סדרות ופונקציות - הגדרות בלבד

אנליזה אלמנטרית רב-ממדית - 80116

מרצה: נועה ניצן

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 סדרות

הגדרה 1.1. סביבות סימטריות של נקודה

תהא d מטריקה על $\mathbb{R}^k$ ותהא $P_0 \in \mathbb{R}^k$, נסמן (לכל $0 < r \in \mathbb{R}$):

$$B_r(P_0) := \left\{P \in \mathbb{R}^k \mid d_2(P, P_0) < r\right\}$$
$$B_r^\circ(P_0) := \left\{P \in \mathbb{R}^k \mid 0 < d_2(P, P_0) < r\right\}$$
$$\overline{B_r}(P_0) := \left\{P \in \mathbb{R}^k \mid d_2(P, P_0) \le r\right\}$$
$$\overline{B_r^\circ}(P_0) := \left\{P \in \mathbb{R}^k \mid 0 < d_2(P, P_0) \le r\right\}$$

- $B_r(P_0)$ תיקרא <u>סביבה</u> של P_0 (או <u>כדור פתוח</u> ברדיוס r שמרכזו בנקודה P_0) ו-$B_r^\circ(P_0)$ תיקרא <u>סביבה מנוקבת</u> של P_0 (או <u>כדור פתוח מנוקב</u> ברדיוס r שמרכזו בנקודה P_0).
- $\overline{B_r(P_0)}$ תיקרא <u>סביבה סגורה</u> של P_0 (או <u>כדור פתוח</u> ברדיוס r שמרכזו בנקודה P_0) ו-$\overline{B_r^\circ(P_0)}$ תיקרא <u>סביבה סגורה מנוקבת</u> של P_0 (או <u>כדור פתוח מנוקב</u> ברדיוס r שמרכזו בנקודה P_0).

הגדרה 1.2. קבוצה פתוחה, קבוצה סגורה וקבוצה קומפקטית

- נאמר שקבוצה $U \subseteq \mathbb{R}^k$ היא <u>קבוצה חסומה</u> אם קיימים $P \in \mathbb{R}^k$ ו-$0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש-$U \subseteq B_r(P)$.
- נאמר שקבוצה $U \subseteq \mathbb{R}^k$ היא <u>קבוצה פתוחה</u> אם לכל $P \in U$ קיים $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש-$B_r(P) \subseteq U$.
- נאמר שקבוצה $U \subseteq \mathbb{R}^k$ היא <u>קבוצה סגורה</u> אם $\mathbb{R}^k \setminus U$ היא קבוצה פתוחה.
- נאמר שקבוצה $K \subseteq \mathbb{R}^k$ היא <u>קבוצה קומפקטית</u> אם היא סגורה וחסומה.

הגדרה 1.3. שפה של קבוצה

תהא $D \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה, נקודה $P \in D$ תקרא <u>נקודת שפה</u> של D אם לכל סביבה U של P קיימות $P_1, P_2 \in U$ כך ש-$P_1 \in D$ ו-$P_2 \notin D$, קבוצת נקודות השפה של D תסומן ב-∂D.

סימון: בהינתן סדרת נקודות $(P_n)_{n=1}^\infty$ נסמן גם (לכל $n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{pmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{pmatrix} := P_n$$

הגדרה 1.4. חסימות

נאמר שסדרת נקודות $(P_n)_{n=1}^\infty$ ב-$\mathbb{R}^k$ היא <u>סדרה חסומה</u> אם קבוצת איבריה כזו.

הגדרה 1.5. גבול של סדרה

תהא $(P_n)_{n=1}^\infty$ סדרת נקודות ב-$\mathbb{R}^k$, נאמר שנקודה $L \in \mathbb{R}^k$ היא <u>גבול</u> של הסדרה $(P_n)_{n=1}^\infty$ אם לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $P_n \in B_\varepsilon(L)$.

גבול של סדרה הוא יחיד ולכן מוצדק לדבר על <u>הגבול</u> של $(P_n)_{n=1}^\infty$ ולסמן:

$$\lim_{n\to\infty} P_n := L$$

2 פונקציות

♣ עד כה למדנו בקורסי אינפי' על פונקציות שהתחום והטווח שלהן היו תתי-קבוצות של $\mathbb{R}$ (שהוא מ"ו ממימד 1), בקורס זה נעסוק בעיקר בפונקציות מהצורה $f:D\to\mathbb{R}^{n}$ כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^{m}$ ובראש ובראשונה בפונקציות כנ"ל המקיימות $n+m=3$ (יש בדיוק שתי אפשרויות) משום שאת הגרף של אלו ניתן לסרטט במרחב התלת-ממדי.

הגדרה 2.1. נאמר שנקודה $P\in D\subseteq\mathbb{R}^{n}$ היא <u>נקודה פנימית</u> ב-D אם קיים $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_{r}\left(P\right)\subseteq D$.

הגדרה 2.2. נאמר שפונקציה f <u>חסומה</u> אם תמונתה היא קבוצה חסומה, כמו כן נאמר ש-f <u>חסומה בקבוצה</u> U (שמוכלת בתחום של f) אם $f\left(U\right)$ היא קבוצה חסומה.

הגדרה 2.3. גבול של פונקציה בנקודה

תהא $f:D\to\mathbb{R}^{n}$ פונקציה כנ"ל המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה $P_{0}\in\mathbb{R}^{m}$, נאמר שנקודה (או וקטור) $L\in\mathbb{R}^{n}$ היא <u>גבול</u> של f ב-P_{0} אם לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל נקודה $P\in B_{\delta}^{0}\left(P_{0}\right)$ מתקיים $f\left(P\right)\in B_{\varepsilon}\left(L\right)$.

גבול של פונקציה הוא יחיד ולכן מוצדק לדבר על <u>הגבול</u> של f ולסמן:

$$\lim_{P\to P_{0}}f\left(P\right):=L$$

הגדרה 2.4. רציפות של פונקציה

תהא $f:D\to\mathbb{R}^{n}$ פונקציה כנ"ל, נאמר ש-f <u>רציפה בנקודה</u> $P_{0}\in D$ אם הגבול $\lim_{P\to P_{0}}f\left(P\right)$ קיים ושווה ל-$f\left(P\right)$, נאמר ש-f <u>רציפה</u> אם f רציפה ב-P' לכל $P'\in D$.

2.1 מסילות

♣ ניתן להסתכל על כל פונקציה מהצורה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n}$ כסדרה סופית של פונקציות שהתחום והטווח שלהן הם תתי-קבוצות של $\mathbb{R}$, כך:

$$\begin{pmatrix}f_{1}\left(t\right)\\ f_{2}\left(t\right)\\ \vdots\\ f_{n}\left(t\right)\end{pmatrix}:=f\left(t\right)$$

הגדרה 2.5. יהיו $I\subseteq\mathbb{R}$ מקטע ו-$2\leq n\in\mathbb{N}$, פונקציה מהצורה $\gamma:I\to\mathbb{R}^{n}$ תקרא <u>מסילה</u> אם היא רציפה בכל רכיב בנפרד[1], התמונה של מסילה נקראת <u>מסלול</u>, ויצירת מסילה שהמסלול שלה הוא קבוצה נתונה תיקרא <u>פרמטריזציה</u> של אותה קבוצה.

הגדרה 2.6. נאמר שמסילה היא <u>מסילה פשוטה</u> אם היא חח"ע.

הגדרה 2.7. תהא $\gamma:I\to\mathbb{R}^{n}$ מסילה ויהיו $t,t'\in I$, <u>וקטור המהירות הממוצעת</u> של γ בין t ל-t' הוא הווקטור:

$$\frac{1}{t-t'}\cdot\left[\gamma\left(t\right)-\gamma\left(t'\right)\right]=\frac{1}{t-t'}\cdot\left[\begin{pmatrix}f_{1}\left(t\right)\\ f_{2}\left(t\right)\\ \vdots\\ f_{n}\left(t\right)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}f_{1}\left(t'\right)\\ f_{2}\left(t'\right)\\ \vdots\\ f_{n}\left(t'\right)\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{t-t'}\cdot\left[\begin{pmatrix}f_{1}\left(t\right)-f_{1}\left(t'\right)\\ f_{2}\left(t\right)-f_{2}\left(t'\right)\\ \vdots\\ f_{n}\left(t\right)-f_{n}\left(t'\right)\end{pmatrix}\right]$$

[1] כלומר (במונחי ההערה שלעיל) f_{i} רציפה לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$.

הגדרה 2.8. תהא $\gamma:I\to\mathbb{R}^{n}$ מסילה ותהא $t_{0}\in I$ נקודה פנימית ב-I, נאמר ש-γ גזירה ב-t_{0} אם קיים הגבול:

$$\lim_{t\to t_{0}}\left(\frac{1}{t-t_{0}}\cdot\left(\gamma\left(t\right)-\gamma\left(t_{0}\right)\right)\right)$$

ואז נקרא לאותו גבול[2] וקטור הנגזרת של γ בנקודה t_{0} ונסמן אותו ע"י $\gamma'\left(t_{0}\right)$.

הגדרה 2.9. תהא $\gamma:I\to\mathbb{R}^{n}$ מסילה הגזירה בנקודה פנימית t_{0}, המסילה המשיקה ל-γ בנקודה t_{0} היא המסילה המוגדרת ע"י (לכל $t\in\mathbb{R}$):

$$f\left(t\right):=\gamma\left(t_{0}\right)+\gamma'\left(t_{0}\right)\cdot\left(t-t_{0}\right)$$

♣ כמובן שהרעיון שלה הגדרה זו הוא מסילה שתמונתה היא ישר העוברת בנקודת ההשקה "באותו הזמן" של הפונקציה המקורית ובאותו כיוון.

הגדרה 2.10. מסילה $\gamma:I\to\mathbb{R}^{n}$ תקרא גזירה ב-I אם היא גזירה לכל $t\in I$.

הגדרה 2.11. מסילה $\gamma:I\to\mathbb{R}^{n}$ תקרא חלקה אם היא גזירה ב-I ובנוסף וקטור הנגזרת שלה שונה מווקטור האפס בכל נקודה.

♣ הסיבה לדרישה שווקטור הנגזרת יהיה שונה מווקטור האפס היא כדי שההגדרה תתלכד עם קיום ישר משיק.

משפט 2.12. תהא $\gamma:I\to\mathbb{R}^{n}$ מסילה ותהיינה $f_{1},f_{2},\ldots,f_{n}\in\mathbb{R}^{I}$ פונקציות כך שלכל $n\geq j\in\mathbb{N}$ ולכל $t\in I$ יתקיים:

$$\gamma\left(t\right)=\begin{pmatrix}f_{1}\left(t\right)\\ f_{2}\left(t\right)\\ \vdots\\ f_{n}\left(t\right)\end{pmatrix}$$

ראינו בקובץ הטענות ש-γ גזירה בנקודה $t_{0}\in I$ אם"ם לכל $n\geq j\in\mathbb{N}$ הפונקציה f_{j} גזירה ב-t_{0} ואז וקטור הנגזרת של γ ב-t_{0} הוא:

$$\begin{bmatrix}f_{1}'\left(t_{0}\right)\\ f_{2}'\left(t_{0}\right)\\ \vdots\\ f_{n}'\left(t_{0}\right)\end{bmatrix}$$

לכן נאמר ש-γ גזירה פעמיים בנקודה $t_{0}\in I$ אם לכל $n\geq j\in\mathbb{N}$ הפונקציה f_{j} גזירה פעמיים ב-t_{0} ואז וקטור התאוצה של γ ב-t_{0} הוא:

$$\begin{bmatrix}f_{1}''\left(t_{0}\right)\\ f_{2}''\left(t_{0}\right)\\ \vdots\\ f_{n}''\left(t_{0}\right)\end{bmatrix}$$

[2] שהוא הגבול של וקטורי המהירות הממוצעת בנקודה t_{0}.

2.2 פונקציות מרובות משתנים

הגדרה 2.13. כשאנו אומרים "פונקציה מרובת משתנים" כוונתנו לפונקציה שהתחום שלה הוא קבוצת סדרות סופיות כלשהו (למשל $\mathbb{R}^n$) שהרי מהגדרתה פונקציה אינה יכולה לקבל יותר ממשתנה אחד, הדרך "לעקוף" זאת היא לתת לה משתנה אחד (כגון סדרה) המכיל בתוכו יותר ממשתנה אחד; לעת עתה נעסוק בעיקר בפונקציות מהצורה $f:D\to\mathbb{R}$ כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^2$, הגרף של פונקציה מצורה זו נקרא יריעה.

תהא $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה כנ"ל, הגרף של f הוא תת-קבוצה של מרחב התלת-ממדי $\mathbb{R}^3$ [3] ומבחינה אינטואיטיבית הוא מהווה מפה תלת-ממדית של "פני השטח" הנוצרים ע"י הפונקציה (הפונקציה קובעת מה יהיה גובה פני הקרקע בכל נקודה במישור); אינטואיציה זו מאפשרת לנו לייצג את היריעה גם במישור כאשר בכל נקודה/אזור אנו כותבים מהו "גובה הפונקציה" בנקודה או באזור הללו, לייצוג כזה קוראים מפה טופוגרפית וכמתבקש לקבוצת הנקודות בגרף של f שכולן בגובה נתון נקרא קו גובה, כך למשל קו הגובה 3 יהיה הקבוצה $\left\{(x,y,3)\in\mathbb{R}^3\mid 3=f(x,y)\right\}$.

♣ המחשות טובות ניתן לקבל באתר: https://www.math3d.org.

כל הפונקציות שנעסוק בהן בסעיף זה הן פונקציות מהצורה $f:D\to\mathbb{R}$ כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^n$ ולכן לא אטרח לציין זאת בכל פעם מחדש.

הגדרה 2.14. נקודות קיצון כלליות (גלובליות)

תהא $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה ותהא $A\subseteq D$, נאמר שנקודה $P\in A$ היא נקודת מקסימום/מינימום כללית (גלובלית) של f ב-A אם לכל נקודה $P'\in D$ מתקיים $f(P')\leq f(P)$ (מקסימום) או $f(P')\geq f(P)$ (מינימום) ובמקרה כזה הערך $f(P)$ יקרא הערך המקסימלי/המינימלי של f ב-A.

הגדרה 2.15. נקודות קיצון מקומיות

תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה של נקודה $P\in\mathbb{R}^n$, נאמר ש-P היא נקודת מקסימום/מינימום מקומית של f אם קיימת סביבה מלאה של P שבה P היא נקודת מקסימום כללית של f.

[3] כאשר המישור הנפרש ע"י ציר ה-x וציר ה-y ייצג את התחום ואילו הישר שיוצר ציר ה-z מייצג את הטווח.