מרחבים וקטוריים - הוכחות נבחרות

אלגברה ליניארית (1) - 80134

מרצה: ערן נבו

מתרגלים: איתמר ישראלי ושני שלומי

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,

כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;

אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:

אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה

https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

יהי V מ"ו מעל לשדה $\mathbb{F}$.

משפט 1.1. תכונות בסיסיות של מ"ו

1. יחידות האיבר האדיש לחיבור - יהיו $v,w\in V$, אם $v+w=v$ אז $w=0_V$.
2. יחידות הנגדי - יהיו $v,w,u\in V$, אם $v+w=0_V$ וגם $v+u=0_V$ אז $w=u$.
3. כפל בסקלר "אפס" - לכל $v\in V$ מתקיים $0\cdot v=0_V$.
4. כפל בווקטור האפס - לכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $a\cdot 0_V=0_V$.
5. כפל בסקלר "-1" - לכל $v\in V$ מתקיים $(-1)\cdot v=-v$.

הוכחה.

1. נניח ש-$v+w=v$ ויהי $x\in V$ כך ש-$x+v=0_V$ (קיום הנגדי), מכאן שמתקיים:
$$0_V=x+v=x+(v+w)=(x+v)+w=0_V+w=w$$
2. נניח ש-$v+w=0_V$ וגם $v+u=0_V$, מכאן ש-$u+v=0_V$ וממילא גם:
$$u=u+0_V=u+(v+w)=(u+v)+w=0_V+w=w$$
3. לכל $v\in V$ מתקיים $0\cdot v=(0+0)\cdot v=0\cdot v+0\cdot v$ ומכאן שגם:
$$0_V=-(0\cdot v)+0\cdot v=-(0\cdot v)+(0\cdot v+0\cdot v)=(-(0\cdot v)+0\cdot v)+0\cdot v=0_V+0\cdot v=0\cdot v$$
4. לכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $a\cdot 0_V=a\cdot(0_V+0_V)=a\cdot 0_V+a\cdot 0_V$ ומכאן שגם:
$$0_V=-(a\cdot 0_V)+a\cdot 0_V=-(a\cdot 0_V)+(a\cdot 0_V+a\cdot 0_V)=(-(a\cdot 0_V)+a\cdot 0_V)+a\cdot 0_V=0_V+a\cdot 0_V=a\cdot 0_V$$
5. לכל $v\in V$ מתקיים $0_V=0\cdot v=(1-1)\cdot v=1\cdot v+(-1)\cdot v=v+(-1)\cdot v$, מיחידות הנגדי נובע ש-$-v=(-1)\cdot v$.

■

טענה 1.2. יהיו $v\in V$ ו-$a\in\mathbb{F}$, מתקיים $a\cdot v=0_V$ אם"ם $v=0_V$ ו/או $a=0$.

הוכחה. את הגרירה משמאל לימין כבר הוכחנו בסעיפים 3 ו-4 של המשפט הקודם (1.1), נוכיח כעת את הכיוון ההפוך.
נניח ש-$v\neq 0_V$ וגם $a\neq 0$, מכאן שמתקיים:
$$a^{-1}\cdot(a\cdot v)=\left(a^{-1}\cdot a\right)\cdot v=1\cdot v=v\neq 0_V$$
ומכאן ש-$a\cdot v\neq 0_V$ (סעיף 4 במשפט הנ"ל), כלומר אם $a\cdot v=0_V$ אז $v=0_V$ ו/או $a=0$. ■

טענה 1.3. תהא X קבוצת תתי-מרחבים וקטוריים של V, החיתוך של כל תתי-המרחבים ב-X הוא תת-מרחב של V.

♣ נשים לב לכך שיש כאן כמה אפשרויות:

- X יכולה להיות סופית ואז קיימים תתי-מרחבים וקטוריים $W_1,W_2,\ldots,W_r\subseteq V$ כך ש-$X=\{W_1,W_2,\ldots,W_r\}$, ואז החיתוך של כל תתי-המרחבים בה הוא הקבוצה:

$$\bigcap_{W\in X}W=\bigcap_{i=1}^{r}W_i$$

- X יכולה להיות אין-סופית בת-מנייה, כלומר ניתן לסדר את איבריה בסדרה אינסופית: $X=\{W_1,W_2,\ldots\}$ ואז החיתוך של כל תתי-המרחבים בה הוא הקבוצה:

$$\bigcap_{W\in X}W=\bigcap_{i=1}^{\infty}W_i$$

- X יכולה להיות אין-סופית שאינה בת-מנייה, כלומר א"א לסדר את איבריה בסדרה אינסופית, ואז החיתוך של כל תתי-המרחבים בה הוא הקבוצה:

$$\bigcap_{W\in X}W$$

בכל מקרה החיתוך של כל תתי-המרחבים ב-X הוא הקבוצה:

$$\left\{\ v\ \middle|\ \forall W\in X: v\in W\ \right\}$$

הוכחה. נסמן:

$$U:=\bigcap_{W\in X}W$$

ונעבור על שלוש התכונות כדי להוכיח ש-U הוא תמ"ו.

1. לכל $W\in X$ מתקיים $0_V\in W$ ולכן מתקיים גם $0_V\in U$.
2. יהיו $u_1,u_2\in U$, מכאן ש-$u_1,u_2\in W$ לכל $W\in X$; כל $W\in X$ הוא תמ"ו ולכן לכל $W\in X$ מתקיים $u_1+u_2\in W$ וממילא גם $u_1+u_2\in U$.
3. יהי $u\in U$, מכאן ש-$u\in W$ לכל $W\in X$ ולכן מהעובדה שכל $W\in X$ הוא תמ"ו נובע ש-$a\cdot u\in W$ לכל $a\in\mathbb{F}$ וממילא גם $a\cdot u\in U$ לכל $a\in\mathbb{F}$.

u_1, u_2 ו-u הנ"ל היו שרירותיים ולכן הנ"ל נכון לכל זוג וקטורים / וקטור יחיד ב-U, כלומר U הוא תמ"ו. ■

2 תלות ליניארית ופרישה

יהי V מ"ו מעל לשדה $\mathbb{F}$.

משפט 2.1. תכונות של הפרוש

- לכל תמ"ו $W\subseteq V$ מתקיים $\text{span}W=W$.
- $\text{span}\left(\emptyset\right)=\left\{ 0_{V}\right\}$.
- תהיינה $S,T\subseteq V$ תתי-קבוצות כך ש-$S\subseteq T$, מתקיים $\text{span}S\subseteq\text{span}T$.

הוכחה.

- מהגדרה $W\subseteq W$ ולכן מהיותו תמ"ו W מופיע בחיתוך המהווה את $\text{span}W$, א"כ $\text{span}W\subseteq W$; מצד שני ראינו כבר בקובץ ההגדרות שמהגדרת הפרוש נובע ש-$W\subseteq\text{span}W$ ולכן נסיק מכאן ש-$\text{span}W=W$.
- $\text{span}\left(\emptyset\right)$ הוא תמ"ו וככזה הוא מקיים $\left\{ 0_{V}\right\} \subseteq\text{span}\left(\emptyset\right)$, מצד שני $\emptyset\subseteq\left\{ 0_{V}\right\}$ ולכן $\left\{ 0_{V}\right\}$ מופיע בחיתוך המהווה את $\text{span}\left(\emptyset\right)$, כלומר $\text{span}\left(\emptyset\right)\subseteq\left\{ 0_{V}\right\}$ וממילא $\text{span}\left(\emptyset\right)=\left\{ 0_{V}\right\}$.
- כפי שראינו בקובץ ההגדרות מתקיים $T\subseteq\text{span}T$ ולכן גם $S\subseteq\text{span}T$, א"כ מהיות $\text{span}T$ תמ"ו נובע שהוא מופיע בחיתוך המהווה את $\text{span}S$, כלומר $\text{span}S\subseteq\text{span}T$.

■

טענה 2.2. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו ויהיו $v_{1},...,v_{n}\in W$, לכל $a_{1},a_{2},...,a_{n}\in\mathbb{F}$ מתקיים $a_{1}\cdot v_{1}+a_{2}\cdot v_{2}+\ldots+a_{n}\cdot v_{n}\in W$.

טענה 2.3. תהא $S\subseteq V$ תת-קבוצה, הקבוצה:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n}a_{i}\cdot v_{i}\;\middle|\;n\in\mathbb{N},\ \forall n\geq i\in\mathbb{N}:a_{i}\in\mathbb{F}\wedge v_{i}\in S\right\}$$

(שהיא אוסף כל הצר"ל של איברי S) היא תמ"ו של V.

♣ שימו לב שוב לכך ש-S אינה מוכרחת להיות סופית.

♣ אם S היא הקבוצה הריקה אז קבוצת הצר"ל שלה היא מרחב האפס.

♣ כשלמדנו על וקטורים בתיכון ראינו שניתן לאפיין ישר ע"י נקודה שעליו ווקטור יחיד הקובע את כיוונו של הישר, כל נקודה אחרת על הישר ניתנת לביטוי בתור אותה נקודה ועוד סקלר כפול אותו וקטור, כך למשל הקבוצה:

$$\left\{ \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+x\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\;\middle|\;x\in\mathbb{R}\right\}$$

היא ציר ה-x במישור; ראינו גם שניתן לאפיין כל מישור על נקודה שעליו ועוד **צר"ל** של שני וקטורים, כך הקבוצה:

$$\left\{ \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+x\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+y\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\;\middle|\;x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

היא המישור הנפרש ע"י צירי ה-x וה-y יחדיו. כדי שישר או מישור כזה יהיו תתי-מרחבים וקטוריים הם מוכרחים להכיל את וקטור האפס ולכן נוח יותר לייצג אותם כקבוצת צר"ל בלבד ללא הוספת וקטור האפס בתחילה, א"כ כל קבוצת צר"ל כנ"ל היא כעין ישר או מישור במרחב שבו היא נמצאת, אין הבדל מהותי בשאלה אם יש בצר"ל שני וקטורים או עשרה.

הוכחה. נסמן ב-W את הקבוצה הנ"ל ונעבור על שלוש התכונות הנדרשות לתמ"ו:

1. אם $S=\emptyset$ אז מהגדרת סכום ריק מתקיים $W=\{0_V\}$, אחרת לכל $v\in V$ מתקיים מהגדרה $0_V=0\cdot v\in W$ (זהו צר"ל עם איבר אחד).
2. הסכום של שני צר"ל הוא צר"ל בעצמו ולכן W סגורה לחיבור.
3. לכל $v\in W$ מתקיים מהגדרה $a\cdot v\in W$ (זהו צר"ל עם איבר אחד), כלומר W סגורה לכפל בסקלר.

■

מסקנה 2.4.

- תהא $S\subseteq V$ תת-קבוצה, מתקיים:

$$\text{span}S=\left\{\ \sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i\ \middle|\ n\in\mathbb{N},\ \forall n\geq i\in\mathbb{N}:a_i\in\mathbb{F}\wedge v_i\in S\ \right\}$$

- תהא $(v_i)_{i=1}^{n}$ סדרת וקטורים סופית ב-V מתקיים:

$$\text{span}\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)=\left\{\ \sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i\ \middle|\ \forall n\geq i\in\mathbb{N}:a_i\in\mathbb{F}\ \right\}$$

♣ מכאן שאם קבוצה/סדרה פורשת את המרחב כולו אז ניתן להציג כל וקטור במרחב כצר"ל שלה.

♣ מסקנה זו היא הסיבה לשם "פרוש" - הפרוש של קבוצה/סדרה הוא התמ"ו **הנפרש**[1] ע"י איבריה ממש כפי שמישור **נפרש** ע"י שני וקטורים במרחב.

מסקנה 2.5. תת-קבוצה $S\subseteq V$ היא תלויה ליניארית אם"ם קיים $v\in S$ כך ש-$v\in\text{span}\left(S\setminus\{v\}\right)$.

טענה 2.6. תהא $S\subseteq V$ תת-קבוצה.

- אם $0_V\in S$ אז S תלויה ליניארית (אפילו אם $S=\{0_V\}$[2]).
- אם S היא יחידון והיא תלויה ליניארית אז $S=\{0_V\}$.
- תהא $T\subseteq V$ כך ש-$S\subseteq T$,
  - אם S תלויה ליניארית אז גם T תלויה ליניארית.
  - אם T בת"ל אז גם S בת"ל.

מסקנה 2.7.

- כל סדרה המכילה את וקטור האפס היא סדרה תלויה ליניארית.
- אם סדרה תלויה ליניארית היא באורך 1 אז היא הסדרה (0_V).
- אם סדרה אחת מכילה את כל האיברים של סדרה אחרת וזו הראשונה תלויה ליניארית אז גם השנייה התלויה ליניארית.

[1] בעברית התנ"כית יש הבדל בכתיבה בין "לפרוש מפה", "לפרוש כנפיים" לבין "לפרוס לחם"; לדוגמה "וּפָרְשׂוּ עָלָיו בֶּגֶד אַרְגָּמָן" (במדבר, ד', י"ג) ו-"יִפְרֹשׂ כְּנָפָיו יִקָּחֵהוּ" (דברים, ל"ב, י"ג), ומצד שני "הֲלוֹא פָרֹס לָרָעֵב לַחְמֶךָ" (ישעיהו, נ"ח, ז') ו-"וְלֹא יִפְרְסוּ לָהֶם... וְלֹא יַשְׁקוּ אוֹתָם כּוֹס תַּנְחוּמִים" (ירמיהו, ט"ז, י"ז).

[2] נזכיר: מקובל להגדיר סכום ריק כאפס של החיבור המדובר (במקרה שלנו זהו וקטור האפס) ולכן ניתן לבטא את וקטור האפס באמצעות צר"ל של הקבוצה הריקה.

טענה 2.8. יהיו $v, w \in V$ אם הקבוצה $\{v, w\}$ ו/או הסדרה (v, w) תלויות ליניארית וגם $v \neq 0_V$ אז קיים $c \in \mathbb{F}$ כך ש-$w = c \cdot v$.

טענה 2.9. קבוצת וקטורים ב-V היא תלויה ליניארית אם"ם יש לה צר"ל מתאפס לא טריוויאלי של וקטורים שונים זה מזה.

♣ מכאן שכדי להוכיח שקבוצה/סדרה אינה תלויה ליניארית נוכל להוכיח שהצר"ל המתאפס היחיד שלה הוא הטריוויאלי.

הוכחה. תהא $S \subseteq V$ תת-קבוצה.

- $\Leftarrow$

  נניח ש-S תלויה ליניארית, א"כ יהיו $v \in S$, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in S \setminus \{v\}$ וקטורים שונים זה מזה ו-$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים:

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i$$

$$\Rightarrow 0_V = -v + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i = (-1) \cdot v + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i$$

  הביטוי שבאגף ימין הוא צר"ל לא טריוויאלי של S.

- $\Rightarrow$

  נניח שקיים צר"ל לא טריוויאלי מתאפס של S, א"כ יהיו $w_1, w_2, \ldots, w_m \in S$ וקטורים שונים זה מזה ו-$b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים:

$$0_V = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot w_i$$

  וקיים $m \geq k \in \mathbb{N}$ כך ש-$b_k \neq 0$, יהי $k \in \mathbb{N}$ כנ"ל.

$$\Rightarrow b_k \cdot w_k = \sum_{i=1}^{k-1} (-b_i) \cdot w_i + \sum_{i=k+1}^{m} (-b_i) \cdot w_i$$
$$\Rightarrow w_k = \sum_{i=1}^{k-1} -\frac{b_i}{b_k} \cdot w_i + \sum_{i=k+1}^{m} -\frac{b_i}{b_k} \cdot w_i$$

  א"כ ניתן להציג את w_k כצר"ל של איברי $S \setminus \{w_k\}$ ומהגדרה S תלויה ליניארית.

■

מסקנה 2.10. סדרת וקטורים סופית ב-V היא תלויה ליניארית אם"ם יש לה צר"ל מתאפס לא טריוויאלי.

♣ מכאן שכדי להוכיח שקבוצה/סדרה אינה תלויה ליניארית נוכל להוכיח שהצר"ל המתאפס היחיד שלה הוא הטריוויאלי.

הוכחה. לכל סדרת וקטורים סופית ב-V: אם מופיע בה איבר פעמיים אז היא תלויה ליניארית ויש לה צר"ל מתאפס - נכפול את אותו איבר פעם ב-1 ופעם ב--1 ואת כל שאר הווקטורים נכפול ב-0, ואם לא מופיע בה איבר פעמיים אז כל צר"ל שלה הוא גם צר"ל שלה הוא גם צר"ל של וקטורים שונים בקבוצת איבריה ולכן מהטענה הקודמת (2.9) היא תלויה ליניארית אם"ם יש לה צר"ל מתאפס לא טריוויאלי. ■

טענה 2.11. תהא $S\subseteq V$ תת-קבוצה בת"ל, אם קיים $v\in V$ כך ש-$v\notin\text{span}S$ אז עבור אותו v מתקיים גם ש-$S\cup\{v\}$ בת"ל.

הוכחה. נניח שקיים $v\in V$ כך ש-$v\notin\text{span}S$ ויהי v כנ"ל.
יהיו $v_1,v_2,\ldots,v_n\in S$ וקטורים שונים זה מזה ויהיו $a_1,a_2,\ldots,a_n,a\in\mathbb{F}$ כך מתקיים:

$$a\cdot v+\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i=0_V$$

אם a היה שונה מ-0 אז היינו מקבלים שניתן להציג את v כצר"ל של S[3] בסתירה להגדרתו, מכאן ש-$a=0$ וממילא:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i=a\cdot v+\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i=0_V$$

מטענה 2.9 נובע ש-$a_i=0$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$, א"כ הוכחנו שהצר"ל המתאפס היחיד של וקטורים שונים ב-$S\cup\{v\}$ הוא הטריוויאלי ומכאן ש-$S\cup\{v\}$ בת"ל. ■

טענה 2.12. תהא $S\subseteq V$, אם קיים $v\in S$ כך ש-$v\in\text{span}\left(S\setminus\{v\}\right)$ אז עבור אותו v מתקיים גם $\text{span}\left(S\setminus\{v\}\right)=\text{span}S$.

הוכחה. נניח שקיים $v\in S$ כך ש-$v\in\text{span}\left(S\setminus\{v\}\right)$ ויהי v כנ"ל.
מהגדרה $S\setminus\{v\}\subseteq S$ ולכן ממשפט 2.1 נובע ש-$\text{span}\left(S\setminus\{v\}\right)\subseteq\text{span}S$, נוכיח את ההכלה בכיוון השני.
יהי $w\in\text{span}S$, ממסקנה 2.4 נובע שניתן להציג את w כצר"ל של S ואת v כצר"ל של $S\setminus\{v\}$,
אם קיים צר"ל כזה ש-v אינו מופיע בו אז w ניתן להצגה כצר"ל של $S\setminus\{v\}$ ולכן ע"פ אותה מסקנה $w\in\text{span}\left(S\setminus\{v\}\right)$;
אחרת יהיו $v\neq w_1,w_2,\ldots,w_n\in S$ ו-$a,a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ כך שמתקיים:

$$w=a\cdot v+\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot w_i$$

ויהיו $v_1,v_2,\ldots,v_m\in S\setminus\{v\}$ ו-$b_1,b_2,\ldots,b_m\in\mathbb{F}$ כך שמתקיים:

$$v=\sum_{j=1}^{m}b_j\cdot v_j$$

$$\Rightarrow w=a\cdot\sum_{j=1}^{m}b_j\cdot v_j+\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot w_i=\sum_{j=1}^{m}\left(a\cdot b_j\right)\cdot v_j+\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot w_i$$

אגף שמאל הוא צר"ל של $S\setminus\{v\}$ ולכן שוב מאותה מסקנה נקבל ש-$w\in\text{span}\left(S\setminus\{v\}\right)$.
w הנ"ל היה שרירותי ולכן הנ"ל מתקיים לכל $w\in\text{span}S$ ומהגדרה $\text{span}\left(S\setminus\{v\}\right)\supseteq\text{span}S$ ומכאן ש-$\text{span}\left(S\setminus\{v\}\right)=\text{span}S$. ■

[3] נעביר את $a\cdot v$ אגף ונחלק ב-$-a$.

3 בסיסים וממדים

יהי V מ"ו נ"ס מעל לשדה $\mathbb{F}$.

♣ בפרק זה נעסוק בעיקר בקבוצות אך כל הטענות תהיינה תקפות גם עבור סדרות וקטורים ב-V.

משפט 3.1. למת ההחלפה של שטייניץ (Steinitz)[4]

תהיינה $S,T\subseteq V$ תתי-קבוצות סופיות כך ש-S פורשת את V ו-T בת"ל, מתקיימים שני הפסוקים הבאים[5]:

1. $|S|\geq|T|$.
2. קיימת תת-קבוצה $S'\subseteq S$ כך ש-$|S'|=|S|-|T|$ ו-$V=\text{span}\left(T\cup S'\right)$.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על הגודל של T.

<u>בסיס האינדוקציה</u>

אם $|T|=0$ אז $T=\emptyset$ אז מהגדרה מתקיים $|S|\leq 0=|T|$ ו-S עצמה מקיימת $|S|=|S|-0=|S|-|T|$.

<u>צעד האינדוקציה</u>

נניח ש-$|T|>0$, נסמן $n:=|S|$ ו-$m:=|T|$, ונניח שהמשפט מתקיים לכל תת-קבוצה בת"ל שגודלה הוא $m-1$.

יהיו $w_1,w_2,\ldots,w_m$ כל הווקטורים ב-T ונסמן $T_0:=T\setminus\{w_m\}$, מכאן ש-$|T_0|=m-1$ ולכן ע"פ הנחת האינדוקציה קיימת $S_0\subseteq S$ כך ש-$V=\text{span}\left(T_0\cup S_0\right)$ ובנוסף:

$$|S'|=|S|-|T'|=n-(m-1)=n-m+1$$

תהא S_0 כנ"ל ויהיו $v_m,v_{m+1},\ldots,v_n$ כל הווקטורים ב-S_0.[6]

הקבוצה $T_0\cup S_0=\{w_1,w_2,\ldots,w_{m-1},v_m,v_{m+1},\ldots,v_n\}$ פורשת את V, ולכן ניתן להציג את w_m כצר"ל של איבריה, א"כ יהיו $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ כך שמתקיים:

$$w_m=\sum_{i=1}^{m-1}a_i\cdot w_i+\sum_{i=m}^{n}a_i\cdot v_i$$

ולכן גם:

$$1\cdot w_m+\sum_{i=1}^{m-1}\left(-a_i\right)\cdot w_i=\sum_{i=m}^{n}a_i\cdot v_i$$

אגף שמאל הוא צר"ל לא טריוויאלי של איברי T ולכן מהעובדה ש-T בת"ל נובע כי:

$$\sum_{i=m}^{n}a_i\cdot v_i\neq 0_V$$

בפרט זהו סכום שאינו ריק ולכן בהכרח $|S|=n\geq m=|T|$ ובכך הוכחנו את הסעיף הראשון במשפט.

בנוסף, נובע מזה שקיים $j\in\mathbb{N}$ כך ש-$m\leq j\leq n$ ו-$a_j\neq 0$, נניח בהג"כ שאותו j הוא m.

א"כ מתקיים:

$$v_m=\frac{1}{a_m}\cdot w+\sum_{i=1}^{m-1}-\frac{a_i}{a_m}\cdot w_i+\sum_{i=m+1}^{n}-\frac{a_i}{a_m}\cdot v_i$$

$$\Rightarrow v_m\in\text{span}\left\{w_1,w_2,\ldots,w_m,v_{m+1},v_{m+2},\ldots,v_n\right\}$$

---

[4]ערך בוויקיפדיה האנגלית: Ernst Steinitz.

[5]למעשה הפסוק הראשון נובע משני שכן $0\leq|S'|$, למרות זאת הבאנו אותו בנפרד כדי להדגיש שכל קבוצה פורשת גדולה מכל קבוצה בת"ל.

[6]נשים לב לכך ש-S_0 יכולה להיות ריקה, זה לא ישפיע על מהלך ההוכחה ומאוחר יותר אנחנו נראה ש-S_0 בהכרח אינה ריקה.

נגדיר $S' := \{v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_n\}$, מהגדרה S' מקיימת $|S'| = n - m = |S| - |T|$ ובנוסף:

$$T_0 \cup S_0 = \{w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\} \subseteq \text{span}\{w_1, w_2, \ldots, w_m, v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_n\} = \text{span}(T \cup S')$$

ולכן $V = \text{span}(T_0 \cup S_0) \subseteq \text{span}(T \cup S')$ וממילא $V = \text{span}(T \cup S')$. ■

מסקנה 3.2. כל תת-קבוצה אין-סופית של V היא קבוצה תלויה ליניארית.

משפט 3.3. תהא $S \subseteq V$ תת-קבוצה סופית.

- אם S פורשת את V אז קיימת תת-קבוצה $\mathcal{B} \subseteq S$ המהווה בסיס של V.
- אם S בת"ל אז קיימת תת-קבוצה $\mathcal{B} \subseteq V$ המהווה בסיס של V כך ש-$S \subseteq \mathcal{B}$.

♣ ההוכחה של משפט זה נותנת לנו גם את הכלים למצוא בסיסים כאלה (ראו להלן), כלומר אנחנו יכולים לדלל כל קבוצה פורשת לבסיס ולהרחיב כל קבוצה בת"ל לבסיס.

♣ בפרט לכל מרחב וקטורי נוצר סופית יש בסיס וע"פ מסקנה 3.2 כל בסיס כזה הוא סופי.

הוכחה.

- נניח ש-S פורשת את V, מטענה 2.12 וממסקנה 2.5 נובע שכל עוד S תלויה ליניארית נוכל לגרוע ממנה וקטורים בזה אחר זה תוך שמירה על הפרוש שלה, התהליך הזה מוכרח להסתיים בשלב כלשהו מפני ש-S סופית, א"כ לאחר שנסיים את התהליך נקבל תת-קבוצה $\mathcal{B} \subseteq S$ כך ש-$\text{span}\mathcal{B} = \text{span}S = V$ ו-$\mathcal{B}$ בת"ל, כלומר $\mathcal{B}$ בסיס.
- נניח ש-S בת"ל ותהא $T \subseteq V$ תת-קבוצה סופית הפורשת את V.
מטענה 2.11 נובע שכל עוד קיים $v \in V$ כך ש-$v \notin \text{span}S$ נוכל להוסיף ל-S וקטורים כך שתישאר בת"ל, התהליך הזה מוכרח להיעצר מפני שע"פ למת ההחלפה ברגע שהגודל של S (לאחר הוספת הווקטורים) יעבור את $|T|$ - S תהיה תלויה ליניארית.
נסמן $k := |T| - |S|$ (ע"פ למת ההחלפה $k \geq 0$) ומכאן שקיימים $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ כך ש-$v_1, v_2, \ldots, v_k \notin \text{span}S$ ו-$S \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ בת"ל, ובנוסף לא קיים $v \in V$ כך שמתקיים:

$$v \notin \text{span}(S \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$$

כלומר $V \subseteq \text{span}(S \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$ וממילא $V = \text{span}(S \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$, כלומר $S \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ בת"ל ופורשת את V ולכן גם בסיס.

■

משפט 3.4. תהא $\mathcal{B} := (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ סדרת וקטורים ב-V, $\mathcal{B}$ הוא בסיס של V אם"ם לכל $v \in V$ קיימים סקלרים $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ יחידים כך שמתקיים:

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i$$

כלומר ניתן להציג כל וקטור במרחב כצר"ל של בסיס סדור במרחב באופן יחיד.

♣ מכאן שגם קבוצת וקטורים היא בסיס אם"ם כל וקטור במרחב ניתן להצגה כצר"ל שלה באופן יחיד.

הוכחה.

- $\Leftarrow$
נניח ש-$\mathcal{B}$ הוא בסיס של V ויהי $v \in V$, מהעובדה ש-$\mathcal{B}$ פורש את V נובע ש-$v \in \operatorname{span}\mathcal{B}$ ולכן ע"פ מסקנה 2.4 ניתן להציג את v כצר"ל של $\mathcal{B}$, א"כ נותר להוכיח את היחידות של הצגה זו.
יהיו $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים:
$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i = v = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot v_i$$
$$\Rightarrow 0_V = v - v = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \cdot v_i$$
מהעובדה ש-$\mathcal{B}$ בת"ל ומטענה 2.10 נובע ש-$a_i - b_i = 0$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$, כלומר $a_i = b_i$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.

- $\Rightarrow$
נניח שלכל וקטור ב-V קיים צר"ל יחיד של $\mathcal{B}$ השווה לאותו וקטור, ראשית נשים לב לכך שמהקיום של צר"ל כזה לכל וקטור וממסקנה 2.4 נובע ש-$\mathcal{B}$ פורש את V, בנוסף היחידות מתקיימת בפרט עבור 0_V - כלומר הצר"ל המתאפס היחיד של $\mathcal{B}$ הוא הטריוויאלי ולכן $\mathcal{B}$ בת"ל.

$\blacksquare$

משפט 3.5. יהי $\mathcal{B}$ בסיס של V ותהא $S \subseteq V$ תת-קבוצה סופית.

- אם $|\mathcal{B}| < |S|$ אז S תלויה ליניארית.
- אם $|\mathcal{B}| > |S|$ אז S אינה פורשת את V.

♣ כלומר בסיס הוא קבוצה בלתי תלויה מקסימלית - אם מוסיפים לה עוד וקטור אחד היא הופכת לתלויה ליניארית, וכמו כן בסיס הוא קבוצה פורשת מינימלית - אם מסירים ממנה ולו וקטור אחד היא כבר לא פורשת את V.

הוכחה. המשפט נובע ישירות מלמת ההחלפה:

- מהיותו בסיס $\mathcal{B}$ פורש את V ולכן אם S הייתה בת"ל היה מתקיים $|S| \leq |\mathcal{B}|$, מכאן שאם $|\mathcal{B}| < |S|$ אז S תלויה ליניארית.
- מהיות $\mathcal{B}$ בסיס נובע ש-$\mathcal{B}$ בת"ל ולכן אם S הייתה קבוצה פורשת של V היה מתקיים $|\mathcal{B}| \leq |S|$, מכאן שאם $|\mathcal{B}| > |S|$ אז S אינה פורשת את V.

$\blacksquare$

מסקנה 3.6. יהיו $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq V$ בסיסים של V, מתקיים $|\mathcal{B}| = |\mathcal{C}|$.

♣ כלומר כל הבסיסים של V הם באותו הגודל ולכן ניתן לדבר על גודל זה כתכונה של V, לתת לו שם - <u>הממד</u> של V - ולסמן אותו ב-$\dim V$.

מסקנה 3.7. תהא $S \subseteq V$ תת-קבוצה סופית, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

- אם $\dim V < |S|$ אז S תלויה ליניארית.
- אם $\dim V > |S|$ אז S אינה פורשת את V.

משפט 3.8. תהא $S \subseteq V$ תת-קבוצה סופית, כל שניים משלושת הפסוקים הבאים גוררים את השלישי:

1. S פורשת את V
2. S בת"ל
3. $|S| = \dim V$

♣ בפרט אם $|S| = \dim V$ ובנוסף ידוע ש-S בת"ל **או** פורשת אז S בסיס (כלומר בת"ל **וגם** פורשת).

הוכחה.

- 1 ו-2 גוררים את 3 מהגדרת בסיס וממד.
- נניח ש-S פורשת ו-$|S| = \dim V$, כפי שכבר ראינו מטענה 2.12 וממסקנה 2.5 נובע שכל עוד S תלויה ליניארית קיים $v \in S$ כך ש-$\text{span}(S \setminus \{v\}) = \text{span}S = V$, מצד שני ממסקנה 3.7 נובע שלכל $v \in V$ מתקיים $\text{span}(S \setminus \{v\}) \neq V$ ולכן S מוכרחה להיות בת"ל (1 ו-3 גוררים את 2).
- נניח ש-S בת"ל ו-$|S| = \dim V$, כפי שכבר ראינו מטענה 2.11 נובע שכל עוד $\text{span}S \neq V$ קיים $v \in V$ כך ש-$v \notin \text{span}S$ (ובפרט $v \notin S$) כך ש-$S \cup \{v\}$ בת"ל, מצד שני ע"פ מסקנה 3.7 לכל $v \in V$ כך ש-$v \notin S$ הקבוצה $S \cup \{v\}$ תלויה ליניארית ולכן בהכרח מתקיים $\text{span}S = V$, כלומר S פורשת את V (2 ו-3 גוררים את 1).

■

טענה 3.9. יהי $W \subseteq V$ תמ"ו, גם W הוא מרחב וקטורי נוצר סופית.

הוכחה. מלמת ההחלפה נובע שקיים גודל מרבי לקבוצות בת"ל המוכלות ב-W (בפרט כל קבוצה בת"ל ב-W היא קבוצה סופית), א"כ תהא $S \subseteq W$ קבוצה בת"ל בעלת גודל מרבי, כלומר לכל $T \subseteq W$ כך ש-T בת"ל מתקיים $|T| \leq |S|$.
מטענה 2.11 נובע שאם $\text{span}S \neq W$ אז קיים $w \in W$ כך ש-$w \notin \text{span}S$ (ובפרט $w \notin S$) כך ש-$S \cup \{w\}$ בת"ל, אבל מהגדרת S לכל $w \in E$ כך ש-$w \notin S$ הקבוצה $S \cup \{w\}$ תלויה ליניארית.
מכאן ש-$\text{span}S = W$, כלומר S פורשת את W ומהגדרה W נ"ס. ■

מסקנה 3.10. יהי $W \subseteq V$ תמ"ו, מתקיים $\dim W \leq \dim V$ ובמקרה של שוויון ($\dim W = \dim V$) מתקיים $W = V$.

הוכחה. יהי $\mathcal{B}$ בסיס של W, מהגדרה $\mathcal{B}$ בת"ל ולכן ממשפט 3.3 נובע שקיים בסיס $\mathcal{C}$ של V כך ש-$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ וממילא מתקיים $\dim W = |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{C}| = \dim V$. ■

4 חיבור קבוצות במרחב וקטורי

יהי V מ"ו מעל לשדה $\mathbb{F}$.

4.1 סכומים של תתי-מרחבים וקטוריים

טענה 4.1. לכל $S,T\subseteq V$ מתקיים $\text{span}S+\text{span}T=\text{span}\left(S\cup T\right)$.

הוכחה. תהיינה $S,T\subseteq V$, לכל $v\in\text{span}S+\text{span}T$ קיימים צירופים ליניאריים של S ושל T שסכומם הוא v, כל סכום כזה הוא צר"ל של $S\cup T$ ולכן $\text{span}S+\text{span}T\subseteq\text{span}\left(S\cup T\right)$.
לכל $v\in S$ ולכל $w\in T$ מתקיים $v=v+0_V$ ו-$w=0_V+w$ ולכן גם $v,w\in\text{span}S+\text{span}T$, מכאן ש-$S,T\subseteq\text{span}S+\text{span}T$ ולכן גם $S\cup T\subseteq\text{span}S+\text{span}T$ וממילא $\text{span}S+\text{span}T\supseteq\text{span}\left(S\cup T\right)$. ■

מסקנה 4.2. יהיו $W,U\subseteq V$ תתי-מרחבים וקטוריים, מתקיים $W+U=\text{span}\left(W\cup U\right)$.

♣ בפרט נובע מכאן שסכום של תתי-מרחבים וקטוריים הוא תמ"ו בעצמו.

משפט 4.3. משפט הממדים
נניח ש-V נ"ס ויהיו $W,U\subseteq V$ תתי-מרחבים וקטוריים, מתקיים:

$$\dim\left(W+U\right)=\dim W+\dim U-\dim\left(W\cap U\right)$$

♣ המשפט הזה מזכיר את עיקרון ההכלה וההדחה, זה לא מקרי, אנחנו נשתמש בו בהוכחה.

הוכחה. נזכיר שמהגדרה מתקיים $W\cap U\subseteq W$ ו-$W\cap U\subseteq U$ ולכן נוכל להרחיב כל בסיס של $W\cap U$ לבסיס של W ולבסיס של U.
נסמן $k:=\dim W\cap U$, $n:=\dim W-k$ ו-$m:=\dim U-k$ ויהיו $v_1,v_2,\ldots,v_k,w_1,w_2,\ldots,w_n,u_1,u_2,\ldots,u_m\in V$ כך שמתקיים:

- $\mathcal{C}_1:=\left(v_1,v_2,\ldots,v_k\right)$ הוא בסיס של $W\cap U$
- $\mathcal{C}_2:=\left(v_1,v_2,\ldots,v_k,w_1,w_2,\ldots,w_n\right)$ הוא בסיס של W
- $\mathcal{C}_3:=\left(v_1,v_2,\ldots,v_k,u_1,u_2,\ldots,u_m\right)$ הוא בסיס של U

נסמן $\mathcal{B}:=\left(v_1,v_2,\ldots,v_k,w_1,w_2,\ldots,w_n,u_1,u_2,\ldots,u_m\right)$, מהמסקנה האחרונה (4.2) נובע ש-$\mathcal{B}$ פורש את $W+U$, ולכן כל מה שנותר לנו הוא להוכיח ש-$\mathcal{B}$ בת"ל ואז נקבל:

$$\dim\left(W+U\right)=k+n+m=\left(k+n\right)+\left(k+m\right)-k=\dim W+\dim U-\dim\left(U\cap W\right)$$

יהיו $a_1,a_2,\ldots,a_k,b_1,b_2,\ldots,b_n,c_1,c_2,\ldots,c_m\in\mathbb{F}$ כך שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^{k}a_i\cdot v_i+\sum_{j=1}^{n}b_j\cdot w_j+\sum_{l=1}^{m}c_l\cdot u_l=0_V$$

ונסמן:

$$v:=\sum_{i=1}^{k}a_i\cdot v_i,\ \ w:=\sum_{j=1}^{n}b_j\cdot w_j,\ \ u:=\sum_{l=1}^{m}c_l\cdot u_l$$

$$\Rightarrow u=-v-w$$

כלומר $u \in U$ וגם $u \in W$ וממילא $u \in W \cap U$. מכאן שניתן לבטא את u כצר"ל של $\mathcal{C}_1$ ולכן אם קיים $m \geq l \in \mathbb{N}$ כך ש-$c_l \neq 0$ אז יש ל-$\mathcal{C}_3$ צר"ל מתאפס לא טריוויאלי, א"כ $c_l = 0$ לכל $m \geq l \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot v_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot w_j = 0_V$$

זהו צר"ל מתאפס של $\mathcal{C}_2$, ולכן מהיותו בסיס נובע שזהו הצר"ל הטריוויאלי, כלומר $a_i = 0$ לכל $k \geq i \in \mathbb{N}$ ו-$b_j = 0$ לכל $n \geq j \in \mathbb{N}$.

א"כ הוכחנו שהצר"ל המתאפס היחיד של $\mathcal{B}$ הוא הטריוויאלי ולכן $\mathcal{B}$ בת"ל. ■

משפט 4.4. אפיונים שקולים לסכום ישר

נניח ש-V נ"ס ויהיו $V_1, V_2, \ldots, V_n \subseteq V$ תמ"וים כך ש-$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$.
כל אחד מהתנאים הבאים שקול לכך ש-$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$:

1. לכל $v \in V$ קיימת הצגה יחידה מהצורה $\sum_{i=1}^{n} v_i$ כך ש-$v_i \in V_i$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.
2. החיתוך של כל תמ"ו בסדרה עם הסכום של השאר הוא מרחב האפס.
3. שרשור[7] בסיסים סדורים של כל אחד מתתי-המרחבים בסדרה הוא בת"ל.
4. מתקיים $\dim V = \sum_{i=1}^{n} \dim V_i$.

הוכחה. ■

.1

- $\Leftarrow$

נניח שלכל $v \in V$ קיימת הצגה יחידה כנ"ל ותהא $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ סדרת וקטורים כך ש-$0_V \neq v_i \in V_i$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.
נניח בשלילה שזוהי סדרה תלויה ליניארית ומכאן שיש לה צר"ל מתאפס לא טריוויאלי, א"כ יהיו $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ כך שלא כולם אפסים המקיימים:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i = 0_V$$

יהי $n \geq k \in \mathbb{N}$ כך ש-$a_k \neq 0$, א"כ ניתן להציג את v_k בשתי צורות:

$$\sum_{i=1}^{k-1} 0_V + v_k + \sum_{i=k+1}^{n} 0_V = v_k = \sum_{i=1}^{k-1} -\frac{a_i}{a_k} \cdot v_i + \sum_{i=k+1}^{n} -\frac{a_i}{a_k} \cdot v_i$$

בסתירה להנחה. מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה וזוהי סדרה בת"ל.

- $\Rightarrow$

נניח שהסכום הנ"ל אכן ישר ויהי $v \in V$, מהעובדה ש-$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$ נובע שאכן יש ל-v הצגה כנ"ל, נוכיח שהיא יחידה.
יהיו $v_1, v_2, \ldots, v_n, w_1, w_2, \ldots, w_n \in V$ כך ש-$v_i, w_i \in V_i$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ ומתקיים:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

$$\Rightarrow 0_V = v - v = \sum_{i=1}^{n} v_i - w_i$$

[7] שרשור של סדרות $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ו-$(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ הוא סדרה כגון $(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_n, c_1, c_2, \ldots, c_m)$.

נניח בשלילה שקיים $n \geq k \in \mathbb{N}$ כך ש-$v_k \neq w_k$ וממילא $v_k - w_k \neq 0_V$, יהי k כנ"ל.
יהיו $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$ כך ש-$0_V \neq u_i \in V_i$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ ובנוסף $u_i = v_i - w_i$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ כך ש-$v_i - w_i \neq 0_V$.
יהיו $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ כך ש-$a_i = 1$ אם $v_i - w_i \neq 0_V$ ו-$a_i = 0$ אם $v_i - w_i = 0_V$, מכאן שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i = \sum_{i=1}^{n} v_i - w_i = 0_V$$

אך זהו צר"ל מתאפס לא טריוויאלי שכן $a_k \neq 0$ בסתירה לכך ש-$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ בת"ל.
מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה - לא קיים $n \geq k \in \mathbb{N}$ כך ש-$v_k \neq w_k$, כלומר ההצגה של v אכן יחידה.

2.

- $\Leftarrow$

נניח שהחיתוך של כל תמ"ו בסדרה עם הסכום של האחרים הוא מרחב האפס ותהא $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ סדרת וקטורים כך ש-$0_V \neq v_i \in V_i$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.
סדרה זו מוכרחה להיות בת"ל משום שאחרת קיים $n \geq k \in \mathbb{N}$ כך ש-$v_k = -\left(\sum_{i=1}^{k-1} v_i + \sum_{i=k+1}^{n} v_i\right)$, כלומר v_k שייך לסכום של כל תתי-המרחבים מלבד V_k וזאת בסתירה להנחה ולכך ש-$v_k \neq 0_V$.

- $\Rightarrow$

נניח שהסכום הנ"ל הוא סכום ישר, יהי $n \geq k \in \mathbb{N}$ ויהא w וקטור בחיתוך של V_k עם הסכום של שאר תתי-המרחבים בסדרה, א"כ יהיו $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \in V$ כך ש-$v_i \in V_i$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ כך ש-$i \neq k$ ובנוסף מתקיים:

$$w = \sum_{i=1}^{k-1} v_i + \sum_{i=k+1}^{n} v_i$$

מכאן ש-w ניתן להצגה כסכום של וקטור אחד מכל תמ"ו בשתי צורות: זו שלעיל (נבחר את 0_V בתור הווקטור מ-V_k) וכמובן הצורה $w = \sum_{i=1}^{k-1} 0_V + w + \sum_{i=k+1}^{n} 0_V$.
מההנחה ומהסעיף הקודם נובע ששתי הצורות הללו הן למעשה צורה אחת, כלומר $v_i = 0_V$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ כך ש-$i \neq k$ ו-$w = 0_V$, מכאן שהחיתוך של V_k עם הסכום של שאר תתי-המרחבים הוא מרחב האפס.

3.

- $\Leftarrow$

נניח ששרשור בסיסים של כל תתי-המרחבים בסדרה הוא בת"ל, ממסקנה 4.2 נובע שכל שרשור בסיסים כזה גם פורש את V ולכן זהו בסיס של V.
ממשפט 3.4 נובע שלכל $v \in V$ קיימת הצגה יחידה כצר"ל של שרשור הבסיסים, ולכן יש לו גם הצגה יחידה כסכום של וקטור אחד מכל תמ"ו בסדרה, מפני שע"פ אותה טענה כל וקטור באחד מתתי-המרחבים ניתן להצגה בצורה יחידה כצר"ל של הבסיס המתאים, וממילא ע"פ סעיף 1 זהו סכום ישר.

- $\Rightarrow$

נניח שזהו אכן סכום ישר, מסעיף 1 נובע שכל וקטור במרחב ניתן להצגה באופן יחיד כסכום של וקטור אחד מכל תמ"ו וממשפט 3.4 נובע שבכל תמ"ו כל וקטור כזה ניתן להצגה באופן יחיד כצר"ל של הבסיס הסדור המתאים, מכאן שכל וקטור במרחב ניתן להצגה באופן יחיד כצר"ל של שרשור הבסיסים ולכן מאותו משפט (בכיוון ההפוך) נובע ששרשור הבסיסים הוא בסיס של V ובפרט בת"ל.

4. סעיף זה נובע ישירות מהסעיף הקודם: אם מדובר בסכום ישר אז שרשור הבסיסים של תתי-המרחבים בסדרה הוא בסיס של V ולכן הממד של V הוא סכום האורכים של כל הבסיסים הללו - כלומר סכום הממדים של תתי-המרחבים, מצד שני אם $\dim V = \sum_{i=1}^{n} \dim V_i$ אז שרשור הבסיסים הוא סדרה פורשת באורך הממד של V ולכן ממשפט 3.8 נובע שהיא גם בת"ל ולכן ע"פ הסעיף הקודם זהו סכום ישר.

4.2 ישריות

טענה 4.5. תהא $S \subseteq V$ ישריה ויהיו $W, U \subseteq V$ תתי-מרחבים ו-$v_1, v_2 \in V$ כך ש-$S = \{v_1\} + W$ וגם $S = \{v_2\} + U$, מתקיים $W = U$.

הוכחה. מהגדרה $v_1 \in S$ שכן $0_V \in W$, מכאן שקיים $u \in U$ כך ש-$v_1 = u + v_2$ וממילא $v_2 - v_1 = -u \in U$.
יהי $w \in W$, מכאן ש-$w + v_1 \in S$ ולכן קיים $u' \in U$ כך ש-$w + v_1 = u' + v_2$ וממילא $w = u' + v_2 - v_1 = u' - u \in U$.
א"כ $W \subseteq U$ ובאותה צורה ניתן להוכיח ש-$U \subseteq W$ (הטענה סימטרית לחלוטין), מכאן ש-$W = U$. ■

טענה 4.6. יהי $W \subseteq V$ תמ"ו ויהיו $v_1, v_2 \in V$, מתקיים $\{v_1\} + W = \{v_2\} + W$ אם"ם $v_1 - v_2 \in W$.

הוכחה. את הגרירה מימין לשמאל כבר הוכחנו כחלק מההוכחה של הטענה הקודמת, נוכיח כעת את הכיוון ההפוך.
נניח ש-$v_1 - v_2 \in W$ ויהי $u \in \{v_1\} + W$, א"כ קיים $w \in W$ כך ש-$u = v_1 + w$, מההנחה נובע שעבור אותו w מתקיים $w' := v_1 - v_2 + w \in W$ וממילא גם $u = v_1 + w = v_2 + w' \in \{v_2\} + W$. ■

טענה 4.7. תהא $S \subseteq V$ ישריה ויהיו $W \subseteq V$ ו-$v \in V$ כך ש-$S = \{v\} + W$, לכל $u \in S$ מתקיים $S = \{u\} + W$.

הוכחה. יהי $u \in S$ ויהי $w \in W$ כך ש-$u = v + w$, מכאן ש-$u - v = w$ וע"פ הטענה הקודמת (4.6) מתקיים $S = \{v\} + W = \{u\} + W$. ■

מסקנה 4.8. ישריה $S \subseteq V$ היא תמ"ו אם"ם $0_V \in S$.

מסקנה 4.9. תהיינה $S_1, S_2 \subseteq V$ ישריות בעלות מרחב כיוונים זהה, אם $S_1 \neq S_2$ אז $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

♣ מבחינה אינטואיטיבית זה ברור שישריות בעלות מרחב כיוונים זהה תהיינה שוות או זרות - אלו ישרים/מישורים מקבילים

טענה 4.10. תהיינה $S_1, S_2 \subseteq V$ ישריות ויהיו W ו-U מרחבי הכיוונים שלהן (בהתאמה), אם $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ אז גם $S_1 \cap S_2$ היא ישריה ומרחב הכיוונים שלה הוא $W \cap U$.

הוכחה. נניח ש-$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ ויהי $v \in S_1 \cap S_2$, מטענה 4.7 נובע כי $\{v\} + W \cap U \subseteq S_1$ וגם $\{v\} + W \cap U \subseteq S_2$ ולכן $\{v\} + W \cap U \subseteq S_1 \cap S_2$.
מצד שני ע"פ אותה טענה מתקיים $S_1 = \{v\} + W$ ו-$S_2 = \{v\} + U$, ולכן לכל $v' \in S_1 \cap S_2$ קיימים $w \in W$ ו-$u \in U$ כך ש-$v' = v + w$ ו-$v' = v + u$ וממילא אותם w ו-u שווים ובפרט נמצאים בחיתוך $W \cap U$, כלומר לכל $v' \in S_1 \cap S_2$ קיים $x \in W \cap U$ כך ש-$v' = v + x$ ומכאן ש-$S_1 \cap S_2 \subseteq \{v\} + W \cap U$ וממילא $\{v\} + W \cap U = S_1 \cap S_2$. ■