כך ש-$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ לכל $x \in A$.
אם f גזירה בנקודה פנימית $a \in A$ אז המטריצה המייצגת של Df_a בבסיס הסטנדרטי היא

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

1 טורים

1.1 התחלה

משפט 1.1. תנאי קושי להתכנסות טורים
תנאי הכרחי ומספיק לכך שטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ יתכנס הוא שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ ולכל $K \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_n\right| < \varepsilon$$

♣ זהו מקרה פרטי של תנאי קושי להתכנסות סדרות.

טענה 1.2. יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים ויהי $z \in \mathbb{C}$.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (z \cdot a_n) = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

♣ הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ יכולים להתכנס גם אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ אינם מתכנסים; למעשה, ע"פ סעיף 1 אם שניים מארבעת הטורים הללו מתכנסים אז גם שני האחרים מתכנסים.

♣ מסעיף 2 נובע שאם $z \neq 0$ אז התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$ גוררת את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

משפט 1.3. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה, אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

טענה 1.4. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס למספר $S \in \mathbb{R}$ אז $r_m = S - \sum_{n=1}^{m} a_n$, ואם קיים $m \in \mathbb{N}$ כך שה-m-זנב של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ל-S אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S + \sum_{n=1}^{m} a_n$.

מסקנה 1.5. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור.

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם לכל $m \in \mathbb{N}$ ה-m-זנב שלו מתכנס.
2. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי $\lim_{m\to\infty} r_m = 0$.
3. שינוי, הוספה או גריעה של מספר סופי מאיברי הטור אינה משנה את עצם ההתכנסות/התבדרות שלו.

1.2 התכנסות בהחלט

משפט 1.6. מבחן ההשוואה
יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שני טורים, אם קיימים $0 < c \in \mathbb{R}$ ו-$N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n| \leq c \cdot |b_n|$[1] אז:

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בהחלט אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.
2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס בהחלט אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ אינו מתכנס בהחלט.[2]

מסקנה 1.7. יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שני טורים, אם קיימים $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ כך שהחל ממקום מסוים ואילך מתקיים $0 < \alpha \leq \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq \beta$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בהחלט.

[1] ניתן להחליף את התנאי בכך שקיימים $0 < z \in \mathbb{C}$ ו-$N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n| \leq |z| \cdot |b_n|$.
[2] למעשה סעיף זה שקול לסעיף הראשון.

מסקנה 1.8. מבחן ההשוואה הגבולי
יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שני טורים, אם הגבול $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right|$ קיים וגדול מ-0 אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בהחלט.

משפט 1.9. יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שני טורים, אם קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ אז:

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בהחלט אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.
2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס בהחלט אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ אינו מתכנס בהחלט.[3]

משפט 1.10. מבחן השורש של קושי
יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור.

1. אם קיימים $q\in(0,1)$ ו-$N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\sqrt[n]{|a_n|}\leq q$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.
2. אם עבור אינסוף ערכים של n מתקיים $\sqrt[n]{|a_n|}\geq 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס בהחלט.

♣ הסעיף השני הוא טריוויאלי, הוא אומר שישנם אינסוף ערכים של $n\in\mathbb{N}$ עבורם $|a_n|\geq 1$...

מסקנה 1.11. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור.

1. אם $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.
2. אם $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס בהחלט.

♣ סעיף 1 במסקנה שקול לסעיף 1 במשפט אך בסעיף 2 הדבר אינו נכון.

משפט 1.12. מבחן המנה של ד'אלמבר[4]
יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור כך ש-$|a_n|>0$ ממקום מסוים ואילך.

1. אם קיים $q\in(0,1)$ כך שמתקיים $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leq q$ ממקום מסוים ואילך אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.
2. אם מתקיים $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\geq 1$ ממקום מסוים ואילך אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס בהחלט.

♣ מבחן השורש של קושי חזק יותר ממבחן המנה של ד'אלמבר שכן אם קיימים $N\in\mathbb{N}$ ו-$q\in(0,1)$ כך שלכל $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leq q$ אז עבור אותו N מתקיים גם $|a_n|\leq|a_{N+1}|\cdot q^n$ לכל $N+1<n\in\mathbb{N}$ ומכאן ש-$\sqrt[n]{|a_n|}\leq\sqrt[n]{|a_{N+1}|}\cdot q$ ולכן:

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\leq\limsup_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_{N+1}|}\cdot q\right)=q\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_{N+1}|}=q\cdot 1=q<1$$

[3] ושוב, סעיף זה שקול לסעיף הראשון.
[4] ערך בוויקיפדיה: ז'אן לה רון ד'אלמבר.

מסקנה 1.13. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור כך ש-$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ חיובי ממש (כלומר $a_n \neq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$).

1. אם $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.
2. אם $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס בהחלט.

♣ גם כאן סעיף 1 במסקנה שקול לסעיף 1 במשפט אף בסעיף 2 הדבר אינו נכון.

משפט 1.14. מבחן ראבה (Raabe)[5]

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור כך ש-$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ חיובי ממש (כלומר $a_n \neq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$), ותהא $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י (לכל $n \in \mathbb{N}$):

$$r_n := n \cdot \left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$$

1. אם מתקיים $r_n \leq 1$ ממקום מסוים ואילך אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס בהחלט.
2. אם מתקיים $r_n > 1$ ממקום מסוים ואילך אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

♣ ניתן הציג את המשפט קצת אחרת: את הדרישה בסעיף 2 נחליף בדרישה ש-$\liminf\limits_{n\to\infty} r_n > 1$ (אלו דרישות שקולות) ואת הדרישה בסעיף 2 נחליף בדרישה ש-$\limsup\limits_{n\to\infty} r_n < 1$ (דרישה זו נובעת מהדרישה שלעיל).

♣ מבחן ראבה הוא שכלול של מבחן המנה של ד'אלמבר: הוא יצליח בכל מקום שבו מבחן המנה מצליח[6] אך הוא עשוי להצליח גם במקרים נוספים.

משפט 1.15. מבחן העיבוי של קושי

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש-$(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית (יורדת) ומתכנסת ל-0.
הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם"ם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n \cdot a_{2^n})$[7] מתכנס בהחלט.

משפט 1.16. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם"ם המכפלה $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$ מתכנסת.
2. אם $|a_n| < 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם"ם המכפלה $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|)$ מתכנסת.

---

[5] ערך בוויקיפדיה האנגלית: Joseph Ludwig Raabe.

[6] אם קיים $q \in (0,1)$ כך ש-q > $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ ממקום מסוים ואילך אז מכיוון ש-$\lim_{n\to\infty} n \cdot (1-q) = \infty$ נקבל ממשפט הפרוסה שגם $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ ובפרט $r_n > 1$ ממקום מסוים ואילך, ואם $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ ממקום מסוים ואילך אז $1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 0$ מאותו מקום ואילך ולכן גם $r_n \leq 0$ עבור n גדול דיו.

[7] טור זה נקרה "הטור המעובה" של $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ומכאן שם המשפט.

1.3 הכנסת סוגריים ושינוי סדר

טענה 1.17. לכל טור מתכנס, כל הטורים המתקבלים ממנו ע"י הכנסת סוגריים מתכנסים לאותו סכום.

משפט 1.18. הוספת סוגריים מאורך חסום

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור.
תהא $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת אינדקסים עולה ממש ונסמן $n_0 := 0$.
תהא $(\sigma_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת כך (לכל $k \in \mathbb{N}$):

$$\sigma_k = \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} a_l$$

א"כ הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ מתקבל מהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ע"י הכנסת סוגריים.
אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $n_k - n_{k-1} < M$ וגם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אז הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ מתכנס אם"ם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ואז הם מתכנסים לאותו סכום.

משפט 1.19. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, כל טור המתקבל ממנו ע"י שינוי סדר האיברים יתכנס לאותו הסכום.

♣ ההוכחה שראינו למשפט באינפי' 2 אינה תקפה עוד כשמדובר במספרים מרוכבים[8], אבל המשפט תקף בכל זאת (ראו את רעיון ההוכחה כאן[9] ופירוט מלא שלה כאן[10]).

♣ גם ההוכחה שראינו עבור משפט רימן אינה עובדת במרוכבים (מאותה סיבה), **ואין לי שום מושג אן הוא נכון או לא.**

1.4 מכפלות טורים

טענה 1.20. יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים המתכנסים ל-A ול-B בהתאמה, מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_n = A \cdot B$$

משפט 1.21. משפט קושי

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים בהחלט ויהיו $A, B \in \mathbb{R}$ כך ש-$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
כל טור המורכב מכל המכפלות מהצורה $a_i \cdot b_j$ (עבור כל $i, j \in \mathbb{N}$) ללא חזרות הוא טור מתכנס בהחלט וסכומו הוא $A \cdot B$.

משפט 1.22. משפט מרטן (Mertens)[11]

יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ טורים המתכנסים ל-A ול-B בהתאמה כך שלפחות אחד מהם מתכנס בהחלט, מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = A \cdot B$$

[8] הסדרות $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(q_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרות ע"י (לכל $n \in \mathbb{N}$):

$$p_n := \frac{|a_n| + a_n}{2}$$
$$q_n := \frac{|a_n| - a_n}{2}$$

אמנם מקיימות $a_n = p_n - q_n$ ו-$|a_n| = p_n + q_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אך הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ הם לאו דווקא חיוביים.

[9] גדי אלכסנדרוביץ' בבלוג "לא מדויק".

[10] ויקיפדיה האנגלית.

[11] ערך בוויקיפדיה האנגלית: Franz Mertens.

1.5 טורים הנדסיים

טענה 1.23. תהא $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה הנדסית ותהא $q\in\mathbb{C}$ הפרש הסדרה, לכל $n\in\mathbb{N}_0$ מתקיים $a_n=a_0\cdot q^n$.

טענה 1.24. לכל $1\neq q\in\mathbb{C}$ ולכל $n\in\mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

מסקנה 1.25. תהא $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה הנדסית כך ש-$1\neq q\in\mathbb{C}$ היא מנת הסדרה, לכל $n\in\mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\sum_{k=0}^{n}a_k=a_0\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

♣ כמובן שאם $q=1$ אז הסכום החלקי ה-n-י הוא $a_0\cdot(n+1)$.

מסקנה 1.26. תהא $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה הנדסית, ותהא $q\in\mathbb{C}$ מנת הסדרה; הטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס אם"ם $|q|<1$, ובמקרה כזה מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=a_0\cdot\frac{1}{1-q}$$

1.6 פונקציית האקספוננט, הפונקציות הטריגונומטריות וחזקות ממשיות

כל הטענות שבסעיף זה לא ממש נלמדו בכיתה, מסיבות מובנות לא יכולתי להתאפק ולחכות לסוף הסמסטר וכתבתי אותן כבר עכשיו.

טענה 1.27. יהי $z\in\mathbb{C}$, שלושת הטורים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

מתכנסים בהחלט ובפרט מתכנסים.

♣ הטענה נובעת מהשוואה לטור הנדסי מתכנס, לכל $z\in\mathbb{C}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש-$N<|z|$ ואז לכל $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים גם:

$$\left|\pm1\cdot\frac{z^n}{n!}\right|=\frac{|z|^n}{n!}=\frac{|z|^N}{N!}\cdot\frac{|z|^{n-N}}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(N+1)}<\frac{|z|^N}{N!}\cdot\left(\frac{|z|}{N}\right)^{n-N}$$

$\frac{|z|^N}{N!}$ הוא מספר ממשי קבוע ו-$\frac{|z|}{N}<1$, א"כ לכל $N<n\in\mathbb{N}$ הערך המוחלט של האיבר ה-n-י בטורים הנ"ל קטן מהאיבר ה-$n-N$-י בסדרה הנדסית שמנתה קטנה מ-1.

משפט 1.28. נוסחת אוילר

לכל $\theta\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$e^{i\theta}=\exp(i\theta)=\text{cis}(\theta)$$

הוכחה. יהי $\theta\in\mathbb{R}$, מאריתמטיקה של התכנסות טורים (טענה ??) נובע כי:

$$\begin{aligned}\text{cis}\left(\theta\right)=\cos\theta+i\cdot\sin\theta&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-1\right)^{n}\cdot\frac{\theta^{2n}}{\left(2n\right)!}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-1\right)^{n}\cdot\frac{\theta^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(i^{2}\right)^{n}\cdot\frac{\theta^{2n}}{\left(2n\right)!}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(i\cdot\left(i^{2}\right)^{n}\cdot\frac{\theta^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(i^{2n}\cdot\frac{\theta^{2n}}{\left(2n\right)!}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(i^{2n+1}\cdot\frac{\theta^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\left(i\cdot\theta\right)^{2n}}{\left(2n\right)!}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\left(i\cdot\theta\right)^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\left(i\theta\right)^{2n}}{\left(2n\right)!}+\frac{\left(i\theta\right)^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}\right)\end{aligned}$$

הטור שקיבלנו מתקבל מהטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(i\theta\right)^{n}}{n!}$ ע"י הכנסת סוגריים, מכאן שמתקיים:

$$e^{i\theta}=\exp\left(i\theta\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(i\theta\right)^{n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\left(i\theta\right)^{2n}}{\left(2n\right)!}+\frac{\left(i\theta\right)^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}\right)=\text{cis}\left(\theta\right)$$

■

מסקנה 1.29. לכל $0<r\in\mathbb{R}$ ולכל $\theta\in\mathbb{R}$ מתקיים $r\cdot e^{i\theta}=r\cdot\text{cis}\theta$.

מסקנה 1.30. זהות אוילר

מתקיים:

$$e^{i\pi}+1=0$$

♣ רבים מחשיבים את זהות אוילר לדוגמה הטובה ביותר ליופי מתמטי, מפני שהיא מחברת בפשטות יוצאת דופן בין חמשת הקבועים הבסיסיים ביותר במתמטיקה (0, 1, e, π ו-i) ובין שלוש הפעולות הבסיסיות ביותר (חיבור, כפל והעלאה בחזקה).

טענה 1.31. לכל $z,w\in\mathbb{C}$ מתקיים:

$$e^{z+w}=\exp\left(z+w\right)=\exp\left(z\right)\cdot\exp\left(w\right)=e^{z}\cdot e^{w}$$

מסקנה 1.32. לכל $x+iy\in\mathbb{C}$ מתקיים:

$$e^{x+iy}=\exp\left(x+iy\right)=\exp\left(x\right)\cdot\exp\left(iy\right)=e^{x}\cdot\text{cis}\left(y\right)$$

מסקנה 1.33. לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $\left|e^{z}\right|=e^{\text{Re}(z)}$ ובפרט $e^{z}=\exp\left(z\right)\neq0$.

מסקנה 1.34. $\exp$ היא פונקציה על אך אינה חח"ע - לכל $z\in\mathbb{C}$ ולכל $k\in\mathbb{Z}$ מתקיים $\exp\left(z+2\pi ik\right)=\exp\left(z\right)$.

את הטענה האחרונה ושלוש המסקנות שאחריה ראינו בכיתה אך כמובן שהוכחנו את הטענה הזו בדרך אחרת (השתמשנו בזהויות הטריגונומטריות שבמסקנה הבאה).

מסקנה 1.35. לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

♣ כמובן שניתן להוכיח את הטענות הללו גם ללא המרוכבים וכבר עשינו זאת בעבר, אך זוהי הוכחה אלגנטית ולכן שוב לא יכולתי להתאפק והבאתי אותה כאן.

הוכחה. יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, מכאן שמתקיים:

$$\begin{aligned} e^{i\cdot(\alpha\pm\beta)} &= \cos(\alpha \pm \beta) + i \cdot \sin(\alpha \pm \beta) \\ e^{i\cdot(\alpha\pm\beta)} &= e^{i\cdot\alpha} \cdot e^{\pm i\cdot\beta} = (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha) \cdot (\cos(\pm\beta) + i \cdot \sin(\pm\beta)) \\ &= (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha) \cdot (\cos\beta \pm i \cdot \sin\beta) \\ &= (\cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta) + i \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta) \end{aligned}$$

וממילא:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

■

אני לא בטוח כמה ההוכחה הזו עוזרת לנו מפני שכזכור הוכחנו את הקשר בין ההצגה הקוטבית לבין הכפל ב-$\mathbb{C}$ ע"י שימוש בזהויות אלו.

טענה 1.36. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים:

$$e^{iz} = \exp(iz) = \cos z + i \cdot \sin z$$

♣ ההוכחה זהה לזו של נוסחת אוילר, לא היה בהוכחה שום דבר מיוחד עבור מספרים ממשיים.

מסקנה 1.37. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

מסקנה 1.38. לכל $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ מתקיים $\sin z \neq 0$ ו-$\cos z \neq 0$, ומכאן נובע כי:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sin z = 0\} = \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\{z \in \mathbb{C} \mid \cos z = 0\} = \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

1.7 נספח: רשימת מבחני התכנסות בהחלט

1. מבחן ההשוואה (משפט 1.6)

2. חסימת מנה של שני טורים בין שני חיוביים (מסקנה 1.7)

3. מבחן ההשוואה הגבולי (מסקנה 1.8)

4. א״ש בין מנת איברים עוקבים של שני טורים (מסקנה 1.9)

5. מבחן השורש של קושי (משפט 1.10) והמסקנה ממנו לגבי גבול עליון של השורש ביחס ל-1

6. מבחן המנה של ד'אלמבר (משפט 1.12) והמסקנה ממנו לגבי גבול עליון וגבול תחתון של המנה ביחס ל-1

7. מבחן ראבה (משפט 1.14)

8. מבחן העיבוי של קושי (משפט 1.15)

9. הקשר בין התכנסות טור של סדרה חיובית וההתכנסות של מכפלות מתאימות (משפט 1.16)

2 נגזרות

צריך להוסיף הוכחות החל מכאן.

משפט 2.1. גזירות גוררת רציפות
תהא f פונקציה גזירה בנקודה $z\in\mathbb{C}$, f גם רציפה ב-z.

2.1 אפיונים לגזירות

משפט 2.2. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה $w\in\mathbb{C}$.
f גזירה ב-w אם"ם קיים $c\in\mathbb{C}$ כך שמתקיים:

$$\lim_{z\to w}\frac{f\left(z\right)-c\cdot\left(z-w\right)-f\left(w\right)}{z-w}=0$$

ובמקרה כזה מתקיים $c=f'\left(w\right)$.

משפט 2.3. משוואות קושי רימן
תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה $w\in\mathbb{C}$, ותהיינה $u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ כך שלכל z באותה סביבה של w מתקיים[12]:

$$f\left(z\right)=u\left(z\right)+i\cdot v\left(z\right)$$

f גזירה ב-w (במובן המרוכב) אם"ם f דיפרנציאבילית ב-w (במובן הממשי), ובנוסף:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}\left(w\right)&=\frac{\partial v}{\partial y}\left(w\right)\\ \frac{\partial u}{\partial y}\left(w\right)&=-\frac{\partial v}{\partial x}\left(w\right)\end{aligned}$$

ובמקרה כזה מתקיים:

$$\begin{aligned}f'\left(w\right)&=\frac{\partial u}{\partial x}\left(w\right)-i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left(w\right)=\frac{\partial v}{\partial y}\left(w\right)-i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left(w\right)\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\left(w\right)+i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\left(w\right)=\frac{\partial v}{\partial y}\left(w\right)+i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\left(w\right)\end{aligned}$$

♣ זה לא כל כך מפתיע אם זוכרים שכפל במספר מרוכב שקול לסיבוב ומתיחה והצורה של מטריצה כזו היא:

$$\begin{bmatrix}x&-y\\y&x\end{bmatrix}$$

ובנוסף העמודה הראשונה היא הנגזרת הכיוונית בכיוון ציר ה-x והעמודה השנייה היא הנגזרת הכיוונית בכיוון ציר ה-y.

מסקנה 2.4. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה $w\in\mathbb{C}$, ותהיינה $u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ כך שלכל z באותה סביבה של w מתקיים:

$$f\left(z\right)=u\left(z\right)+i\cdot v\left(z\right)$$

ותהא $p:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ פונקציה המוגדרת ע"י $p\left(r,\theta\right):=\left(r\cdot\cos\theta,r\cdot\sin\theta\right)$ לכל $\left(r,\theta\right)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}$).
f גזירה ב-w (במובן המרוכב) אם"ם f דיפרנציאבילית ב-w (במובן הממשי), ובנוסף:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u\circ p}{\partial r}\left(w\right)&=\frac{1}{r}\frac{\partial v\circ p}{\partial\theta}\left(w\right)\\ \frac{\partial u\circ p}{\partial\theta}\left(w\right)&=-r\cdot\frac{\partial v\circ p}{\partial r}\left(w\right)\end{aligned}$$

[12] כלומר נתבונן ב-f כפונקציה מ-$\mathbb{R}^2$ ל-$\mathbb{R}^2$ (היא באמת כזו) המוגדרת ע"י $f\left(x,y\right):=\left(u\left(x,y\right),v\left(x,y\right)\right)$ (לכל $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$).

2.2 אריתמטיקה של גזירות

משפט 2.5. גזירת סכום של פונקציות

תהיינה f ו-g פונקציות גזירות בנקודה $z\in\mathbb{C}$, הנגזרת של $f+g$ ב-z היא:

$$\left(f+g\right)'\left(z\right)=f'\left(z\right)+g'\left(z\right)$$

טענה 2.6. תהא f פונקציה גזירה בנקודה $z\in\mathbb{C}$, הנגזרת של $c\cdot f$ ב-w (לכל $w\in\mathbb{C}$) היא:

$$\left(w\cdot f\right)'\left(z\right)=w\cdot f'\left(z\right)$$

מסקנה 2.7. גזירה היא פעולה ליניארית

לכל שתי פונקציות f ו-g גזירות בנקודה $z\in\mathbb{C}$ ולכל $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ מתקיים:

$$\left(\alpha\cdot f+\beta\cdot g\right)'\left(z\right)=\alpha\cdot f'\left(z\right)+\beta\cdot g'\left(z\right)$$

משפט 2.8. כלל לייבניץ - גזירת מכפלה של פונקציות

תהיינה f ו-g פונקציות גזירות בנקודה $z\in\mathbb{C}$, הנגזרת של $f\cdot g$ ב-z היא:

$$\left(f\cdot g\right)'\left(z\right)=f'\left(z\right)\cdot g\left(z\right)+f\left(z\right)\cdot g'\left(z\right)$$

מסקנה 2.9. תהיינה f ו-g פונקציות הגזירות n פעמים בנקודה $z\in\mathbb{C}$, מתקיים:

$$\left(f\cdot g\right)^{(n)}\left(z\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot f^{(n-k)}\left(z\right)\cdot g^{(k)}\left(z\right)$$

משפט 2.10. תהא g פונקציה גזירה בנקודה $z\in\mathbb{C}$, אם $g\left(z\right)\neq0$ אז הנגזרת של $\frac{1}{g}$ ב-z היא:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'\left(z\right)=-\frac{g'\left(z\right)}{g^{2}\left(z\right)}$$

מסקנה 2.11. גזירת מנה של פונקציות

תהיינה f ו-g פונקציות גזירות בנקודה $z\in\mathbb{C}$, אם $g\left(z\right)\neq0$ אז הנגזרת של $\frac{f}{g}$ ב-z היא:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'\left(z\right)=\frac{f'\left(z\right)\cdot g\left(z\right)-f\left(z\right)\cdot g'\left(z\right)}{g^{2}\left(z\right)}$$

מסקנה 2.12. תהיינה f ו-g פונקציות אנליטיות בנקודה $z\in\mathbb{C}$; גם הפונקציות $f+g$ ו-$f\cdot g$ אנליטיות ב-z, ואם (בנוסף) g' אינה מתאפסת בסביבה של z אז גם $\frac{1}{g}$ ו-$\frac{f}{g}$ אנליטיות ב-z.

2.3 כלל השרשרת וגזירה של פונקציה הופכית

משפט 2.13. כלל השרשרת - גזירת הרכבה של פונקציות

תהיינה f ו-g פונקציות כך ש-f גזירה בנקודה $z\in\mathbb{C}$ ו-g גזירה ב-$f\left(z\right)$, הנגזרת של $g\circ f$ ב-z היא:

$$\left(g\circ f\right)'\left(z\right)=g'\left(f\left(z\right)\right)\cdot f'\left(z\right)$$

מסקנה 2.14. תהיינה f ו-g פונקציות כך ש-f אנליטית בנקודה $z\in\mathbb{C}$ ו-g אנליטית ב-$f\left(z\right)$, גם $g\circ f$ אנליטית ב-z.

למה 2.15. תהא f פונקציה הפיכה, אם f גזירה בנקודה $z\in\mathbb{C}$ וגם f^{-1} גזירה ב-$w:=f\left(z\right)$ אז מכלל השרשרת נובע ש-$\left(f^{-1}\right)'\left(f\left(z\right)\right)\cdot f'\left(z\right)=\mathrm{Id}'\left(z\right)=1$ ולכן:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(w\right)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(w\right)\right)}=\frac{1}{f'\left(z\right)}$$

מסקנה 2.16. תהא f פונקציה הפיכה, אם f גזירה בנקודה $z\in\mathbb{C}$ ו-$f'\left(z\right)=0$ אז f^{-1} אינה גזירה ב-$f\left(z\right)$.

משפט 2.17. גזירת פונקציה הופכית

תהא $f:A\to B$ פונקציה הפיכה; לכל $b\in B$ כך ש-f^{-1} רציפה ב-b, f גזירה ב-$f^{-1}\left(b\right)$ וגם $f'\left(f^{-1}\left(b\right)\right)\neq0$ מתקיים:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(b\right)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(b\right)\right)}$$

♣ העובדה ש-f רציפה אינה אומרת ש-f^{-1} רציפה[13], ולכן היינו צריכים לדרוש זאת במפורש.

2.4 נגזרות של פונקציות אלמנטריות

נגזרות של פולינומים (במעריך טבעי) ובמעריך שלם

טענה 2.18. יהיו $a,b\in\mathbb{C}$ ותהא $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f\left(z\right):=az+b$ לכל $z\in\mathbb{C}$ (פונקציה ליניארית), מתקיים $f'\left(z\right)=a$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

טענה 2.19. יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f\left(z\right):=z^{n}$ לכל $z\in\mathbb{C}$, מתקיים $f'\left(z\right)=n\cdot z^{n-1}$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

♣ כדי שהטענה תהיה נכונה עבור $z=0$ ו-$n=1$ עלינו להגדיר $0^{0}:=1$ (למרות שניתן גם להגדיר $0^{0}:=0$ מבלי לקבל סתירה לאקסיומות השדה), הדבר תלוי במוסכמה ובהקשר.

מסקנה 2.20. לכל פולינום $p\left(z\right)=\sum_{k=0}^{n}a_{k}\cdot z^{k}\in\mathbb{C}\left[z\right]$ ולכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים:

$$p'\left(z\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{k}\cdot k\cdot z^{k-1}$$

מסקנה 2.21. כל פולינום הוא פונקציה שלמה.

מסקנה 2.22. יהיו $p,q\in\mathbb{C}\left[z\right]$ ותהא f פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $z\in\mathbb{C}$ כך ש-$q\left(z\right)\neq0$):

$$f\left(z\right):=\frac{p\left(z\right)}{q\left(z\right)}$$

f אנליטית בכל תחום הגדרתה.

[13] ההוכחה באינפי' 1 מסתמכת על המונוטוניות של פונקציה רציפה והפיכה.

טענה 2.23. יהי $m \in \mathbb{Z}$ ותהא $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(z) := z^m$ לכל $0 \neq z \in \mathbb{C}$, מתקיים $f'(z) = m \cdot z^{m-1}$ לכל $0 \neq z \in \mathbb{C}$.

נגזרות של פונקציות מעריכיות ושל הפונקציות הטריגונומטריות

טענה 2.24. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $\exp'(z) = \exp(z)$, בפרט $\exp$ היא פונקציה שלמה.

מסקנה 2.25. יהי $0 < a \in \mathbb{R}$ ותהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(z) := a^z$ (לכל $z \in \mathbb{C}$), מתקיים $f'(z) = \ln a \cdot a^z$ (לכל $z \in \mathbb{C}$).

מסקנה 2.26. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $\sin'(z) = \cos(z)$ ו-$\cos'(z) = -\sin(z)$.

3 אינטגרלים

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש-$a < b$.

3.1 מסילות

תזכורת: במרחב מטרי קשיר הקבוצות היחידות שהן פתוחות וסגורות הן המרחב כולו והקבוצה הריקה.

טענה 3.1. יהי $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ תחום, לכל $z, w \in \Omega$ קיימת מסילה פוליגונלית $\gamma : [a, b] \to \Omega$ כך ש-$\gamma(a) = z$ ו-$\gamma(b) = w$.

♣ כלומר כל תחום הוא קשיר מסילתית ע"י מסילות פוליגונליות.

תזכורת: התמונה של כל פונקציה רציפה על מרחב מטרי קומפקטי גם היא קומפקטית, בפרט לכל מסילה $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ הקבוצה γ^* היא קבוצה קומפקטית.

מסקנה 3.2. לכל מסילה $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, הקבוצה $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ היא קבוצה פתוחה ויש לה רכיב קשירות אחד בדיוק שאינו חסום.

תזכורת: כל פונקציה רציפה על מרחב מטרי קומפקטי היא פונקציה רציפה במידה שווה.

מסקנה 3.3. כל מסילה $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ היא רציפה במידה שווה.

3.2 אינטגרל מסילתי/קווי

משפט 3.4. תהא $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ מסילה גזירה ברציפות למקוטעין, מתקיים:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$$

משפט 3.5. אי-שוויון המשולש האינטגרלי

תהא $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ מסילה, מתקיים:

$$\left| \int_a^b \gamma(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |\gamma(x)| \, dx$$

משפט 3.6. ליניאריות האינטגרל

תהיינה $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ מסילות אינטגרביליות על $[a,b]$ ויהיו $z, w \in \mathbb{C}$, מתקיים:

$$\int_a^b z \cdot \gamma_1(x) + w \cdot \gamma_2(x)\, dx = z \cdot \int_a^b \gamma_1(x)\, dx + w \cdot \int_a^b \gamma_2(x)\, dx$$

טענה 3.7. תהיינה $f : \Omega \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה ו-$\gamma : [a,b] \to \Omega$ מסילה גזירה ברציפות למקוטעין, מתקיים:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = -\int_{\gamma} f(z)\, dz$$

טענה 3.8. תהא $f : \Omega \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה, יהיו $c, d \in \mathbb{R}$ כך ש-$c < d$ ותהיינה $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ ו-$\gamma_2 : [c,d] \to \Omega$ מסילות גזירה ברציפות למקוטעין כך ש-$\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, מתקיים:

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$

משפט 3.9. תהיינה $f : \Omega \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה ו-$\gamma : [a,b] \to \Omega$ מסילה גזירה ברציפות למקוטעין, מתקיים:

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\, dz\right| \le L(\gamma) \cdot \left(\max\left\{|f(z)| : z \in \gamma^*\right\}\right)$$

למה 3.10. תהיינה $f : \Omega \to \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית ו-$\gamma : [a,b] \to \Omega$ מסילה, לכל $t \in [a,b]$ כך ש-γ גזירה ב-t מתקיים:

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

משפט 3.11. המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי

תהיינה F ו-f פונקציות מרוכבות כך ש-F היא פונקציה קדומה של f על תחום Ω ו-f רציפה בתחום זה[14]. לכל מסילה גזירה ברציפות למקוטעין $\gamma : [a,b] \to \Omega$ מתקיים:

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

מסקנה 3.12. תהיינה F ו-f פונקציות מרוכבות כך ש-F היא פונקציה קדומה של f על תחום Ω ו-f רציפה בתחום זה. לכל מסילה סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין $\gamma : [a,b] \to \Omega$ מתקיים:

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$

מסקנה 3.13. לכל $t \in [0, 2\pi]$ מתקיים $C(0,1)'(t) = i \cdot e^{it}$ (עבור 0 ו-2π מדובר בנגזרות חד-צדדיות), מכאן שמתקיים:

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

[14] למעשה אין צורך בדרישה ש-f תהיה רציפה, אנחנו נראה בהמשך הקורס שהנגזרת של פונקציה גזירה גם היא גזירה ובפרט רציפה.

♣ באותה דרך ניתן להסיק שלכל $0 \leq \theta \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\int\limits_{\gamma_{r,\theta}} \frac{1}{z}\ dz = \theta \cdot i$$

כאשר $\gamma_{r,\theta} : [0,\theta] \to \mathbb{C}$ היא המסילה המוגדרת ע"י $\gamma_{r,\theta}(t) := r \cdot e^{it}$ עבור $0 < r \in \mathbb{R}$ כלשהו.

מסקנה 3.14. תהא $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(z) := \frac{1}{z}$ (לכל $z \in \mathbb{C}^*$), ל-f אין פונקציה קדומה.

♣ למעשה ניתן להסיק יותר מזה, ל-f הנ"ל אין קדומה באף סביבה מנוקבת של 0, כל מה שעלינו לעשות הוא לקחת מעגל קטן יותר סביב 0.

3.3 אינטגרלים לא אמיתיים

צריך להוסיף טענות בסעיף זה.

4 סדרות וטורים של פונקציות

4.1 תנאים להתכנסות במידה שווה

משפט 4.1. אפיון שקול להתכנסות במ"ש של סדרות וטורים של פונקציות

תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש לפונקציה גבולית f ב-D[15] אם"ם מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup\left\{\left|f_n(z) - f(z)\right| : z \in D\right\}\right) = 0$$

באופן דומה טור פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס במ"ש לפונקציה גבולית S אם"ם מתקיים:

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{N} u_n(z) - S(z)\right| : z \in D\right\}\right) = 0$$

משפט 4.2. תנאי קושי להתכנסות במ"ש של סדרות וטורים של פונקציות

תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות., תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ תתכנס במ"ש ב-D הוא שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n, m \in \mathbb{N}$ ולכל $z \in D$ מתקיים $\left|f_n(z) - f_m(z)\right| < \varepsilon$.

כמו כן תנאי הכרחי ומספיק לכך שטור פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ יתכנס במ"ש הוא שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$, לכל $m \in \mathbb{N}$ ולכל $z \in D$ מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

♣ תנאי קושי להתכנסות נקודתית הוא פשוט תנאי קושי להתכנסות סדרות.

משפט 4.3. מבחן ה-M של ויירשטראס[16]

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ טור פונקציות המוגדרות בתחום D; אם קיים טור מספרים ממשיים $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ מתכנס, כך שלכל $z \in D$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\left|u_n(x)\right| \leq M_n$, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ מתכנס בהחלט במ"ש ב-D.

[15] D מוכל בחיתוך תחומי ההגדרה של הפונקציות וכן לגבי טורים ובכלל בסיכום זה.
[16] ערך בוויקיפדיה: קארל ויירשטראס.

4.2 הורשת תכונות לפונקציה הגבולית

טענה 4.4. תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום D וחסומות בו, אם $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ב-D לפונקציה גבולית f אז f חסומה.

טענה 4.5. תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום D ורציפות בנקודה $z_0 \in D$, אם $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ב-D לפונקציה גבולית f אז f רציפה ב-z_0.

מסקנה 4.6 תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות המוגדרות בתחום D, אם $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ב-D לפונקציה גבולית f אז f רציפה ב-D.

♣ נשים לב ששתי הטענות האחרונות (והמסקנה) נכונות גם אם יש רק תת-סדרה של $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ העומדת בתנאים שהרי הפונקציה הגבולית f היא גם הגבולית של תת-הסדרה (ירושה).

מסקנה 4.7 יהי $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ טור פונקציות המוגדרות בתחום D ורציפות בנקודה $z_0 \in D$, אם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ מתכנס במ"ש ב-D אז גם הפונקציה הגבולית S של הטור רציפה בנקודה זו, ואם (בנוסף) אלו פונקציות רציפות ב-D אז גם S רציפה ב-D.

♣ לעומת זאת אם ב-$(u_n)_{n=1}^{\infty}$ יש פונקציה אחת שאינה רציפה לא נוכל לדעת אם קיימת תת-סדרה של סדרת הסכומים החלקיים שבה כל הפונקציות רציפות ולכן ההערה הקודמת אינה נכונה עבור טורי פונקציות.[17]

♣ המשפטים האחרונים מאפשרים כמין חילוף של סדר הגבולות, נשים לב שאם $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(u_n)_{n=1}^{\infty}$ הן סדרות של פונקציות רציפות בנקודה $z_0 \in D$ אז מתקיים:

$$\lim_{z\to z_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(z)\right) = \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{z\to z_0} f_n(z)\right)$$

$$\lim_{z\to z_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\right) = \lim_{z\to z_0} S(z) = S(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{z\to z_0} u_n(z)\right)$$

משפט 4.8 תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות בתחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ המתכנסת במ"ש לפונקציה f (בתחום זה), ותהא $\gamma : I \to \Omega$ מסילה גזירה ברציפות למקוטעין.
מתקיים (ראינו לעיל ש-f רציפה):

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma} f_n(z)\,dz$$

מסקנה 4.9 יהי $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ טור פונקציות רציפות בתחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ המתכנס במ"ש לפונקציה S (בתחום זה), ותהא $\gamma : I \to \Omega$ מסילה גזירה ברציפות למקוטעין.
מתקיים (ראינו לעיל ש-S רציפה):[18]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} u_n(z)\,dz = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} \int_{\gamma} u_n(z)\,dz\right) dz = \int_{\gamma} S(z)\,dz = \int_{\gamma}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\right) dz$$

[17] כאן תת-סדרה אינה יכולה "לדלג" על הפונקציה שאינה רציפה משום שסדרת הסכומים החלקיים כוללת אותה ממקום מסוים ואילך (והטור הוא הגבול **שלה**) ולכן תת-סדרה של סדרת הסכומים החלקיים תכלול אותה ממקום מסוים ואילך.

[18] אנחנו משתמשים במשפט הקודם רק בשוויון המסומן באדום.

4.3 טורי חזקות

יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$ טור חזקות סביב נקודה $z_0 \in \mathbb{C}$.

משפט 4.10. משפט אבל (Abel)[19]

יהי $w \in \mathbb{C}$ כך שהטור הנ"ל מתכנס ב-w[20], הטור הנ"ל מתכנס נקודתית בכל נקודה $z \in \mathbb{C}$ המקיימת $|z-z_0| < |w-z_0|$.

♣ נשים לב: המשפט אינו נכון אם היינו משתמשים בא"ש חלש במקום החזק המופיע בו משום שייתכן ש-w נמצא על השפה של דיסק ההתכנסות.

משפט 4.11 מתקיימת אחת משלוש האפשרויות הבאות:

1. הטור מתכנס נקודתית על כל המישור המרוכב.
2. קיים $0 < R \in \mathbb{R}$ יחיד כך שהטור מתכנס נקודתית ב-$B_R(z_0)$ ואולי גם ב-$\partial B_R(z_0)$ אך לא בשום נקודה אחרת[21].
3. הטור מתכנס נקודתית אך ורק ב-z_0.

♣ המשפט הזה כמעט מובן מאליו אחרי משפט Abel ולכאורה הוא אינו אומר דבר, הנקודה היא שניתן לחשב את אותו R במקרה השני או להוכיח שמדובר באחד משני המקרים האחרים, על כך בשני המשפטים הבאים.

משפט 4.12. משפט קושי-אדמר[22]

נסמן:

$$c := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

ואז:

1. אם $c = \infty$ אז רדיוס ההתכנסות של הטור הוא 0.
2. אם $0 < c \in \mathbb{R}$ אז רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{c}$.
3. אם $c = 0$ אז רדיוס ההתכנסות הוא ∞.

משפט 4.13. משפט ד'אלמבר[23]

אם קיים הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

אז רדיוס ההתכנסות שווה לו.

♣ שני המשפטים הללו מזכירים את מבחן השורש של קושי ומבחן ד'לאמבר להתכנסות בהחלט, ולא בכדי: הם נובעים ישירות ממבחנים אלו (בהתאמה).

טענה 4.14. נניח שקיים $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש-$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$ מתכנס ב-r, אם עבור אותו r קיימת סדרה $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ של נקודות ב-$B_r(z_0)$ כך ש-$\lim_{k\to\infty} \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z_k-z_0)^n\right| = \infty$ אז רדיוס ההתכנסות של הטור הוא בדיוק r.

[19] ערך בוויקיפדיה: נילס הנריק אבל.
[20] בהכרח קיים כזה כי הטור מתכנס ב-z_0.
[21] כלומר הטור אינו מתכנס בשום נקודה שאינה ב-$\hat{B_R}(z_0)$.
[22] ערך בוויקיפדיה: ז'אן אדמר.
[23] ערך בוויקיפדיה: ז'אן לה רון ד'אלמבר.

משפט 4.15. כל טור חזקות מתכנס בהחלט במ"ש על כל תת-קבוצה קומפקטית של דיסק ההתכנסות, אם הטור מתכנס נקודתית בהחלט בנקודה כלשהי על השפה של דיסק ההתכנסות[24] אז הוא מתכנס במ"ש על הכדור הסגור המתאים לקטע ההתכנסות (שהוא כדור פתוח מהגדרה).

מסקנה 4.16. הפונקציה הגבולית של טור חזקות רציפה בדיסק ההתכנסות.

באינפי' 2 ראינו כמה טענות שהמסקנה מהן היא שטור חזקות רציף בתחום ההתכנסות שלו, האם זה נכון גם עבור טור חזקות מורכב?

משפט 4.17. הטור המתקבל ע"י גזירה איבר איבר של טור החזקות, כלומר:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cdot(x-x_0)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot n\left(x-x_0\right)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}\left(n+1\right)\cdot(x-x_0)^n$$

הוא בעל אותו רדיוס התכנסות של הטור המקורי ולכל z בתחום ההתכנסות[25] מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}\left(n+1\right)\cdot(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cdot(z-z_0)^n\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(z-z_0)^n\right)'$$

♣ שוב נובע מכאן שטור הנגזרות מתכנס במ"ש על כל תת-קבוצה קומפקטית של תחום ההתכנסות.

♣ משפט זה נובע ישירות ממשפט קושי-אדמר.

מה קורה עם טור האינטגרלים הלא מסוימים?

מסקנה 4.18. נניח שרדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cdot(z-z_0)^k$ חיובי (כולל האפשרות שהוא ∞) ונסמן ב-S את הפונקציה הגבולית של הטור, לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל z בתחום ההתכנסות מתקיים:

$$S^{(n)}\left(z\right)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cdot(z-z_0)^k\right)^{(n)}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\cdot a_k\cdot(z-z_0)^{k-n}$$

ובפרט:

$$S^{(n)}\left(z_0\right)=n!\cdot a_n$$

[24] התכנסות בהחלט בקצה אחד שקולה להתכנסות בהחלט בקצה האחר ולכן אין כל הבדל ביניהם, בנוסף, נשים לב שאם קטע ההתכנסות הוא כל הישר אז אין לקטע ההתכנסות קצה ולכן תנאי זה אינו מתקיים מהגדרה.

[25] שוב נדגיש שמדובר בתחום ההתכנסות ולא רק בדיסק ההתכנסות.