אינטגרציה של פונקציה רציונלית - הוכחה מפורטת

חשבון אינפיניטסימלי (2) - 80132

מרצה: יורם לסט

מתרגלים: דניאל אופנר ומתן בן-אשר

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 הקדמה

1.1 מטרה

הגדרה. פונקציה ממשית $f:D\to\mathbb{R}$ תקרא פונקציה רציונלית אם קיימים שני פולינומים $F,G\in\mathbb{R}\left[x\right]$ כך שלכל $x\in D$ מתקיים:

$$f\left(x\right)=\frac{F\left(x\right)}{G\left(x\right)}$$

- ♣ נשים לב ש-f אינה יכולה להיות מוגדרת בשורשים של Q (אם יש כאלה).
- ♣ אנו עומדים לפתח אלגוריתם למציאת האינטגרל של כל פונקציה רציונלית ולשם כך נוכיח כעת משפט באמצעות כלים שנלמדו בקורס "אלגברה ליניארית (2)", אין צורך בהכרת כלים אלו ע"מ להפעיל את האלגוריתם אך יש צורך בידיעת המשפט בשבילו.

1.2 פירוק לשברים חלקיים

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

טענה. ויהיו $F,G\in\mathbb{F}\left[x\right]$ שני פולינומים זרים זה לזה, קיימים $A,B\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש-$\deg B<\deg F$ ו-$\deg A<\deg G$ המקיימים $A\cdot F+B\cdot G=1$.

הוכחה. אלגוריתם אוקלידס המורחב מבטיח לנו שקיימים $C,D\in\mathbb{F}\left[x\right]$ המקיימים $A\cdot F+B\cdot G=1$, יהיו C ו-D כנ"ל.
נחלק את C ב-G ואת D ב-F (חלוקה עם שארית): יהיו $Q_1,Q_2,A,B\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש-$\deg A<\deg G$, $\deg B<\deg F$ ומתקיים:

$$\begin{aligned}C&=Q_1\cdot G+A\\D&=Q_2\cdot F+B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 1=C\cdot F+D\cdot G&=\left(Q_1\cdot G+A\right)\cdot F+\left(Q_2\cdot F+B\right)\cdot G\\&=Q_1\cdot G\cdot F+A\cdot F+Q_2\cdot F\cdot G+B\cdot G\\&=\left(Q_1+Q_2\right)\cdot F\cdot G+A\cdot F+B\cdot G\end{aligned}$$

נזכור ש-$\deg R_1<\deg G$ ו-$\deg R_2<\deg F$ ולפיכך:

$$\begin{aligned}\deg\left(A\cdot F\right)=\deg A+\deg F<\deg G+\deg F=\deg\left(F\cdot G\right)\\\deg\left(B\cdot G\right)=\deg B+\deg G<\deg F+\deg G=\deg\left(F\cdot G\right)\end{aligned}$$

כעת נניח בשלילה ש-$Q_1+Q_2\neq 0$ ומכאן שמתקיים $\deg\left(\left(Q_1+Q_2\right)\cdot F\cdot G\right)\geq\deg\left(F\cdot G\right)$ ולכן גם:

$$\begin{aligned}0=\deg\left(1\right)&=\deg\left(C\cdot F+D\cdot G\right)\\&=\deg\left(\left(Q_1+Q_2\right)\cdot F\cdot G+A\cdot F+B\cdot G\right)\\&=\deg\left(\left(Q_1+Q_2\right)\cdot F\cdot G\right)\geq\deg\left(F\cdot G\right)>0\end{aligned}$$

מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$Q_1+Q_2=0$, כלומר $1=A\cdot F+B\cdot G$ כנדרש. ■

טענה. יהיו $F,G,G_1,G_2\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש- $\deg F<\deg G$, $\gcd\left(G_1,G_2\right)=1$ ו-$G=G_1\cdot G_2$.
קיימים $F_1,F_2\in\mathbb{F}\left[x\right]$ יחידים כך ש-$\deg F_1<\deg G_1$ ו-$\deg F_2<\deg G_2$ המקיימים:

$$\frac{F}{G}=\frac{F_1}{G_1}+\frac{F_2}{G_2}$$

הוכחה. יהיו $A,B\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש-$\deg A<\deg G_2$ ו-$\deg B<\deg G_1$ המקיימים $A\cdot G_1+B\cdot G_2=1$ (ע"פ הטענה הקודמת קיימים A ו-B כאלה).
נחלק את $F\cdot B$ ב-G_1 עם שארית: יהיו $Q,F_1\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש-$\deg F_1<\deg G_1$ ו-$F\cdot B=Q\cdot G_1+F_1$.
נגדיר $F_2:=F\cdot A+Q\cdot G_2$, ומכאן שמתקיים:

$$\frac{F}{G}=\frac{F\cdot\left(A\cdot G_1+B\cdot G_2\right)}{G_1\cdot G_2}=\frac{F\cdot B}{G_1}+\frac{F\cdot A}{G_2}=\frac{Q\cdot G_1+F_1}{G_1}+\frac{F_2-Q\cdot G_2}{G_2}=\frac{F_1}{G_1}+\frac{F_2}{G_2}$$

כבר ראינו ש-$\deg F_1<\deg G_1$ ולכן כל מה שנותר לנו להוכיח הוא שמתקיים גם $\deg F_2<\deg G_2$. מהשוויון בשורה הקודמת נובע שמתקיים $F=F_1\cdot G_2+F_2\cdot G_1$,

$$\begin{aligned}\Rightarrow\deg F_2=\deg\left(\frac{F-F_1\cdot G_2}{G_1}\right)&=\deg\left(F-F_1\cdot G_2\right)-\deg G_1\\&\leq\max\left\{\deg F,\deg\left(F_1\cdot G_2\right)\right\}-\deg G_1\\&=\max\left\{\deg F,\deg F_1+\deg G_2\right\}-\deg G_1\\&<\max\left\{\deg G,\deg G_1+\deg G_2\right\}-\deg G_1\\&=\max\left\{\deg\left(G_1\cdot G_2\right),\deg\left(G_1\cdot G_2\right)\right\}-\deg G_1\\&=\deg\left(G_1\cdot G_2\right)-\deg G_1=\deg G_1+\deg G_2-\deg G_1=\deg G_2\end{aligned}$$

נוכיח את היחידות, יהיו $P_1,P_2\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש-$\deg P_1<\deg G_1$ ו-$\deg P_2<\deg G_2$ המקיימים:

$$\frac{F}{G}=\frac{P_1}{G_1}+\frac{P_2}{G_2}$$

$$\Rightarrow 0=\left(\frac{P_1}{G_1}+\frac{P_2}{G_2}\right)-\left(\frac{F_1}{G_1}+\frac{F_2}{G_2}\right)=\frac{P_1-F_1}{G_1}+\frac{P_2-F_2}{G_2}=\frac{\left(P_1-F_1\right)\cdot G_2+\left(P_2-F_2\right)\cdot G_1}{G_1\cdot G_2}$$

מכאן שמתקיים $\left(P_1-F_1\right)\cdot G_2=-\left(P_2-F_2\right)\cdot G_1$, כלומר G_1 מחלק את $\left(P_1-F_1\right)\cdot G_2$ ו-G_2 מחלק את $\left(P_2-F_2\right)\cdot G_1$ ולכן מהעובדה ש-G_1 ו-G_2 זרים נובע שמתקיים:

$$G_1\mid\left(P_1-F_1\right),\ \ G_2\mid\left(P_2-F_2\right)$$

אבל מהגדרה $\deg\left(P_1-F_1\right)<\deg G_1$ ו-$\deg\left(P_2-F_2\right)<\deg G_2$ ולכן בהכרח מתקיים $P_1-F_1=P_2-F_2=0$ כלומר $P_1=F_1$ ו-$P_2=F_2$. ■

למה. יהיו $0 \neq F, G \in \mathbb{F}[x]$ ו-$e \in \mathbb{N}$, קיימים $F_0 F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathbb{F}[x]$ יחידים כך ש-$\deg F_k < \deg G$ לכל $k \in \mathbb{N}$[1] המקיימים:

$$\frac{F}{G^e} = \sum_{k=0}^{e} \frac{F_k}{G^k} = F_0 + \sum_{i=1}^{e} \frac{F_k}{G^k}$$

כאשר $\deg F_0 = \deg F - \deg G^e$ אם $\deg F \geq \deg G^e$ ואחרת $F_0 = 0$.

הוכחה. נסמן $R_0 := F$ ולכל $e \geq k \in \mathbb{N}_0$ נגדיר את F_k ו-R_{k+1} ע"י חלוקה עם שארית: יהיו $R_{k+1}, F_k \in \mathbb{F}[x]$ כך ש-$\deg R_{k+1} < \deg G^{e-k}$ ו-$R_k = F_k \cdot G^{e-k} + R_{k+1}$.

נשים לב כבר עכשיו לכך ש-$\deg F_0 = \deg F - \deg G$ אם $\deg F \geq \deg G$ ואחרת $F_0 = 0$.

א"כ מתקיים:

$$F - R_{e+1} = R_0 - R_{e+1} = \sum_{k=0}^{e} (R_k - R_{k+1}) = \sum_{k=0}^{e} F_k \cdot G^{e-k}$$

מהגדרה $\deg R_{e+1} < \deg G^0 = 0$ ולכן $R_{e+1} = 0$, ומכאן שמתקיים[2]:

$$F = \sum_{k=0}^{e} F_k \cdot G^{e-k} = \frac{F_k \cdot G^e}{G^k}$$

וממילא:

$$\frac{F}{G^e} = \sum_{k=0}^{e} \frac{F_k}{G^k}$$

היחידות נובעת מסיבה דומה לכך שניתן להציג מספר טבעי בצורה יחידה בבסיס ספירה נתון: החזקות הגדולות מהדרגה של G^{e-1} מגיעות אך ורק מ-F_0 ולכן הוא יחיד, המקדם של החזקה ה-$\deg G^{e-1}$ מגיע אך ורק מ-F_0 ו-F_1 ולכן גם F_1 יחיד; א"כ נותר לנו להוכיח ש-$\deg F_k < \deg G$ לכל $e \geq k \in \mathbb{N}$.

נשים לב לכך שלכל $e \geq k \in \mathbb{N}$ מתקיים $\deg R_k < \deg G^{e-(k-1)}$, כלומר $\deg R_k < (e+1-k) \cdot \deg G$, אך מהגדרה לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\deg R_k = \deg\left(F_k \cdot G^{e-k}\right) = \deg F_k + \deg\left(G^{e-k}\right) = \deg F_k + (e-k) \cdot \deg G$$

ולכן גם:

$$\deg F_k < (e+1-k) \cdot \deg G - (e-k) \cdot \deg G = \deg G$$

■

[1] שימו לב שהחרגנו כאן את F_0, ייתכן ש-$\deg F_0 \geq \deg G$.

[2] שימו לב שבעצם הצגנו כאן את F כסכום של "ספרות" כפול חזקות של G, כלומר הפכנו את G ל"בסיס ספירה" כמו ש-10 הוא בסיס ספירה של השיטה העשרונית.

משפט. פירוק לשברים חלקיים

יהיו $0 \neq F, G \in \mathbb{F}[x]$.

יהיו $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים אי-פריקים שונים זה מזה ו-$e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים:

$$G = \prod_{i=1}^{n} (P_i)^{e_i}$$

קיימים פולינומים $Q, F_{1,1}, F_{1,2} \ldots, F_{1,e_1}, F_{2,1}, F_{2,2} \ldots, F_{1,e_2}, \ldots\ldots\ldots, F_{n,1}, F_{n,2} \ldots, F_{1,e_n} \in \mathbb{F}[x]$ יחידים כך ש-$\deg F_{i,j} < \deg P_i$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ ולכל $e_i \geq j \in \mathbb{N}$ המקיימים:

$$\frac{F}{G} = Q + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{e_i} \frac{F_{ij}}{(P_i)^j}$$

כאשר $\deg Q = \deg F - \deg G$ אם $\deg F \geq \deg G$ ואחרת $Q = 0$.

♣ ניתן לדרוש ש-$P_1, P_2, \ldots, P_n$ הם הפולינומים מתוקנים ואז קיים $c \in \mathbb{F}$ (המקדם של החזקה הגדולה ביותר ב-G) כך שמתקיים:

$$G = c \cdot \prod_{i=1}^{n} (P_i)^{e_i}$$

ואז המשפט אומר שקיימים פולינומים ... המקיימים:

$$\frac{F}{G} = Q + \frac{1}{c} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{e_i} \frac{A_{ij}}{(P_i)^j}$$

הוכחה. נחלק את F ב-G עם שארית: יהיו $Q, R \in \mathbb{F}[x]$ כך ש-$\deg R < \deg G$ ו-$F = Q \cdot G + R$.

נשים לב כבר עכשיו לכך ש-$\deg Q = \deg F - \deg G$ אם $\deg F \geq \deg G$ ואחרת $Q = 0$.

מאינדוקציה על הטענה האחרונה נובע שקיימים $R_1, R_2, \ldots, R_{e_i} \in \mathbb{F}[x]$ יחידים כך ש-$\deg R_i < \deg (P_i)^{e_i}$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ המקיימים:

$$\frac{F}{G} = Q + \frac{R}{G} = Q + \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{(P_i)^{e_i}}$$

ומהלמה נובע שלכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ קיימים $F_{i,1}, F_{i,1}, \ldots, F_{i,e_i} \in \mathbb{F}[x]$ יחידים כך ש-$\deg A_{i,j} < \deg P_i$ לכל $e_i \geq j \in \mathbb{N}$ המקיימים:

$$\frac{R_i}{(p_i)^{e_i}} = \sum_{j=1}^{e_i} \frac{F_{i,j}}{(P_i)^j}$$

ומכאן נובע כי:

$$\frac{F}{G} = Q + \frac{R}{G} = Q + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{e_i} \frac{F_{i,j}}{(P_i)^j}$$

■

1.3 איך בפועל מוצאים את הפולינומים שהמשפט מבטיח את קיומם?

יופי, הוכחנו שקיימים פולינומים כנ"ל, אבל למצוא אותם בדרך שהופיעה בהוכחה נראה כמו משימה ארוכה ומייגעת; למזלנו ניתן למצוא אותם בדרך פשוטה יותר נשתמש בסימוני המשפט:

- כדי למצוא את Q עלינו לחלק את F ב-G עם שארית והמנה המתקבלת היא Q.
- כדי למצוא את הפירוק של G לגורמים אי-פריקים אין שיטה כללית, אך בדרך כלל נקבל בתרגילים ובמבחנים פולינומים מדרגה נמוכה שקל לפרק ע"י ניחוש השורשים שלהם.
- כדי למצוא את $F_{i,j}$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ ולכל $e_i\geq j\in\mathbb{N}$ נשים לב לכך שמתקיים:

$$R=G\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{e_i}\frac{F_{i,j}}{\left(P_i\right)^j}=\prod_{i=1}^{n}\left(P_i\right)^{e_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{e_i}\frac{F_{i,j}}{\left(P_i\right)^j}$$

נפתח את הסוגריים ונקבל את המקדם של כל חזקה כביטוי של המקדמים של הפולינומים ה-$F_{i,j}$-ים (שאינם ידועים לנו), ומכיוון שקיימת רק דרך אחת להציג פולינום בצורה זו והמקדמים של R ידועים לנו (הוא השארית של חילוק F ב-G) הרי שקיבלנו מערכת משוואות ליניאריות שאנחנו כבר יודעים לפתור וכבר ידוע לנו שקיים פתרון יחיד.

למעשה ניתן לפשט את הדרך עוד יותר ע"י הצבת x-ים מסוימים ב-R כדי לאפס חלק מהאיברים ולהתמקד באחרים.

2 האלגוריתם

2.1 התחלה

תזכורת: בליניארית 2 הוכחנו בקורס שכל פולינום אי-פריק מעל שדה הממשיים הוא מדרגה 1 או 2.

מהמשפט שהוכחנו בפרק הקודם נובע שכדי למצוא את האינטגרל הלא מסוים מספיק שנדע למצוא את האינטגרל של פונקציה רציונלית שבה המכנה הוא חזקה של פולינום מתוקן מדרגה 1 או 2 והמונה הוא פולינום מדרגה קטנה ממש מזו של המכנה.

א"כ אנו רוצים לחשב את האינטגרלים הבאים (עבור $A,B,a,b\in\mathbb{R}$ ו-$1<n\in\mathbb{N}$ נתונים):

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}dx \qquad \int\frac{B}{x+b}dx$$

$$\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+ax+b\right)^n}dx \qquad \int\frac{B}{\left(x+b\right)^n}dx$$

לפני שנמשיך חשוב שנזכור את האינטגרלים הבאים (עבור $1\neq n\in\mathbb{Z}$ ופונקציה גזירה f):

$$\begin{aligned}\int\frac{f'\left(x\right)}{\left(f\left(x\right)\right)^n}dx&=\int\left(f\left(x\right)\right)^{-n}\cdot f'\left(x\right)dx=\frac{\left(f\left(x\right)\right)^{-n+1}}{-n+1}+C\\&=-\frac{1}{\left(n-1\right)\cdot f^{n-1}\left(x\right)}+C\end{aligned}$$

$$\int\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}dx=\ln\left|f\left(x\right)\right|+C$$

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan\left(x\right)+C$$

2.2 החלק הפשוט

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ו-$1<n\in\mathbb{N}$ ונחשב את האינטגרלים הנ"ל, שני המקרים הראשונים (השמאליים) פשוטים:

$$\int\frac{B}{x+b}dx=B\cdot\int\frac{1}{x+b}dx=B\cdot\ln|x+b|+C$$

$$\int\frac{B}{(x+b)^{n}}dx=B\cdot\int\frac{1}{(x+b)^{k}}dx=-\frac{B}{(k-1)\,(x+b)^{k-1}}+C$$

יהי $m\in\mathbb{N}$, נשים לב לכך שבין אם $m>1$ ובין $m=1$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\int\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^{m}}dx&=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2Ax+2B}{(x^2+ax+b)^{m}}dx=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2Ax+A\cdot a}{(x^2+ax+b)^{m}}dx+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2B-A\cdot a}{(x^2+ax+b)^{m}}\\&=\frac{A}{2}\cdot\int\frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^{m}}dx+\left(B-\frac{A\cdot a}{2}\right)\cdot\int\frac{1}{(x^2+ax+b)^{m}}dx\end{aligned}$$

נחשב את האינטגרל השמאלי, אם $m=1$ אז מתקיים:

$$\frac{A}{2}\cdot\int\frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^{m}}dx=\frac{A}{2}\cdot\int\frac{2x+a}{x^2+ax+b}dx=\frac{A}{2}\cdot\ln\left|x^2+ax+b\right|+C$$

ואם $m>1$ אז מתקיים:

$$\frac{A}{2}\cdot\int\frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^{m}}dx=-\frac{A}{2\,(m-1)\cdot(x^2+ax+b)^{m-1}}+C$$

אם כך כל מה שנותר לנו הוא לחשב את האינטגרל הימני:

$$\int\frac{1}{(x^2+ax+b)^{m}}dx$$

2.3 הצבה ע"פ האינטואיציה לנוסחת השורשים

בקובץ "על פתרון משוואות ונוסחת השורשים" (בנספח) ניתן לראות שקיימים $d,r\in\mathbb{R}$ כך ש-$r>0$[3] המקיימים (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$x^2+ax+b=(x-d)^2+r$$

יהיו d ו-r כנ"ל ומכאן שמתקיים (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$x^2+ax+b=r\cdot\left(\frac{(x-d)^2}{r}+1\right)=r\cdot\left(\left(\frac{x-d}{\sqrt{r}}\right)^2+1\right)$$

תהא $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$\varphi(x):=\frac{x-d}{\sqrt{r}}$$

וממילא לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$x^2+ax+b=r\cdot\left((\varphi(x))^2+1\right),\ \ \varphi'(x)=\frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x^2+ax+b)^m}dx&=\int\frac{1}{r^m}\cdot\left((\varphi(x))^2+1\right)^{-m}dx\\&=\frac{\sqrt{r}}{r^m}\cdot\int\left((\varphi(x))^2+1\right)^{-m}\cdot\varphi'(x)dx\\&=\frac{\sqrt{r}}{r^m}\cdot I_m(\varphi(x))=\frac{\sqrt{r}}{r^m}\cdot I_m\left(\frac{x-d}{\sqrt{r}}\right)\end{aligned}$$

כאשר הסדרה $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ מוגדרת ע"י (לכל $k\in\mathbb{N}$):

$$I_k=\int\frac{1}{(1+x^2)^k}dx$$

וכפי שנראה להלן ניתן לחשב את I_k לכל $k\in\mathbb{N}$ ע"י נוסחת נסיגה.

א"כ לסיכום קיבלנו שאם $n=1$ אז:

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}dx=\frac{A}{2}\cdot\ln\left|x^2+ax+b\right|+\left(B-\frac{A\cdot a}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{r}}{r^n}\cdot I_n\left(\frac{x-d}{\sqrt{r}}\right)$$

ואם $n>1$ אז:

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}dx=-\frac{A}{2(n-1)\cdot(x^2+ax+b)^{n-1}}+\left(B-\frac{A\cdot a}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{r}}{r^n}\cdot I_n\left(\frac{x-d}{\sqrt{r}}\right)$$

---

[3] $d=-\frac{a}{2}$ ו-$r=b-\frac{a^2}{4}$, נשים לב לכך ש-x^2+ax+b אי פריק ולכן $4r=a^2-4b>0$.

2.4 סדרת האינטגרלים $(I_k)_{k=1}^{\infty}$

מתקיים:

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$$

ולכן עבור $k=1$ מתקיים:

$$\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^k}dx = \int \frac{1}{x^2+ax+b}dx = \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \arctan\left(\frac{x-d}{\sqrt{r}}\right) + C$$

ולסיכום:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+ax+b}dx = \frac{A}{2} \cdot \ln\left|x^2+ax+b\right| + \left(B - \frac{A \cdot a}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \arctan\left(\frac{x-d}{\sqrt{r}}\right) + C$$

ולכל $2 \le k \in \mathbb{N}$ נקבל (ע"י אינטגרציה בחלקים):

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_{k-1}(x) &= \int \frac{1}{(1+x^2)^{k-1}}dx \\
&= \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{k-1}}dx \\
&= x \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{k-1}} - \int x \cdot \frac{2x \cdot (-k+1)}{(1+x^2)^k}\, dx \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^{k-1}} + 2(k-1) \cdot \int \frac{x^2}{(1+x^2)^k}dx \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^{k-1}} + (2k-2) \cdot \int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^k}dx \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^{k-1}} + (2k-2) \cdot \left(\int \frac{1}{(1+x^2)^{k-1}}dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^k}dx\right)
\end{aligned}$$

מכאן שלכל $1 < k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$I_{k-1}(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{k-1}} + (2k-2) \cdot (I_{k-1}(x) - I_k(x))$$

ולכן גם:

$$(2k-2) \cdot I_k(x) = (2k-3) \cdot I_{k-1}(x) + \frac{x}{(1+x^2)^{k-1}}$$

וממילא:

$$I_k(x) = \frac{2k-3}{2k-2} \cdot I_{k-1}(x) + \frac{1}{2k-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{k-1}}$$

א"כ מצאנו נוסחת נסיגה לסדרה $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ ולכן אנו יכולים לדעת בדיוק כיצד נראה כל איבר שנחפוץ בו.