המספרים המרוכבים - טענות בלבד

אלגברה ליניארית (1) - 80134

מרצה: ערן נבו

מתרגלים: איתמר ישראלי ושני שלומי

סמסטר ב' תשפ"ב, האוניברסיטה העברית

-

אלגברה ליניארית (2) - 80135

מרצה: איתמר צביק

מתרגלים: גיל לבנה ויואב כהן

סמסטר א' תשפ"ג, האוניברסיטה העברית

-

פונקציות מרוכבות - 80519

מרצה: אילון לינדנשטראוס

מתרגל: שאול (שאולי) רגימוב

סמסטר א' תשפ"ד, האוניברסיטה העברית

-

נכתב ע"י שריה אנסבכר

תוכן העניינים

בדרך כלל לומדים על המספרים המרוכבים כבר בלינארית 1; למרות זאת בחרתי להביא את הנושא הזה רק בלינארית 2 מפני שבלינארית 1 אין שום דבר המייחד את שדה המספרים המרוכבים ביחס לשדות אחרים, ולעומת זאת בלינארית 2 הוא חלק מהותי מהקורס, סיבה נוספת היא שחלק קטן מהבנייה הפורמלית של המספרים המרוכבים מסתמך על ידע בסיסי מלינארית 1.

* * *

סיכומי קורס זה מוקדשים לאהרון כהן;
אהרון, הידיעה שתקרא את הסיכומים הללו דרבנה אותי לאורך כל הדרך.
בהצלחה!

* * *

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 בניית שדה המספרים המרוכבים

1.1 התחלה

טענה 1.1. $\mathbb{C}$ הוא שדה עם פעולות החיבור והכפל שהגדרנו.

1.2 הצמוד המרוכב והערך המוחלט

טענה 1.2. הצמדה היא פעולה כפלית וחיבורית, כלומר לכל $z,w\in\mathbb{C}$ מתקיים $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$ ו-$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$.

טענה 1.3. לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $\left|z\right|^{2}=z\cdot\overline{z}$.

מסקנה 1.4. לכל $0\neq z\in\mathbb{C}$ מתקיים:

$$z^{-1}=\frac{\overline{z}}{\left|z\right|^{2}}$$

משפט 1.5. הערך המוחלט הוא נורמה

לכל $z,w\in\mathbb{C}$ מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. חיוביות בהחלט - $0\leq z$ ובנוסף $\left|z\right|=0$ אם"ם $z=0$.
2. הומוגניות - $\left|z\cdot w\right|=\left|z\right|\cdot\left|w\right|$.
3. אי-שוויון המשולש - $\left|z+w\right|\leq\left|z\right|+\left|w\right|$.

2 ההצגה הקוטבית

2.1 התחלה

טענה 2.1. יהי $z:=r\cdot\text{cis}\left(\theta\right)\in\mathbb{C}$, מתקיים:

- $-z=r\cdot\text{cis}\left(\theta\pm\pi\right)$
- $\overline{z}=r\cdot\text{cis}\left(-\theta\right)$
- אם $z\neq0$ אז $z^{-1}=r^{-1}\cdot\text{cis}\left(-\theta\right)$

2.2 הקשר לכפל ולהעלאה בחזקה

טענה 2.2. יהיו $z:=r_1\cdot\text{cis}\left(\theta_1\right)\in\mathbb{C}$ ו-$w:=r_2\cdot\text{cis}\left(\theta_2\right)$, מתקיים:

$$z\cdot w=\left(r_1\cdot r_2\right)\cdot\text{cis}\left(\theta_1+\theta_2\right)$$

♣ כלומר מה שכפל במספר מרוכב $r\cdot\text{cis}\left(\theta\right)$ עושה הוא לסובב כל מספר מרוכב בזווית θ ולמתוח אותו פי r, זה לא אמור להפתיע אותנו משתי סיבות: בראש ובראשונה מפני שזו הייתה האינטואיציה שלנו לכפל כבר בהקדמה, ובנוסף מפני שראינו שכפל במספר מרוכב שקול לכפל במטריצת סיבוב ומתיחה.

♣ ההבנה שבהערה הקודמת גורמת לנו לחלק את המספרים המרוכבים לשלוש קבוצות:

1. מספרים שהרדיוס שלהם **גדול** ממש מ-1 - בנוסף לסיבוב הם **מותחים** את הרדיוס של המספר המורכב, כלומר **מגדילים** אותו ע"י כפל באותו הרדיוס.
   המספרים שבקבוצה זו הם אלו שמחוץ למעגל היחידה במישור המרוכב (לא כולל).
2. מספרים שהרדיוס שלהם **קטן** ממש מ-1 - בנוסף לסיבוב הם **מכווצים** את הרדיוס של המספר המורכב, כלומר **מקטינים** אותו ע"י כפל באותו הרדיוס.
   המספרים שבקבוצה זו הם אלו שבתוך מעגל היחידה במישור המרוכב (לא כולל).
3. מספרים שהרדיוס שלהם **שווה** ל-1 - מבצעים סיבוב בלבד, ללא מתיחה/כיווץ של המספר המרוכב.
   המספרים שבקבוצה זו הם אלו המהווים את מעגל היחידה במישור המרוכב.

♣ החלוקה שבהערה הקודמת נותנת לנו עוד קבוצה מיוחדת ב-$\mathbb{C}$ מלבד הממשיים והמדומים - הקבוצה החדשה היא מעגל היחידה המרוכב, וכך מבחינה גאומטרית הקבוצות המיוחדות במישור הן הצירים ומעגל היחידה.

מסקנה 2.3. יהיו $z:=r_1\cdot\text{cis}\left(\theta_1\right)\in\mathbb{C}$ ו-$0\neq w:=r_2\cdot\text{cis}\left(\theta_2\right)$, מתקיים:

$$\frac{z}{w}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\text{cis}\left(\theta_1-\theta_2\right)$$

מסקנה 2.4. משפט דה-מואבר[1]

יהי $0\neq z:=r\cdot\text{cis}\left(\theta\right)\in\mathbb{C}$, מתקיים (לכל $n\in\mathbb{Z}$):

$$z^n=r^n\cdot\text{cis}\left(n\cdot\theta\right)$$

♣ כמובן שהנוסחה תקפה גם עבור 0 בחזקה טבעית.

[1] ערך בוויקיפדיה: אברהם דה-מואבר

מסקנה 2.5. הוצאת שורש מרוכב באמצעות הצגה קוטבית

יהי $z := r \cdot \text{cis}\left(\theta\right) \in \mathbb{C}$ מתקיים (לכל $n \in \mathbb{N}$):

$$\{x \in \mathbb{C} \mid x^n = z\} = \left\{ \sqrt[n]{r} \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- ♣ כלומר קיימים בדיוק n מספרים מרוכבים המהווים שורש n-י של מספר מרוכב נתון שאינו 0, והם נתונים ע"י הנוסחה:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)$$

עבור $n > k \in \mathbb{N}_0$.

- ♣ מבחינה גאומטרית השורשים מהווים את קודקודיו של מצולע משוכלל בעל n צלעות, החסום ע"י מעגל שמרכזו בראשית הצירים ואורך הרדיוס שלו הוא $\sqrt[n]{r}$, כאשר אחד מהרדיוסים היוצאים אל הקודקודים יוצר זווית של $\frac{\theta}{n}$ רדיאנים עם החלק החיובי של ציר ה-x.

כדאי להוסיף המחשה.

- ♣ א"כ השורשים ה-n-יים של מספר ממשי $0 \neq a \in \mathbb{R}$ הם (כאשר $a > 0$):

$$\sqrt[n]{a},\ \sqrt[n]{a} \cdot \text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right),\ \sqrt[n]{a} \cdot \text{cis}\left(\frac{4\pi}{n}\right),\ \sqrt[n]{a} \cdot \text{cis}\left(\frac{6\pi}{n}\right), \ldots,\ \sqrt[n]{a} \cdot \text{cis}\left(\frac{2\left(n-1\right)\pi}{n}\right)$$

או (כאשר $a < 0$):

$$\sqrt[n]{|a|} \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{n}\right),\ \sqrt[n]{|a|} \cdot \text{cis}\left(\frac{3\pi}{n}\right),\ \sqrt[n]{|a|} \cdot \text{cis}\left(\frac{5\pi}{n}\right),\ \sqrt[n]{|a|} \cdot \text{cis}\left(\frac{7\pi}{n}\right), \ldots,\ \sqrt[n]{|a|} \cdot \text{cis}\left(\frac{\left(2n-1\right)\pi}{n}\right)$$

- ♣ בפרט מעניינים אותנו בהקשר זה המספרים הנקראים <u>שורשי היחידה</u> שהם השורשים ה-n-יים של 1, כלומר:

$$\left\{ \sqrt[n]{1} \cdot \text{cis}\left(\frac{2\pi k + 0}{n}\right) \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \text{cis}\left(2\pi \cdot \frac{k}{n}\right) \;\middle|\; n > k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

שורשי היחידה יוצרים מצולע משוכלל החסום ע"י מעגל היחידה שאחד מקודקודיו נמצא על החלק החיובי של ציר ה-x והוא 1 עצמו כמובן.

משפט 2.6. חוקי חזקות

יהיו $0 \neq z, w \in \mathbb{C}$ ו-$n, m \in \mathbb{Z}$, מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. $z^m \cdot z^n = z^{m+n}$
2. $\left(z^m\right)^n = z^{m \cdot n}$
3. $\left(z \cdot w\right)^n = z^n \cdot w^n$

- ♣ ההוכחה שראינו באינפי' 1 עבור חוקי חזקות במעריך שלם הסתמכה אך ורק על 9 אקסיומות השדה ולא על 4 האקסיומות הנוספות של שדה סדור ולפיכך היא תקפה גם כאן, מי שזה לא מספיק לו מוזמן להוכיח את חוקי החזקות באמצעות טענה 2.2 ומשפט דה-מואבר.

3 דוגמאות לפתרון משוואות מעל המרוכבים

דוגמה 3.1. ניתן להוכיח את **הזהויות הטריגונומטריות** של קוסינוס וסינוס של סכום זוויות[2] באמצעות התובנה הבאה:

- כפל במספר מרוכב שקול לכפל במטריצת סיבוב ומתיחה, אם המספר המרוכב נמצא על מעגל היחידה אז הכפל בו שקול למטריצת סיבוב בלבד.
- כפל מטריצות מקיים את חוק הקיבוץ, מכאן נובע שהכפלה במספר מרוכב אחד ואחריה הכפלה במספר מרוכב שני שקולה לכפל במספר המרוכב שהמטריצה המתאימה לו היא המטריצה המתאימה לסיבוב בסכום הזוויות ומתיחה במכפלת הרדיוסים (זהו נימוק **גאומטרי**); אם שני המספרים נמצאים על מעגל היחידה הכפל של שניהם שקול למטריצת הסיבוב בסכום הזוויות המתאימות להם.
- קיימת העתקה חח"ע ועל בין מספרים מרוכבים למטריצות הסיבוב והמתיחה המתאימות להם, מכאן שלכל $\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\text{cis}\left(\theta_1+\theta_2\right)=\text{cis}\left(\theta_1\right)\cdot\text{cis}\left(\theta_2\right)$$

- כל שוויון בין שני מספרים מרוכבים מגדיר שני שוויונות בין מספרים ממשיים, וזאת משום שההצגה הקרטזית של מספר מרוכב היא יחידה ולמעשה היא מהווה זוג סדור של מספרים ממשיים; מסיבה זו ניתן לקחת כל משוואה מעל המרוכבים ולהפוך אותה לשתי משוואות מעל הממשיים.

$$\Rightarrow \cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\cdot\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)=\left(\cos\theta_1+i\cdot\sin\theta_1\right)\cdot\left(\cos\theta_2+i\cdot\sin\theta_2\right)$$
$$\Rightarrow \cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\cdot\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)=\left(\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2-\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2\right)+i\cdot\left(\cos\theta_1\cdot\sin\theta_2+\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\theta_1+\theta_2\right)=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2-\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2$$
$$\Rightarrow \sin\left(\theta_1+\theta_2\right)=\cos\theta_1\cdot\sin\theta_2+\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \cos\left(\theta_1\pm\theta_2\right)&=\cos\theta_1\cdot\cos\left(\pm\theta_2\right)-\sin\theta_1\cdot\sin\left(\pm\theta_2\right)\\&=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2-\sin\theta_1\cdot\left(-\sin\theta_2\right)\\&=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2\mp\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2\\\Rightarrow \sin\left(\theta_1\pm\theta_2\right)&=\sin\theta_1\cdot\cos\left(\pm\theta_2\right)+\cos\theta_1\cdot\sin\left(\pm\theta_2\right)\\&=\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2+\cos\theta_1\cdot\left(-\sin\theta_2\right)\\&=\cos\theta_1\cdot\sin\theta_2\pm\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2\end{aligned}$$

[2] לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\sin\left(\alpha\pm\beta\right)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos\left(\alpha\pm\beta\right)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

♣ לכאורה רימיתי כאן, את הנוסחה $\text{cis}\left(\theta_1+\theta_2\right)=\text{cis}\left(\theta_1\right)\cdot\text{cis}\left(\theta_2\right)$ אני מכיר מטענה 2.2 ואותה הוכחנו באמצעות הזהויות הטריגונומטריות הנ"ל, זהו נימוק מעגלי!
אז זהו, שלא, הנימוק לכך שצריך להתקיים $\text{cis}\left(\theta_1+\theta_2\right)=\text{cis}\left(\theta_1\right)\cdot\text{cis}\left(\theta_2\right)$ הגיע מעולם אחר - מעולם הגאומטריה, שם ברור שלסובב פעם אחת ב-θ_1 רדיאנים ואח"כ לסובב ב-θ_2 רדיאנים שקול לסיבוב ב-$\theta_1+\theta_2$ רדיאנים, ומכיוון שהכפל במספר מרוכב הנמצא על מעגל היחידה שקול לסיבוב המישור השוויון $\text{cis}\left(\theta_1+\theta_2\right)=\text{cis}\theta_1\cdot\text{cis}\theta_2$ מוכרח להתקיים משום שאחרת נקבל סתירה למה שידוע לנו מן הגאומטריה.

♣ האמת היא שאין שום צורך במרוכבים בשביל הוכחה זו, ניתן לכתוב את אותה הוכחה בשפה של מטריצות סיבוב (וכך אכן עשינו בליניארית 1 כשעסקנו בהן); הסיבה האמיתית לכך שהבאתי את הדוגמה הזו כאן היא כדי להדגים את הרעיון שכל משוואה בנעלם אחד מעל המרוכבים היא שתי משוואות בשני נעלמים מעל הממשיים.

דוגמה 3.2. אין שום סיבה שפתרון **משוואה ריבועית** מעל המרוכבים יהיה שונה מפתרונה מעל הממשיים, בשני המקרים מדובר בשדות ואנו יודעים להוציא בהם שורש, אין צורך ביותר מזה; לפיכך ניחוש מושכל הוא שהפתרונות למשוואה הריבועית $ax^2+bx+c=0$ כאשר הוא $a,b,c\in\mathbb{C}$ ו-$a\neq0$ הם:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm d}{2a}$$

כאשר d הוא אחד משני המספרים המרוכבים המקיימים $d^2=b^2-4ac$ (ראינו כבר איך מוצאים d כנ"ל, שני המספרים הללו נגדיים ולכן אין זה משנה איזה מביניהם נבחר).

אין צורך לחזור כאן על כל ההוכחה מן ההתחלה מפני שהיא הסתמכה אך ורק על אקסיומות השדה ועל הקיום של d כנ"ל[3], וכפי שראינו ב-$\mathbb{C}$ בהכרח קיים d כנ"ל ולכן תמיד יש למשוואה ריבועית לפחות פתרון אחד ובנוסף אנחנו יודעים לומר שיש לה פתרון יחיד אם"ם $d=0$ וזה קורה אם"ם $b^2-4ac=0$.

[3] מי שבכל זאת רוצה לחזור על ההוכחה מוזמן לעיין בסופו של הקובץ "על פתרון משוואות ונוסחת השורשים".