המספרים המרוכבים - הוכחות נבחרות

אלגברה ליניארית (1) - 80134

מרצה: ערן נבו

מתרגלים: איתמר ישראלי ושני שלומי

סמסטר ב׳ תשפ״ב, האוניברסיטה העברית

-

אלגברה ליניארית (2) - 80135

מרצה: איתמר צביק

מתרגלים: גיל לבנה ויואב כהן

סמסטר א׳ תשפ״ג, האוניברסיטה העברית

-

פונקציות מרוכבות - 80519

מרצה: אילון לינדנשטראוס

מתרגל: שאול (שאולי) רגימוב

סמסטר א׳ תשפ״ד, האוניברסיטה העברית

-

נכתב ע״י שריה אנסבכר

תוכן העניינים

בדרך כלל לומדים על המספרים המרוכבים כבר בליניארית 1; למרות זאת בחרתי להביא את הנושא הזה רק בליניארית 2 מפני שבליניארית 1 אין שום דבר המייחד את שדה המספרים המרוכבים ביחס לשדות אחרים, ולעומת זאת בליניארית 2 הוא חלק מהותי מהקורס, סיבה נוספת היא שחלק קטן מהבנייה הפורמלית של המספרים המרוכבים מסתמך על ידע בסיסי מליניארית 1.

* * *

סיכומי קורס זה מוקדשים לאהרון כהן;
אהרון, הידיעה שתקרא את הסיכומים הללו דרבנה אותי לאורך כל הדרך.
בהצלחה!

* * *

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 בניית שדה המספרים המרוכבים

1.1 התחלה

טענה 1.1. $\mathbb{C}$ הוא שדה עם פעולות החיבור והכפל שהגדרנו.

הוכחה. יהיו $a+bi, c+di, e+fi \in \mathbb{C}$, נוכיח שהכפל שהוגדר בקובץ ההגדרות מקיים את חוקי החילוף והקיבוץ, שלכל איבר יש איבר הופכי ושהוא מקיים את חוק הפילוג ביחס לחיבור, את הסיבות לכך ש-$\mathbb{C}$ מקיים את שאר אקסיומות השדה כבר ראינו בקובץ ההגדרות.

לאורך כל ההוכחה נזכור שהחיבור והכפל של a,b,c,d,e,f הם חיבור וכפל ב-$\mathbb{R}$ ולכן קומוטטיביים, אסוציאטיביים ודיסטריבוטיביים (הכפל דיסטריבוטיבי ביחס לחיבור).

- מהגדרה מתקיים:

$$\begin{aligned}(a+bi)\cdot(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)\cdot i\\ &= (ca-db)+(da+cb)\cdot i = (c+di)\cdot(a+bi)\end{aligned}$$

ולכן הכפל מקיים את חוק החילוף.

- מהגדרה מתקיים:

$$\begin{aligned}((a+bi)\cdot(c+di))\cdot(e+fi) &= ((ac-bd)+(ad+bc)\cdot i)\cdot(e+fi)\\ &= ((ac-bd)+(ad+bc)\cdot i)\cdot(e+fi)\\ &= ((ac-bd)\cdot e-(ad+bc)\cdot f)+((ac-bd)\cdot f+(ad+bc)\cdot e)\cdot i\\ &= (ace-bde-adf+bcf)+(acf-bdf+ade+bce)\cdot i\\ &= (ace-bde-adf+bcf)+(acf-bdf+ade+bce)\cdot i\\ &= (a\cdot(ce-df)-b\cdot(cf+de))+(a\cdot(cf+de)+b\cdot(ce-df))\cdot i\\ &= (a+bi)\cdot((ce-df)+(cf+de)\cdot i)\\ &= (a+bi)\cdot((ce-df)+(cf+de)\cdot i)\\ &= (a+bi)\cdot((c+di)\cdot(e+fi))\end{aligned}$$

ולכן הכפל מקיים את חוק הקיבוץ.

- מהגדרה מתקיים:

$$\begin{aligned}(a+bi)\cdot((c+di)+(e+fi)) &= (a+bi)\cdot((c+e)+(d+f)\cdot i)\\ &= (a+bi)\cdot((c+e)+(d+f)\cdot i)\\ &= (a\cdot(c+e)-b\cdot(d+f))+(a\cdot(d+f)+b\cdot(c+e))\cdot i\\ &= ac+ae-bd-bf+ad\cdot i+af\cdot i+bc\cdot i+be\cdot i\\ &= ac+ae-bd-bf+ad\cdot i+af\cdot i+bc\cdot i+be\cdot i\\ &= (ac-bd)+(ae-bf)+(ad+bc)\cdot i+(af+be)\cdot i\\ &= ((ac-bd)+(ad+bc)\cdot i)+((ae-bf)+(af+be)\cdot i)\\ &= ((ac-bd)+(ad+bc)\cdot i)+((ae-bf)+(af+be)\cdot i)\\ &= (a+bi)\cdot(c+di)+(a+bi)\cdot(e+fi)\end{aligned}$$

ולכן הכפל מקיים את חוק הפילוג ביחס לחיבור.

• נניח ש-$a+bi \neq 0$, כלומר ש-$(a,b) \neq (0,0)$.
מהגדרה מתקיים:

$$\begin{aligned}(a+bi)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}\cdot i\right) &= (a+bi)\cdot\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right) = \frac{(a+bi)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{a\cdot a+bi\cdot a+a\cdot(-bi)+bi\cdot(-bi)}{a^2+b^2}\\ &= \frac{a^2+ab\cdot i+a\cdot(-1)\cdot bi+bi\cdot(-1)\cdot bi}{a^2+b^2} = \frac{a^2+ab\cdot i-ab\cdot i-b^2\cdot i^2}{a^2+b^2}\\ &= \frac{a^2-b^2\cdot(-1)}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1_{\mathbb{C}}\end{aligned}$$

ולכן לכל איבר שונה מ-0 יש הופכי.

■

♣ איך ידענו שדווקא המספר הנ"ל הוא ההופכי המבוקש? כאן בא לעזרתנו טריק הידוע בשם כפל בצמוד, הרעיון הוא כדלהלן.

נחזור לרגע אל הממשיים ונניח שבאמצע הוכחה כלשהי הגענו לביטוי מהצורה ($c>0$):

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}}$$

אנחנו אומרים לעצמנו "אוי ואבוי, שורש וחיבור לא עובדים טוב ביחד... איך נפשט את הביטוי הזה?!?[1] הלוואי שזה היה $b\cdot\sqrt{c}$!"

כעת מגיע המורה או חבר שכבר מכיר את הטריק, נוטל מאיתנו את העיפרון וכותב:

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a}{b+\sqrt{c}}\cdot\frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}} = \frac{a\cdot(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})} = \frac{a\cdot(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$$

גם כאן נתבקשנו למצוא את $\frac{1}{a+bi}$, והבעיה היא דומה מאד - חיבור של מספר ממשי עם שורש של מספר שלילי הוא ביטוי שקשה לעבוד איתו ואנחנו עדיין לא יודעים לחלק במספר מרוכב.
למזלנו מתקיים $i^2=-1$ ולכן אנחנו יכולים להפוך את המכנה לממשי:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

ולחלק במספר ממשי אנחנו כבר יודעים...

[1] הסיבה השכיחה ביותר לכך שנרצה לפשט את הביטוי היא יצירת מכנה משותף עם ביטוי אחר.

1.2 הצמוד המרוכב והערך המוחלט

טענה 1.2. הצמדה היא פעולה כפלית וחיבורית, כלומר לכל $z,w\in\mathbb{C}$ מתקיים $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$ ו-$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$.

הוכחה. יהיו $z:=a+bi\in\mathbb{C}$ ו-$w:=c+di$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overline{z+w}&=\overline{(a+c)+(b+d)\,i}\\&=(a+c)-(b+d)\,i\\&=(a-bi)+(c-di)\\&=\overline{z}+\overline{w}\\ \Rightarrow \overline{z\cdot w}&=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)\,i}\\&=(ac-bd)-(ad+bc)\,i\\&=(ac-(-b)(-d))+(a\cdot(-d)+(-b)\cdot c)\,i\\&=(a-bi)(c-di)\\&=\overline{z}\cdot\overline{w}\end{aligned}$$

■

טענה 1.3. לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|z|^2=z\cdot\overline{z}$.

הוכחה. יהי $z:=x+yi\in\mathbb{C}$, מהגדרה נובע ש-$\overline{z}=x-y\cdot i$.

$$\Rightarrow z\cdot\overline{z}=(x+y\cdot i)\cdot(x-y\cdot i)=x^2-(yi)^2=x^2-y^2\cdot i^2=x^2-y^2\cdot(-1)=x^2+y^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=|z|^2$$

■

מסקנה 1.4. לכל $0\neq z\in\mathbb{C}$ מתקיים:

$$z^{-1}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

משפט 1.5. הערך המוחלט הוא נורמה
לכל $z,w\in\mathbb{C}$ מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. חיוביות בהחלט - $0\leq z$ ובנוסף $|z|=0$ אם"ם $z=0$.
2. הומוגניות - $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$.
3. אי-שוויון המשולש - $|z+w|\leq|z|+|w|$.

הוכחה.

1. את הסעיף הראשון ראינו כבר בקובץ ההגדרות מפני שהוא נובע ישירות מן ההגדרה.
2. לכל $z,w\in\mathbb{C}$ מתקיים:

$$|z\cdot w|^2=(z\cdot w)\cdot(\overline{z\cdot w})=z\cdot w\cdot\bar{z}\cdot\bar{w}=z\cdot\bar{z}\cdot w\cdot\bar{w}=|z|^2\cdot|w|^2=(|z|\cdot|w|)^2$$

וממילא:

$$|z\cdot w|=\sqrt{|z\cdot w|^2}=\sqrt{(|z|\cdot|w|)^2}=|z|\cdot|w|$$

3. לכל $z,w\in\mathbb{C}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}|z+w|^2&=(z+w)\cdot\left(\overline{z+w}\right)=(z+w)\cdot(\bar{z}+\bar{w})=z\cdot\bar{z}+z\cdot\bar{w}+\bar{z}\cdot w+w\cdot\bar{w}\\&=|z|^2+z\cdot\bar{w}+\overline{z\cdot\bar{w}}+|w|^2=|z|^2+2\cdot\mathrm{Re}\,(z\cdot\bar{w})+|w|^2\\&\leq|z|^2+2\cdot|z\cdot\bar{w}|+|w|^2=|z|^2+2\cdot|z|\cdot|\bar{w}|+|w|^2\\&=|z|^2+2\cdot|z|\cdot|w|+|w|^2=(|z|+|w|)^2\end{aligned}$$

■

2 ההצגה הקוטבית

2.1 התחלה

טענה 2.1. יהי $z:=r\cdot\mathrm{cis}\,(\theta)\in\mathbb{C}$, מתקיים:

- $-z=r\cdot\mathrm{cis}\,(\theta\pm\pi)$
- $\bar{z}=r\cdot\mathrm{cis}\,(-\theta)$
- אם $z\neq0$ אז $z^{-1}=r^{-1}\cdot\mathrm{cis}\,(-\theta)$

הוכחה.

- נשים לב לכך שמתקיים:

$$\begin{aligned}\mathrm{cis}\,(\theta)+\mathrm{cis}\,(\theta\pm\pi)&=\cos\theta+i\cdot\sin\theta+\cos\,(\theta\pm\pi)+i\cdot\sin\,(\theta\pm\pi)\\&=\cos\theta+i\cdot\sin\theta-\cos\theta+i\cdot(-\sin\theta)=0\end{aligned}$$

ולכן גם:

$$r\cdot\mathrm{cis}\,(\theta)+r\cdot\mathrm{cis}\,(\theta\pm\pi)=r\cdot(\mathrm{cis}\,(\theta)+\mathrm{cis}\,(\theta\pm\pi))=r\cdot0=0$$

וממילא:

$$r\cdot\mathrm{cis}\,(\theta\pm\pi)=-r\cdot\mathrm{cis}\,(\theta)=-z$$

- מהגדרה מתקיים:

$$\mathrm{cis}\,(-\theta)=\cos\,(-\theta)+i\cdot\sin\,(-\theta)=\cos\theta-i\cdot\sin\theta=\overline{\cos\theta+i\cdot\sin\theta}=\overline{\mathrm{cis}\,(\theta)}$$

ולכן מהכפליות של פעולת ההצמדה נובע שגם:

$$r\cdot\mathrm{cis}\,(-\theta)=\bar{r}\cdot\mathrm{cis}\,(-\theta)=\bar{r}\cdot\overline{\mathrm{cis}\,(\theta)}=\overline{r\cdot\mathrm{cis}\,(\theta)}=\bar{z}$$

• נניח ש-$z\neq 0$, ממסקנה 1.4 ומהסעיף הקודם נובע שמתקיים:

$$z^{-1}=\frac{\overline{z}}{|z|^{2}}=\frac{r\cdot\text{cis}\left(-\theta\right)}{r^{2}}=\frac{1}{r}\cdot\text{cis}\left(-\theta\right)$$

■

2.2 הקשר לכפל ולהעלאה בחזקה

טענה 2.2. יהיו $z:=r_{1}\cdot\text{cis}\left(\theta_{1}\right)\in\mathbb{C}$ ו-$w:=r_{2}\cdot\text{cis}\left(\theta_{2}\right)$, מתקיים:

$$z\cdot w=\left(r_{1}\cdot r_{2}\right)\cdot\text{cis}\left(\theta_{1}+\theta_{2}\right)$$

♣ כלומר מה שכפל במספר מרוכב $r\cdot\text{cis}\left(\theta\right)$ עושה הוא לסובב כל מספר מרוכב בזווית θ ולמתוח אותו פי r, זה לא אמור להפתיע אותנו משתי סיבות: בראש ובראשונה מפני שזו הייתה האינטואיציה שלנו לכפל כבר בהקדמה, ובנוסף מפני שראינו שכפל במספר מרוכב שקול לכפל במטריצת סיבוב ומתיחה.

♣ ההבנה שבהערה הקודמת גורמת לנו לחלק את המספרים המרוכבים לשלוש קבוצות:

1. מספרים שהרדיוס שלהם **גדול** ממש מ-1 - בנוסף לסיבוב הם **מותחים** את הרדיוס של המספר המורכב, כלומר **מגדילים** אותו ע"י כפל באותו הרדיוס.
   המספרים שבקבוצה זו הם אלו שמחוץ למעגל היחידה במישור המרוכב (לא כולל).
2. מספרים שהרדיוס שלהם **קטן** ממש מ-1 - בנוסף לסיבוב הם **מכווצים** את הרדיוס של המספר המורכב, כלומר **מקטינים** אותו ע"י כפל באותו הרדיוס.
   המספרים שבקבוצה זו הם אלו שבתוך מעגל היחידה במישור המרוכב (לא כולל).
3. מספרים שהרדיוס שלהם **שווה** ל-1 - מבצעים סיבוב בלבד, ללא מתיחה/כיווץ של המספר המרוכב.
   המספרים שבקבוצה זו הם אלו המהווים את מעגל היחידה במישור המרוכב.

♣ החלוקה שבהערה הקודמת נותנת לנו עוד קבוצה מיוחדת ב-$\mathbb{C}$ מלבד הממשיים והמדומים - הקבוצה החדשה היא מעגל היחידה המרוכב, וכך מבחינה גאומטרית הקבוצות המיוחדות במישור הן הצירים ומעגל היחידה.

הוכחה. מהגדרת הכפל של מספרים מרוכבים ומהזהויות הטריגונומטריות של קוסינוס וסינוס של סכום זוויות[2] נובע כי:

$$\begin{aligned}\text{cis}\left(\theta_{1}\right)\cdot\text{cis}\left(\theta_{2}\right)&=\left(\cos\theta_{1}+i\cdot\sin\theta_{1}\right)\cdot\left(\cos\theta_{2}+i\cdot\sin\theta_{2}\right)\\&=\left(\cos\theta_{1}\cdot\cos\theta_{2}-\sin\theta_{1}\cdot\sin\theta_{2}\right)+i\cdot\left(\cos\theta_{1}\cdot\sin\theta_{2}+\sin\theta_{1}\cdot\cos\theta_{2}\right)\\&=\cos\left(\theta_{1}+\theta_{2}\right)+i\cdot\sin\left(\theta_{1}+\theta_{2}\right)=\text{cis}\left(\theta_{1}+\theta_{2}\right)\end{aligned}$$

וממילא:

$$z\cdot w=\left(r_{1}\cdot\text{cis}\left(\theta_{1}\right)\right)\cdot\left(r_{2}\cdot\text{cis}\left(\theta_{2}\right)\right)=\left(r_{1}\cdot r_{2}\right)\cdot\left(\text{cis}\left(\theta_{1}\right)\cdot\text{cis}\left(\theta_{2}\right)\right)=\left(r_{1}\cdot r_{2}\right)\cdot\text{cis}\left(\theta_{1}+\theta_{2}\right)$$

■

---

[2] לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha\pm\beta\right)&=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta\\\cos\left(\alpha\pm\beta\right)&=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta\end{aligned}$$

מסקנה 2.3. יהיו $z := r_1 \cdot \text{cis}(\theta_1) \in \mathbb{C}$ ו-$0 \neq w := r_2 \cdot \text{cis}(\theta_2)$, מתקיים:

$$\frac{z}{w} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

מסקנה 2.4. משפט דה-מואבר[3]

יהי $0 \neq z := r \cdot \text{cis}(\theta) \in \mathbb{C}$, מתקיים (לכל $n \in \mathbb{Z}$):

$$z^n = r^n \cdot \text{cis}(n \cdot \theta)$$

♣ כמובן שהנוסחה תקפה גם עבור 0 בחזקה טבעית.

מסקנה 2.5. הוצאת שורש מרוכב באמצעות הצגה קוטבית

יהי $z := r \cdot \text{cis}(\theta) \in \mathbb{C}$ מתקיים (לכל $n \in \mathbb{N}$):

$$\{x \in \mathbb{C} \mid x^n = z\} = \left\{ \sqrt[n]{r} \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

♣ כלומר קיימים בדיוק n מספרים מרוכבים המהווים שורש n-י של מספר מרוכב נתון שאינו 0, והם נתונים ע"י הנוסחה:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)$$

עבור $n > k \in \mathbb{N}_0$.

♣ מבחינה גאומטרית השורשים מהווים את קודקודיו של מצולע משוכלל בעל n צלעות, החסום ע"י מעגל שמרכזו בראשית הצירים ואורך הרדיוס שלו הוא $\sqrt[n]{r}$, כאשר אחד מהרדיוסים היוצאים אל הקודקודים יוצר זווית של $\frac{\theta}{n}$ רדיאנים עם החלק החיובי של ציר ה-x.

כדאי להוסיף המחשה.

♣ א"כ השורשים ה-n-יים של מספר ממשי $0 \neq a \in \mathbb{R}$ הם (כאשר $a > 0$):

$$\sqrt[n]{a},\ \sqrt[n]{a} \cdot \text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right),\ \sqrt[n]{a} \cdot \text{cis}\left(\frac{4\pi}{n}\right),\ \sqrt[n]{a} \cdot \text{cis}\left(\frac{6\pi}{n}\right), \ldots,\ \sqrt[n]{a} \cdot \text{cis}\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

או (כאשר $a < 0$):

$$\sqrt[n]{|a|} \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{n}\right),\ \sqrt[n]{|a|} \cdot \text{cis}\left(\frac{3\pi}{n}\right),\ \sqrt[n]{|a|} \cdot \text{cis}\left(\frac{5\pi}{n}\right),\ \sqrt[n]{|a|} \cdot \text{cis}\left(\frac{7\pi}{n}\right), \ldots,\ \sqrt[n]{|a|} \cdot \text{cis}\left(\frac{(2n-1)\pi}{n}\right)$$

♣ בפרט מעניינים אותנו בהקשר זה המספרים הנקראים <u>שורשי היחידה</u> שהם השורשים ה-n-יים של 1, כלומר:

$$\left\{ \sqrt[n]{1} \cdot \text{cis}\left(\frac{2\pi k + 0}{n}\right) \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \text{cis}\left(2\pi \cdot \frac{k}{n}\right) \;\middle|\; n > k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

שורשי היחידה יוצרים מצולע משוכלל החסום ע"י מעגל היחידה שאחד מקודקודיו נמצא על החלק החיובי של ציר ה-x והוא 1 עצמו כמובן.

[3] ערך בוויקיפדיה: אברהם דה-מואבר

הוכחה. העובדה שלכל $k\in\mathbb{Z}$ מתקיים:

$$\left(\sqrt[n]{r}\cdot\text{cis}\left(\frac{2\pi k+\theta}{n}\right)\right)^{n}=r\cdot\text{cis}\left(2\pi k+\theta\right)=r\cdot\text{cis}\left(\theta\right)$$

נובעת ישירות ממשפט דה-מואבר.
נוכיח שאין ל-z שורשים נוספים, אם $z=0$ אז הטענה טריוויאלית (בכל שדה יש ל-0 שורש n-י יחיד והוא 0) ולכן נוכל להניח ש-$z\neq 0$.
יהי $w:=\tilde{r}\cdot\text{cis}\left(\tilde{\theta}\right)\in\mathbb{C}$ כך ש-$w^n=z$, ממשפט דה-מואבר נובע שמתקיים:

$$\tilde{r}^{n}\cdot\text{cis}\left(n\cdot\tilde{\theta}\right)=w^{n}=z=r\cdot\text{cis}\left(\theta\right)$$

שוויון בין שני מספרים מרוכבים בהצגה קוטבית אומר שהרדיוסים שלהם שווים וגם הזוויות שלהם זהות (עד כדי הוספת כפולה של 2π), מכאן שמתקיים $\tilde{r}^n=r$ ו-$n\cdot\tilde{\theta}=\theta+2\pi k$ עבור $k\in\mathbb{Z}$ כלשהו.
מהגדרה r ו-$\tilde{r}$ הם מספרים ממשיים חיוביים ולכן מהשורה הקודמת נובע ש-$\tilde{r}=\sqrt[n]{r}$, בנוסף ניתן להסיק מהשורה הקודמת שקיים $k\in\mathbb{Z}$ כך שמתקיים:

$$\tilde{\theta}=\frac{\theta+2\pi k}{n}$$

כלומר w אכן שייך לקבוצה הנ"ל ולכן מהיותו שרירותי נובע שהיא כוללת את כל השורשים ה-n-יים של z. ■

משפט 2.6. חוקי חזקות
יהיו $0\neq z,w\in\mathbb{C}$ ו-$n,m\in\mathbb{Z}$, מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. $z^m\cdot z^n=z^{m+n}$
2. $\left(z^m\right)^n=z^{m\cdot n}$
3. $\left(z\cdot w\right)^n=z^n\cdot w^n$

♣ ההוכחה שראינו באינפי' 1 עבור חוקי חזקות במעריך שלם הסתמכה אך ורק על 9 אקסיומות השדה ולא על 4 האקסיומות הנוספות של שדה סדור ולפיכך היא תקפה גם כאן, מי שזה לא מספיק לו מוזמן להוכיח את חוקי החזקות באמצעות טענה 2.2 ומשפט דה-מואבר.

3 דוגמאות לפתרון משוואות מעל המרוכבים

דוגמה 3.1. ניתן להוכיח את **הזהויות הטריגונומטריות** של קוסינוס וסינוס של סכום זוויות[4] באמצעות התובנה הבאה:

- כפל במספר מרוכב שקול לכפל במטריצת סיבוב ומתיחה, אם המספר המרוכב נמצא על מעגל היחידה אז הכפל בו שקול למטריצת סיבוב בלבד.

- כפל מטריצות מקיים את חוק הקיבוץ, מכאן נובע שהכפלה במספר מרוכב אחד ואחריה הכפלה במספר מרוכב שני שקולה לכפל במספר המרוכב שהמטריצה המתאימה לו היא המטריצה המתאימה לסיבוב בסכום הזוויות ומתיחה במכפלת הרדיוסים (זהו נימוק **גאומטרי**); אם שני המספרים נמצאים על מעגל היחידה הכפל של שניהם שקול למטריצת הסיבוב בסכום הזוויות המתאימות להם.

- קיימת העתקה חח"ע ועל בין מספרים מרוכבים למטריצות הסיבוב והמתיחה המתאימות להם, מכאן שלכל $\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\text{cis}\left(\theta_1+\theta_2\right)=\text{cis}\left(\theta_1\right)\cdot\text{cis}\left(\theta_2\right)$$

- כל שוויון בין שני מספרים מרוכבים מגדיר שני שוויונות בין מספרים ממשיים, וזאת משום שההצגה הקרטזית של מספר מרוכב היא יחידה ולמעשה היא מהווה זוג סדור של מספרים ממשיים; מסיבה זו ניתן לקחת כל משוואה מעל המרוכבים ולהפוך אותה לשתי משוואות מעל הממשיים.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\cdot\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)=\left(\cos\theta_1+i\cdot\sin\theta_1\right)\cdot\left(\cos\theta_2+i\cdot\sin\theta_2\right)\\
&\Rightarrow \cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\cdot\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)=\left(\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2-\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2\right)+i\cdot\left(\cos\theta_1\cdot\sin\theta_2+\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \cos\left(\theta_1+\theta_2\right)&=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2-\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2\\
\Rightarrow \sin\left(\theta_1+\theta_2\right)&=\cos\theta_1\cdot\sin\theta_2+\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \cos\left(\theta_1\pm\theta_2\right)&=\cos\theta_1\cdot\cos\left(\pm\theta_2\right)-\sin\theta_1\cdot\sin\left(\pm\theta_2\right)\\
&=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2-\sin\theta_1\cdot\left(-\sin\theta_2\right)\\
&=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2\mp\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2\\
\Rightarrow \sin\left(\theta_1\pm\theta_2\right)&=\sin\theta_1\cdot\cos\left(\pm\theta_2\right)+\cos\theta_1\cdot\sin\left(\pm\theta_2\right)\\
&=\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2+\cos\theta_1\cdot\left(-\sin\theta_2\right)\\
&=\cos\theta_1\cdot\sin\theta_2\pm\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2
\end{aligned}$$

---

[4] לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\alpha\pm\beta\right)&=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta\\
\cos\left(\alpha\pm\beta\right)&=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta
\end{aligned}$$

♣ לכאורה רימיתי כאן, את הנוסחה $\mathrm{cis}\left(\theta_1+\theta_2\right)=\mathrm{cis}\left(\theta_1\right)\cdot\mathrm{cis}\left(\theta_2\right)$ אני מכיר מטענה 2.2 ואותה הוכחנו באמצעות הזהויות הטריגונומטריות הנ"ל, זהו נימוק מעגלי!
אז זהו, שלא, הנימוק לכך שצריך להתקיים $\mathrm{cis}\left(\theta_1+\theta_2\right)=\mathrm{cis}\left(\theta_1\right)\cdot\mathrm{cis}\left(\theta_2\right)$ הגיע מעולם אחר - מעולם הגאומטריה, שם ברור שלסובב פעם אחת ב-θ_1 רדיאנים ואח"כ לסובב ב-θ_2 רדיאנים שקול לסיבוב ב-$\theta_1+\theta_2$ רדיאנים, ומכיוון שהכפל במספר מרוכב הנמצא על מעגל היחידה שקול לסיבוב המישור השוויון $\mathrm{cis}\left(\theta_1+\theta_2\right)=\mathrm{cis}\left(\theta_1\right)\cdot\mathrm{cis}\left(\theta_2\right)$ מוכרח להתקיים משום שאחרת נקבל סתירה למה שידוע לנו מן הגאומטריה.

♣ האמת היא שאין שום צורך במרוכבים בשביל הוכחה זו, ניתן לכתוב את אותה הוכחה בשפה של מטריצות סיבוב (וכך אכן עשינו בליניארית 1 כשעסקנו בהן); הסיבה האמיתית לכך שהבאתי את הדוגמה הזו כאן היא כדי להדגים את הרעיון שכל משוואה בנעלם אחד מעל המרוכבים היא שתי משוואות בשני נעלמים מעל הממשיים.

דוגמה 3.2. אין שום סיבה שפתרון **משוואה ריבועית** מעל המרוכבים יהיה שונה מפתרונה מעל הממשיים, בשני המקרים מדובר בשדות ואנו יודעים להוציא בהם שורש, אין צורך ביותר מזה; לפיכך ניחוש מושכל הוא שהפתרונות למשוואה הריבועית $ax^2+bx+c=0$ כאשר הוא $a,b,c\in\mathbb{C}$ ו-$a\neq 0$ הם:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm d}{2a}$$

כאשר d הוא אחד משני המספרים המרוכבים המקיימים $d^2=b^2-4ac$ (ראינו כבר איך מוצאים d כנ"ל, שני המספרים הללו נגדיים ולכן אין זה משנה איזה מביניהם נבחר).
אין צורך לחזור כאן על כל ההוכחה מן ההתחלה מפני שהיא הסתמכה אך ורק על אקסיומות השדה ועל הקיום של d כנ"ל[5], וכפי שראינו ב-$\mathbb{C}$ בהכרח קיים d כנ"ל ולכן תמיד יש למשוואה ריבועית לפחות פתרון אחד ובנוסף אנחנו יודעים לומר שיש לה פתרון יחיד אם"ם $d=0$ וזה קורה אם"ם $b^2-4ac=0$.

[5] מי שבכל זאת רוצה לחזור על ההוכחה מוזמן לעיין בסופו של הקובץ "על פתרון משוואות ונוסחת השורשים".