פונקציות אנליטיות - טענות בלבד

פונקציות מרוכבות - 80519

מרצה: אילון לינדנשטראוס

מתרגל: שאול (שאולי) רגימוב

סוכם ע"י שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ד, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 נוסחת קושי ומסקנותיה

1.1 משפט האינטגרל של קושי ונוסחת קושי

סימון: לכל $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ נסמן $\Delta\left(z_1,z_2,z_3\right):=\left\{ \lambda_1\cdot z_1+\lambda_2\cdot z_2+\lambda_3\cdot z_3\mid\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\ \ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geq0\right\}$.

♣ זהו המשולש הסגור שקודקודיו הם z_1,z_2,z_3.

סימון: לכל $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ נסמן $T\left(z_1,z_2,z_3\right):=I\left(z_1,z_2\right)*I\left(z_2,z_3\right)*I\left(z_3,z_1\right)$.

הסכמה: יהיו z_1,z_2,z_3 שאינם נמצאים על ישר אחד[1], סימן האוריינטציה של $T\left(z_1,z_2,z_3\right)$ הוא הסימן של הדטרמיננטה

$$\det\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\left(z_2-z_1\right) & \mathrm{Re}\left(z_3-z_1\right)\\ \mathrm{Im}\left(z_2-z_1\right) & \mathrm{Im}\left(z_3-z_1\right)\end{pmatrix}$$

♣ דטרמיננטה חיובית אומרת שהיחס בין z_2-z_1 ל-z_3-z_1 הוא כמו היחס בין e_1 ל-e_2 ולכן הסדר $\left(z_1,z_2,z_3\right)$ הוא נגד כיוון השעון שהוא הכיוון המתמטי החיובי, אותו הדבר נכון בהיפוך כשהדטרמיננטה שלילית.

משפט 1.1. משפט האינטגרל של קושי למשולשים (הגרסה החלשה)

יהיו $f:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה אנליטית ו-$z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ כך ש-$\Delta\left(z_1,z_2,z_3\right)\subseteq\Omega$. מתקיים:

$$\int\limits_{T\left(z_1,z_2,z_3\right)}f\left(z\right)dz=0$$

♣ אם f בעלת פונקציה קדומה אז המשפט נובע מהמשפט היסודי ואין צורך שכל המשולש יוכל ב-Ω אלא מספיק שצלעותיו תהיינה מוכלות.

משפט 1.2. משפט האינטגרל של קושי למשולשים (הגרסה החזקה)

תהא $f:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה כך ש-f אנליטית בכל נקודה ב-Ω מלבד מספר סופי של נקודות, ויהיו $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ כך ש-$\Delta\left(z_1,z_2,z_3\right)\subseteq\Omega$. מתקיים:

$$\int\limits_{T\left(z_1,z_2,z_3\right)}f\left(z\right)dz=0$$

טענה 1.3. יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום כוכבי ביחס לנקודה $z_0\in\Omega$, ותהא $f:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה אנליטית.
תהא $F:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $w\in\Omega$):

$$F\left(w\right):=\int\limits_{I\left(z_0,w\right)}f\left(z\right)dz$$

לכל $w\in\Omega$ מתקיים $F'\left(w\right)=f\left(w\right)$, כלומר F אנליטית על Ω והיא קדומה של f.

[1] כלומר הקבוצה $\left\{ z_2-z_1,z_3-z_1\right\}$ היא בסיס של $\mathbb{R}^2$ (נסתכל על מספרים מרוכבים כווקטורים ב-$\mathbb{R}^2$).

משפט 1.4. יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום כוכבי ותהא $f:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה, אם f אנליטית בכל נקודה ב-Ω מלבד מספר סופי של נקודות אז יש ל-f קדומה על Ω. בפרט, לכל מסילה סגורה וגזירה למקוטעין $\gamma:[a,b]\to\Omega$ מתקיים:

$$\int\limits_{\gamma}f\left(z\right)dz=0$$

♣ בפרט לכל פונקציה אנליטית על קבוצה פתוחה וקמורה יש קדומה בקבוצה זו, ובפרט עבור כדור פתוח סביב נקודה - כלומר לכל פונקציה אנליטית יש קדומה מקומית בכל מקום[2].

סימון: לכל $z\in\mathbb{C}$ ו-$0<r\in\mathbb{R}$ נסמן ב-$C\left(z,R\right)$ את המסילה $C\left(z,r\right):[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ המוגדרת ע"י (לכל $\theta\in[0,2\pi]$):

$$C\left(z,r\right)\theta:=z+r\cdot\text{cis}\theta=z+r\cdot e^{i\theta}$$

טענה 1.5. לכל $w\in\mathbb{C}$ ולכל $0<r\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\int\limits_{C(w,r)}\frac{1}{z-w}\ dz=2\pi i$$

♣ באותה דרך ניתן להסיק שלכל $0\leq\theta\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\int\limits_{\gamma_{r,\theta}}\frac{1}{z-w}\ dz=\theta\cdot i$$

כאשר $\gamma_{r,\theta}:[0,\theta]\to\mathbb{C}$ היא המסילה המוגדרת ע"י $\gamma_{r,\theta}\left(t\right):=w+r\cdot e^{it}$ עבור $w\in\mathbb{C}$ ו-$0<r\in\mathbb{R}$ כלשהם.

מסקנה 1.6 תהא $f:\mathbb{C}^{*}\to\mathbb{C}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f\left(z\right):=\frac{1}{z}$ (לכל $z\in\mathbb{C}^{*}$), ל-f אין פונקציה קדומה.

♣ למעשה ניתן להסיק יותר מזה, ל-f הנ"ל אין קדומה באף סביבה מנוקבת של 0, כל מה שעלינו לעשות הוא לקחת מעגל קטן יותר סביב 0.

טענה 1.7. יהיו $z_{0}\in\mathbb{C}$ ו-$0<r\in\mathbb{R}$ ויהי $w\in\mathbb{C}$ כך ש-$|w-z_{0}|\neq r$, מתקיים:

$$\int\limits_{C(z_{0},r)}\frac{1}{z-w}\ dz=\begin{cases}0 & |w-z_{0}|>r\\2\pi i & |w-z_{0}|<r\end{cases}$$

משפט 1.8. נוסחת קושי

תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ויהיו $z_{0}\in\Omega$ ו-$0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$\hat{B}_{r}\left(z_{0}\right)\subseteq\Omega$, לכל $w\in B_{r}\left(z_{0}\right)$ מתקיים:

$$f\left(w\right)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{C(z_{0},r)}\frac{f\left(z\right)}{z-w}\ dz$$

♣ כלומר הערכים ש-f מקבלת על שפת המעגל קובעים אותה ביחידות בתוך המעגל - אין עוד פונקציה אנליטית אחרת שמקבלת את אותם הערכים על השפה אך מקבלת ערכים שונים בפנים.

[2] זה לא אומר שיש קדומה בכל מקום בכלל מפני שייתכן שהקדומות הללו שונות.

מסקנה 1.9. משפט הערך הממוצע של גאוס

תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ויהיו $z\in\Omega$ ו-$0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$\hat{B}_r\left(z\right)\subseteq\Omega$, מתקיים:

$$f\left(z\right)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_0^{2\pi}f\left(z+r\cdot e^{i\theta}\right)d\theta$$

♣ המשפט נקרא "משפט הערך הממוצע" משום שהוא אומר ש-$f\left(z\right)$ הוא ממוצע הערכים של f על המעגל.

מסקנה 1.10. תהא $f:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה אנליטית על התחום Ω ויהיו $z_0\in\Omega$ ו-$0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$\hat{B}_r\left(z_0\right)\subseteq\Omega$, לכל $n\in\mathbb{N}_0$ ולכל $w\in B_r\left(z_0\right)$ מתקיים:

$$f^{(n)}\left(w\right)=\frac{n!}{2\pi i}\cdot\int\limits_{C(z_0,r)}\frac{f\left(z\right)}{\left(z-w\right)^{n+1}}\,dz$$

בפרט f גזירה אין-סוף פעמים (לכל $n\in\mathbb{N}$ f גזירה n פעמים) וכל הנגזרות שלה אנליטיות על $B_r\left(z_0\right)$.

1.2 המסקנות מנוסחת קושי

משפט 1.11. משפט מורה (Morera)[3]

תהא f פונקציה רציפה על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, אם לכל $z_1,z_2,z_3\in\Omega$כך ש-$\Delta\left(z_1,z_2,z_3\right)\subseteq\Omega$ מתקיים:

$$\int\limits_{T(z_1,z_2,z_3)}f\left(z\right)dz=0$$

אז f אנליטית על Ω.

מסקנה 1.12. תהא f פונקציה רציפה בקבוצה פתוחה $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, אם f אנליטית בכל נקודה ב-Ω מלבד מספר סופי של נקודות אז f אנליטית על Ω.

מסקנה 1.13. תהא f פונקציה רציפה על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, f אנליטית ב-Ω אם"ם לכל מסילה סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין $\gamma:I\to\Omega$ מתקיים:

$$\int\limits_{\gamma}f\left(z\right)dz=0$$

מסקנה 1.14. תהא $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אנליטיות על תחום Ω המתכנסת במ"ש לפונקציה f בכל תת-קבוצה קומפקטית של Ω. f אנליטית על Ω ולכל $z\in\Omega$ ו-$k\in\mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$f^{(k)}\left(z\right)=\lim_{n\to\infty}{f_n}^{(k)}\left(z\right)$$

וסדרת הנגזרות $\left({f_n}^{(k)}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ל-$f^{(k)}$ על כל תת-קבוצה קומפקטית של Ω.

באופן דומה, יהי $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(z\right)$ טור פונקציות אנליטיות על תחום Ω המתכנס במ"ש לפונקציה S בכל תת-קבוצה קומפקטית של Ω. S אנליטית על Ω ולכל $z\in\Omega$ ו-$k\in\mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(z\right)\right)^{(k)}=S^{(k)}\left(z\right)=\sum_{n=1}^{\infty}{u_n}^{(k)}\left(z\right)$$

ו-$\sum\limits_{n=1}^{\infty}{u_n}^{(k)}\left(z\right)$ מתכנס במ"ש ל-$S^{(k)}$ על כל תת-קבוצה קומפקטית של Ω.

[3] ערך בוויקיפדיה האנגלית: Giacinto Morera.

♣ המשפט האחרון חזק הרבה יותר מהמשפט המקביל לו בממשיים שבו דרשנו מראש ש-$(f_n')_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש, הסיבה לכך היא שבעוד שבממשיים הנגזרת יכולה "להשתולל" גם אם הפונקציה המקורית חסומה ואפילו שואפת ל-0 באין-סוף, במרוכבים דרישת הגזירות חזקה הרבה יותר וכפי שכבר ראינו כל פונקציה אנליטית גזירה אין-סוף פעמים והנגזרות שלה נקבעות באופן מפורש לפי ערכיה.

♣ בגלל היותו של המשפט האחרון חזק כל כך נקבל תוצאה שנבצר ממנו לקבל בממשיים: כל פונקציה גזירה בסביבה של נקודה ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב אותה נקודה![4]

משפט 1.15. תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, תהא $z_0\in\Omega$ ויהי $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_r(z_0)\subseteq\Omega$.
לכל $z\in B_r(z_0)$ מתקיים:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot(z-z_0)^n$$

וההתכנסות של טור זה ל-f היא בהחלט במ"ש על כל תת-קבוצה קומפקטית של $B_r(z_0)$.

טענה 1.16. תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, לכל $z\in\Omega$ ולכל $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_r(z)\subseteq\Omega$ מתקיים (לכל $n\in\mathbb{N}_0$):

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\leq\frac{n!}{r^n}\cdot\max_{r\in[0,2\pi]}\left|f\left(z+r\cdot e^{i\theta}\right)\right|$$

משפט 1.17. משפט ליוביל[5]
כל פונקציה שלמה וחסומה היא פונקציה קבועה.

משפט 1.18. תהא f פונקציה שלמה, אם קיימים $C\in\mathbb{R}$ ו-$n\in\mathbb{N}$ המקיימים $|f(z)|\leq C\cdot(|z|^n+1)$ לכל $z\in\mathbb{C}$ אז f היא פונקציה פולינומיאלית שדרגתה היא n לכל היותר.

♣ ניתן להחליף את n בכל מספר $0<d\in\mathbb{R}$ ואז הדרגה של f קטנה או שווה ל-$\lfloor d\rfloor$.

משפט 1.19. המשפט היסודי של האלגברה
לכל פולינום ב-$\mathbb{C}[z]$ שאינו קבוע יש שורש מרוכב.

מסקנה 1.20. יהי $p\in\mathbb{C}[z]$ פולינום ונסמן $n:=\deg p$, קיימים $z_1,z_2,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$ כך שמתקיים:

$$p(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$$

למה 1.21. תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$, ל-f יש אפס מסדר $n\in\mathbb{N}$ בנקודה $z_0\in\Omega$ אם"ם קיים $0<r\in\mathbb{R}$ וקיימת פונקציה אנליטית $g:B_r(z_0)\to\mathbb{C}$ כך ש-$g(z_0)\neq 0$ ו-$f(z)=g(z)\cdot(z-z_0)^n$ לכל $z\in B_r(z_0)$.

♣ בפרט עבור פולינום $p\in\mathbb{C}[z]$, לכל שורש $z_0\in\mathbb{C}$ של p יש ל-p אפס מסדר n ב-z_0 כאשר n הוא הריבוי של השורש z_0.

משפט 1.22. יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה אנליטית, אם f אינה פונקציית האפס אז לכל $z\in Z(f)$ יש ל-f אפס מסדר סופי ב-z.[6]

מסקנה 1.23. יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה אנליטית, אם f אינה פונקציית האפס אז ל-$Z(f)$ אין נקודות הצטברות.

מסקנה 1.24. משפט היחידות
תהיינה f ו-g פונקציות אנליטיות על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, אם לקבוצה $\{z\in\Omega\mid f(z)=g(z)\}$ יש נקודת הצטברות אז $f(z)=g(z)$ לכל $z\in\Omega$.

[4] זו הסיבה שמראש קראנו לפונקציה כזו **אנליטית** בנקודה.
[5] ערך בוויקיפדיה: ז'וזף ליוביל.
[6] קיים $n\in\mathbb{N}$ כך שיש ל-f אפס מסדר n ב-z.

משפט 1.25. עקרון המקסימום
תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$.

1. אם ל-f יש מקסימום מקומי חלש אז f קבועה.
2. אם f לא קבועה אז $|f|$ אינה מקבלת מקסימום ב-Ω.
3. אם Ω חסום ו-f ניתנת להרחבה רציפה על $\overline{\Omega}$ אז $\left|\bar{f}\right|$[7] מקבלת מקסימום על $\partial\Omega$.

מסקנה 1.26. עקרון המינימום
תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$.

1. אם f אינה מתאפסת באף נקודה ב-Ω ויש לה מינימום מקומי חלש אז f קבועה.
2. אם ל-f יש מינימום מקומי חלש והיא אינה קבועה אז קיימת נקודה ב-Ω שבה f מתאפסת.
כמו כן אם f אינה מתאפסת באף נקודה ב-Ω והיא אינה קבועה אז $|f|$ אינה מקבלת מינימום ב-Ω.
3. אם Ω חסום ו-f פונקציה הניתנת להרחבה רציפה על $\overline{\Omega}$ אז $\left|\bar{f}\right|$ מקבלת מינימום על $\partial\Omega$ ו/או קיימת נקודה ב-Ω שבה f מתאפסת.

מסקנה 1.27. תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ שאינה קבועה וניתנת להרחבה רציפה על $\overline{\Omega}$, אם קיים $z\in\Omega$ כך שלכל $w\in\partial\Omega$ מתקיים $\left|\bar{f}(w)\right|\leq|f(z)|$ אז קיימת נקודה ב-Ω שבה f מתאפסת.

משפט 1.28. תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, אם f אינה קבועה אז ל-$\text{Re}f$ ול-$\text{Im}f$ אין מקסימום מקומי חלש ב-Ω.

משפט 1.29. עקרון Phragmén–Lindelöf[8]
נסמן $\Omega:=\left\{z\in\mathbb{C}:|\text{Re}(z)|<\frac{1}{2}\right\}$ ותהא f פונקציה אנליטית על Ω הניתנת להרחבה רציפה על $\overline{\Omega}$ ומקיימת $\left|f\left(\pm\frac{1}{2}+iy\right)\right|\leq 1$ לכל $y\in\mathbb{R}$. אם קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $z\in\Omega$ מתקיים $|f(z)|\leq M$ אז $|f(z)|\leq 1$ לכל $z\in\Omega$.

2 לוגריתמים וארגומנטים

טענה 2.1. תהא f פונקציה רציפה; אם פונקציה g היא לוגריתם רציף של f אז $\text{Im}g$ היא ארגומנט רציף של f, ואם פונקציה θ היא ארגומנט רציף של f אז $\ln|f|+i\theta$ היא לוגריתם רציף של f.

מסקנה 2.2. לפונקציה רציפה יש לוגריתם רציף אם"ם יש לה ארגומנט רציף.

טענה 2.3. תהא $A\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה קשירה ותהא $f:A\to\mathbb{C}$ פונקציה בעלת לוגריתמים רציפים g_1 ו-g_2 ובעלת ארגומנטים רציפים θ_1 ו-θ_2. קיימים $l,k\in\mathbb{Z}$ כך שלכל $z\in A$ מתקיים $g_1(z)-g_2(z)=2\pi ik$ ו-$\theta_1(z)-\theta_2(z)=2\pi l$.

טענה 2.4. תהא $A\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה קשירה ותהא $f:A\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה בעלת לוגריתם רציף g ובעלת ארגומנט רציף θ, לכל $z,w\in A$ מתקיים:
$$g(z)-g(w)=(\ln|f(z)|-\ln|f(w)|)+i\cdot(\theta(z)-\theta(w))$$

משפט 2.5. לכל קטע סגור $I\subseteq\mathbb{R}$ ולכל מסילה $\gamma:I\to\mathbb{C}^*$[9] יש לוגריתם רציף (וממילא גם ארגומנט רציף).

[7] $\bar{f}$ היא ההרחבה הרציפה של f ל-$\overline{\Omega}$ ו-$\left|\bar{f}\right|$ היא הפונקציה המתקבלת ע"י הרכבת הערך המוחלט על $\bar{f}$.
[8] ערכים בוויקיפדיה האנגלית: Lars Edvard Phragmén ו-Ernst Leonard Lindelöf.
[9] אנו מסתכלים כאן על $\mathbb{R}$ כתת-קבוצה של $\mathbb{C}$ ולכן ניתן להתבונן ב-γ כפונקציה מרוכבת.

משפט 2.6. תהא $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה פתוחה ותהא $f:\Omega\to\mathbb{C}^{*}$ פונקציה אנליטית, כל לוגריתם רציף של f הוא לוגריתם אנליטי שלה (וכמובן שגם ההפך נכון).

משפט 2.7. תהא $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה פתוחה ותהא $f:\Omega\to\mathbb{C}^{*}$ פונקציה אנליטית, ל-f יש לוגריתם רציף (אנליטי) אם"ם לפונקציה $\frac{f'}{f}$ יש קדומה ב-Ω.

- ♣ הפונקציה $\frac{f'}{f}$ נקראת <u>הנגזרת הלוגריתמית</u> של f.
- ♣ כפי שראינו הקיום של של פונקציה קדומה ל-$\frac{f'}{f}$ שקול לכך שלכל מסילה סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין $\gamma:I\to\Omega$ מתקיים:

$$\int_{\gamma}\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}\ dz=0$$

מסקנה 2.8. לכל פונקציה אנליטית על תחום פשוט קשר אנליטית שאינה מתאפסת בתחום זה יש לוגריתם רציף (אנליטי).

3 אינדקסים של מסילות

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$.

משפט 3.1. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה סגורה, יהי $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש-$z_0\notin\gamma^{*}$[10] ויהיו θ_1 ו-θ_2 ארגומנטים רציפים של המסילה $\gamma-z_0$[11]. מתקיים:

$$\frac{\theta_{1}\left(b\right)-\theta_{1}\left(a\right)}{2\pi}=\frac{\theta_{2}\left(b\right)-\theta_{2}\left(a\right)}{2\pi}\in\mathbb{Z}$$

משפט 3.2. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין, לכל $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש-$z_0\notin\gamma^{*}$ מתקיים:

$$\text{Ind}\left(\gamma,z_{0}\right)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\gamma}\frac{1}{z-z_{0}}\ dz$$

ובפרט לכל $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש-$z_0\notin\Omega$ מתקיים $n\left(\gamma,z_0\right)=0$.

מסקנה 3.3. תהא f פונקציה אנליטית על קבוצה פתוחה $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ותהא $\gamma:[a,b]\to\Omega$ מסילה סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין, לכל $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש-$z_0\notin\left(f\circ\gamma\right)^{*}$ מתקיים:

$$\text{Ind}\left(f\circ\gamma,z_{0}\right)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\gamma}\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)-z_{0}}\ dz$$

ובפרט לכל $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש-$z_0\notin\Omega$ מתקיים $\text{Ind}\left(f\circ\gamma,z_0\right)=0$.

מסקנה 3.4. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה סגורה ויהיו $z_0\in\mathbb{C}$ ו-$0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$\gamma^{*}\subseteq B_r\left(z_0\right)$[12]; לכל $z\in\mathbb{C}$ כך ש-$z\notin B_r\left(z_0\right)$ מתקיים $\text{Ind}\left(\gamma,z\right)=0$.

טענה 3.5. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה סגורה, לכל $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש-$z_0\notin\gamma^{*}$ ולכל $w_0\in\mathbb{C}$ מתקיים $\text{Ind}\left(\gamma,z_0\right)=\text{Ind}\left(\gamma+w_0,z_0+w_0\right)$; כלומר האינדקס אינווריאנטי להזזות.

[10] התמונה של γ היא קבוצה קומפקטית ובפרט חסומה.
[11] ע"פ משפט 2.5 אכן יש ל-$\gamma-z_0$ ארגומנטים רציפים.
[12] שוב: התמונה של γ היא קבוצה קומפקטית ובפרט חסומה.

משפט 3.6. תהיינה $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ מסילות סגורות, מתקיימים שני הפסוקים הבאים:

- לכל $z_0 \in \mathbb{C}$ כך ש-$z_0 \notin \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$ מתקיים $\text{Ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2, z_0) = \text{Ind}(\gamma_1, z_0) + n(\gamma_2, z_0)$.
- אם $0 \notin \gamma_2^*$ אז לכל $z \in \mathbb{C}$ כך ש-$z_0 \notin \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$ מתקיים גם $\text{Ind}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}, z_0\right) = \text{Ind}(\gamma_1, z_0) - \text{Ind}(\gamma_2, z_0)$.

משפט 3.7. למת הולכת הכלב (הגרסה החלשה)

תהיינה $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ מסילות סגורות ויהי $z_0 \in \mathbb{C}$, אם $|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t) - z_0|$ לכל $t \in [a,b]$ אז $z_0 \notin \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$ ומתקיים:

$$\text{Ind}(\gamma_1, z_0) = \text{Ind}(\gamma_2, z_0)$$

♣ הקשר להולכת כלבים הוא כזה: נניח שאתם מוציאים את הכלב שלכם לטיול, אם לאורך כל הטיול המרחק שלכם מכל עמוד בדרך גדול יותר מאורך הרצועה אז לכל עמוד ברחוב, מספר הפעמים שהקפתם אותו שווה למספר הפעמים שהקיף אותו הכלב. אנלוגיה אחרת למשפט היא שבמהלך כל n שנים הירח הקיף את השמש בדיוק n פעמים.

משפט 3.8. למת הולכת הכלב (הגרסה החזקה)

תהיינה $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ מסילות סגורות ויהי $z_0 \in \mathbb{C}$, אם $|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t) - z_0| + |\gamma_2(t) - z_0|$ לכל $t \in [a,b]$ אז $z_0 \notin \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$ ומתקיים:

$$\text{Ind}(\gamma_1, z_0) = \text{Ind}(\gamma_2, z_0)$$

תזכורת: ראינו שלכל מסילה סגורה γ, התמונה של γ^* היא קבוצה קומפקטית ולכן $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ היא קבוצה פתוחה שיש לה רכיב קשירות אחד בדיוק שאינו חסום.

משפט 3.9. תהא $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ מסילה סגורה, לכל שתי נקודות $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ כך ש-z_1 ו-z_2 נמצאים באותו רכיב קשירות של $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ מתקיים $\text{Ind}(\gamma, z_1) = \text{Ind}(\gamma, z_2)$; כמו כן לכל z_0 ברכיב הקשירות של $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ שאינו חסום מתקיים $\text{Ind}(\gamma, z_0) = 0$.

משפט 3.10. תהא $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה, ותהיינה γ_0 ו-γ_1 שתי מסילות הומוטופיות ב-Ω; לכל $z \in \mathbb{C}$ כך ש-$z \notin \Omega$ מתקיים $\text{Ind}(\gamma_0, z) = \text{Ind}(\gamma_1, z)$.

טענה 3.11. יהי $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ תחום, Ω הוא פשוט קשר אנליטית אם"ם לכל מסילה גזירה ברציפות למקוטעין $\gamma : [a,b] \to \Omega$ ולכל $z \in \mathbb{C}$ כך ש-$z \notin \Omega$ מתקיים $\text{Ind}(\gamma, z) = 0$.

מסקנה 3.12. כל תחום פשוט קשר (טופולוגית) הוא תחום פשוט קשר אנליטית.

♣ אילון אמר שגם הכיוון ההפוך נכון אך לא הוכחנו זאת בכיתה, ההוכחה מסתמכת על הטענה הבאה (שכן ראינו בכיתה) ועל משפט ההעתקה של רימן (שלא הוכחנו).

טענה 3.13. כל תחום כוכבי הוא תחום פשוט קשר.

4 הכללת משפט קושי ונוסחת קושי

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$.

למה 4.1. יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $F:\Omega\times[a,b]\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה, תהא $G:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $z\in\Omega$):

$$G\left(z\right):=\int\limits_{a}^{b}F\left(z,t\right)dt$$

ולכל $t\in[a,b]$ נסמן ב-F_t את הפונקציה המוגדרת ע"י $F_t\left(z\right):=F\left(z,t\right)$ לכל $z\in\Omega$.
אם F_t אנליטית על Ω לכל $t\in[a,b]$ אז G אנליטית גם היא על Ω ולכל $z\in\Omega$ מתקיים:

$$G'\left(z\right)=\int\limits_{a}^{b}F_t'\left(z\right)dz$$

למה 4.2. תהא f פונקציה אנליטית על תחום Ω, ותהא $F:\Omega\times\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $(z,w)\in\Omega\times\Omega$):

$$F\left(z,w\right):=\begin{cases}\frac{f(z)-f(w)}{z-w} & z\neq w\\ f'\left(z\right) & z=w\end{cases}$$

לכל $w\in\Omega$ נסמן ב-F_w את הפונקציה המוגדרת ע"י $F_w\left(z\right):=F\left(z,w\right)$ לכל $z\in\Omega$.
F היא פונקציה רציפה ו-F_w היא פונקציה אנליטית על Ω לכל $w\in\Omega$.

משפט 4.3. הכללת משפט קושי ונוסחת קושי
יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום, תהא $\gamma:[a,b]\to\Omega$ מסילה סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין כך ש-$\text{Ind}\left(\gamma,z\right)=0$ לכל $z\in\mathbb{C}$ כך ש-$z\notin\Omega$.
לכל פונקציה אנליטית $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ולכל $w\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ מתקיים:

- משפט קושי הכללי -

$$\int\limits_{\gamma}f\left(z\right)dz=0$$

- נוסחת קושי הכללית -

$$\text{Ind}\left(\gamma,w\right)\cdot f\left(w\right)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\gamma}\frac{f\left(z\right)}{z-w}\ dz$$

מסקנה 4.4. משפט קושי ונוסחת קושי עבור מולטי-מסילות
יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום, ותהא γ מולטי-מסילה גזירה ברציפות למקוטעין כך ש-$\gamma^{*}\subseteq\Omega$ ו-$\text{Ind}\left(\gamma,z\right)=0$ לכל $z\in\mathbb{C}$ כך ש-$z\notin\Omega$.
לכל פונקציה אנליטית $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ולכל $w\in\mathbb{C}\setminus\gamma^{*}$ מתקיים:

- משפט קושי הכללי -

$$\int\limits_{\gamma}f\left(z\right)dz=0$$

- נוסחת קושי הכללית -

$$\text{Ind}\left(\gamma,w\right)\cdot f\left(w\right)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\gamma}\frac{f\left(z\right)}{z-w}\ dz$$

מסקנה 4.5. הכללת נוסחת קושי לנגזרות
יהי יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום, ותהא γ מסילה (או מולטי-מסילה) סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין, כך ש-$\gamma^{*}\subseteq\Omega$ ו-$\text{Ind}\left(\gamma,z\right)=0$ לכל $z\in\mathbb{C}$ כך ש-$z\notin\Omega$.
לכל פונקציה אנליטית $f:\Omega\to\mathbb{C}$, לכל $w\in\mathbb{C}\setminus\gamma^{*}$, ולכל $n\in\mathbb{N}_{0}$, מתקיים:

$$\text{Ind}\left(\gamma,w\right)\cdot f^{(n)}\left(w\right)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\gamma}\frac{f\left(z\right)}{\left(z-w\right)^{n+1}}\ dz$$

5 טורי לורן

5.1 התחלה

סימון: לכל $r_{1},r_{2}\in\mathbb{R}$ כך ש-$0\leq r_{1},r_{2}$ כך ש-$r_{1}<r_{2}$ ולכל $z_{0}\in\mathbb{C}$ נסמן $A\left(z_{0},r_{1},r_{2}\right):=\left\{z\in\mathbb{C}:r_{1}<\left|z-z_{0}\right|<r_{2}\right\}$, קבוצה מצורה זו תיקרא טבעת.

♣ במקרה שבו $r_{1}=0$ נקבל ש-$A\left(z_{0},r_{1},r_{2}\right)$ היא הסביבה המנוקבת $B'_{r_{2}}\left(z_{0}\right)$.

למה 5.1. יהי $z_{0}\in\mathbb{C}$, יהיו $r_{1},r_{2}\in\mathbb{R}$ כך ש-$0\leq r_{1},r_{2}$ כך ש-$r_{1}<r_{2}$, ותהא f פונקציה אנליטית על $A\left(z_{0},r_{1},r_{2}\right)$.
לכל $R,\tilde{R}\in\mathbb{R}$ כך ש-$r_{1}<R<\tilde{R}<r_{2}$ ולכל $w\in A\left(z_{0},R,\tilde{R}\right)$ מתקיים:

$$f\left(w\right)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\left(\int\limits_{C\left(z_{0},\tilde{R}\right)}\frac{f\left(z\right)}{z-w}\ dz-\int\limits_{C\left(z_{0},R\right)}\frac{f\left(z\right)}{z-w}\ dz\right)$$

סימון: תהא $\left(a_{n}\right)_{n=-\infty}^{\infty}$[13] סדרת מספרים מרוכבים, נסמן:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{n}:=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}$$

[13] נזכיר שסימון מעין זה מבטא סדרה אין-סופית בשני הכיוונים, או באופן פורמלי פונקציה שתחום ההגדרה שלה הוא $\mathbb{Z}$ (תחום ההגדרה של סדרות אין-סופיות רגילות הוא $\mathbb{N}$).

משפט 5.2. יהי $z_0 \in \mathbb{C}$, יהיו $0 \leq r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r_2$, ותהא f פונקציה אנליטית על $A\left(z_0, r_1, r_2\right)$.
קיימת סדרת מספרים מרוכבים $\left(a_n\right)_{n=-\infty}^{\infty}$ יחידה כך שמתקיים (לכל $z \in A\left(z_0, r_1, r_2\right)$):

$$f\left(z\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \left(z - z_0\right)^n$$

"טור" זה מתכנס בהחלט במ"ש[14] על תתי-קבוצות קומפקטיות של $A\left(z_0, r_1, r_2\right)$, והמקדמים בטור הם (לכל $n \in \mathbb{Z}$ ולכל $r \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r < r_2$):

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f\left(z\right)}{\left(z - z_0\right)^{n+1}}\ dz$$

5.2 נקודות סינגולריות מבודדות

משפט 5.3. תהא f פונקציה אנליטית בעלת סינגולריות מבודדת בנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$, שלושת התנאים הבאים שקולים:

1. z_0 היא נקודת סינגולריות סליקה של f.
2. f חסומה בסביבה מנוקבת של z_0.
3. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $0 < r \in \mathbb{R}$ כך שלכל $z \in B_r'\left(z_0\right)$ מתקיים $\left|f\left(z\right)\right| < \frac{\varepsilon}{\left|z - z_0\right|}$.

משפט 5.4. תהא f פונקציה אנליטית בעלת סינגולריות מבודדת בנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$, מתקיימים שני הפסוקים הבאים:

- ל-f יש קוטב ב-z_0 אם"ם $\lim_{z \to z_0} \left|f\left(z\right)\right| = \infty$.
- ל-f יש קוטב מסדר $k \in \mathbb{N}$ ב-z_0 אם"ם הגבול $\lim_{z \to z_0} f\left(z\right) \cdot \left(z - z_0\right)^k$ קיים במובן הצר ואינו 0.

מסקנה 5.5. תהא f פונקציה אנליטית בנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$.
ל-f יש אפס מסדר $k \in \mathbb{N}$ ב-z_0 אם"ם ל-$\frac{1}{f}$ יש קוטב מסדר k ב-z_0.

למה 5.6. תהיינה f ו-g פונקציות אנליטיות כך של-f יש קוטב מסדר $k \in \mathbb{N}$ בנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$ ול-g יש אפס מסדר $m \in \mathbb{N}$ באותה נקודה.

- אם $k < m$ אז ל-$f \cdot g$ יש אפס מסדר $k - m$ ב-z_0.
- אם $k > m$ אז ל-$f \cdot g$ יש קוטב מסדר $m - k$ ב-z_0.
- אם $k = m$ אז ל-$f \cdot g$ יש סינגולריות סליקה ב-z_0.

מסקנה 5.7. תהיינה f ו-g פונקציות אנליטיות כך ש-f ו-g בעלות קטבים מסדר k ו-m (בהתאמה) בנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$.

- ל-$f \cdot g$ יש קוטב מסדר $k + m$ ב-z_0.
- ל-$f + g$ יש קוטב מסדר קטן או שווה ל-$\max\left\{k, m\right\}$ ב-z_0, או ש-z_0 היא נקודת סינגולריות סליקה של z_0.
- עבור $\frac{f}{g}$ יש לחלק למקרים:
  - אם $k < m$ אז ל-$\frac{f}{g}$ יש אפס מסדר $k - m$ ב-z_0.
  - אם $k > m$ אז ל-$\frac{f}{g}$ יש קוטב מסדר $m - k$ ב-z_0.
  - אם $k = m$ אז ל-$\frac{f}{g}$ יש סינגולריות סליקה ב-z_0.

[14] כלומר הטורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \left(z - z_0\right)^n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \cdot \left(z - z_0\right)^{-n}$ מתכנסים בהחלט במ"ש.

משפט 5.8. משפט קזוראטי-ויירשטראס (Casorati-Weierstrass)[15]

תהא f פונקציה בעלת סינגולריות מבודדת בנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$, z_0 היא נקודת סינגולריות עיקרית של f אם"ם לכל $0 < r \in \mathbb{R}$ (כך ש-f מוגדרת ב-$B'_r(z_0)$) הקבוצה $f(B'_r(z_0))$ צפופה ב-$\mathbb{C}$.

את הגרירה משמאל לימין לא ראינו בכיתה אך היא נובעת ישירות משני המשפטים הקודמים.

- ♣ למעשה קיים משפט חזק יותר האומר שליד סינגולריות עיקרית לא רק שתמונת הפונקציה צפופה במישור המרוכב, אלא שכל נקודה במישור מופיעה בתמונה מלבד נקודה אחת לכל היותר; ראו כאן.

טענה 5.9. תהא f פונקציה אנליטית בעלת סינגולריות עיקרית בנקודה z_0, ותהא g פונקציה אנליטית.
אם ההרכבה $g \circ f$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של z_0 אז גם ל-$g \circ f$ יש סינגולריות עיקרית ב-z_0.

5.3 משפט השאריות ומסקנותיו

טענה 5.10. תהיינה f ו-g פונקציות מרומורפיות על תחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f+g$ ו-$f \cdot g$ גם הן פונקציות מרומורפיות על Ω, ואם g אינה פונקציית האפס[16] אז גם $\frac{f}{g}$ היא פונקציה מרומורפית.

- ♣ כלומר קבוצת הפונקציות המרומורפיות על תחום היא שדה כשהכפל והחיבור הם אלו שמושרים מ-$\mathbb{C}$.
- ♣ למעשה גם הכיוון ההפוך נכון: כל פונקציה מרומורפית ניתנת להצגה כמנה של פונקציות אנליטיות.

טענה 5.11. תהא f פונקציה אנליטית בעלת קוטב מסדר $k \in \mathbb{N}$ בנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$, ותהא g פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של z_0 ע"י (לכל z בסביבה זו):

$$g(z) := (z - z_0)^k \cdot f(z)$$

מתקיים:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} g^{(k-1)}(z)$$

משפט 5.12. יהי $z_0 \in \mathbb{C}$, יהיו $0 \le r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r_2$, ותהא f פונקציה אנליטית על $A(z_0, r_1, r_2)$.
יהי $w \in \mathbb{C}$, מתקיים $w = \text{Res}(f, z_0)$ אם"ם לפונקציה g המוגדרת ע"י $g(z) := f(z) - \frac{w}{z - z_0}$ (לכל $z \notin A(z_0, r_1, r_2)$) יש פונקציה קדומה.
במקרה זה הפונקציה הקדומה היא הפונקציה G המוגדרת ע"י (לכל $z \in A(z_0, r_1, r_2)$):

$$G(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{-n} \cdot \frac{(z - z_0)^{-n+1}}{-n+1}$$

כאשר $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$היא סדרת המקדמים בפיתוח של f לטור לורן סביב z_0.

משפט 5.13. משפט השאריות

תהא γ מסילה (או מולטי-מסילה) סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין, ותהא $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה כך ש-$\gamma^* \subseteq \Omega$ ו-$\text{Ind}(\gamma, z) = 0$ לכל $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.
תהא $S \subseteq \Omega$ קבוצה ללא נקודות הצטברות כך ש-S זרה ל-γ^*, ותהא f פונקציה אנליטית על $\Omega \setminus S$.
במקרה כזה הקבוצה $S \cap \{z \in \Omega : \text{Ind}(\gamma, z) \neq 0\}$ סופית, ומתקיים:

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{s \in S} \text{Ind}(\gamma, s) \cdot \text{Res}(f, s)$$

---

[15] ערכים בוויקיפדיה: Felice Casorati (אנגלית) וקארל ויירשטראס (עברית).
[16] הכוונה היא שקיימת נקודה $z \in \Omega$ כך ש-$g(z) \neq 0$.

♣ משפט העקום של ז'ורדן קובע שבהינתן מסילה סגורה ופשוטה γ, לקבוצה $\mathbb{C}\setminus\gamma^{*}$ יש שני רכיבי קשירות בדיוק: אחד מהם חסום והאחר אינו חסום, והשפה של שניהם היא γ^{*} (בפרט שני הרכיבים הם קבוצות פתוחות וקשירות). במקרה כזה האינדקס של כל נקודה ברכיב הקשירות החסום הוא 1 או -1[17], והאינדקס של כל נקודה ברכיב הקשירות שאינו חסום הוא 0. לפיכך אם γ הנ"ל היא מסילה פשוטה משפט השאריות יגיד שמתקיים:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\sum_{s\in S}\text{Res}(f,s)$$

לא ראינו את ההוכחה של משפט ז'ורדן בכיתה אבל מותר לנו להשתמש עבור מסילות כגון: מעגלים, חצאי מעגלים ומצולעים.

משפט 5.14. למת ז'ורדן

יהי $0<R\in\mathbb{R}$ ותהא $C_R:[0,\pi]\to\mathbb{C}$ מסילה המוגדרת ע"י $C_R(\theta):=R\cdot e^{i\theta}$ לכל $\theta\in[0,2\pi]$.
יהיו f ו-g פונקציות רציפות ב-C_R^{*} ו-$0<a\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים $f(z)=e^{iaz}\cdot g(z)$ לכל $z\in C_R^{*}$.
נסמן $M_R:=\max\left\{g\left(R\cdot e^{i\theta}\right)\mid\theta\in[0,\pi]\right\}$, ואז מתקיים:

$$\int_{C_R} f(z)\,dz\le\frac{\pi}{a}\cdot M_R$$

♣ יחד עם משפט השאריות למת ז'ורדן מאפשרת לנו לחשב אינטגרלים מהצורות ($a>0$ ו-g פונקציה רציפה על כל הישר הממשי):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(ax)\cdot g(x)\,dx \quad \int_{-\infty}^{\infty}\sin(ax)\cdot g(x)\,dx \qquad\qquad \lim_{x\to\pm\infty}g(x)=0$$

באופן שלא היינו יכולים לו היינו מתבוננים באינטגרל כאינטגרל ממשי גרידא.
הרעיון הוא כזה:

- נגדיר את g על כל חצי המישור העליון כך שתתקבל פונקציה אנליטית למעט בקבוצה סופית וזרה ל-$\mathbb{R}$ שתסומן ב-S, ובנוסף יישמר הגבול $\lim_{z\to\infty}g(z)=0$.
  אם אי אפשר לעשות זאת השלבים הבאים לא יועילו ויש לנסות כיוון אחר.

- לכל $0<R\in\mathbb{R}$ נסמן ב-γ_R^{1} את המסילה המוגדרת ע"י $\gamma_R(t):=t$ לכל $t\in[-R,R]$, וב-C_R את המסילה המוגדרת ע"י $C_R(\theta):=e^{i\theta}$ לכל $\theta\in[0,\pi]$.
  כמו כן נסמן ב-f את הפונקציה המוגדרת ע"י $f(z):=e^{iaz}\cdot g(z)$ לכל z בחצי המישור העליון.

- כעת מהגבול הנ"ל ומלמת ז'ורדן נובע כי:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\,dz=0$$

[17] תלוי בכיוון ההקפה של המסילה אבל בכל מקרה לכל הנקודות יש את אותו האינדקס.

ומכאן שע"פ משפט השאריות מתקיים[18]:

$$\begin{aligned}
2\pi i\cdot\sum_{s\in S}\operatorname{Res}(f,s) &= \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R * C_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R * C_R} e^{iaz}\cdot g(z)\ \ dz\\
&= \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R} e^{iaz}\cdot g(z)\,dz + \lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} e^{iaz}\cdot g(z)\,dz\\
&= \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R} e^{iaz}\cdot g(z)\,dz + 0 = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}(\cos(x)+i\cdot\sin(x))\cdot g(x)\,dx\\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos(x)\cdot g(z)\,dx + i\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin(x)\cdot g(z)\,dx
\end{aligned}$$

- אם אנחנו יודעים את הערך של השאריות נוכל להשוות חלק ממשי לחלק ממשי וחלק מרוכב לחלק מרוכב, ובכך לסיים את הפתרון.

משפט 5.15. עקרון הארגומנט

תהא f פונקציה מרומורפית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, כך שלקבוצת האפסים שלה ב-Ω ולקבוצת הקטבים שלה ב-Ω אין נקודת הצטברות. נסמן ב-$Z(f)$ את קבוצת האפסים של f ב-Ω, וב-$P(f)$ נסמן את קבוצת הקטבים של f ב-Ω; $\frac{f'}{f}$ אנליטית על $\Omega\setminus(Z(f)\cup P(f))$ כאשר כל $z\in Z(f)\cup P(f)$ הוא קוטב פשוט שלה, ובנוסף:

- אם z הוא אפס מסדר $k\in\mathbb{N}$ של f אז $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f},z\right)=k$.
- אם z הוא קוטב מסדר $k\in\mathbb{N}$ של f אז $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f},z\right)=-k$.

♣ אם f אנליטית על Ω אז אין לה קטבים ב-Ω והמשפט עוסק אך ורק באפסים שלה.

משפט 5.16. תהא f פונקציה מרומורפית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, ותהא γ מסילה (או מולטי-מסילה) סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין, כך ש-$\gamma^*\subseteq\Omega$ ו-$\operatorname{Ind}(\gamma,z)=0$ לכל $z\in\mathbb{C}\setminus\Omega$. נסמן ב-$Z(f)$ את קבוצת האפסים של f ב-Ω, וב-$P(f)$ נסמן את קבוצת הקטבים של f ב-Ω.

אם γ אינה עוברת דרך אפסים וקטבים של f (כלומר $\gamma^*\cap(Z(f)\cup P(f))=\emptyset$), אז:

$$\operatorname{Ind}(f\circ\gamma,0)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\ dz=\sum_{z\in Z(f)}\operatorname{Ind}(\gamma,z)\cdot m(z)-\sum_{z\in P(f)}\operatorname{Ind}(\gamma,z)\cdot m(z)$$

כאשר $m(z)$ הוא הסדר של האפס/הקוטב ב-z לכל $z\in Z(f)\cup P(f)$.

♣ ושוב: אם f אנליטית על Ω אז אין לה קטבים ב-Ω והמשפט עוסק אך ורק באפסים שלה, כלומר נקבל:

$$\operatorname{Ind}(f\circ\gamma,0)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\ dz=\sum_{z\in Z(f)}\operatorname{Ind}(\gamma,z)\cdot m(z)$$

[18] יש צורך להוכיח שהאינטגרלים אכן מתכנסים כדי להצדיק את המעברים.

מסקנה 5.17. משפט רושה (Rouché)[19]
תהיינה f ו-g פונקציות אנליטיות על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, ותהא γ מסילה (או מולטי-מסילה) סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין, כך ש-$\gamma^{*}\subseteq\Omega$ ו-$n\left(\gamma,z\right)=0$ לכל $z\in\mathbb{C}\setminus\Omega$.
אם לכל $z\in\gamma^{*}$ מתקיים[20]:

$$\left|f\left(z\right)-g\left(z\right)\right|<\left|f\left(z\right)\right|+\left|g\left(z\right)\right|$$

אז:

$$\sum_{z\in Z\left(f\right)}\text{Ind}\left(\gamma,z\right)\cdot m\left(z\right)=\sum_{z\in Z\left(g\right)}\text{Ind}\left(\gamma,z\right)\cdot m\left(z\right)$$

כאשר $m\left(z\right)$ הוא הסדר של האפס ב-z לכל $z\in Z\left(f\right)$ (עבור f) ולכל $z\in Z\left(g\right)$ (עבור g).

- ♣ בפרט אם $n\left(\gamma,z\right)=1$ לכל $z\in Z\left(f\right)\cup Z\left(g\right)$ אז מספר האפסים של g שווה לזה של f (עם ריבוי).
- ♣ משפט רושה נותן הוכחה פשוטה עבור המשפט היסודי של האלגברה: נסמן את הפולינום הנתון ב-f ואת המונום המוביל שלו ב-g, g מתאפסת ב-0 ועבור $z\in\mathbb{C}$ כך ש-$\left|z\right|$ גדול מספיק מתקיים הא"ש שדורש משפט רושה, לכן אם ניקח את המסילה $C\left(0,R\right)$ עבור R גדול מספיק נקבל של-f יש לפחות אפס אחד.

משפט 5.18. משפט ההעתקה הפתוחה לפונקציות אנליטיות
יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה אנליטית שאינה קבועה, יהי $z_{0}\in\Omega$ ונסמן $w_{0}:=f\left(z_{0}\right)$, ויהי $k\in\mathbb{N}$ סדר האפס של $f-w_{0}$ ב-z_{0}.
מתקיימים ארבעת הפסוקים הבאים:

1. קיים $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_{\varepsilon}\left(z_{0}\right)\subseteq\Omega$, ובנוסף ל-$f'$ ול-$f-w_{0}$ אין אפסים ב-$B'_{\varepsilon}\left(z_{0}\right)$, יהי ε כנ"ל.
2. נסמן ב-W_{0} את רכיב הקשירות של $\mathbb{C}\setminus\left(f\circ C\left(z_{0},\varepsilon\right)\right)^{*}$ שבו נמצא w_{0}, ובנוסף נסמן $\Omega_{0}:=f^{-1}\left(W_{0}\right)\cap B_{\varepsilon}\left(z_{0}\right)$.
לכל $w\in W_{0}\setminus\left\{ w_{0}\right\}$ קיימים $z_{1},z_{2},\ldots,z_{k}\in\Omega_{0}\setminus\left\{ z_{0}\right\}$ שונים זה מזה כך ש-$f\left(z_{i}\right)=w$ לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$,
בפרט מתקיים $f'\left(z_{0}\right)\neq0$ (כלומר $k=1$) אם"ם f היא העתקה חח"ע ועל מ-$\Omega_{0}\setminus\left\{ z_{0}\right\}$ ל-$W_{0}\setminus\left\{ w_{0}\right\}$[21].
3. f היא העתקה פתוחה, כלומר לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq\Omega$ גם $f\left(U\right)$ היא קבוצה פתוחה.
4. אם f חח"ע אז f^{-1} אנליטית על $f\left(\Omega\right)$.

משפט 5.19 תהיינה f ו-g פונקציות אנליטיות על קבוצה פתוחה $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ כך ש-f חח"ע.
לכל $z_{0}\in\Omega$, לכל $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$\hat{B}_{r}\left(z_{0}\right)\subseteq\Omega$ ולכל $w\in f\left(\hat{B}_{r}\left(z_{0}\right)\right)$ מתקיים:

$$g\left(f^{-1}\left(w\right)\right)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{C\left(z_{0},r\right)}g\left(z\right)\cdot\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)-w}\ dz$$

ובפרט:

$$f^{-1}\left(w\right)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{C\left(z_{0},r\right)}z\cdot\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)-w}\ dz$$

---

[19] ערך בוויקיפדיה: Eugène Rouché.
[20] בפרט מתקיים $f\left(z\right)\neq0$ וגם $g\left(z\right)\neq0$ לכל $z\in\gamma^{*}$.
[21] כלומר הצמצום של f ל-$\Omega_{0}\setminus\left\{ z_{0}\right\}$ הוא העתקה חח"ע ועל $W_{0}\setminus\left\{ w_{0}\right\}$.

6 הספֵירה של רימן והעתקות מביוס

טענה 6.1. תהא f פונקציה שלמה, אם הגבול $\lim_{z\to\infty}|f(z)|$ קיים במובן הרחב אז f היא פולינום.

מסקנה 6.2. תהא f פונקציה מרומורפית על $\mathbb{C}$, אם הגבול $\lim_{z\to\infty}|f(z)|$ קיים במובן הרחב אז f היא פונקציה רציונלית[22].

טענה 6.3. תהא f פונקציה שלמה וחח"ע (הפיכה), f היא העתקה אפינית - קיימים $a,b\in\mathbb{C}$ כך ש-$a\neq 0$ ו-$f(z)=az+b$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

הסכמה: תהא T העתקת מביוס ויהיו $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ כך שמתקיים (לכל z בתחום ההגדרה של T):

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

נרצה להרחיב את תחום ההגדרה של T כך שתהיה מוגדרת על כל הספירה של רימן, לשם כך נגדיר $\frac{w}{0}:=\infty$ (לכל $0\neq w\in\mathbb{C}$), ובנוסף[23]:

$$T\left(\frac{-d}{c}\right):=\infty \qquad T(\infty):=\frac{a}{c}$$

טענה 6.4. תהא $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(z):=\frac{1}{z}$ לכל $z\in\hat{\mathbb{C}}$[24], לכל קבוצה $A\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ כך ש-A היא מעגל מוכלל גם $f(A)$ היא מעגל מוכלל.

סימון: נסמן ב-$\mathrm{Aut}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ את קבוצת הפונקציות הגזירות וההפיכות מ-$\hat{\mathbb{C}}$ ל-$\hat{\mathbb{C}}$[25].

מסקנה 6.5. $\mathrm{Aut}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ היא קבוצת כל הפונקציות המתקבלות ע"י הרכבות של f הנ"ל ($f(z):=\frac{1}{z}$ לכל $z\in\hat{\mathbb{C}}$) והעתקות אפיניות (פונקציות מהצורה $g(z):=az+b$ עבור $a,b\in\mathbb{C}$ כך ש-$a\neq 0$).

טענה 6.6. תהיינה $T_1,T_2:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ שתי העתקות מביוס, ויהיו $a_1,b_1,c_1,d_1,a_2,b_2,c_2,d_2\in\mathbb{C}$ כך שמתקיים (לכל $z\in\hat{\mathbb{C}}$):

$$T_2(z)=\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} \qquad T_1(z)=\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$$

לכל $z\in\hat{\mathbb{C}}$ מתקיים גם:

$$T_1(T_2(z))=\frac{(a_1a_2+b_1c_2)\cdot z+(a_1b_2+b_1d_2)}{(c_1a_2+d_1c_2)\cdot z+(c_1b_2+d_1d_2)}$$

♣ נשים לב לדמיון הברור לכפל מטריצות:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2\end{bmatrix}$$

כלומר קבוצת כל ההעתקות של מביוס היא חבורה שהכפל שלה הוא הרכבת פונקציות, ובנוסף הפונקציה המעתיקה מטריצה ב-$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ להעתקת מביוס עם אותם מקדמים היא אפימורפיזם שהגרעין שלו הוא המטריצות הסקלריות. זו הסיבה לכך שהדרישה $ad-bc\neq 0$ קובעת שההעתקה הפיכה, וזו גם הסיבה לכך שכל ההצגות של העתקת מביוס נתונה זהות עד כדי כפל בסקלר.

[22] כלומר קיימים $P,Q\in\mathbb{C}[z]$ כך ש-$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ לכל z בתחום ההגדרה של f.

[23] לא ייתכן ש-$c=0$ ובנוסף $a=0$ ו/או $d=0$ מפני ש-$ad-bc\neq 0$.

[24] כזכור הגדרנו $\frac{w}{0}:=\infty$ ו-$\frac{w}{\infty}:=0$ לכל $0\neq w\in\mathbb{C}$.

[25] העתקות כאלה נקראות העתקות קונפורמיות על $\hat{\mathbb{C}}$, אנחנו נראה בנושא הבא שגם ההופכית של קונפורמית היא קונפורמית.

מסקנה 6.7. תהא $T:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ העתקת מביוס ויהיו $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ כך שמתקיים (לכל $z\in\hat{\mathbb{C}}$):

$$T\left(z\right)=\frac{az+b}{cz+d}$$

T הפיכה, ולכל $z\in\hat{\mathbb{C}}$ מתקיים:

$$T^{-1}\left(z\right)=\frac{dz-b}{-cz+a}$$

מסקנה 6.8. $\mathrm{Aut}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ היא קבוצת כל ההעתקות של מביוס.

טענה 6.9. להעתקת מביוס שאינה הזהות יש לכל הפחות נקודת שבת אחת ולכל היותר שתי נקודות שבת.

מסקנה 6.10. לכל $z_1,z_2,z_3,w_1,w_2,w_3\in\hat{\mathbb{C}}$ כך ש-z_1,z_2,z_3 שונים זה מזה ו-w_1,w_2,w_3 שונים זה מזה, קיימת העתקת מביוס יחידה המעתיקה את z_i ל-w_i לכל $3\geq i\in\mathbb{N}$.

סימון: $\mathbb{D}:=B_1\left(0\right)$ וממילא $\overline{\mathbb{D}}=\hat{B}_1\left(0\right)$.

סימון: נסמן ב-$\mathrm{Aut}\left(\mathbb{D}\right)$ את קבוצת הפונקציות הגזירות וההפיכות מ-$\mathbb{D}$ ל-$\mathbb{D}$.

משפט 6.11. הלמה של שוורץ

תהא $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ פונקציה אנליטית כך ש-$f\left(0\right)=0$ ו-f ניתנת להרחבה רציפה על $\overline{\mathbb{D}}$, לכל $z\in\mathbb{D}$ מתקיים $\left|f\left(z\right)\right|\leq\left|z\right|$ ובנוסף $\left|f'\left(0\right)\right|\leq1$.

כמו כן אם קיים $\mathbb{D}\ni z\neq0$ כך ש-$\left|f\left(z\right)\right|=\left|z\right|$ ו/או ש-$\left|f'\left(0\right)\right|=1$ אז קיים $c\in\mathbb{C}$ כך ש-$\left|c\right|=1$ ו-$f\left(z\right)=cz$ לכל $z\in\mathbb{D}$.

♣ כלומר אם מתקיים שוויון באחד הסעיפים אז f פועלת על $\mathbb{D}$ ע"י סיבוב בלבד.

מסקנה 6.12. תהא $f\in\mathrm{Aut}\left(\mathbb{D}\right)$, אם $f\left(0\right)=0$ אז קיים $c\in\mathbb{C}$ כך ש-$\left|c\right|=1$ ו-$f\left(z\right)=cz$ לכל $z\in\mathbb{D}$.

מסקנה 6.13. לכל $f\in\mathrm{Aut}\left(\mathbb{D}\right)$ קיימים $\theta\in\left[0,2\pi\right]$ ו-$b\in\mathbb{D}$ כך שמתקיים (לכל $z\in\mathbb{D}$):

$$f\left(z\right)=e^{i\theta}\cdot\frac{z+b}{1+z\bar{b}}$$

7 פונקציות הרמוניות

משפט 7.1. לכל פונקציה אנליטית f על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, הפונקציות $\mathrm{Re}f$ ו-$\mathrm{Im}f$ הן פונקציות הרמוניות על Ω.

למה 7.2. תהא u פונקציה הרמונית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ הפונקציה $\frac{\partial u}{\partial x}-i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$ היא פונקציה אנליטית.

משפט 7.3. יהי $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום פשוט קשר אנליטית, לכל פונקציה הרמונית $u:\Omega\to\mathbb{R}$ קיימת פונקציה משלימה, כלומר קיימת פונקציה אנליטית $f:\Omega\to\mathbb{C}$ כך ש-$u=\mathrm{Re}f$.

מסקנה 7.4. תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$; אם $f\left(z\right)\neq0$ לכל $z\in\Omega$ ו-Ω הוא תחום פשוט קשר אנליטית, אז $\ln\left|f\right|$ היא פונקציה הרמונית.

משפט 7.5. עקרון המקסימום לפונקציות הרמוניות
תהא u פונקציה הרמונית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$.

1. אם ל-u יש מקסימום מקומי חלש ב-Ω אז u קבועה.
2. אם u אינה קבועה אז $|u|$ אינה מקבלת מקסימום ב-Ω.
3. אם Ω חסום ו-u ניתנת להרחבה רציפה על $\overline{\Omega}$ אז $|\bar{u}|$ מקבלת מקסימום על $\partial\Omega$.

סימון: תהא $P:\partial\mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת ע"י (לכל $(w,z)\in\partial\mathbb{D}\times\mathbb{D}$):

$$P\left(w,z\right):=\frac{1-\left|z\right|^{2}}{\left|w-z\right|^{2}}$$

פונקציה זו נקראת גרעין פואסון[26].

♣ נשים לב לכך שלכל $z\in\mathbb{D}$ ולכל $w\in\partial\mathbb{D}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}P\left(w,z\right)=\frac{1-\left|z\right|^{2}}{\left|w-z\right|^{2}}=\frac{\left|w\right|^{2}-\left|z\right|^{2}}{\left|w-z\right|^{2}}&=\operatorname{Re}\left(\frac{\left|w\right|^{2}-\left|z\right|^{2}+z\overline{w}-\overline{z}w}{\left|w-z\right|^{2}}\right)\\&=\operatorname{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\cdot\frac{\overline{w}-\overline{z}}{\overline{\overline{w-z}}}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\cdot\frac{\overline{w}-\overline{z}}{\overline{w}-\overline{z}}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right)\end{aligned}$$

כלומר P היא החלק הממשי של פונקציה אנליטית ולכן היא פונקציה הרמונית.

משפט 7.6. נוסחת פואסון
תהא u פונקציה הרמונית על $\mathbb{D}$ ורציפה ב-$\overline{\mathbb{D}}$, לכל $z\in\mathbb{D}$ מתקיים:

$$u\left(z\right)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{0}^{2\pi}P\left(e^{i\theta},z\right)\cdot u\left(e^{i\theta}\right)d\theta$$

מסקנה 7.7. תהא $z_0\in\mathbb{C}$, יהי $0<r\in\mathbb{R}$ ותהא u פונקציה הרמונית על $B_r\left(z_0\right)$ ורציפה ב-$\hat{B}_r\left(z_0\right)$, לכל $z\in B_r\left(z_0\right)$ מתקיים:

$$u\left(z\right)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{0}^{2\pi}P\left(e^{i\theta},\frac{z-z_0}{r}\right)\cdot u\left(z_0+r\cdot e^{i\theta}\right)d\theta$$

ובפרט:

$$u\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{0}^{2\pi}u\left(z_0+r\cdot e^{i\theta}\right)d\theta$$

♣ כלומר הערכים ש-u מקבלת על שפת המעגל קובעים אותה ביחידות בתוך המעגל - אין עוד פונקציה הרמונית אחרת שמקבלת את אותם הערכים על השפה אך מקבלת ערכים שונים בפנים. למעשה גם הכיוון ההפוך נכון: בהינתן פונקציה רציפה על שפה של עיגול (מעגל) ניתן להגדיר אותה גם על פנים העיגול באמצעות הנוסחה הנ"ל וכך לקבל פונקציה הרמונית.

[26] ערך בוויקיפדיה: סימאון דני פואסון.