נגזרות - הגדרות בלבד

חשבון אינפיניטסימלי (1) - 80131

מרצה: רז קופרמן

מתרגלים: אור יער ודניאל רוזנבלט

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

תוכן העניינים

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 הנגזרת

♣ אנחנו רוצים לדבר על **קצב השינוי** של פונקציה כתלות בקלט שלה, לשם ההמחשה אדבר על גרף המתאר מיקום של מכונית הנוסעת על כביש ישר (חד-ממדי) - במקרה כזה קצב השינוי הוא מה שאנחנו קוראים לו **מהירות** - אם המכונית עברה 180 ק"מ ב-3 שעות אנחנו אומרים ש**המהירות הממוצעת** שלה בשלוש השעות הללו הייתה 60 קמ"ש. למה אנחנו לא אומרים ש**המהירות** של המכונית ב-3 השעות הללו הייתה 60 קמ"ש? אני חושב שהתשובה ברורה - ייתכן שהמהירות של המכונית השתנתה במהלך הנסיעה, אנחנו יודעים רק את המיקום שלה בשתי נקודות זמן המרוחקות זו מזו ב-3 שעות. טוב, אז למה אנחנו מתכוונים כשאנחנו אומרים "**מהירות**"? אי אפשר לומר שכוונתנו למרחק שעברה המכונית בשעה אחת מפני שהבחירה ביחידת המידה "שעה" כדי למדוד זמן הייתה שרירותית.

כאן אנחנו מגיעים לנקודה עדינה: מה שאנחנו מדברים עליו הוא **מהירות רגעית** - המהירות של המכונית בנקודת זמן אחת; לכאורה מדובר באוקסימורון, מהירות באה למדוד את קצב השינוי ושינוי יכול להתרחש רק בין שתי נקודות זמן שונות! ובכן, כעת אנחנו עוסקים במתמטיקה ולא במטאפיזיקה, לכן לא אענה על השאלה הזו[1] אבל אני כן רוצה לשכנע אתכם שאתם אכן מאמינים בקיומה של מהירות רגעית: אם נצייר את הגרף של מיקום המכונית כתלות בזמן אז השיפוע של המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת מעיד על **קצב השינוי** של המיקום כתלות בזמן בנקודה זו - ככל שהשיפוע גדול יותר אז המכונית תנוע מרחק גדול ביותר בזמן קצר יותר ולהפך, כמו כן אם השיפוע שלילי אז המכונית נוסעת אחורה. נקודה נוספת שמראה שאנחנו אכן מאמינים בקיום של מהירות רגעית מופיעה בסוף הפסקה הקודמת: שאלתי למה דיברנו על **מהירות ממוצעת** ועניתי שייתכן ש**המהירות** של המכונית יכולה להשתנות במהלך הנסיעה, אבל מהי אותה מהירות שיכולה להשתנות? היא לא יכולה להיות רק מהירות ממוצעת בפרקי זמן קצרים יותר מפני שתשובה זו מחזירה אותנו לאותה נקודה[2], אין מנוס מלדבר על מהירות רגעית.

הגדרה 1.1. לכל פונקציה $f:A\to B$ המוגדרת בסביבה של $a\in\mathbb{R}$, נגדיר את הפונקציה $\Delta_{f,a}:A\backslash\{a\}\to\mathbb{R}$ כך (לכל $a\neq t\in A$):
$$\Delta_{f,a}\left(t\right):=\frac{f\left(t\right)-f\left(a\right)}{t-a}$$

♣ כלומר $\Delta_{f,a}$ מחזירה את השיפוע של הישר המוגדר ע"י הנקודות $\left(a,f\left(a\right)\right)$ ו-$\left(t,f\left(t\right)\right)$, בשפה של המכונית הפונקציה $\Delta_{f,a}$ מחזירה את המהירות הממוצעת בין הנקודות t ו-a.

♣ ניתן להגדיר באופן שקול ע"י $\Delta_{f,a}\left(h\right):=\dfrac{f\left(a+h\right)-f\left(a\right)}{h}$ ואז בכל הגבולות שלהלן נצטרך לכתוב $\lim\limits_{h\to0}$ במקום $\lim\limits_{t\to a}$.

הגדרה 1.2. גזירות פונקציה בנקודה

נאמר שפונקציה f <u>גזירה בנקודה</u> $a\in\mathbb{R}$ אם ל-$\Delta_{f,a}$ יש גבול ב-a, נסמן את <u>הנגזרת</u> של f <u>בנקודה</u> a ע"י:
$$f'\left(a\right):=\lim_{t\to a}\Delta_{f,a}\left(t\right)$$

♣ **צריך להסביר למה מדובר בפירמול של האינטואיציה.**

♣ הגדרה זו היא הסיבה העיקרית לכך שהגדרנו את הגבול כך שאינו דורש שהפונקציה תהיה מוגדרת בנקודה אלא סביבה מנוקבת בלבד.

♣ אם פונקציה f גזירה על קטע[3] מסוים ניתן לדבר על פונקציית הנגזרת שלה f' באותו קטע, כמו כן אם f' מוגדרת בסביבה של a ניתן לדבר על <u>הנגזרת השנייה</u> של f <u>בנקודה</u> a שהיא הנגזרת של f' בנקודה a, וכך לגבי נגזרת שלישית וכן הלאה.

[1] התחמקות יפה, נכון? **הסיבה האמיתית לכך שלא אענה על השאלה היא שאין לי תשובה טובה.**
[2] אנחנו קוראים גם למהירות זו מהירות ממוצעת אלא שכעת אנו מדברים על פרקי זמן קצרים יותר.
[3] או סתם תת-קבוצה של $\mathbb{R}$.

סימון: נסמן את הנגזרת ה-n של פונקציה f בנקודה a (אם קיימת כזו) ב-$f^{(n)}(a)$, את הנגזרת השנייה מקובל לסמן גם ב-$f''(a)$ וכמו כן מקובל לסמן $f^{(0)}(a) := f(a)$.

הסכמה: נאמר שפונקציה f גזירה ברציפות (בכלל או בתחום מסוים) אם f' רציפה (בכלל או באותו התחום), כמו כן נאמר שפונקציה f גזירה ברציפות n פעמים (בכלל או בתחום מסוים) אם $f^{(i)}$רציפה (בכלל או באותו התחום) לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.

תזכורת: הסכמנו שבכל מקום שבו נכתב ביטוי מהצורה $L = \lim_{x\to a} f(x)$ או $\lim_{x\to a} f(x) = L$ הכוונה היא שהגבול קיים ומתקיים השוויון אלא אם נאמר אחרת בפירוש; הסכמה זו תקפה גם לגבי נגזרות שהרי הן גבולות, בכל מקום שבו נטען שנגזרת מקיימת טענה אנו טוענים שהנגזרת קיימת ומקיימת את הטענה.

הגדרה 1.3. גזירות חד-צדדית של פונקציה בנקודה

- נאמר שפונקציה f גזירה מימין בנקודה $a \in \mathbb{R}$ אם ל-$\Delta_{f,a}$ יש גבול ימני ב-a, נסמן את הנגזרת הימנית של f בנקודה a ע"י:

$$f'\left(a^{+}\right) := \lim_{t\to a^{+}} \Delta_{f,a}(t)$$

- נאמר שפונקציה f גזירה משמאל בנקודה $a \in \mathbb{R}$ אם ל-$\Delta_{f,a}$ יש גבול שמאלי ב-a, נסמן את הנגזרת השמאלית של f בנקודה a ע"י:

$$f'\left(a^{-}\right) := \lim_{t\to a^{-}} \Delta_{f,a}(t)$$

♣ מהגדרות אלו נובע כמעט מיד שפונקציה גזירה בנקודה אם"ם הנגזרות החד-צדדיות שלה בנקודה זו קיימות ושוות.

♣ נזהר שלא לבלבל בין $f'\left(a^{\pm}\right)$ לבין $\lim_{x\to a^{\pm}} f'(x)$.

הגדרה 1.4. פונקציה f תקרא גזירה אם היא גזירה בכל נקודה בתחום הגדרתה, כמו כן f תקרא גזירה בקטע פתוח $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ אם לכל $x \in (a,b)$ - f גזירה ב-x.

2 כללי גזירה

3 נגזרות של פונקציות אלמנטריות

אין הגדרות בפרקים אלו.

4 יחסי הגומלין בין פונקציה לנגזרתה

הגדרה 4.1. קמירות וקעירות[4]

- f תקרא <u>קמורה בקטע</u> $I\subseteq D$ אם לכל $a,b\in I$ ולכל $t\in[0,1]$ מתקיים $f\left(t\cdot a+\left(1-t\right)\cdot b\right)\leq t\cdot f\left(a\right)+\left(1-t\right)\cdot f\left(b\right)$.
- f תקרא <u>קעורה בקטע</u> $I\subseteq D$ אם לכל $a,b\in I$ ולכל $t\in[0,1]$ מתקיים $f\left(t\cdot a+\left(1-t\right)\cdot b\right)\geq t\cdot f\left(a\right)+\left(1-t\right)\cdot f\left(b\right)$.

♣ הרעיון מאחורי הפירמול הוא שגרף הפונקציה נמצא מעל/מתחת לישר המחבר בין $f\left(a\right)$ ל-$f\left(b\right)$.[5]
נסמן $x=b+t\cdot\left(a-b\right)$ נשים לב שמתקיים:

$$\begin{aligned}t\cdot f\left(a\right)+\left(1-t\right)\cdot f\left(b\right)&=f\left(b\right)+\left(f\left(a\right)-f\left(b\right)\right)\cdot t\\&=f\left(b\right)+\frac{f\left(a\right)-f\left(b\right)}{a-b}\cdot\left(x-b\right)\end{aligned}$$

ולכן זוהי המשוואה של הישר המחבר, ומתקיים:

$$\begin{aligned}f\left(t\cdot a+\left(1-t\right)\cdot b\right)&=f\left(b+\left(a-b\right)\cdot t\right)\\&=f\left(x\right)\end{aligned}$$

ולכן זהו גרף הפונקציה בנקודה המתאימה.

♣ הסיבה לכך שההגדרה הנ"ל היא המקובלת ולא זו שתוארה בהערה הקודמת היא שאנו רוצים להגדיר קמירות וקעירות גם עבור פונקציות במספר משתנים ($f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{m}$) וב-$\mathbb{R}^{n}$ אי אפשר להציג ישר באמצעות משוואה בודדת (כאשר $n>1$), לעומת זאת ההגדרה הנ"ל תקפה גם ב-$\mathbb{R}^{n}$ אלא שאז a ו-b אינם מספרים ממשיים אלא וקטורים ב-$\mathbb{R}^{n}$.

♣ נשים לב שפונקציה יכולה להיות גם קמורה וגם קעורה על אותו קטע שהרי מדובר בא"ש חלש, במקרה כזה הפונקציה בהכרח ליניארית על אותו קטע.

הגדרה 4.2. נקודת פיתול

נקודה $a\in D$ תקרא <u>נקודת פיתול</u> של f אם היא נקודה פנימית של D וקיים $0<h\in\mathbb{R}$ כך ש-f קמורה ב-$\left(a-h,a\right)$ וקעורה ב-$\left(a,a+h\right)$ או ש-f קעורה ב-$\left(a-h,a\right)$ וקמורה ב-$\left(a,a+h\right)$.

♣ באופן כללי זה אומר שנקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה מחליפה בין קמירות לקעירות, צריך רק לשים לב שזה לא אומר בהכרח שהפונקציה מפסיקה את הקמירות/הקעירות שהיתה קודם אלא רק מוסיפה את מה שאח"כ (לדוגמה בפונקציות ליניאריות כל הנקודות הן נקודות פיתול כאלה).

הגדרה 4.3. תהא f פונקציה, נקודה $a\in A$ תקרא <u>נקודה קריטית</u> של f אם $f'\left(a\right)=0$, $f\left(a\right)$ יקרא <u>ערך קריטי</u>.

הגדרה 4.4. תהא f פונקציה, נקודה $a\in\mathbb{R}$ תקרא <u>נקודה סינגולרית</u>[6] אם f אינה גזירה ב-a.

♣ בקובץ הטענות נראה שהנגזרת (אם היא קיימת) מתאפסת בנקודות קיצון ולכן הנקודות החשודות להיות נקודות קיצון של פונקציה הן: נקודות קריטיות, נקודות סינגולריות ונקודות קצה.

---

[4] הגדרה זו והבאה אחריה נלמדו באינפי' 2 (יורם לסט, סמסטר א' תשפ"ג).
[5] בניגוד למה שהיה ניתן לצפות, פונקציה היא **קמורה** אם גרף הפונקציה נמצא **מתחת** לישר המחבר בין הנקודה $\left(a,f\left(a\right)\right)$ (במישור הקרטזי) לנקודה $\left(b,f\left(b\right)\right)$ ו**קעורה** אם הוא נמצא **מעל** לישר, הסיבה לכך היא שמה שמעניין מתמטיקאים הוא האם קבוצת הנקודות ש**מעל** הגרף היא קבוצה קמורה/קעורה.
[6] הגדרה זו נלמדה באינפי' 2 (יורם לסט, סמסטר א' תשפ"ג).

5 כלל לופיטל

אין הגדרות בפרק זה.

6 פולינומי טיילור

♣ יש לנו בעיה, זה נחמד מאד לומר שהנגזרת של sin היא cos בכל נקודה ושהנגזרת של exp היא היא עצמה, אבל אין לנו מושג אלו ערכים הפונקציות הללו מקבלות בנקודות שאינן טריוויאליות (כגון π ו-0); למעשה הבעיה הזו לא קשורה בכלל לנגזרות - אין לנו מושג כמה שווה $\sin\left(1\right)$.
כאן בא לעזרתנו רעיון יפה: אנחנו יודעים לעבוד היטב עם פולינומים ולחשב את הערך שהם מקבלים בכל נקודה, מה אם נצליח למצוא פולינומים המקרבים את הפונקציות הללו (ואחרות) בכל רמת דיוק שנרצה?
אבל למה שזה יעבוד בכלל? כיצד יוכלו פולינומים לקרב פונקציות טריגונומטריות? מה הקשר?!?
דמיינו שאתם נוסעים במכונית, מה משפיע על המיקום שלה בכל רגע? - המיקום ההתחלתי שלה (הנגזרת ה-0-ית) והמהירות (הנגזרת הראשונה) שבה נסעה כל אחד מקטעי הדרך, ומה משפיע על המהירות בכל נקודה? - התאוצה (כלומר הנגזרת השנייה). אנחנו לא יכולים למצוא פולינום ש"יסכים" עם הפונקציה על כל הנגזרות בכל נקודה[7] אבל נוכל למצוא פולינום שיסכים איתה בנקודה אחת על כמות סופית של נגזרות באותה נקודה, מסיבה זו הפתרון אינו מושלם אך אנו נראה שהוא עדיין יעיל מאד ומאפשר לנו לחשב את הערכים שמקבלות פונקציות מסובכות באיזו רמת דיוק שנרצה.

הגדרה 6.1. פולינום טיילור[8] מסדר n של פונקציה בנקודה

תהא f פונקציה גזירה n פעמים בנקודה $a\in\mathbb{R}$. פולינום טיילור מסדר n של f בנקודה a הוא הפולינום/הפונקציה $P_{n,f,a}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדר/ת ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$P_{n,f,a}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{\left(k\right)}\left(a\right)}{k!}\cdot\left(x-a\right)^{k}$$

הגדרה 6.2. שארית מסדר n של פונקציה בנקודה

תהא f פונקציה גזירה n פעמים בנקודה $a\in\mathbb{R}$. השארית מסדר n של f בנקודה a היא הפונקציה $R_{n,f,a}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$R_{n,f,a}\left(x\right)=f\left(x\right)-P_{n,f,a}\left(x\right)$$

הגדרה 6.3. שוויון עד כדי סדר n של פונקציות בנקודה

תהיינה f ו-g פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של $a\in\mathbb{R}$, נאמר ש-f ו-g שוות עד כדי סדר n בנקודה a אם:

$$\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-g\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n}}=0$$

♣ מה ששוויון עד כדי סדר n בנקודה a אומר בעצם הוא ש-f קרובה ל-g ב-a יותר מש-$\left(x-a\right)^{n}$ קרובה ל-0 ב-a.

טענה 6.4. שוויון פונקציות עד כדי סדר n בנקודה הוא יחס שקילות.

[7] אחרת היינו מקבלים שהפולינום שווה לפונקציה שאינה פולינומית, בנוסף, אנחנו לא יודעים גם מה הן ערכי הנגזרות בנקודות שאינן טריוויאליות ולכן אפילו אם היה פולינום כזה לא היינו יכולים למצוא אותו מבלי להגיע למצב שכבר איננו זקוקים לו.
[8] ערך בוויקיפדיה: ברוק טיילור.