הסתברות בדידה - הגדרות

תורת ההסתברות (1) - 80420

מרצה: אורי גוראל-גורביץ'

מתרגל: אמיר בכר

סוכם ע"י שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ה, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על גבי המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

הסכמה: בקורס זה נכנה כל קבוצה שאינה ריקה בשם "מרחב מדגם".

הגדרה 1.1. פונקציית הסתברות נקודתית
יהי Ω מרחב מדגם, פונקציה $p:\Omega\to\mathbb{R}$ תיקרא פונקציית הסתברות נקודתית על Ω אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. אי-שליליות - לכל $\omega\in\Omega$ מתקיים $p\left(\omega\right)\geq0$.
2. נרמול - $\sum\limits_{\omega\in\Omega}p\left(\omega\right)=1$.

♣ ההסתברות המתמטית מנסה לפרמל את מה שנקרא בשפת היום-יום "סיכוי"[1], מרחב המדגם הוא קבוצת התוצאות האפשריות של ה"ניסוי" אותו אנו מתעתדים לבצע, והערך של p עבור כל תוצאה אפשרית הוא הסיכוי שאנו מייחסים לכך שזו אכן תהיה התוצאה של ה"ניסוי". הדוגמה הקלאסית היא הטלת קובייה - במקרה הזה מרחב המדגם הוא הקבוצה $\Omega:=\left\{1,2,3,4,5,6\right\}$, ומכיוון שאנחנו מייחסים לכל אחת מהתוצאות האפשריות סיכוי זהה, $p:\Omega\to\mathbb{R}$ היא הפונקציה המוגדרת ע"י $p\left(\omega\right):=\frac{1}{6}$ לכל $\omega\in\Omega$.

♣ לעתים יהיה לנו נוח יותר להגדיר את מרחב המדגם כך שיכלול תוצאות שאינן אפשריות ולומר שהסיכוי של תוצאות אלו הוא 0, הדבר דומה לכך שהטווח של פונקציה אינו חלק מזהותה וניתן להחליפו בכל קבוצה המכילה את תמונת הפונקציה.

תזכורת: תהא Ω קבוצה, התומך של פונקציה $p:\Omega\to\mathbb{R}$ הוא הקבוצה $\mathrm{Supp}\left(p\right):=\left\{\omega\in\Omega\mid p\left(\omega\right)>0\right\}$.

♣ כפי שראינו בהקדמה, כדי שהסכום $\sum_{\omega\in\Omega}p\left(\omega\right)$ יהיה מוגדר, התומך של p - $\mathrm{Supp}\left(p\right):=\left\{\omega\in\Omega\mid p\left(\omega\right)>0\right\}$ - צריך להיות סופי או בן-מנייה.

---

[1] אם כשאתם שומעים את המילה "סיכוי" עובר לכם משהו בראש - הסתפקו בזה, אני לא רואה צורך להסביר כל מילה שאני משתמש בה; אם אתם מוכרחים להתפלסף - המשיכו לקרוא.
לתפיסתי, המילה "סיכוי" מתייחסת לשני מושגים דומים:

1. "סיכוי" הוא תכונה שיש למצב נתון, והיא הסיבה לכך שהוא מתפתח למצב אחר. במקרה של הטלת הקובייה לכל מספר יש סיכוי שווה להיות התוצאה, הסיכויים "מתמודדים" ביניהם באופן **לא ידוע** וה"מנצח" קובע את התוצאה. ההשלכה המעשית לכך שסיכוי אחד גדול מחברו היא ש**אם** נבצע את הניסוי פעמים רבות, אנו מצפים שהסיכוי הגדול יותר "ינצח" פעמים רבות יותר וביחס דומה ליחס שבין שני הסיכויים. **אבל**, הסיכויים קיימים גם מבלי שנבצע את הניסוי פעמים רבות! הם אלו ש**גורמים** לתוצאות לקרות ביחס המתאים (בערך).
2. "סיכוי" הוא חלק מן הדרך הנכונה לחשוב, למה אני מתכוון במילים "הדרך הנכונה לחשוב"? ישנם חוקי היגיון בסיסיים כגון: "אם P גורר את Q ו-Q גורר את R אז P גורר את R", אלו חוקים שלעולם לא יביאו אותנו לידי טעות לבדם מפני שהם פשוט נכונים (כן, גם הקורא המתפלסף מסכים שהחוק שהזכרתי נכון, גם אם הוא לא מודה בזה בפה מלא). לעומתם קיים מה שמכונה "שכל ישר", לדוגמה: כולנו ראינו פעמים רבות שכאשר עוזבים חפץ באוויר הוא נופל, ולכן כולנו מסיקים שאם מחר נעזוב את העט שלנו באוויר הוא ייפול. תמיד יכול לבוא אדם ולומר שהוא לא חושב כך, אך במקרה כזה אומר שהוא "אינו חושב נכון" למרות שאין לי שום דרך להוכיח שאני צודק. השכל הישר עלול להביא אותנו לידי טעות: בדוגמה של העט הנופל ידוע לכולנו שבתחנת החלל הבין-לאומית עטים אינם נופלים כשעוזבים אותם, האם זה אומר שטעינו? אני רוצה לטעון שלא טעינו בדרך אלא רק בתוצאה, חשבנו נכון וקיבלנו טעות - זה לא סותר! בהינתן המידע שהיה לנו לפני שהגענו לחלל זו הייתה המחשבה הנכונה לחשוב, כעת כשיש לנו מידע נוסף ייתכן שנשנה את דעתנו, אך אין זה אומר שטעינו קודם בתהליך החשיבה.

מה כל זה קשור להסתברות? כולנו נסכים שאדם החושש לצאת מביתו שמא יפגע בו ברק אינו "חושב נכון", וזאת משום שלהערכתנו ה**סיכוי** לכך אפסי, כלומר אנו מעריכים את אותו "סיכוי" במשמעותו הקודמת, למרות חוסר הידיעה שלנו בנושא אנחנו מסוגלים לומר בביטחון שזה פשוט לא יקרה. האם כאשר זה קורה לאותו אדם (וזה אכן קורה) נאמר שטעינו? לא ולא! שוב טעינו רק בתוצאה ולא בדרך.
צריך לעדכן את ההערה בעקבות הדוגמה עם הטלפון.

הגדרה. סיגמא-אלגברה

יהי Ω מרחב מדגם, קבוצה $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}\left(\Omega\right)$ תיקרא סיגמא-אלגברה על Ω אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. $\emptyset\in\mathcal{F}$.
2. סגירות לאיחוד בן-מנייה - לכל קבוצה בת-מנייה $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{F}$ של איברים זרים בזוגות (כלומר $A\cap B=\emptyset$ לכל $A,B\in\mathcal{A}$ כך ש-$A\neq B$), מתקיים:
$$\dot{\bigcup_{A\in\mathcal{A}}}A\in\mathcal{F}$$
3. סגירות למשלים - לכל $A\in\mathcal{F}$ מתקיים $\Omega\setminus A\in\mathcal{F}$.

לא ראינו את ההגדרה של סיגמא-אלגברה בכיתה, אך כפי שנראה בהמשך כל קבוצת מאורעות על Ω היא סיגמא-אלגברה על Ω.

הגדרה 1.2. פונקציית הסתברות

יהי Ω מרחב מדגם, ותהא $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}\left(\Omega\right)$ קבוצת מאורעות על Ω. פונקציה $\mathbb{P}:\mathcal{F}\rightarrow\mathbb{R}$ תיקרא פונקציית הסתברות על $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

1. אי-שליליות - לכל $A\in\mathcal{F}$ מתקיים $\mathbb{P}\left(A\right)\geq0$.
2. נרמול - $\mathbb{P}\left(\Omega\right)=1$.
3. סכימות בת-מנייה - לכל קבוצה בת-מנייה $X\subseteq\mathcal{F}$ של איברים זרים בזוגות (כלומר $x\cap y=\emptyset$ לכל $x,y\in X$ כך ש-$x\neq y$), מתקיים:
$$\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{x\in X}}x\right)=\sum_{x\in X}\mathbb{P}\left(x\right)$$

הגדרה 1.3. מרחב הסתברות

מרחב הסתברות הוא שלשה סדורה $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$, כאשר $\mathbb{P}$ היא פונקציית הסתברות על הזוג $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$; בפרט Ω אינה ריקה, $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}\left(\Omega\right)$ ו-$\Omega\in\mathcal{F}$.

במקרה כזה Ω תיקרא מרחב המדגם ו-$\mathcal{F}$ תיקרא קבוצת המאורעות; כמו כן נאמר ש-$\mathbb{P}$ נתמכת על קבוצה $A\in\mathcal{F}$ אם $\mathbb{P}\left(A\right)=1$.

טענה. תהא $p:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ פונקציית הסתברות על Ω, תהא $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}\left(\Omega\right)$ קבוצות מאורעות של Ω, ותהא $\mathbb{P}_{p}:\mathcal{F}\rightarrow\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $A\in\mathcal{F}$):
$$\mathbb{P}_{p}\left(A\right):=\sum_{a\in A}p\left(a\right)$$
$\mathbb{P}_{p}$ היא פונקציית הסתברות על $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$, והיא נתמכת על $\text{Supp}\left(p\right)$.

♣ לא כל פונקציית הסתברות נוצרת ע"י פונקציית הסתברות נקודתית; לדוגמה: הפונקציה המחזירה לכל תת-קטע של $\left[0,1\right]$ את אורכו, היא פונקציית הסתברות על $\left(\left[0,1\right],\mathcal{F}\right)$, כאשר $\mathcal{F}$ **אינה** קבוצת כל תתי-הקטעים של $\left[0,1\right]$ אלא סיגמא-אלגברה המכילה את הקבוצה הזו.

הגדרה 1.4 יהי $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ מרחב הסתברות, נאמר שמאורע $A\in\mathcal{F}$ מתרחש כמעט תמיד אם $\mathbb{P}\left(A\right)=1$.

♣ מאורע שהסתברותו היא 1 אינו מאורע שמתרחש תמיד (במובן האינטואיטיבי), לדוגמה אם נזרוק מטבע אין-סוף פעמים ההסתברות לקבל פלי באחת מהן היא 1 אך ייתכן שלא נקבל לעולם פלי.

2 מרחבי הסתברות בדידה

הגדרה 2.1. פונקציית הסתברות בדידה

יהי Ω מרחב מדגם, ותהא $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}\left(\Omega\right)$ קבוצת מאורעות על Ω. פונקציית הסתברות $\mathbb{P}:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ על $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ תיקרא פונקציית הסתברות בדידה אם קיימת פונקציית הסתברות נקודתית $p:\Omega\to\mathbb{R}$ כך שלכל $A\in\mathcal{F}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(A\right)=\sum_{a\in A}p\left(a\right)$$

האם אנחנו דורשים ש-$\mathcal{F}=\mathcal{P}\left(\Omega\right)$?

הגדרה 2.2. מרחב הסתברות בדידה

מרחב הסברות $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ ייקרא מרחב הסתברות בדידה אם $\mathbb{P}$ היא פונקציית הסתברות בדידה על $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$.

במקרה כזה נסמן פעמים רבות את פונקצייתה ההסתברות ב-$\mathbb{P}_{p}$ כדי לציין ש-$p:\Omega\to\mathbb{R}$ היא פונקציית הסתברות נקודתית המקיימת (לכל $A\in\mathcal{F}$):

$$\mathbb{P}_{p}\left(A\right)=\sum_{a\in A}p\left(a\right)$$

הגדרה 2.3. מרחב הסתברות אחידה

מרחב הסתברות בדידה $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_{p}\right)$ ייקרא מרחב הסתברות אחידה אם לכל $\omega_{1},\omega_{2}\in\Omega$ מתקיים $p\left(\omega_{1}\right)=p\left(\omega_{2}\right)$.

טענה 2.4. יהיו $\Omega_{1},\Omega_{2},\ldots,\Omega_{n}$ מרחבי מדגם, תהא $p_{0}:\Omega_{1}\to\mathbb{R}$ פונקציית הסתברות נקודתית, ולכל $n>k\in\mathbb{N}$ ו-$\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{k}\right)\in\Omega_{1}\times\Omega_{2}\times\ldots\times\Omega_{k}$ תהא גם $p_{\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{k}}:\Omega_{k+1}\to\mathbb{R}$ היא פונקציית הסתברות נקודתית.

הפונקציה $p:\Omega_{1}\times\Omega_{2}\times\ldots\times\Omega_{n}\to\mathbb{R}$, המוגדרת ע"י (לכל $\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{n}\right)\in\Omega$):

$$p\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{n}\right):=p_{0}\left(\omega_{1}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}p_{\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{k}}\left(\omega_{k+1}\right)$$

היא פונקציית הסתברות נקודתית על $\Omega_{1}\times\Omega_{2}\times\ldots\times\Omega_{n}$.

♣ מבחינה אינטואיטיבית מה שקורה כאן הוא כזה: אנחנו מבצעים את הניסוי של מרחב ההסתברות $\left(\Omega_{1},\mathcal{P}\left(\Omega_{1}\right),\mathbb{P}_{p_{0}}\right)$ (לדוגמה: הטלת קובייה), ולפי התוצאה מחליטים איזה ניסוי לבצע בשלב הבא (בכך אנחנו מגדירים מרחב הסתברות חדש - $\left(\Omega_{2},\mathcal{P}\left(\Omega_{2}\right),\mathbb{P}_{p_{\omega_{1}}}\right)$), וחוזר חלילה.

הגדרה 2.5. ניסוי רב-שלבי

מרחב הסתברות בדידה $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_{q}\right)$ ייקרא ניסוי רב-שלבי אם פונקציית ההסתברות הנקודתית q ניתנת להצגה שבטענה האחרונה (2.4).

הגדרה 2.6. מרחב מכפלה

יהיו $\left(\Omega_{1},\mathcal{F}_{1},\mathbb{P}_{1}\right),\left(\Omega_{2},\mathcal{F}_{2},\mathbb{P}_{2}\right),\ldots,\left(\Omega_{n},\mathcal{F}_{n},\mathbb{P}_{n}\right)$ מרחבי הסתברות בדידה, ולכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ נסמן ב-p_{i} את פונקציית ההסתברות הנקודתית המתאימה.

- המכפלה הנקודתית של פונקציות ההסתברות הנ"ל היא הפונקציה $p:\Omega_{1}\times\Omega_{2}\times\ldots\times\Omega_{n}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{n}\right)\in\Omega$):

$$p\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{n}\right):=\prod_{k=1}^{n}p_{k}\left(\omega_{k}\right)$$

- מרחב המכפלה של המרחבים הנ"ל הוא מרחב ההסתברות $\left(\Omega_{1}\times\Omega_{2}\times\ldots\times\Omega_{n},\mathcal{F}_{1}\times\mathcal{F}_{2}\times\ldots\times\mathcal{F}_{n},\mathbb{P}_{p}\right)$ (עבור p הנ"ל).
- מאורעות מכפלה במרחב המכפלה הנ"ל הם מאורעות מהצורה $A_{1}\times A_{2}\times\ldots\times A_{n}$ כאשר $A_{k}\in\mathcal{F}_{k}$ לכל $k\in\mathbb{N}$.
- מאורעות שוליים במרחב המכפלה הנ"ל הם מאורעות מהצורה $A_{1}\times A_{2}\times\ldots\times A_{j-1}\times B\times A_{j+1}\ldots\times A_{n}$, כאשר $A_{k}\in\mathcal{F}_{k}$ לכל $j\neq k\in\mathbb{N}$ ו-$B\in\mathcal{F}_{j}$.

3 הסתברות מותנית ואי-תלות

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

הגדרה 3.1. הסתברות מותנית
לכל שני מאורעות $A,B\in\mathcal{F}$ כך ש-$\mathbb{P}(B)>0$, ההסתברות המותנית של A בהינתן B היא:

$$\mathbb{P}(A\mid B):=\mathbb{P}_B(A):=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

♣ המשמעות האינטואיטיבית היא שהתבצע "ניסוי" במרחב ההסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, נודע לנו שמאורע B אכן אירע, ואנו שואלים מהי ההסתברות שמאורע A אירע. הדרך שלנו לבצע זאת היא "לעדכן" את מרחב ההסתברות - כעת "מרחב המדגם" שלנו הוא B וה"מאורעות" הם החיתוכים של המאורעות במרחב ההסתברות המקורי עם מרחב המדגם החדש. מבחינה פורמלית אנחנו לא באמת מתבוננים במרחב הסתברות חדש אלא "מנרמלים" את פונקציית ההסתברות מחדש כך שיתקיים $\mathbb{P}_B(B)=1$ במקום $\mathbb{P}(\Omega)=1$.

יהיה הרבה יותר הגיוני ונוח להגדיר גם עבור $\mathbb{P}(B)=0$ ע"י:

$$\mathbb{P}(A\mid B):=\mathbb{P}_B(A):=\begin{cases}\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} & \mathbb{P}(B)>0\\ 0 & \mathbb{P}(B)=0\end{cases}$$

הגדרה 3.2. אי-תלות
נאמר ששני מאורעות $A,B\in\mathcal{F}$ הם בלתי תלויים אם $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$.

מסקנה 3.3. לכל שני מאורעות בלתי תלויים $A,B\in\mathcal{F}$ מתקיים:

- אם $\mathbb{P}(B)>0$ אז $\mathbb{P}(A\mid B)=\mathbb{P}(A)$.
- אם $\mathbb{P}(A)>0$ אז $\mathbb{P}(B\mid A)=\mathbb{P}(B)$.

♣ למעשה היינו רוצים להגדיר ש-A בלתי תלוי ב-B אם $\mathbb{P}(A\mid B)=\mathbb{P}(A)$ ואכן ההגדרות שקולות למעט במקרה שבו $\mathbb{P}(B)=0$ (**אם מגדירים כפי שהצענו לעיל אז ההגדרות שקולות לחלוטין**).

הגדרה 3.4. נאמר שמאורעות $A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathcal{F}$ בלתי תלויים בזוגות אם לכל $n\geq i,j\in\mathbb{N}$ כך ש-$j\neq i$ המאורעות A_i ו-A_j בלתי תלויים.

הגדרה 3.5. נאמר שמאורע $A\in\mathcal{F}$ בלתי תלוי במאורעות $B_1,B_2,\ldots,B_n\in\mathcal{F}$ אם לכל $I\subseteq[n]$ המאורעות A ו-$\bigcap_{i\in I}B_i$ בלתי תלויים.

♣ למעשה, היינו רוצים לומר ש-A בלתי תלוי ב-$B_1,B_2,\ldots,B_n$ אם לכל קומבינציה של איחודים וחיתוכים (כולל סוגריים) על חלק/כל המאורעות $B_1,B_2,\ldots,B_n$, A ואותה קומבינציה בלתי תלויים. אלו הגדרות שקולות.

הגדרה 3.6. נאמר שמאורעות $A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathcal{F}$ בלתי תלויים בזוגות אם לכל $I\subseteq[n]$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)$$

♣ האיבר ה"אדיש" לחיתוך הוא הקבוצה הגדולה שבה אנו עובדים ולכן $\bigcap_{i\in\emptyset}A_i:=\Omega$.

♣ אי-תלות גוררת אי-תלות בזוגות אך ההפך אינו נכון.

הגדרה 3.7. נאמר שקבוצת מאורעות $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{F}$ (לאו דווקא סופית) היא בלתי תלויה אם כל תת-קבוצה סופית של $\mathcal{A}$ היא בלתי תלויה.

מסקנה 3.8. תת-קבוצה של קבוצה בלתי תלויה גם היא כזו.

הגדרה 3.9. יהיו $A,B\in\mathcal{F}$ שני מאורעות, נאמר ש-B מאושש את A אם $\mathbb{P}(A\mid B)>\mathbb{P}(A)$.

4 משתנים מקריים בדידים

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות, תהא E קבוצה לא ריקה, ותהא $\mathcal{F}_E$ קבוצת מאורעות על E.

4.1 התחלה

♣ עד כה, בכל פעם שרצינו לתאר שתי שאלות הסתברותיות שונות, היינו צריכים להגדיר שתי פונקציות הסתברות שונות אפילו אם מבחינה מעשית שתי השאלות חלו על אותו "ניסוי". לדוגמה: מטילים שתי קוביות, מהי ההסתברות שבאחת הקוביות יצא המספר 2? ומהי ההסתברות שסכום המספרים שיצאו הוא 2?
זה היה די מייגע, ולכן נרצה למצוא דרך לפרמל שתי שאלות על אותו "ניסוי" ע"י מרחב הסתברות יחיד, הדרך לכך היא הגדרת משתנים מקריים.

הגדרה 4.1. משתנה מקרי

נאמר שפונקציה $X:\Omega\to E$ היא <u>משתנה מקרי</u> אם מתקיים $X^{-1}(S)\in\mathcal{F}$ לכל $S\in\mathcal{F}_E$; במקרה שבו $E=\mathbb{R}^n$ ($n\in\mathbb{N}$) נאמר גם ש-X הוא <u>וקטור מקרי</u>.

בכיתה הגדרנו זאת רק כאשר $E=\mathbb{R}^n$ עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו ($\mathbb{R}\cong\mathbb{R}^1$), ובנוסף לא דרשנו שיתקיים $X^{-1}(S)\in\mathcal{F}$ לכל $S\in\mathcal{F}_E$ למרות שאנחנו נראה כבר בהגדרה הבאה שאנו מניחים שזה אכן נכון.

♣ כך למשל במקרה של הטלת שתי הקוביות נשתמש בפונקציית ההסתברות האחידה $\mathbb{P}:[6]^2\to\mathbb{R}$ על $\left([6]^2,\mathcal{P}\left([6]^2\right)\right)$, ונגדיר שני משתנים מקריים:

$$X\left((\omega_1,\omega_2)\right):=\begin{cases}1 & \omega_1=2\vee\omega_2=2\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$Y\left((\omega_1,\omega_2)\right):=\omega_1+\omega_2$$

כעת ההסתברות לכך שבאחת משתי הקוביות יצא 2 היא $\mathbb{P}\left(X^{-1}(\{1\})\right)$, וההסתברות לכך שסכום שתי הקוביות הוא 2 היא $\mathbb{P}\left(Y^{-1}(\{2\})\right)$.

♣ עוד דבר מייגע שהיה בשיטה הקודמת הוא שבכל פעם שרצינו לדבר על מאורע היינו צריכים להגדיר קבוצה שתתאר את אותו מאורע, כאשר הרבה יותר נוח לכתוב פסוק המתאר את המאורע.

תזכורת: <u>משפט</u> (או <u>טענה</u>) הוא פסוק שמנוסח באופן כללי ע"י שימוש במשתנה שאינו מוגדר, ורק לאחר שמגדירים את המשתנה הופך המשפט לפסוק. לדוגמה: $x^2=x$ אינו פסוק (שכן x אינו מוגדר), אך הוא אכן משפט.

סימון: לכל משפט P נתייחס ל-P כמאורע $\{\omega\in\Omega\mid P(\omega)=\text{True}\}$ (ניתן להבדיל בין שתי המשמעויות לפי ההקשר).

♣ בדרך כלל נשתמש בסימון זה יחד עם משתנים מקריים, כך לדוגמה ההסתברות $\mathbb{P}\left(X^{-1}(\{1\})\right)$ שהוזכרה לעיל ניתנת לתיאור באמצעות $\mathbb{P}(X=1)$.

יהיו $X,Y:\Omega\to E$ משתנים מקריים.

הגדרה 4.2. התפלגות

הפונקציה $\mathbb{P}_X:\mathcal{F}_E\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $S\in\mathcal{F}_E$):

$$\mathbb{P}_X(S):=\mathbb{P}\left(X^{-1}(S)\right)=\mathbb{P}(X\in S)$$

נקראת <u>ההתפלגות</u> של X.

הסכמה: בהינתן קבוצות A ו-B, ופונקציה $f:A\to B^n$, נסמן ב-$f_1,f_2,\ldots,f_n$ את הפונקציות המקיימות (לכל $a\in A$):

$$f(a)=\begin{bmatrix}f_1(a)\\ f_2(a)\\ \vdots\\ f_n(a)\end{bmatrix}$$

ולהפך, בהינתן פונקציות $f_1,f_2,\ldots,f_n:A\to B$, כשנסמן $g:=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ כוונתנו ש-g היא פונקציה מ-A ל-B^n המוגדרת ע"י (לכל $a\in A$):

$$g(a):=\begin{bmatrix}f_1(a)\\ f_2(a)\\ \vdots\\ f_n(a)\end{bmatrix}$$

הגדרה 4.3. יהי $Z:\Omega\to E^n$ משתנה מקרי, $\mathbb{P}_Z$ תיקרא ההתפלגות המשותפת של $Z_1,Z_2,\ldots,Z_n$, ו-$\mathbb{P}_{Z_1},\mathbb{P}_{Z_2},\ldots,\mathbb{P}_{Z_n}$ תיקראנה ההתפלגויות השוליות של Z.

טענה. לכל משתנה מקרי $X:\Omega\to E$, פונקציית ההתפלגות $\mathbb{P}_X$ היא פונקציית הסתברות על $(E,\mathcal{F}_E)$, כלומר $(E,\mathcal{F}_E,\mathbb{P}_X)$ הוא מרחב הסתברות.

הגדרה 4.4. משתנה מקרי בדיד

X ייקרא בדיד אם פונקציית ההתפלגות שלו ($\mathbb{P}_X$) היא פונקציית הסתברות בדידה.
במקרה כזה פונקציית ההסתברות הנקודתית המתאימה ל-$\mathbb{P}_X$, שתסומן ב-p_X, תיקרא ההתפלגות הנקודתית של X; והתומך של p_X, שיסומן ב-$\operatorname{Supp}(X)$ ייקרא גם התומך של X.

הגדרה 4.5. יהיו $X,Y:\Omega\to E$ משתנים מקריים.

- נאמר ש-X ו-Y שווים כמעט תמיד אם $\mathbb{P}(X=Y)=1$, במקרה כזה נסמן $X\overset{\text{a.s.}}{=}Y$.
  ובאופן כללי, נאמר ש-X ו-Y מקיימים יחס $\sim$ כמעט תמיד, ונסמן $X\overset{\text{a.s.}}{\sim}Y$ אם $\mathbb{P}(X\sim Y)=1$.
- נאמר ש-X ו-Y שווי-התפלגות אם $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y$, במקרה כזה נסמן $X\overset{\text{d}}{=}Y$.

4.2 הסתברות מותנית ואי-תלות

סימון: יהי $A\in\mathcal{F}$ מאורע (או משפט המייצג מאורע כדלעיל) כך ש-$\mathbb{P}(A)>0$, כשנכתוב $X\mid A$ נתכוון ל-X כמשתנה מקרי מעל מרחב ההסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_A)$. בפרט ההתפלגות של $X\mid A$ היא (לכל $E\in\mathcal{F}_E$):

$$\mathbb{P}_{X|A}(S)=\mathbb{P}_A(X\in S)$$

בכיתה הגדרנו קודם את ההתפלגות ורק אח"כ אמרנו ש-$A\mid X$ הוא בעצם המשתנה המקרי X על מרחב ההסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_A)$.

הגדרה 4.6. נאמר שמשתנים מקריים $X_1,X_2,\ldots,X_n:\Omega\to E$ בלתי תלויים אם לכל $S_1,S_2,\ldots,S_n\in\mathcal{F}_E$ המאורעות $X_1\in S_1,X_2\in S_2,\ldots,X_n\in S_n$ בלתי תלויים.

הגדרה 4.7. נאמר שקבוצת משתנים מקריים $\mathcal{A}\subseteq E^\Omega$ (לאו דווקא סופית) היא בלתי תלויה אם כל תת-קבוצה סופית של $\mathcal{A}$ היא בלתי תלויה.

4.3 התפלגויות נפוצות

תזכורת: הפונקציה המציינת של קבוצה A המוכלת בקבוצה B (ביחס ל-B), היא הפונקציה $\chi_A : B \to \{0,1\}$ המוגדרת ע"י (לכל $b \in B$):

$$\chi_A(b) := \begin{cases} 1 & b \in A \\ 0 & b \notin A \end{cases}$$

סימון מקובל נוסף לפונקציה המציינת הוא $\mathbb{1}_A$.

הגדרה 4.8. משתנה מציין של מאורע $A \in \mathcal{F}$ הוא הפונקציה המציינת של A.

הגדרה 4.9.

- נאמר ש-X בעל התפלגות קבועה אם קיים $c \in E$ כך ש-$\mathbb{P}(X = c) = 1$.
- נאמר ש-X בעל התפלגות אחידה על קבוצה סופית $S \subseteq E$, ונסמן $X \sim \text{Unif}(S)$, אם לכל $s \in S$ מתקיים $\mathbb{P}(X = s) = \frac{1}{|S|}$.
- נניח ש-$E = \mathbb{R}$; נאמר ש-X בעל התפלגות ברנולי עם הסתברות הצלחה $p \in [0,1]$, ונסמן $X \sim \text{Ber}(p)$, אם $\mathbb{P}(X = 1) = p$ ו-$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
- נניח ש-$E = \mathbb{R}$; נאמר ש-X בעל התפלגות גאומטרית עם הסתברות הצלחה $p \in [0,1]$, ונסמן $X \sim \text{Geo}(p)$, אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^n \cdot p$.
- נניח ש-$E = \mathbb{R}$; נאמר ש-X בעל התפלגות בינומית עם n ניסיונות והסתברות הצלחה $p \in [0,1]$, ונסמן $X \sim \text{Bin}(n,p)$, אם לכל $k \in \mathbb{N}_0$ מתקיים $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- נניח ש-$E = \mathbb{R}$; נאמר ש-X בעל התפלגות פואסון עם שכיחות $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$, ונסמן $X \sim \text{Poi}(n,p)$, אם לכל $k \in \mathbb{N}_0$ מתקיים $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$.

5 תוחלת

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות, ותהא $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ קבוצת מאורעות על $\mathbb{R}$[2].

הגדרה 5.1. תוחלת

התוחלת של משתנה מקרי בדיד $X:\Omega\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י:

$$\mathbb{E}\left(X\right):=\sum_{x\in\mathbb{R}}x\cdot\mathbb{P}\left(X=x\right)=\sum_{x\in\mathrm{Im}X}x\cdot\mathbb{P}\left(X=x\right)$$

אם הסכום הנ"ל אינו מוגדר[3] נאמר שאין ל-X תוחלת סופית.

♣ התוחלת היא ממוצע משוקלל על התמונה של X, כאשר המשקל של כל איבר נקבע לפי ההתפלגות של X; כך התוחלת מספרת לנו מהו הערך שאנחנו מצפים לקבל ב"ניסוי" שלנו (לא במקרה היא נקראת באנגלית "Expected value").

[2] מבחינת ההגדרות ניתן להחליף את $\mathbb{R}$ בכל מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

[3] ישנן שתי סיבות לכך שהסכום לא יהיה מוגדר: ייתכן שכל האיברים בסכום אי-שליליים והוא שואף ל-∞ (במקרה זה ניתן אולי לומר שהתוחלת היא ∞), אך ייתכן גם שהוא אינו מוגדר משום ששינוי סדר הסכימה ישנה את ערך הטור ולכן הוא אינו מוגדר כלל.