הקדמה - קבוצות בנות מנייה וסכומים אין-סופיים

חשבון אינפיניטסימלי (2) - 80132

מרצה: יורם לסט

מתרגלים: דניאל אופנר ומתן בן-אשר

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 קבוצות בנות מנייה

הגדרה 1.1. נאמר שקבוצה A היא בת-מנייה אם קיימת פונקציה $f:A\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל (הפיכה).

- ♣ באופן שקול ניתן לומר ש-A היא קבוצה בת-מנייה אם ניתן לבנות סדרה אין-סופית שתכלול את כל איברי A ללא חזרות[1] (אותה סדרה היא בעצם ההופכית של f[2]).
- ♣ באופן כללי זוהי ההגדרה של שוויון בין עוצמות של קבוצות, אם קיימת פונקציה הפיכה $f:A\to B$ נאמר שהעוצמה של A שווה לעוצמה של B ונסמן $|A|=|B|$.
- ♣ העוצמה של הטבעיים מסומנת ב-$\aleph_0:=|\mathbb{N}|$ (קרי: אל"ף אפס).
- ♣ יש שקוראים גם לקבוצות סופיות "בנות-מנייה" ואז ההגדרה צריכה להיות שקיימת פונקציה $f:A\to B$ חח"ע ועל כאשר $B\subseteq\mathbb{N}$.

הגדרה 1.2. נאמר שקבוצה A היא אין-סופית אם קיימת פונקציה חח"ע ועל מ-A לתת-קבוצה ממש שלה (כלומר תת-קבוצה שאינה A עצמה), אחרת נאמר ש-A סופית.

- ♣ ניתן גם להגדיר שקבוצה A היא סופית אם קיים $n\in\mathbb{N}$ וקיימת פונקציה $f:A\to\{1,2,3,\ldots,n\}$ שהיא חח"ע ועל, ואחרת היא אין-סופית; אנחנו לא לומדים עכשיו את תורת הקבוצות ולכן לא נעסוק בהבדל שבין שתי ההגדרות הללו.

טענה 1.3. תהא A קבוצה בת-מנייה ותהא $B\subseteq A$ קבוצה אין-סופית, גם B בת-מנייה.

טענה 1.4. תהיינה A,B קבוצות בנות-מנייה, גם $A\cup B$ היא קבוצה בת-מנייה.

- ♣ כמובן שגם איחוד של קבוצה בת-מנייה עם קבוצה סופית הוא קבוצה בת-מנייה.

מסקנה 1.5. כל איחוד סופי של קבוצות בנות-מנייה הוא קבוצה בת-מנייה.

טענה 1.6. תהא $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות סופיות, האיחוד של כל הקבוצות בסדרה הוא קבוצה סופית או בת-מנייה.

משפט 1.7. תהא $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות בנות-מנייה, מתקיים גם:

$$\left|\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right|=\aleph_0$$

כלומר האיחוד האין-סופי של הקבוצות האין-סופיות בסדרה הוא קבוצה בת-מנייה.

- ♣ ממשפט זה נובע שלא רק שהטבעיים והשלמים הן קבוצות בנות-מנייה אלא שגם הרציונליים הם קבוצה בת-מנייה.

הוכחה. נשים לב לכך שמתקיים:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=2}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{k=n}\{(k,n-k)\}\right)=\bigcup_{n=2}^{\infty}\left(\bigcup_{k+j=n}\{(k,j)\}\right)$$

והרי לכל $n\in\mathbb{N}$ הקבוצה $\bigcup_{k+j=n}\{(k,j)\}$ (שהיא האלכסון ה-$n-1$-י באינטואיציה) היא קבוצה סופית ולכן ע"פ הטענה הקודמת (1.6) האיחוד שלהן הוא קבוצה בת-מנייה. ■

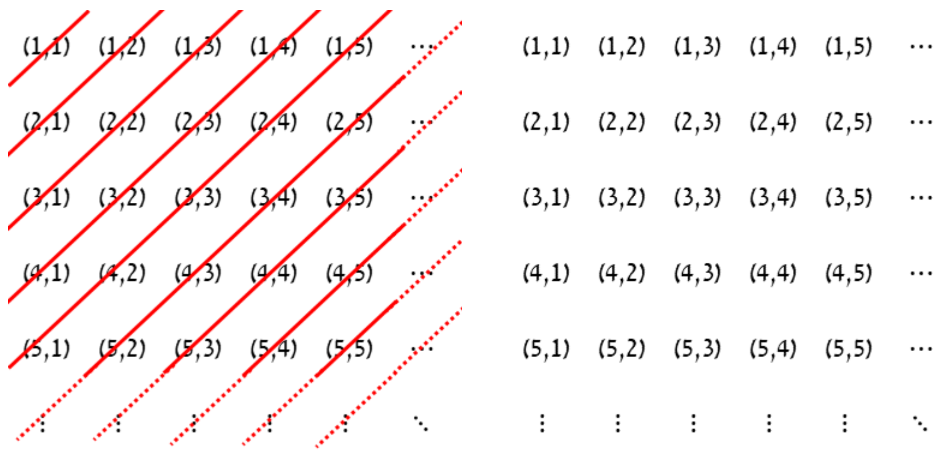
- ♣ אינטואיציה להוכחה מופיעה בעמוד הבא.

---

[1] אם A אין-סופית (ראו הגדרה להלן) ניתן לוותר על הדרישה שהסדרה לא תכלול חזרות: אם במקרה יחזור איבר כלשהו פעמיים פשוט נסיר את החזרות ונקבל תת-סדרה שעונה על ההגדרה.

[2] כזכור, סדרה היא פונקציה מהטבעיים אל הטווח המתאים.

♣ לכל $n \in \mathbb{N}$, מהיות A_n קבוצה בת-מנייה קיימת סדרה $(n_k)_{k=1}^{\infty}$[3] הכוללת את כל איברי A_n ללא חזרות; נסמן את האיבר ה-k בסדרה ה-n-ית ב-(n,k) ונסדר את איברי כל הסדרות כך (התמונה הימנית):



איור 1: סידור איברי כל הסדרות (התמונה הימנית) וקיבוצם באלכסונים (התמונה השמאלית).

כעת נקבץ את האיברים באלכסונים (התמונה השמאלית): באלכסון הראשון יהיה האיבר $(1,1)$, בשני $(2,1)$ ו-$(1,2)$, בשלישי $(3,1)$, $(2,2)$ ו-$(1,3)$ וכן הלאה; כל אלכסון כזה הוא סופי ולכן (ע"פ הטענה הקודמת) האיחוד של כל האיברים הוא קבוצה בת-מנייה.

משפט 1.8. לכל $a,b \in \mathbb{R}$ המקיימים $a<b$ הקטע $[a,b]$ הוא קבוצה **שאינה** בת-מנייה.

הוכחה. יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ כך ש-$a<b$.
נניח בשלילה ש-$[a,b]$ הוא קבוצה בת-מנייה, א"כ קיימת סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ הכוללת את כל איברי $[a,b]$ ללא חזרות.
נתבונן בקטעים הבאים:

$$\left[a,a+\frac{b-a}{3}\right],\ \left[a+\frac{b-a}{3},b-\frac{b-a}{3}\right],\ \left[b-\frac{b-a}{3},b\right]$$

כמובן שהאיחוד שלהם שווה ל-$[a,b]$, נשים לב שלפחות אחד מהם אינו מכיל את x_1, א"כ יהי I_1 אחד מן הקטעים שאינו מכיל את x_1; נחלק את I_1 לשלושה קטעים סגורים כמקודם ונסמן ב-I_2 אחד מהם שאינו כולל את x_2, וכן הלאה: לכל $1<n\in\mathbb{N}$ נחלק את הקטע I_{n-1} לשלושה קטעים ונסמן ב-I_n אחד מאלו המקיים $x_n \notin I_n$.
מהלמה של קנטור נובע שקיים $c \in [a,b]$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $c \in I_n$ (ומכאן ש-$c \neq x_n$), כלומר מצאנו איבר ב-$[a,b]$ שאינו מופיע בסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ בסתירה להנחת השלילה. ■

[3] שימו לב שלא מדובר כאן בסדרה של טבעיים, הסדרה מכונה $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ משום שהיא הסדרה המתאימה לקבוצה A_n.

2 סכומים אין-סופיים

הגדרה 2.1. תהא A קבוצה כלשהי (לאו דווקא תת-קבוצה של $\mathbb{R}$) ותהא $f:A\to[0,\infty)$ פונקציה; נסמן[4]:

$$\sum_{a\in A}f(a):=\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}f(a_k):a_1,a_2,...,a_n\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

ונקרא ל-$\sum_{a\in A}f(a)$ (אם הוא מוגדר) <u>הסכום של ערכי</u> f <u>על פני כל איברי</u> A.

♣ הגדרה זו אינה סותרת את הגדרת סכום של איברי קבוצה סופית אלא מכלילה אותה.

♣ למה לא הגדרנו כך (עבור $A\subseteq[0,\infty)$):

$$\sum_{a\in A}a:=\sup\left\{\ \sum_{k=1}^{n}a_k\ \middle|\ a_1,a_2,...,a_n\in A,\ n\in\mathbb{N}\ \right\}$$

בשביל מה להכניס את f לכאן?
שלוש סיבות: כדי להשיג מקרה כללי יותר (A אינה בהכרח תת-קבוצה של $\mathbb{R}$), כדי לאפשר חזרות (A היא קבוצה ולא תאפשר סכימה של אותו איבר פעמיים) ומכיוון שבהמשך נדבר על טורים של סדרות (והלא סדרה היא סוג של פונקציה).

הגדרה 2.2. קבוצה של מספרים אי-שליליים A תקרא <u>סכימה</u> (כלומר ניתנת לסכימה, שאפשר לסכום על פני כל איבריה) אם החסם העליון הבא מוגדר:

$$\sup\left\{\ \sum_{k=1}^{n}a_k\ \middle|\ a_1,a_2,...,a_n\in A,\ n\in\mathbb{N},\ \forall i,j:i\neq j\to a_i\neq a_j\ \right\}$$

טענה 2.3. אם קבוצה A היא היא סכימה אז לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ הקבוצה $\{a\in A\mid a\geq\varepsilon\}$ היא סופית.

טענה 2.4. תהא A קבוצה ותהא $f:A\to[0,\infty)$ פונקציה, אם הסכום של ערכי f על פני כל איברי A קיים אז הקבוצה $\{a\in A:f(a)\neq 0\}$ היא סופית או בת-מנייה.

הוכחה. נניח שהסכום המדובר אכן קיים, מהגדרת f לכל $a\in A$ המקיים $f(a)\neq 0$ מתקיים $f(a)>0$ וא"כ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$f(a)\geq\frac{1}{n}$.
לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $A_n:=\left\{a\in A:f(a)\geq\frac{1}{n}\right\}$, מהטענה הקודמת (2.3) נובע ש-A_n היא קבוצה סופית לכל $n\in\mathbb{N}$, נשים לב לכך שמתקיים:

$$\{a\in A:f(a)\neq 0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

ולכן (ע"פ טענה 1.6) מדובר בקבוצה סופית או בת-מנייה. ■

♣ בהינתן קבוצה A ופונקציה $f:A\to[0,\infty)$ אם נסמן $\widetilde{A}:=\{\widetilde{a}\in A:f(\widetilde{a})\neq 0\}$ נקבל:

$$\sum_{\widetilde{a}\in\widetilde{A}}f(\widetilde{a})=\sum_{a\in A}f(a)$$

וזאת ישירות מההגדרה: כל סכום סופי של איברים מ-$\{f(a):a\in A\}$ מופיע בקבוצת הסכומים הסופיים של $\left\{f(\widetilde{a}):\widetilde{a}\in\widetilde{A}\right\}$ (ולהפך) שהרי האפסים אינם משנים את הסכום (מדובר בסכום סופי) ומכאן שהחסמים העליונים של קבוצות אלו שווים.

♣ מהטענה האחרונה נובע שסכומים אין-סופיים (של פונקציות) על פני קבוצות שאינן בנות מנייה אינם "מעניינים"[5] ולכן נתמקד בסכומים של קבוצות בנות מנייה, וליתר נוחות בסכומים של סדרות (או בשמם: טורים, זהו הנושא הבא).

[4] זהו סימון פורמלי בלבד, לא ברור שהקבוצה אכן חסומה מלעיל ולכן ייתכן שהביטוי אינו מוגדר.

[5] מה קורה אם מאפשרים לטווח של f לכלול מספרים שליליים? האם גם אז זה לא מעניין? אמנם יש להגדיר זאת כראוי ולא ברור כיצד לעשות זאת אך בכל זאת...