העתקות ליניאריות - הוכחות נבחרות

אלגברה ליניארית (1) - 80134

מרצה: ערן נבו

מתרגלים: איתמר ישראלי ושני שלומי

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

תוכן העניינים

1 התחלה **3**

2 גרעין ותמונה, הרכבה והפיכות **4**

3 המטריצה המייצגת **8**
3.1 התחלה 8
3.2 מטריצת מעבר בסיס 9

4 דמיון מטריצות **10**

5 נספחים **11**
5.1 הטלות ושיקופים 11
5.2 סיבובים 12
5.3 מרחב ההעתקות 14
5.4 מרחבי מנה 14
5.5 כפל סדרות וקטורים בווקטורים ממרחב הקואורדינטות ובמטריצות 14

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים מעל לשדה $\mathbb{F}$.

משפט 1.1. תכונות של העתקות ליניאריות

תהא $T:V\to W$ העתקה ליניארית, מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. $T\left(0_V\right)=0_W$.
2. לכל $v\in V$ מתקיים $T\left(-v\right)=-T\left(v\right)$.
3. T מכבדת צירופים ליניאריים - לכל $v_1,v_2,\ldots,v_n\in V$ ולכל $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ מתקיים $T\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot T\left(v_i\right)$.

הוכחה. מהיות T העתקה ליניארית נובע כי:

1. $T\left(0_V\right)=T\left(0\cdot 0_V\right)=0\cdot T\left(0_V\right)=0_W$.
2. לכל $v\in V$ מתקיים $T\left(-v\right)=T\left(-1\cdot v\right)=-1\cdot T\left(v\right)=-T\left(v\right)$.

כדי להוכיח את סעיף 3 יש להשתמש באינדוקציה על הגדרת העתקה ליניארית. ■

משפט 1.2. נניח ש-V נ"ס ויהי $\mathcal{B}:=\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)$ בסיס של V, לכל $w_1,w_2,\ldots,w_n\in W$ קיימת העתקה ליניארית $T:V\to W$ יחידה כך ש-$T\left(v_i\right)=w_i$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$.

♣ כלומר ניתן להגדיר העתקה ליניארית ע"י הגדרת פעולתה על איברי בסיס בלבד.

הוכחה. יהיו $w_1,w_2,\ldots,w_n\in W$ ונגדיר העתקה ליניארית $T:V\to W$ ע"י (לכל $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$):

$$T\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot w_i$$

ראינו שכל וקטור $v\in V$ ניתן להצגה באופן יחיד כצר"ל של $\mathcal{B}$ ולכן T מוגדרת היטב.
T היא העתקה ליניארית שכן לכל $u,u'\in V$ ולכל $c\in\mathbb{F}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}T\left(u+u'\right)&=T\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i+\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot v_i\right)=T\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\right)\cdot v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\right)\cdot w_i\\&=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot w_i+\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot w_i=T\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i\right)+T\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot v_i\right)=T\left(u\right)+T\left(u'\right)\\T\left(c\cdot u\right)&=T\left(c\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i\right)=T\left(\sum_{i=1}^{n}c\cdot a_i\cdot v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}c\cdot a_i\cdot w_i=c\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot w_i=c\cdot T\left(u\right)\end{aligned}$$

כאשר $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n$ הם הסקלרים היחידים ב-$\mathbb{F}$ המקיימים $u=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i$ ו-$u'=\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot v_i$.
היחידות של T נובעת מהעובדה ש-T מכבדת צירופים ליניאריים (משפט 1.1) ושכל וקטור $v\in V$ ניתן להצגה באופן יחיד כצר"ל של $\mathcal{B}$. ■

מסקנה 1.3. תהא $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ העתקה ליניארית, קיימת $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ יחידה כך ש-$T=T_A$.

♣ כבר ראינו שהעמודה ה-j של מטריצה $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ היא $T_A\left(e_j\right)=A\cdot e_j$ ולכן ניתן למצוא את המטריצה המתאימה ע"י הפעלת T על איברי הבסיס הסטנדרטי.

טענה 1.4. לכל $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים $\text{tr}(AB)=\text{tr}(BA)$.

הוכחה. מהגדרה מתקיים:

$$\begin{aligned}\text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n}[AB]_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}\cdot[B]_{ki}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}[A]_{ik}\cdot[B]_{ki}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}[B]_{ki}\cdot[A]_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{n}[BA]_{kk}=\text{tr}(BA)\end{aligned}$$

■

2 גרעין ותמונה, הרכבה והפיכות

יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים מעל לשדה $\mathbb{F}$, ותהא $T:V\to W$ העתקה ליניארית.

טענה 2.1. הגרעין והתמונה של T הם תתי-מרחבים של V ו-W בהתאמה.

תזכורת: עבור פונקציה $f:A\to B$ ותת-קבוצה $S\subseteq B$ אנו מגדירים $f^{-1}(S):=\{a\in A\mid f(a)\in S\}$, גם אם f אינה הפיכה.

טענה 2.2. לכל תמ"ו $U\subseteq W$ גם $T^{-1}(U)$ הוא תמ"ו (של V), כמו כן לכל ישריה $S\subseteq W$ הקבוצה $T^{-1}(S)$ היא ישריה או הקבוצה הריקה.

הוכחה.

- יהי $U\subseteq W$ תמ"ו.
  - ממשפט 1.1 ומהיות U תמ"ו נובע ש-$T(0_V)=0_W\in U$ ולכן $0_V\in T^{-1}(U)$.
  - יהיו $v_1,v_2\in T^{-1}(U)$, מכאן ש-$T(v_1),T(v_2)\in U$ ולכן מהיות U תמ"ו נובע ש-$T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)\in U$ וממילא $v_1+v_2\in T^{-1}(U)$.
  - יהיו $v\in T^{-1}(U)$ ו-$c\in\mathbb{F}$, מכאן ש-$T(v)\in U$ ולכן מהיות U תמ"ו נובע ש-$T(c\cdot v)=c\cdot T(v)\in U$ וממילא $c\cdot v\in T^{-1}(U)$.
- תהא $S\subseteq W$ ישריה, יהי $U\subseteq W$ מרחב הכיוונים שלה ונניח ש-$T^{-1}(S)\neq\emptyset$.
  יהי $v_0\in T^{-1}(S)$, א"כ $T(v_0)\in S$ ומכאן ש-$S=\{T(v_0)\}+U$.
  ראינו ש-$T^{-1}(U)$ הוא תמ"ו ולכן אם נוכיח ש-$T^{-1}(S)=\{v_0\}+T^{-1}(U)$ נקבל את המבוקש.
  יהי $v_1\in T^{-1}(S)$, א"כ $T(v_1)\in S$ ולכן $T(v_1-v_0)=T(v_1)-T(v_0)\in U$ וממילא $v_1-v_0\in T^{-1}(U)$ ו-$v_1\in\{v_0\}+T^{-1}(U)$.

$$\Rightarrow T^{-1}(S)\subseteq\{v_0\}+T^{-1}(U)$$

  יהי $v_2\in\{v_0\}+T^{-1}(U)$, א"כ $v_2-v_0\in T^{-1}(U)$ ולכן $T(v_2)-T(v_0)=T(v_2-v_0)\in U$ וממילא $T(v_2)\in S$ ו-$v_2\in T^{-1}(S)$.

$$\Rightarrow T^{-1}(S)\supseteq\{v_0\}+T^{-1}(U)$$
$$\Rightarrow T^{-1}(S)=\{v_0\}+T^{-1}(U)$$

■

טענה 2.3. T חח"ע אם"ם $\ker T=\{0_V\}$.

הוכחה.

- $\Leftarrow$
נניח ש-$\ker T\neq\{0_V\}$, ממשפט 1.1 נובע ש-$\ker T\supseteq\{0_V\}$ ולכן ע"פ ההנחה קיים $0_V\neq v\in V$ כך ש-$T(v)=0_W$ ומכיוון ש-$T(0_V)=0_W$ (משפט 1.1) נובע מזה ש-T אינה חח"ע.
מכאן שאם T חח"ע אז $\ker T=\{0_V\}$.

- $\Rightarrow$
נניח ש-$\ker T=\{0_V\}$ ויהיו $v_1,v_2\in V$ כך ש-$T(v_1)=T(v_2)$, מכאן ש-$T(v_1-v_2)=T(v_1)-T(v_2)=0_W$ וע"פ ההנחה $v_1-v_2=0_V$, כלומר $v_1=v_2$.
v_1 ו-v_2 הנ"ל היו שרירותיים ומכאן שלכל $v_1,v_2\in V$ כך ש-$T(v_1)=T(v_2)$ מתקיים $v_1=v_2$ - כלומר T חח"ע.

■

מסקנה 2.4. T חח"ע אם"ם לכל תת-קבוצה $S\subseteq V$ בת"ל גם $T(S)$ בת"ל.

הוכחה.

- $\Leftarrow$
נניח ש-T חח"ע ותהא $S\subseteq V$ תת-קבוצה בת"ל.
יהיו $w_1,w_2,\ldots,w_n\in T(S)$ ו-$a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ כך ש-$\sum_{i=1}^n a_i\cdot w_i=0_W$, ויהיו $v_1,v_2,\ldots,v_n\in S$ כך ש-$T(v_i)=w_i$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$.

$$\Rightarrow T\left(\sum_{i=1}^n a_i\cdot v_i\right)=\sum_{i=1}^n a_i\cdot T(v_i)=\sum_{i=1}^n a_i\cdot w_i=0_W$$

מההנחה ומהטענה האחרונה (2.3) נובע ש-$\sum_{i=1}^n a_i\cdot v_i=0_V$ ומכיוון ש-S בת"ל $a_i=0$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$; א"כ הצר"ל המתאפס היחיד של $T(S)$ הוא הטריוויאלי ולכן היא בת"ל.

- $\Rightarrow$
נניח ש-T אינה חח"ע, מטענה 2.3 נובע שקיים $0_V\neq v\in V$ כך ש-$T(v)=0_W$, יהי v כנ"ל.
הקבוצה $\{v\}$ היא קבוצה בת"ל אך הקבוצה $T(\{v\})=\{T(v)\}=\{0_W\}$ תלויה ליניארית,
מכאן שאם לכל תת-קבוצה $S\subseteq V$ בת"ל גם $T(S)$ בת"ל אז T חח"ע.

■

טענה 2.5. תהא $S\subseteq V$ תת-קבוצה, אם $T(S)$ בת"ל אז גם S בת"ל.

הוכחה. נניח ש-$T(S)$ בת"ל, יהיו $v_1,v_2,\ldots,v_n\in S$ ויהיו $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ כך ש-$\sum_{i=1}^n a_i\cdot v_i=0_V$.

$$\Rightarrow 0_W=T(0_V)=T\left(\sum_{i=1}^n a_i\cdot v_i\right)=\sum_{i=1}^n a_i\cdot T(v_i)$$

מהיות $T(S)$ בת"ל נובע ש-$a_i=0$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ ומכאן שגם S בת"ל. ■

טענה 2.6 תהא $S\subseteq V$ תת-קבוצה פורשת ($\text{span}S=V$), הקבוצה $T\left(S\right)$ פורשת את $\text{Im}T$ ($\text{span}T\left(S\right)=\text{Im}T$).

מסקנה 2.7. אם V נ"ס אז גם $\text{Im}T$ נ"ס.

מסקנה 2.8. נניח ש-V ו-W נ"ס, T חח"ע ועל אם"ם לכל בסיס $\mathcal{B}\subseteq V$ (של V) גם $T\left(\mathcal{B}\right)$ בסיס (של W).

טענה 2.9 לכל מטריצה $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ מתקיים $\text{rk}T_{A}=\text{rk}A$.

הוכחה. תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה, אנחנו יודעים שעמודות המטריצה הן התמונות של איברי הבסיס הסטנדרטי ולכן הן פורשות את $\text{Im}T_{A}$, א"כ $\text{Im}T_{A}$ הוא פרוש העמודות של A ולכן $\text{rk}A=\dim\left(\text{Im}T_{A}\right)$ ומכיוון שע"פ ההגדרה גם $\text{rk}T_{A}=\dim\left(\text{Im}T_{A}\right)$ הרי ש-$\text{rk}T_{A}=\text{rk}A$. ■

משפט 2.10. משפט הדרגה (משפט הממדים השני)

מתקיים:

$$\dim V=\dim\left(\ker T\right)+\dim\left(\text{Im}T\right)=\text{null}T+\text{rk}T$$

הוכחה. יהיו $v_{1},v_{2},\ldots,v_{k}\in V$ כך ש-$\mathcal{B}_{0}:=\left(v_{1},v_{2},\ldots,v_{k}\right)$ הוא בסיס סדור של $\ker T$, ויהיו $v_{k+1},v_{k+2},\ldots,v_{n}\in V$ כך ש-$\mathcal{B}:=\left(v_{1},v_{2},\ldots,v_{k},v_{k+1},v_{k+2},\ldots,v_{n}\right)$ הוא בסיס של V.

מטענה 2.6 נובע שהסדרה $\left(T\left(v_{1}\right),T\left(v_{2}\right),\ldots,T\left(v_{k}\right),T\left(v_{k+1}\right),T\left(v_{k+2}\right),\ldots,T\left(v_{n}\right)\right)$ פורשת את $\text{Im}T$, ומהגדרת $\mathcal{B}_{0}$ נובע שהסדרה $\mathcal{C}:=\left(T\left(v_{k+1}\right),T\left(v_{k+2}\right),\ldots,T\left(v_{n}\right)\right)$ פורשת את $\text{Im}T$.

יהיו $a_{k+1},a_{k+2},\ldots,a_{n}\in\mathbb{F}$ כך ש-$\sum_{i=k+1}^{n}a_{i}\cdot T\left(v_{i}\right)=0_{W}$ וממילא $T\left(\sum_{i=k+1}^{n}a_{i}\cdot v_{i}\right)=0_{W}$, א"כ $\sum_{i=k+1}^{n}a_{i}\cdot v_{i}\in\ker T$ ולכן מהגדרת $\mathcal{B}$ נובע ש-$a_{i}=0$ לכל $i\in\mathbb{N}$ כך ש-$k+1\leq i\leq n$.

כלומר הצר"ל המתאפס היחיד של $\mathcal{C}$ הוא הטריוויאלי ולכן $\mathcal{C}$ בת"ל וממילא גם בסיס של $\text{Im}T$.

$$\Rightarrow\dim\left(\text{Im}T\right)=n-k=\dim V-\dim\left(\ker T\right)$$
$$\Rightarrow\dim V=\dim\left(\ker T\right)+\dim\left(\text{Im}T\right)$$

■

מסקנה 2.11. אם V נ"ס ו-T חח"ע ועל אז W נ"ס ומתקיים $\dim V=\dim W$.

מסקנה 2.12. נניח ש-V נ"ס, מתקיימים ארבעת הפסוקים הבאים:

1. $\dim V\geq\dim\left(\text{Im}T\right)$.
2. אם T על אז $\dim V\geq\dim W$.
3. אם T חח"ע אז $\dim V=\dim\left(\text{Im}T\right)$ ומכאן שאם W נ"ס אז $\dim V\leq\dim W$.
4. נניח ש-W נ"ס וש-$\dim V=\dim W$, T על אם"ם היא חח"ע.

טענה 2.13. נניח שקיימת העתקה ליניארית הפיכה $S:V\to W$, גם ההופכית שלה $S^{-1}:W\to V$ היא העתקה ליניארית.

הוכחה. יהיו $w,w'\in W$ ו-$c\in\mathbb{F}$, ויהיו $v,v'\in V$ אותם וקטורים יחידים כך ש-$S\left(v\right)=w$ ו-$S\left(v'\right)=w'$.

$$\Rightarrow S^{-1}\left(w+w'\right)=S^{-1}\left(S\left(v\right)+\left(v'\right)\right)=S^{-1}\left(S\left(v+v'\right)\right)=v+v'=S^{-1}\left(w\right)+S^{-1}\left(w'\right)$$
$$\Rightarrow S^{-1}\left(c\cdot w\right)=S^{-1}\left(c\cdot S\left(v\right)\right)=S^{-1}\left(S\left(c\cdot v\right)\right)=c\cdot v=c\cdot S^{-1}\left(w\right)$$

מהיות w, w' ו-c שרירותיים נובע ש-S^{-1} היא העתקה ליניארית. ■

טענה 2.14. יהי U מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ותהא $S:W\to U$ העתקה ליניארית, גם $S\circ T$ היא העתקה ליניארית.

הוכחה. יהיו $v,v'\in V$ ו-$c\in\mathbb{F}$.

$$\Rightarrow\left(S\circ T\right)\left(v+v'\right)=S\left(T\left(v+v'\right)\right)=S\left(T\left(v\right)+T\left(v'\right)\right)=S\left(T\left(v\right)\right)+S\left(T\left(v'\right)\right)=\left(S\circ T\right)\left(v\right)+\left(S\circ T\right)\left(v'\right)$$
$$\Rightarrow\left(S\circ T\right)\left(c\cdot v\right)=S\left(T\left(c\cdot v\right)\right)=S\left(T\left(v\right)\right)=c\cdot S\left(T\left(v\right)\right)=c\cdot\left(S\circ T\right)\left(v\right)$$

■

טענה 2.15. יהי U מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ותהא $S:W\to U$ העתקות ליניאריות, מתקיים:

- אם T על אז $\text{rk}\left(S\circ T\right)=\text{rk}S$.
- אם S חח"ע אז $\text{rk}\left(S\circ T\right)=\text{rk}T$.

הוכחה.

- אם T על אז $\text{Im}\left(S\circ T\right)=\text{Im}S$ ולכן $\text{rk}\left(S\circ T\right)=\text{rk}S$.
- אם S חח"ע אז ממשפט הדרגה נובע ש-$\dim\left(\text{Im}\left(S\mid_{\text{Im}T}\right)\right)=\dim\left(\text{Im}T\right)=\text{rk}T$, ומכיוון ש-$\text{Im}\left(S\circ T\right)=\text{Im}\left(S\mid_{\text{Im}T}\right)$ נדע שמתקיים:

$$\text{rk}\left(S\circ T\right)=\dim\left(\text{Im}\left(S\circ T\right)\right)=\dim\left(\text{Im}\left(S\mid_{\text{Im}T}\right)\right)=\text{rk}T$$

■

3 המטריצה המייצגת

יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל לשדה $\mathbb{F}$, יהיו $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ בסיסים סדורים של V ו-W בהתאמה ותהא $T:V\to W$ העתקה ליניארית.

3.1 התחלה

טענה 3.1. תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ויהיו E_1 ו-E_2 הבסיסים הסטנדרטיים של $\mathbb{F}^n$ ו-$\mathbb{F}^m$ בהתאמה, מתקיים $[T_A]_{E_2}^{E_1}=A$.

טענה 3.2. נסמן $n:=\dim V$ ו-$m:=\dim W$ ותהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, קיימת ה"ל $S:V\to W$ יחידה כך ש-$[S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}=A$.

♣ בהינתן מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ נוכל למצוא את אותה S יחידה ע"י הפעלת $\tau_{\mathcal{C}}$ על כל אחת מעמודות A בנפרד ובכך למצוא לאן מעתיקה T את איברי $\mathcal{B}$ (מה שמגדיר ה"ל יחידה).

משפט 3.3. לכל $v\in V$ מתקיים:
$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\cdot[v]_{\mathcal{B}}=[T(v)]_{\mathcal{C}}$$

♣ משפט זה הוא הסיבה העיקרית לכך שהמטריצה המייצגת נקראת בשם זה.

הוכחה. נסמן $n:=\dim V$ ויהיו $v_1,v_2,\ldots,v_n\in V$ כך ש-$\mathcal{B}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$, כמו כן יהי $v\in V$ ונסמן את הקואורדינטה ה-i של $[v]_{\mathcal{B}}$ ב-a_i (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$).

מהגדרת המטריצה המייצגת ומהגדרת כפל מטריצה בווקטור נובע כי:
$$\begin{aligned}[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\cdot[v]_{\mathcal{B}}&=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot[T(v_i)]_{\mathcal{C}}=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\omega_{\mathcal{C}}(T(v_i))=\sum_{i=1}^{n}\omega_{\mathcal{C}}(a_i\cdot T(v_i))\\&=\sum_{i=1}^{n}\omega_{\mathcal{C}}(T(a_i\cdot v_i))=\omega_{\mathcal{C}}\left(\sum_{i=1}^{n}T(a_i\cdot v_i)\right)\\&=\omega_{\mathcal{C}}\left(T\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i\right)\right)=\omega_{\mathcal{C}}(T(v))=[T(v)]_{\mathcal{C}}\end{aligned}$$
■

מסקנה 3.4. יהי U מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$, יהי $\mathcal{A}$ בסיס סדור של U ותהא $S:W\to U$ העתקה ליניארית; מתקיים:
$$[S\circ T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}=[S]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}\cdot[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

מסקנה 3.5. נסמן $A:=[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, מתקיים:
$$T=\tau_{\mathcal{C}}\circ T_A\circ\omega_{\mathcal{B}}$$
$$T_A=\omega_{\mathcal{C}}\circ T\circ\tau_{\mathcal{B}}$$

מסקנה 3.6. מתקיים $\mathrm{rk}\,[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}=\mathrm{rk}T$.

הוכחה. נסמן $A:=[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, אנחנו יודעים ש-$\mathrm{rk}A=\mathrm{rk}T_A$ ולכן מספיק שנוכיח כי $\mathrm{rk}T_A=\mathrm{rk}T$.
אנחנו יודעים ש-$\omega_{\mathcal{B}},\omega_{\mathcal{C}},\tau_{\mathcal{B}},\tau_{\mathcal{C}}$ הן העתקות ליניאריות הפיכות (כלומר חח"ע ועל), ולכן מטענה 2.15 ומהמסקנה הקודמת (3.5) נובע ש-$\mathrm{rk}T_A=\mathrm{rk}T$.
■

מסקנה 3.7. שלושת הפסוקים הבאים שקולים.

- T הפיכה.
- **קיים** זוג בסיסים B ו-C (של V ו-W בהתאמה) כך ש-$[T]_C^B$ הפיכה.
- **לכל** זוג בסיסים B ו-C (של V ו-W בהתאמה) המטריצה $[T]_C^B$ הפיכה.

♣ נשים לב לכך שכל אחד מהתנאים דורש שיתקיים $\dim V = \dim W$.

3.2 מטריצת מעבר בסיס

מסקנה 3.8. תכונות של מטריצת מעבר בסיס
יהי $\mathcal{A}$ בסיס סדור של V ונסמן $n := \dim V$,

1. מתקיים $[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n$.
2. לכל $v \in V$ מתקיים $[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot [v]_{\mathcal{A}} = [v]_{\mathcal{B}}$.
3. יהי $\mathcal{D}$ בסיס סדור של V, מתקיים $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}} = [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}} \cdot [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.
4. מתקיים $[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = I_n$, כלומר אלו מטריצות הפיכות והופכיות זו לזו.
5. יהי $B := (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ בסיס סדור של $\mathbb{F}^k$ ונסמן ב-E את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$, $[\mathrm{Id}]_E^B$ היא מטריצה שהעמודה ה-j שלה היא b_j (לכל $k \geq j \in \mathbb{N}$).

♣ ראינו כבר שמטריצה הפיכה היא מטריצה שהעמודות שלה מהוות בסיס למרחב הקואורדינטות, כעת (לאחר שראינו את סעיפים 4 ו-5) אנו יכולים לומר שכל המטריצות ההפיכות הן מהצורה $[\mathrm{Id}]_E^B$ כאשר B הוא בסיס של מרחב הקואורדינטות המתאים ולכל אחת מהן המטריצה ההופכית היא $[\mathrm{Id}]_B^E$.

מסקנה 3.9. יהיו $\mathcal{B}'$ ו-$\mathcal{C}'$ בסיסים סדורים של V ו-W בהתאמה, מתקיים:

$$[T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}_W]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \cdot [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

♣ כלומר ניתן לעבור ממטריצה מייצגת אחת של העתקה ליניארית להצגה אחרת ע"י כפל במטריצות מעבר בסיס מתאימות.

מסקנה 3.10. תהא $f : V \to V$ העתקה לינארית ויהי $\mathcal{B}'$ בסיס סדור של V, מתקיים:

$$\begin{aligned}[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} &= [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \\ &= \left([\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\end{aligned}$$

4 דמיון מטריצות

יהי V מ"ו נ"ס מעל לשדה $\mathbb{F}$ ונסמן $n := \dim V$.

טענה 4.1. לכל בסיס $\mathcal{B}$ של V ולכל מטריצה הפיכה $P \in M_n(\mathbb{F})$, קיים בסיס יחיד $\mathcal{C}$ של V כך ש-$[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = P$.

הוכחה. לכל $\mathbb{N} \ni i \geq n$ נסמן $v_i := \tau_{\mathcal{B}}(c_i)$ כאשר c_i היא העמודה ה-i של P; סדרת העמודות של P היא בסיס של $\mathbb{F}^n$ ו-$\tau_{\mathcal{B}}$ היא העתקה ליניארית הפיכה, מכאן שע"פ מסקנה 2.8 הסדרה $\mathcal{C} := (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ היא בסיס סדור של V; מהגדרה מתקיים $[\text{Id}_V(v_i)]_{\mathcal{B}} = [v_i]_{\mathcal{B}} = c_i$ לכל $\mathbb{N} \ni i \geq n$ ומכאן ש-$[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = P$. א"כ הוכחנו את הקיום של בסיס כנ"ל, היחידות נובעת מההפיכות של $\omega_{\mathcal{B}}$ ומהעובדה שכל בסיס $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ כנ"ל מוכרח לקיים $[\text{Id}_V(w_i)]_{\mathcal{B}} = [w_i]_{\mathcal{B}} = c_i$. ■

מסקנה 4.2. תהא $f : V \to V$ העתקה ליניארית, לכל בסיס $\mathcal{B}$ של V ולכל מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש-$A \sim [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ קיים בסיס $\mathcal{C}$ של V כך ש-$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = A$.

מסקנה 4.3. תהא $f : V \to V$ העתקה ליניארית, לכל זוג בסיסים $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ של V מתקיים $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \sim [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$.

משפט 4.4. תכונות של מטריצות דומות

תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש-$A \sim B$, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $\text{rk}A = \text{rk}B$.
2. $\text{tr}A = \text{tr}B$.
3. $c \cdot A \sim c \cdot B$ לכל $c \in \mathbb{F}$.
4. לכל $c \in \mathbb{F}$ מתקיים $A + c \cdot I_n \sim B + c \cdot I_n$.
5. אם A היא מטריצה סקלרית[1] אז $A = B$.
6. $A^m \sim B^m$ לכל $m \in \mathbb{N}$.
7. אם $A^2 = A$ אז $B^2 = B$.[2]

- ♣ כשנלמד על הדטרמיננטה נראה שגם הדטרמיננטות של מטריצות דומות הן שוות.
- ♣ כל התכונות הללו יכולות לקבוע ששתי מטריצות **אינן** דומות (אם אחת התכונות אינה מתקיימת) אך אינן יכולות לומר ששתי מטריצות נתונות דומות זו לזו, בקורס הבא אנחנו נראה כיצד ניתן (בתנאים מסוימים) לקבוע באופן חד משמעי אם שתי מטריצות דומות זו לזו אם לאו.

הוכחה. תהא $P \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה כך ש-$A = P^{-1} \cdot B \cdot P$.

1. כשלמדנו על מטריצות ומרחבי קואורדינטות ראינו שכפל במטריצה הפיכה (הן מימין והן משמאל) אינו משנה את הדרגה.
2. מטענה 2.15 ומהקיבוץ של כפל מטריצות נובע שמתקיים:

$$\begin{aligned}\text{tr}(A) &= \text{tr}\left(P^{-1} \cdot (B \cdot P)\right) = \text{tr}\left((B \cdot P) \cdot P^{-1}\right) \\ &= \text{tr}\left(B \cdot \left(P \cdot P^{-1}\right)\right) = \text{tr}(B \cdot I_n) = \text{tr}(B)\end{aligned}$$

■

[1] כזכור A היא מטריצה סקלרית אם"ם קיים $c \in \mathbb{F}$ כך ש-$A = c \cdot I_n$.
[2] כלומר אם A מייצגת הטלה (בפרק הבא) אז גם B מייצגת הטלה.

5 נספחים

יהי V מרחב וקטורי מעל לשדה $\mathbb{F}$.

5.1 הטלות ושיקופים

נניח שניתן להציג את V כסכום ישר של שני תמ"וים שלו.

טענה 5.1. תהא $p:V\to V$ העתקה ליניארית, p היא הטלה אם"ם $p^2=p$.

הוכחה.

- $\Leftarrow$

נניח ש-p היא הטלה על תמ"ו $W\subseteq V$ ביחס לתמ"ו $U\subseteq V$ ‏($V=W\oplus U$) ויהי $v\in V$.
יהיו $w\in W$ ו-$u\in U$ אותם וקטורים יחידים המקיימים $v=w+u$, מהגדרה מתקיים:

$$p^2\left(v\right)=p\left(p\left(w+u\right)\right)=p\left(w\right)=w=p\left(v\right)$$

v הנ"ל היה שרירותי ומכאן שמתקיים $p^2\left(v\right)=p\left(v\right)$ לכל $v\in V$, כלומר $p^2=p$.

- $\Rightarrow$

נניח ש-$p^2=p$ ויהי $v'\in V$, נסמן $w':=p\left(v'\right)$ ו-$u':=v'-w'$ (מהגדרה $v'=w'+u'$).

$$\Rightarrow p\left(w'\right)=p^2\left(v'\right)=p\left(v'\right)$$
$$\Rightarrow p\left(u'\right)=p\left(v'-w'\right)=p\left(v'\right)-p\left(w'\right)=0_V$$

v' הנ"ל היה שרירותי ומכאן שניתן להציג כל וקטור ב-V כסכום של וקטור מ-$\mathrm{Im}p$ ווקטור מ-$\ker p$, א"כ $V=\mathrm{Im}p+\ker p$.
יהי $y\in\mathrm{Im}p\cap\ker p$ ויהי $x\in V$ כך ש-$p\left(x\right)=y$ (כאן השתמשנו בעובדה ש-$y\in\mathrm{Im}p$), א"כ מתקיים $y=p\left(x\right)=p^2\left(x\right)=p\left(y\right)=0_V$ (כאן השתמשנו בעובדה ש-$y\in\ker p$).

$$\Rightarrow \mathrm{Im}p\cap\ker p=\left\{0_V\right\}$$
$$\Rightarrow V=\mathrm{Im}p\oplus\ker p$$

מהעובדה ש-$p^2=p$ נובע גם ש-$p\mid_{\mathrm{Im}p}=\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}p}$ שכן לכל $y'\in\mathrm{Im}p$ ולכל $x'\in V$ כך ש-$y'=p\left(x'\right)$ מתקיים $y'=p\left(x'\right)=p^2\left(x'\right)=p\left(y'\right)$.
מכאן שעבור v' הנ"ל מתקיים $p\left(v'\right)=p\left(w'+u'\right)=p\left(w'\right)+p\left(u'\right)=w'+0_V=w'$ ומכיוון ש-v' היה שרירותי נובע מזה ש-p היא העתקה (נזכור ש-w' ו-u' הם אותם וקטורים יחידים המקיימים $w'\in\mathrm{Im}p$, $u'\in\ker p$ ו-$v'=w'+u'$).

■

משפט 5.2. תכונות של הטלות
תהא $p:V\to V$ הטלה על תמ"ו W במקביל לתמ"ו U ($V=W\oplus U$), מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

- Id_V-p היא ההטלה על U במקביל ל-W.
- נסמן ב-q את ההטלה על U במקביל ל-W, מתקיים $p+q=\text{Id}_V$.
- $p\circ q=0=q\circ p$.

הוכחה. יהי $v\in V$ ויהיו $w\in W$ ו-$u\in U$ אותם וקטורים יחידים המקיימים $v=w+u$.

$$\begin{aligned}&\Rightarrow(\text{Id}_V-p)(v)=\text{Id}_V(v)-p(v)=v-w=u\\&\Rightarrow(p+q)(v)=p(v)+q(v)=w+u=v\\&\Rightarrow(p\circ q)(v)=p(q(v))=p(u)=0_V\\&\qquad=q(w)=q(p(v))=(q\circ p)(v)\end{aligned}$$

v הנ"ל היה שרירותי ולכן הנ"ל מתקיים לכל $v\in V$ ובכך הוכחנו את שלושת הסעיפים. ■

טענה 5.3. כל שיקוף $r:V\to V$ הוא העתקה הפיכה ובנוסף הוא ההעתקה ההופכית של עצמו.

הוכחה. יהי $r:V\to V$ שיקוף דרך תמ"ו $W\subseteq V$ ובמקביל לתמ"ו $U\subseteq V$ ($V=W\oplus U$).
יהי $v\in V$ ויהיו $w\in W$ ו-$u\in U$ אותם וקטורים יחידים המקיימים $v=w+u$,

$$\Rightarrow(r\circ r)(v)=r(r(w+u))=r(w-u)=r(w+(-u))=w-(-u)=w+u=v=\text{Id}_V(v)$$

v הנ"ל היה שרירותי ומכאן ש-$r\circ r=\text{Id}_V$ ומהגדרה הפונקציה r הפיכה ו-$r^{-1}=r$. ■

5.2 סיבובים

טענה 5.4. כל מטריצת סיבוב היא מטריצה הפיכה וההופכית שלה היא מטריצת הסיבוב בזווית הנגדית, כלומר ההופכית של $R(\theta)$ היא $R(-\theta)$ (לכל θ).

הוכחה. מהגדרת כפל מטריצות ומטריגונומטריה בסיסית[3] נובע שלכל $\theta\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}R(\theta)\cdot R(-\theta)&=\begin{bmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos(-\theta)&-\sin(-\theta)\\\sin(-\theta)&\cos(-\theta)\end{bmatrix}\\&=\left[\begin{array}{c|c}\cos(\theta)\cdot\cos(-\theta)-\sin(\theta)\cdot\sin(-\theta)&\cos(\theta)\cdot(-\sin(-\theta))-\sin(\theta)\cdot\cos(-\theta)\\\hline\sin(\theta)\cdot\cos(-\theta)+\cos(\theta)\cdot\sin(-\theta)&\sin(\theta)\cdot(-\sin(-\theta))+\cos(\theta)\cdot\cos(-\theta)\end{array}\right]\\&=\left[\begin{array}{c|c}\cos(\theta)\cdot\cos(-\theta)-\sin(\theta)\cdot\sin(-\theta)&-\cos(\theta)\cdot\sin(-\theta)-\sin(\theta)\cdot\cos(-\theta)\\\hline\sin(\theta)\cdot\cos(-\theta)+\cos(\theta)\cdot\sin(-\theta)&\cos(\theta)\cdot\cos(-\theta)-\sin(\theta)\cdot\sin(-\theta)\end{array}\right]\\&=\begin{bmatrix}\cos(\theta+(-\theta))&-\sin(\theta+(-\theta))\\\sin(\theta+(-\theta))&\cos(\theta+(-\theta))\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(0)&-\sin(0)\\\sin(0)&\cos(0)\end{bmatrix}=R(0)=I_n\end{aligned}$$

■

[3] לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta\\\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta\end{aligned}$$

מסקנה 5.5. כל מטריצת סיבוב ומתיחה שאינה מטריצת האפס היא מטריצה הפיכה, וההופכית שלה היא מטריצת הסיבוב והמתיחה המהווה את מטריצת הסיבוב בזווית הנגדית כשהיא מוכפלת בסקלר ההופכי, כלומר המטריצה ההופכית של מטריצת סיבוב ומתיחה $c \cdot R(\theta)$ היא $c^{-1} \cdot R(-\theta)$ (לכל $c, \theta \in \mathbb{R}$ כך ש-$c \neq 0$).

טענה 5.6. יהיו $a, b \in \mathbb{R}$, המטריצה:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

היא מטריצת סיבוב ומתיחה, כלומר קיימים $c, \theta \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $a = c \cdot \cos\theta$ ו-$b = c \cdot \sin\theta$.

הוכחה. ע"פ משפט פיתגורס והגדרת cos ו-sin קיימת $\theta \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

תהא $\theta \in \mathbb{R}$ כנ"ל, א"כ מתקיים:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \cdot R(\theta)$$

■

♣ כמובן שגם הכיוון ההפוך נכון: כל מטריצת סיבוב ומתיחה היא מהצורה הנ"ל.

טענה 5.7. לכל שתי מטריצות סיבוב ומתיחה $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ מתקיים $A \cdot B = B \cdot A$, כלומר כפל מטריצות סיבוב ומתיחה מקיים את חוק החילוף.

הוכחה. יהיו $0 \leq a, b \in \mathbb{R}$ ו-$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ כך ש-$A = a \cdot R(\alpha)$ ו-$B = b \cdot (\beta)$, מהגדרת כפל מטריצות ומטריגונומטריה בסיסית נובע כי:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \left(a \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\right) \cdot \left(b \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\right) \\ &= a \cdot b \cdot \left[\begin{array}{c|c} \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta & \cos\alpha \cdot (-\sin\beta) - \sin\alpha \cdot \cos(\beta) \\ \hline \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta & \sin\alpha \cdot (-\sin\beta) + \cos\alpha \cdot \cos(\beta) \end{array}\right] \\ &= a \cdot b \cdot \left[\begin{array}{c|c} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \hline \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{array}\right] = a \cdot b \cdot \left[\begin{array}{c|c} \cos(\beta+\alpha) & \sin(\beta+\alpha) \\ \hline \sin(\beta+\alpha) & \cos(\beta+\alpha) \end{array}\right] \\ &= \left(b \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\right) \cdot \left(a \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\right) = B \cdot A \end{aligned}$$

■

מסקנה 5.8. קבוצת מטריצות הסיבוב והמתיחה היא שדה.

♣ למעשה מדובר בשדה מוכר למדי - זהו שדה המרוכבים!
לכל $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & -bd+ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & -(bc+ad) \\ bc+ad & ac-bd \end{bmatrix}$$

וגם: $(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc) \cdot i$.

5.3 מרחב ההעתקות

טענה 5.9. יהי W גם הוא מ"ו מעל $\mathbb{F}$, קבוצת ההעתקות הליניאריות $\text{Hom}\left(V,W\right)$, יחד עם פעולות החיבור והכפל בסקלר שלה[4], היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ (לכל מ"ו W מעל $\mathbb{F}$).

♣ כלומר סכום של העתקות ליניאריות וכפל העתקה ליניארית בסקלר הם העתקות ליניאריות, ובנוסף, מתקיימות 8 האקסיומות של מרחב וקטורי.

טענה 5.10. נניח ש-V נ"ס ויהי W גם הוא מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$, ונסמן $n:=\dim V$ ו-$m:=\dim W$.
יהיו $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ בסיסים של V ו-W בהתאמה ותהא $\omega_{\mathcal{B},\mathcal{C}}:\text{Hom}\left(V,W\right)\to M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ פונקציה המוגדרת ע"י $\omega_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\left(T\right):=\left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ (לכל ה"ל $T:V\to W$).
המרחבים $\text{Hom}\left(V,W\right)$ ו-$M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ איזומורפיים זה לזה ו-$\omega_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ היא איזומורפיזם ביניהם ובפרט היא העתקה ליניארית.

מסקנה 5.11. נניח ש-V נ"ס ויהי W גם הוא מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$, ונסמן $n:=\dim V$ ו-$m:=\dim W$.
מתקיים $\dim\left(\text{Hom}\left(V,W\right)\right)=\dim M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)=m\cdot n$.

5.4 מרחבי מנה

טענה 5.12. יהי $V\subseteq W$ תמ"ו, מחלקת השקילות של וקטור $v\in V$ ביחס ל-W היא הישרייה $\{v\}+W$.

♣ כלומר מה שיחס המנה עושה הוא "לפרוס" את המרחב V לפרוסות שכל אחת מהן היא ישרייה שמרחב הכיוונים שלה הוא W.

טענה 5.13. יהי $V\subseteq W$ תמ"ו, לכל $v,u\in V$ ולכל $c\in\mathbb{F}$ מתקיים $[v]+[u]=[v+u]$ ו-$c\cdot[v]=[c\cdot v]$.

מסקנה 5.14. יהי $V\subseteq W$ תמ"ו, קבוצת מחלקות השקילות (שתסומן ב-V/W), יחד עם פעולות החיבור והכפל בסקלר שלה, היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

טענה 5.15. העתקת המנה של תמ"ו $V\subseteq W$ היא פונקציה על וגרעינה הוא W.

מסקנה 5.16. יהי $V\subseteq W$ תמ"ו, לכל תמ"ו $V\subseteq U$ כך ש-$V=W\oplus U$ הצמצום של העתקת המנה ל-U הוא איזומורפיזם בין U ל-V/W.

מסקנה 5.17. נניח ש-V נ"ס ויהי $V\subseteq W$ תמ"ו, מתקיים $\dim V=\dim W+\dim V/W$.

5.5 כפל סדרות וקטורים בווקטורים ממרחב הקואורדינטות ובמטריצות

טענה 5.18. נניח ש-V נ"ס.

- לכל $v\in V$ ולכל בסיס סדור $\mathcal{B}$ (של V) מתקיים $v=\mathcal{B}\cdot[v]_{\mathcal{B}}$.
- לכל שני בסיסים סדורים $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ (של V) מתקיים $\mathcal{C}=\mathcal{B}\cdot[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.
- תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה ותהא $S:=\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)$ סדרת וקטורים ב-V, אם A אינה הפיכה אז $S\cdot A$ תלויה ליניארית.
- תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה, A הפיכה אם"ם **קיים** בסיס סדור $\mathcal{B}$ (של V) כך ש-$\mathcal{B}\cdot A$ בת"ל (וממילא $\mathcal{B}\cdot A$ בסיס).
- תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה, A הפיכה אם"ם **לכל** בסיס סדור $\mathcal{B}$ (של V) הסדרה $\mathcal{B}\cdot A$ בת"ל (וממילא $\mathcal{B}\cdot A$ בסיס).

[4] לכל $f,g:A\to\mathbb{F}$ הגדרנו את $f+g$ ע"י $\left(f+g\right)\left(x\right):=f\left(x\right)+g\left(x\right)$ (לכל $x\in\mathbb{F}$), ולכל $f:A\to\mathbb{F}$ ו-$c\in\mathbb{F}$ הגדרנו את $c\cdot f$ ע"י $\left(c\cdot f\right)\left(x\right):=c\cdot f\left(x\right)$.