טורים - טענות בלבד

חשבון אינפיניטסימלי (2) - 80132

מרצה: יורם לסט

מתרגלים: דניאל אופנר ומתן בן-אשר

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

הפרק העוסק בגבול עליון ובגבול תחתון הועבר לסיכומים של סדרות (אינפי' 1).

* * *

תודתי נתונה ל**מסכם אלמוני** על הסיכום שכתב בשנת הלימודים תשפ"א,
נעזרתי בו רבות על מנת לכתוב את הסיכום שלפניכם.
אשמח מאד לדעת מי הוא אותו מסכם אלמוני כדי שאוכל לציין זאת כאן.

* * *

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

משפט 1.1. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אי-שלילית, מתקיים:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

כלומר הטור מתכנס וסכומו שווה לסכום האינסופי של איברי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

מסקנה 1.2. לכל סדרה אי-שלילית $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו תלוי בסדר האיברים בסדרה.

משפט 1.3. תנאי קושי להתכנסות טורים

תנאי הכרחי ומספיק לכך שטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ יתכנס הוא שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ ולכל $K \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_n\right| < \varepsilon$$

♣ זהו מקרה פרטי של תנאי קושי להתכנסות סדרות אותו למדנו בקורס הקודם (נזכור שההגדרה של טור היא **גבול** של סדרת הסכומים החלקיים).

טענה 1.4. יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים ויהי $c \in \mathbb{R}$.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

♣ הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ יכולים להתכנס גם אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ אינם מתכנסים; למעשה, ע"פ סעיף 1 אם שניים מארבעת הטורים הללו מתכנסים אז גם שני האחרים מתכנסים.

♣ מסעיף 2 נובע שאם $c \neq 0$ אז התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$ גוררת את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

משפט 1.5. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה, אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

טענה 1.6. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס למספר $S \in \mathbb{R}$ אז $r_m = S - \sum_{n=1}^{m} a_n$, ואם קיים $m \in \mathbb{N}$ כך שה-m-זנב של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ל-S אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S + \sum_{n=1}^{m} a_n$.

מסקנה 1.7. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור.

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם לכל $m \in \mathbb{N}$ ה-m-זנב שלו מתכנס.
2. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי $\lim_{m\to\infty} r_m = 0$.
3. שינוי, הוספה או גריעה של מספר סופי מאיברי הטור אינה משנה את עצם ההתכנסות/התבדרות שלו.

טענה 1.8. יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים ויהי $c \in \mathbb{R}$.

1. אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq 0$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq 0$.
2. אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq b_n$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

♣ סעיף 2 אינו נכון אם $a_n \leq b_n$ רק ממקום מסוים ואילך, לדוגמה נגיד שלכל $100 \geq n \in \mathbb{N}$ $a_n = 100$ ואילו $b_n = 0$ ואח"כ לכל $100 < n \in \mathbb{N}$ $a_n = 2^{-n}$ ואילו $b_n = 2^{-(n-1)}$...

2 טורים חיוביים

משפט 2.1. מבחן ההשוואה

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים, אם קיימים $0 < c \in \mathbb{R}$ ו-$N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq c \cdot b_n$ אז:

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר (שואף ל-∞) אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר[1].

מסקנה 2.2. יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים, אם קיימים $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ כך שהחל ממקום מסוים ואילך מתקיים $0 < \alpha \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \beta$ אז הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד[2].

מסקנה 2.3. מבחן ההשוואה הגבולי

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים, אם הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ קיים וגדול מ-0 אז הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד (=אם אחד מהם מתכנס/מתבדר גם רעהו מתכנס/מתבדר).

משפט 2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים, אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ אז:

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר (שואף ל-∞) אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר (שואף ל-∞)[3].

♣ המשפט הזה בעצם מפרמל את האינטואיציה שלנו לגבי הקשר בין קצב בשאיפה לאפס של האיבר הכללי לבין התכנסות הטור.

משפט 2.5. מבחן השורש של קושי

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי.

1. אם קיימים $q \in (0,1)$ ו-$N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. אם עבור אינסוף ערכים של n מתקיים $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

♣ הסעיף השני הוא טריוויאלי, הוא אומר שישנם אינסוף ערכים של $n \in \mathbb{N}$ עבורם $a_n \geq 1$...

מסקנה 2.6. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי.

1. אם $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ אז $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. אם $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ אז $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

♣ סעיף 1 במסקנה שקול לסעיף 1 במשפט אף בסעיף 2 הדבר אינו נכון.

---

[1] למעשה סעיף זה שקול לסעיף הראשון.

[2] כלומר אם אחד מהם מתכנס/מתבדר גם רעהו מתכנס/מתבדר.

[3] ושוב, סעיף זה שקול לסעיף הראשון.

משפט 2.7. מבחן המנה של ד'אלמבר[4]

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי כך ש-$a_n > 0$ ממקום מסוים ואילך.

1. אם קיים $q \in (0,1)$ כך שמתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ ממקום מסוים ואילך אז הטור מתכנס.
2. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ממקום מסוים ואילך אז הטור מתבדר.

♣ מבחן השורש של קושי חזק יותר ממבחן המנה של ד'אלמבר שכן אם קיימים $N \in \mathbb{N}$ ו-$q \in (0,1)$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ אז עבור אותו N מתקיים גם $a_n \leq a_{N+1} \cdot q^n$ לכל $N+1 < n \in \mathbb{N}$ ומכאן ש-$\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_{N+1}} \cdot q$ ולכן:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{a_{N+1}} \cdot q\right) = q \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{N+1}} = q \cdot 1 = q < 1$$

מסקנה 2.8. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי ממש.

1. אם $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. אם $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

♣ גם כאן סעיף 1 במסקנה שקול לסעיף 1 במשפט אך בסעיף 2 הדבר אינו נכון.

דוגמה 2.9. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta}}$ מתכנס אם $\beta > 1$ ומתבדר אם $\beta \leq 1$.

משפט 2.10. מבחן ראבה (Raabe)[5]

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי ממש ותהא $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י (לכל $n \in \mathbb{N}$):

$$r_n := n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

1. אם מתקיים $r_n \leq 1$ ממקום מסוים ואילך אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.
2. אם מתקיים $r_n > 1$ ממקום מסוים ואילך אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

♣ אופנר הציג את המשפט קצת אחרת: את הדרישה בסעיף 2 החליפה הדרישה ש-$\liminf_{n\to\infty} r_n > 1$ (אלו דרישות שקולות) ואת הדרישה בסעיף 2 החליפה הדרישה ש-$\limsup_{n\to\infty} r_n < 1$ (דרישה זו נובעת מהדרישה שלעיל).

♣ מבחן ראבה הוא שכלול של מבחן המנה של ד'אלמבר: הוא יצליח בכל מקום שבו מבחן המנה מצליח[6] אך הוא עשוי להצליח גם במקרים נוספים.

---

[4] ערך בוויקיפדיה: ז'אן לה רון ד'אלמבר.

[5] ערך בוויקיפדיה האנגלית: Joseph Ludwig Raabe.

[6] אם קיים $q \in (0,1)$ כך ש-$q > \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ממקום מסוים ואילך אז מכיוון ש-$\lim_{n\to\infty} n \cdot (1-q) = \infty$ נקבל ממשפט הפרוסה שגם $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ ובפרט $r_n > 1$ ממקום מסוים ואילך, ואם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ממקום מסוים ואילך אז $1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 0$ מאותו מקום ואילך ולכן גם $r_n \leq 0$ עבור n גדול דיו.

משפט 2.11. מבחן העיבוי של קושי
תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ומונוטונית (יורדת) המתכנסת ל-0.
הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^n \cdot a_{2^n}\right)$[7] מתכנס.

משפט 2.12. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית.

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם המכפלה $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+a_n\right)$ מתכנסת.
2. אם $a_n<1$ לכל $n\in\mathbb{N}$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם המכפלה $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-a_n\right)$ מתכנסת.

3 טורים בעלי סימנים משתנים

משפט 3.1. משפט לייבניץ
תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית, מונוטונית יורדת ומתכנסת ל-0.

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}a_n\right)$ מתכנס.
2. $0\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}a_n\right)\leq a_1$.
3. ה-m-זנב של הטור מקיים $|r_m|\leq a_{m+1}$ (כאשר $m\in\text{Odd}$ מתקיים $-a_{m+1}<r_m\leq 0$ וכאשר $m\in\text{Even}$ מתקיים $0\leq r_m<a_{m+1}$).

מסקנה 3.2. לכל סדרה מונוטונית $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-0 הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\cdot a_n\right)$ מתכנס.

למה 3.3. הטרנספורמציה של אבל (Abel)[8]
יהיו $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,...,\beta_m\in\mathbb{R}$ ולכל $m\geq k\in\mathbb{N}$ נגדיר $B_k:=\sum_{i=1}^{k}\beta_i$; מתקיים השוויון הבא:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i\cdot\beta_i\right)=\alpha_m\cdot B_m-\sum_{i=1}^{m-1}\left(B_i\cdot\left(\alpha_{i+1}-\alpha_i\right)\right)$$

למה 3.4. נשתמש בסימוני הטרנספורמציה של אבל.
אם קיים $L\in\mathbb{R}$ כך שלכל $m\geq i\in\mathbb{N}$ מתקיים $|B_i|\leq L$, ובנוסף, הסדרה $(\alpha_i)_{i=1}^{m}$ היא סדרה מונוטונית אזי מתקיים הא"ש הבא:

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i\cdot\beta_i\right)\right|\leq L\cdot\left(2\left|\alpha_m\right|+\left|\alpha_1\right|\right)$$

משפט 3.5. מבחן דיריכלה
יהא $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור חסום ותהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית המתכנסת ל-0, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot b_n\right)$ מתכנס.

♣ מבחן דיריכלה הוא בעצם הכללה של משפט לייבניץ, שם $b_n=(-1)^{n+1}$.

משפט 3.6. מבחן אבל (Abel)
יהא $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור מתכנס ותהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית וחסומה, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot b_n\right)$ מתכנס.

[7] טור זה נקרה "הטור המעובה" של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ומכאן שם המשפט.
[8] ערך בוויקיפדיה: נילס הנריק אבל.

4 הכנסת סוגריים ושינוי סדר

משפט 4.1.

1. לכל טור מתכנס, כל הטורים המתקבלים ממנו ע"י הכנסת סוגריים מתכנסים לאותו סכום.
2. לכל טור,אם קיים טור המתקבל ממנו ע"י הכנסת סוגריים כך שבכל סוגריים מופיעים איברים בעלי אותו סימן[9] אז התכנסות הטור שהתקבל ע"י הכנסת סוגריים גוררת את התכנסות הטור המקורי לאותו סכום.

משפט 4.2. הוספת סוגריים מאורך חסום
יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור.
תהא $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת אינדקסים עולה ממש ונסמן $n_0 := 0$.
תהא $(\sigma_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת כך (לכל $k \in \mathbb{N}$):

$$\sigma_k = \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} a_l$$

א"כ הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ מתקבל מהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ע"י הכנסת סוגריים.
אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $n_k - n_{k-1} < M$ וגם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אז הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ מתכנס אם"ם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ואז הם מתכנסים לאותו סכום.

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור ונסמן (עבור כל $n \in \mathbb{N}$):

$$p_n := \frac{|a_n| + a_n}{2} = \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n \leq 0 \end{cases}$$

$$q_n := \frac{|a_n| - a_n}{2} = \begin{cases} 0 & a_n \geq 0 \\ -a_n & a_n \leq 0 \end{cases}$$

♣ נשים לב שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$a_n = p_n - q_n, \; |a_n| = p_n + q_n$$

משפט 4.3.

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אז גם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ מתכנסים ומתקיים:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$
2. אם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ מתכנסים אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

מסקנה 4.4. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אז $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \infty$.

[9] לעניין זה 0 נחשב שווה סימן הן לחיוביים והן לשליליים.

משפט 4.5. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, כל טור המתקבל ממנו ע"י שינוי סדר האיברים יתכנס לאותו הסכום.

משפט 4.6. משפט רימן

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אז לכל $S \in \mathbb{R}$ ניתן לסדר את איברי הטור כך שסכום הטור המסודר מחדש יתכנס ל-S או ל-$\pm\infty$[10]; כמו כן ניתן לסדרם כך שהטור המסודר מחדש לא יתכנס כלל.

♣ כפי שנראה בהוכחת המשפט השיטה של רימן היא "להתנדנד" סביב הערך הרצוי לגבול או בין שני מספרים ממשיים / בין מספר ל-∞ / בין מספר ל-$-\infty$/ בין $-\infty$ ל-∞, העובדה שהתכנסות הטור אומרת שהאיבר הכללי מתכנס ל-0 גורמת לכך שכל ערך הנמצא בטווח הנדנוד הוא גבול חלקי של סדרת הסכומים החלקיים[11], וזאת משום שאנו עוברים בסביבתו בכל "איטרציה" של הנדנוד כשבכל פעם צעדינו הולכים וקטנים כך שאנו מתקרבים אליו יותר ויותר. נקודה נוספת שחשוב לשים לב אליה היא שא"א לבצע את התהליך הזה בדרך אחרת (שאינה "נדנוד") ולכן כל סידור של סדרת הסכומים החלקיים.

5 מכפלות טורים

טענה 5.1. יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים המתכנסים ל-A ול-B בהתאמה, מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_n = A \cdot B$$

משפט 5.2. משפט קושי

יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים בהחלט ויהיו $A, B \in \mathbb{R}$ כך ש-$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו-$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
כל טור המורכב מכל המכפלות מהצורה $a_i \cdot b_j$ (עבור כל $i, j \in \mathbb{N}$) ללא חזרות הוא טור מתכנס בהחלט וסכומו הוא $A \cdot B$.

משפט 5.3. משפט מרטן (Mertens)[12]

יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ו-$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ טורים המתכנסים ל-A ול-B בהתאמה כך שלפחות אחד מהם מתכנס בהחלט, מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = A \cdot B$$

---

[10] אין שום בעיה בניסוח של המשפט, הפסוק "לכל $z \in \mathbb{C}$ משפט פיתגורס נכון" הוא פסוק אמת.

[11] כלומר קבוצת הגבולות החלקיים היא מקטע, ומכיוון שאם היא חסומה מלעיל/מלרע יש לה מקסימום/מינימום נדע שמקטע זה אינו קרן פתוחה / קטע פתוח / קטע חצי-פתוח, אלא מוכרח הוא להיות קטע סגור / קרן סגורה / כל הישר.

[12] ערך בוויקיפדיה האנגלית: Franz Mertens.

דוגמה 5.4. ראינו בקורס הקודם (כשעסקנו בפולינומי טיילור) שלכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים (עבור ξ בין 0 ל-x):

$$P_{n,\exp,0}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{n}}{k!}$$
$$R_{n,\exp,0}\left(x\right)=\frac{\exp\left(\xi\right)\cdot x^{n+1}}{\left(n+1\right)!}$$

מהשוואה לסדרה הנדסית מתכנסת[13] ניתן להסיק כי לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\exp\left(\xi\right)\cdot x^{n+1}}{\left(n+1\right)!}=0$$

ומכאן שגם:

$$\Rightarrow\exp\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}\left(P_{n,\exp,0}\left(x\right)+R_{n,\exp,0}\left(x\right)\right)=\lim_{n\to\infty}P_{n,\exp,0}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k}}{k!}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{x^{k}}{k!}\right|=\exp\left(\left|x\right|\right)$$

ממשפט מרטן נובע שלכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\exp\left(x\right)\cdot\exp\left(y\right)&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{n}}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k}\cdot y^{n-k}}{k!\cdot\left(n-k\right)!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\cdot x^{k}\cdot y^{n-k}}{k!\cdot\left(n-k\right)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\cdot\left(n-k\right)!}\cdot x^{k}\cdot y^{n-k}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{k}\cdot y^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x+y\right)^{n}}{n!}=\exp\left(x+y\right)\end{aligned}$$

[13] קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש-$\frac{x}{n+1}<\frac{1}{2}$ לכל $N<n\in\mathbb{N}$.

6 נספח: רשימת מבחני התכנסות

6.1 מבחני התכנסות לטורים חיוביים

1. מבחן ההשוואה (משפט 2.1)
2. חסימת מנה של שני טורים בין שני חיוביים (מסקנה 2.2)
3. מבחן ההשוואה הגבולי (מסקנה 2.3)
4. א״ש בין מנת איברים עוקבים של שני טורים (מסקנה 2.4)
5. מבחן השורש של קושי (משפט 2.5) והמסקנה ממנו לגבי גבול עליון של השורש ביחס ל-1
6. מבחן המנה של ד'אלמבר (משפט 2.7) והמסקנה ממנו לגבי גבול עליון וגבול תחתון של המנה ביחס ל-1
7. מבחן ראבה (משפט 2.10)
8. מבחן העיבוי של קושי (משפט 2.11)
9. הקשר בין התכנסות טור של סדרה חיובית וההתכנסות של מכפלות מתאימות (משפט 2.12)

6.2 מבחני התכנסות לטורים בעלי סימנים משתנים

1. תנאי קושי (משפט 1.3)
2. משפט לייבניץ (משפט 3.1) והמסקנה ממנו לגבי כל סדרה מונוטונית שגבולה הוא 0
3. מבחן דיריכלה (משפט 3.5) - הכללה של משפט לייבניץ
4. מבחן Abel (משפט 3.6)