המספרים המרוכבים - הגדרות בלבד

אלגברה ליניארית (1) - 80134

מרצה: ערן נבו

מתרגלים: איתמר ישראלי ושני שלומי

סמסטר ב' תשפ"ב, האוניברסיטה העברית

-

אלגברה ליניארית (2) - 80135

מרצה: איתמר צביק

מתרגלים: גיל לבנה ויואב כהן

סמסטר א' תשפ"ג, האוניברסיטה העברית

-

פונקציות מרוכבות - 80519

מרצה: אילון לינדנשטראוס

מתרגל: שאול (שאולי) רגימוב

סמסטר א' תשפ"ד, האוניברסיטה העברית

-

נכתב ע"י שריה אנסבכר

תוכן העניינים

בדרך כלל לומדים על המספרים המרוכבים כבר בלינארית 1; למרות זאת בחרתי להביא את הנושא הזה רק בלינארית 2 מפני שבלינארית 1 אין שום דבר המייחד את שדה המספרים המרוכבים ביחס לשדות אחרים, ולעומת זאת בלינארית 2 הוא חלק מהותי מהקורס, סיבה נוספת היא שחלק קטן מהבנייה הפורמלית של המספרים המרוכבים מסתמך על ידע בסיסי מלינארית 1.

* * *

סיכומי קורס זה מוקדשים לאהרון כהן;
אהרון, הידיעה שתקרא את הסיכומים הללו דרבנה אותי לאורך כל הדרך.
בהצלחה!

* * *

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 בניית שדה המספרים המרוכבים

1.1 התחלה

♣ ראינו בהקדמה את המוטיבציה והאינטואיציה שמאחורי המספרים המרוכבים, כעת נבנה את שדה המספרים המרוכבים באופן פורמלי.

♣ כפי שראינו בהקדמה אנחנו עומדים לקבל ש-$\mathbb{C}=\{x+y\cdot i\mid x,y\in\mathbb{R}\}$, מבחינה פורמלית אין לביטוי הזה שום משמעות כרגע מפני שעוד לא הגדרנו חיבור וכפל על $\mathbb{C}$ אך מבחינה אינטואיטיבית הוא אומר לנו המון: כל מספר מרוכב ניתן להצגה באופן יחיד ע"י שתי "קואורדינטות" ממשיות ולכן בעצם כל מספר מרוכב ניתן להצגה באופן יחיד כנקודה במישור (כשאנו מדברים עליו בהקשר של המרוכבים נקרא לו <u>המישור המרוכב</u>).

סימון: נסמן $\mathbb{C}:=\mathbb{R}^2$ ונקרא ל-$\mathbb{C}$ <u>קבוצת המספרים המרוכבים</u>, לאחר שנגדיר עליה פעולות חיבור וכפל ונוכיח שאכן מדובר בשדה נקרא ל-$\mathbb{C}$ <u>שדה המספרים המרוכבים</u>.

סימון: נסמן $0_{\mathbb{C}}:=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $1_{\mathbb{C}}:=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ ו-$i:=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

♣ אנחנו רוצים שיתקיים $(x,y)=x\cdot 1_{\mathbb{C}}+y\cdot i$ וכבר ראינו בהקדמה כיצד עלינו להגדיר את החיבור והכפל של מספרים מרוכבים אם רצוננו ש-$\mathbb{C}$ יהיה שדה ושיתקיים $i^2=-1_{\mathbb{C}}$.

הגדרה 1.1. חיבור וכפל של מספרים מרוכבים

תהיינה $+:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ <u>פעולת החיבור</u> ו-$\cdot:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ <u>פעולת הכפל</u> של המספרים המרוכבים המוגדרות ע"י (לכל $(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}$):

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}a+c\\b+d\end{bmatrix}=(a+c)\cdot 1_{\mathbb{C}}+(b+d)\cdot i$$
$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}ac-bd\\ad+bc\end{bmatrix}=(ac-bd)\cdot 1_{\mathbb{C}}+(ad+bc)\cdot i$$

♣ נשים לב לכך שפעולת החיבור היא בעצם פעולת החיבור הווקטורי של $\mathbb{R}^2$ ושעבור מספר ממשי $(a,0)$ הכפל הוא ממש הכפל בסקלר של $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\cdot c-0\cdot d\\a\cdot d+0\cdot c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ac\\ad\end{bmatrix}=a\cdot\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$$

♣ מההערה הקודמת נובע שהחיבור ב-$\mathbb{C}$ מקיים את חוקי החילוף והקיבוץ, שיש לו איבר אדיש שהוא $0_{\mathbb{C}}$ הנ"ל ושלכל איבר ב-$\mathbb{C}$ יש איבר נגדי, בנוסף ניתן לראות מההערה הקודמת ש-$1_{\mathbb{C}}$ הנ"ל הוא האיבר האדיש לכפל ב-$\mathbb{C}$; א"כ על מנת להוכיח ש-$\mathbb{C}$ הוא אכן שדה (עם פעולות החיבור והכפל הללו) עלינו להראות שהכפל שהוגדר לעיל מקיים את חוקי החילוף והקיבוץ, שלכל איבר יש איבר הופכי ושהוא מקיים את חוק הפילוג ביחס לחיבור.

♣ מכיוון ש-$1_{\mathbb{C}}$ הנ"ל הוא האיבר האדיש לכפל נוכל לכתוב מעתה $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=x+y\cdot i$ לכל $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{C}$.

♣ ניתן לשים לב כבר עכשיו שהגדרה שקולה לכפל ב-$\mathbb{C}$ היא:

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}a & -b\\b & a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\cdot c+(-b)\cdot d\\b\cdot c+a\cdot d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ac-bd\\ad+bc\end{bmatrix}$$

כלומר הכפל ב-$\mathbb{C}$ שקול לכפל במטריצה.

♣ מההערה הקודמת נובע שהכפל ב-$\mathbb{C}$ מקיים את חוק הקיבוץ מפני שכפל מטריצות מקיים אותו, ומאותה סיבה נובע שהוא מקיים את חוק הפילוג ביחס לחיבור.
ניתן להסיק מהערה זו הרבה יותר: נשים לב שהמטריצה המתאימה לכפל היא מטריצת סיבוב ומתיחה, מכאן שפעולת הכפל מקיימת את חוק החילוף ולכל איבר שונה מ-$0_{\mathbb{C}}$ יש איבר הופכי[1] אך בכך הקדמנו את המאוחר.

טענה. $\mathbb{C}$ הוא שדה עם פעולות החיבור והכפל שהגדרנו.

♣ בקובץ ההוכחות מופיעה הוכחה שהכפל אכן מקיים את כל הדרוש ממנו גם מבלי להסתמך על השקילות שלו לכפל מטריצות.

♣ כעת נוכל להשתמש על $\mathbb{C}$ בכל מה שאנחנו כבר יודעים על שדות (ראו את הקובץ "על שדות").

הגדרה 1.2. יהי $z:=x+yi\in\mathbb{C}$, x ייקרא <u>החלק הממשי</u> של z ויסומן ב-$\text{Re}\left(z\right)$ או ב-$\Re\left(z\right)$ ו-y ייקרא <u>החלק המדומה</u> של z ויסומן ב-$\text{Im}\left(z\right)$ או ב-$\Im\left(z\right)$[2].

♣ נשים לב לכך שהחלק המדומה הוא מספר ממשי.

הגדרה 1.3. מספר $z\in\mathbb{C}$ ייקרא <u>מספר מדומה</u> או <u>מספר דמיוני</u> אם החלק הממשי שלו הוא 0, כמו כן מספר $z\in\mathbb{C}$ יקרא <u>מספר ממשי</u> אם החלק המדומה שלו הוא 0 ואז נזהה אותו עם החלק הממשי שלו[3] (א"כ $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$).

♣ בפרט $0_{\mathbb{C}}=0_{\mathbb{R}}$ ו-$1_{\mathbb{C}}=1_{\mathbb{R}}$.

♣ כמו כן נוכל לכתוב "$x\leq y$" או "$x<y$" עבור שני מספרים ממשיים למרות שאי אפשר להגדיר על המרוכבים מבנה של שדה סדור, מאותה סיבה לסימון $\sqrt{z}$ אין שום משמעות במרוכבים ולמרות זאת נכתוב אותו וניתן לו את משמעותו הרגילה כשמדובר במספר ממשי.

הגדרה 1.4. כל מספר $z\in\mathbb{C}$[4] ייקרא <u>מספר מרוכב</u> וכמו כן $\mathbb{C}$, יחד עם פעולות החיבור והכפל שהוגדרו לעיל, יקרא <u>שדה המספרים המרוכבים</u>.

---

[1] כי מטריצת סיבוב ומתיחה היא תמיד מטריצה הפיכה אלא אם היא מטריצת האפס.

[2] אותם x ו-y הם יחידים משום ש-$1_{\mathbb{C}}$ ו-i מהווים את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$.

[3] רוצה לומר שבגלל האיזומורפיזם הברור בין $\mathbb{R}$ ל-$\left\{x+y\cdot i\in\mathbb{C}\mid y=0\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=0\right\}$ נזהה את $\mathbb{R}$ עם קבוצה זו (שתיקרא <u>המספרים הממשיים</u>), ונזהה כל איבר בקבוצה זו עם החלק הממשי שלו בגלל איזומורפיזם זה.

[4] בין אם הוא מספר מדומה, מספר ממשי או לא זה ולא זה.

1.2 הצמוד המרוכב והערך המוחלט

♣ בקובץ ההוכחות נראה שההופכי של מספר $0 \neq x+yi \in \mathbb{C}$ הוא:

$$\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}$$

עובדה זו נותנת לנו מוטיבציה לתת שם ליחס שבין $x+yi$ ל-$x-yi$.

הגדרה 1.5. יהי $z := x+yi \in \mathbb{C}$, הצמוד המרוכב של z הוא $\overline{z} := x-yi$, כלומר זהו המספר המקיים $\mathrm{Re}\left(\overline{z}\right)=\mathrm{Re}\left(z\right)$ ו-$\mathrm{Im}\left(\overline{z}\right)=-\mathrm{Im}\left(z\right)$.

♣ מבחינה גאומטרית הצמדה היא פשוט שיקוף סביב ציר ה-x במישור המרוכב.

♣ הצמוד המרוכב הוגדר גם עבור 0: מתקיים $\overline{0}=0$.

מסקנה 1.6. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיימים ארבעת הפסוקים הבאים:

1. $\overline{\overline{z}}=z$.
2. $z+\overline{z}=2\cdot\mathrm{Re}\left(z\right)$.
3. $z-\overline{z}=2i\cdot\mathrm{Im}\left(z\right)$.
4. $z=\overline{z}$ אם"ם $z\in\mathbb{R}$.

♣ העובדה ש-$\mathbb{C}$ הוא בעצם $\mathbb{R}^2$ שהוגדרו עליו פעולות חיבור וכפל מאפשרת לנו להשתמש במשפט פיתגורס ולהגדיר את הערך המוחלט של מספר מרוכב ע"י המרחק הגאומטרי שלו מראשית הצירים.

הגדרה 1.7. יהי $z := x+yi \in \mathbb{C}$, הערך המוחלט של z הוא $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$.

♣ נשים לב לכך שהערך המוחלט של מספר מרוכב הוא מספר **ממשי**.

מסקנה 1.8. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $|z| \geq 0$ (הערך המוחלט אי-שלילי) ובנוסף $|z|=0$ אם"ם $z=0$.

מסקנה 1.9. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $|z|=|-z|=|\overline{z}|$.

2 ההצגה הקוטבית

2.1 התחלה

♣ עד כה הצגנו את המספרים המרוכבים (שהם נקודות במישור המרוכב) בהצגה הקרטזית שלהם, אך בקובץ "על קואורדינטות ומערכות צירים" **(עוד לא נכתב)** ראינו שניתן לאפיין נקודות במישור גם ע"י ההצגה הקוטבית שלהן, כלומר ע"י מרחקן מראשית הצירים והזווית שהן יוצרות עם החלק החיובי של ציר ה-x, א"כ ניתן לדבר גם על ההצגה הקוטבית של המספרים המרוכבים ומכיוון שהגדרנו את הערך המוחלט כך שיהיה זהה למושג האוקלידי של מרחק נוכל לבטא את הרדיוס בהצגה הקוטבית כערך המוחלט של מהספר המרוכב.

הגדרה 2.1. יהי $0 \neq z := x+yi \in \mathbb{C}$, הצגה קוטבית (נקראת גם הצגה פולרית) של z היא ביטוי מהצורה $z = r\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$ כאשר $r := |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ ואילו θ מוגדרת ע"י:

$$\theta := \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi k & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \pm \pi + 2\pi k & x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k & x = 0,\ \ y > 0 \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k & x = 0,\ \ y < 0 \end{cases}$$

עבור $k \in \mathbb{Z}$ כלשהו.

ההצגה הקוטבית של 0 בשדה המרוכבים היא $0\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$ עבור $\theta \in \mathbb{R}$ כלשהי.

♣ מהגדרה $r \geq 0$.

♣ כזכור אין שום בעיה בכך שיש יותר מהצגה קוטבית אחת למספר נתון משום ש-cos ו-sin הן פונקציות מחזוריות שאורך המחזור שלהן הוא 2π והן מוגדרות על כל הישר הממשי, וגם אם אותו מספר הוא 0 אין כאן בעיה משום ש-$0\cdot(\cos\theta_1 + i\cdot\sin\theta_1) = 0 = 0\cdot(\cos\theta_2 + i\cdot\sin\theta_2)$ לכל $\theta_1,\theta_2 \in \mathbb{R}$.

♣ כעת ניתן לראות בבירור שהמטריצה המתאימה לכפל במספר מרוכב היא מטריצת מתיחה וסיבוב שכן המטריצה המתאימה ל-$r\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$ היא:

$$r\cdot\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cdot\cos\theta & -r\cdot\sin\theta \\ r\cdot\sin\theta & r\cdot\cos\theta \end{bmatrix}$$

סימון: תהא $\theta \in \mathbb{R}$, נסמן $\operatorname{cis}(\theta) := \cos\theta + i\cdot\sin\theta$; א"כ ההצגה הקוטבית של מספר מרוכב ניתנת לכתיבה בקצרה ע"י $r\cdot\operatorname{cis}(\theta)$ כאשר r הוא הערך המוחלט שלו ו-θ מוגדרת כפי שהוגדרה לעיל.

2.2 הקשר לכפל ולהעלאה בחזקה

הגדרה 2.2. חזקה במעריך טבעי

יהי $z \in \mathbb{C}$, נגדיר $z^1 := z$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $z^{n+1} := z^n \cdot z$.

הגדרה 2.3. חזקה במעריך שלם

יהי $0 \neq z \in \mathbb{C}$, לכל $m \in \mathbb{Z}$ נגדיר:

$$z^m := \begin{cases} z^m & m > 0 \\ 1 & m = 0 \\ \frac{1}{z^{-m}} & m < 0 \end{cases}$$

- ♣ נשים לב לכך שמהגדרה, ההופכי של מספר מרוכב הוא בדיוק אותו מספר בחזקת -1 ולכן אין לנו בעיות בסימון (כמובן שזה היה המקור לסימון של הופכי).
- ♣ ישנה בעייתיות מסוימת בהגדרת השורש ה-n-י של מספר מורכב ($\sqrt[n]{z}$) משום שיש יותר ממספר אחד המקיים את הדרישה $x^n = z$, ובניגוד לממשיים $\mathbb{C}$ אינו שדה סדור ולכן איננו יכולים לדבר על השורש ה"חיובי".

3 דוגמאות לפתרון משוואות מעל המרוכבים

אין הגדרות בפרק זה.