אינטגרציה של פונקציה רציונלית - מסקנות בלבד

חשבון אינפיניטסימלי (2) - 80132

מרצה: יורם לסט

מתרגלים: דניאל אופנר ומתן בן-אשר

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 הקדמה

1.1 מטרה

הגדרה. פונקציה ממשית $f:D\to\mathbb{R}$ תקרא <u>פונקציה רציונלית</u> אם קיימים שני פולינומים $F,G\in\mathbb{R}\left[x\right]$ כך שלכל $x\in D$ מתקיים:

$$f\left(x\right)=\frac{F\left(x\right)}{G\left(x\right)}$$

- ♣ נשים לב ש-f אינה יכולה להיות מוגדרת בשורשים של Q (אם יש כאלה).
- ♣ אנו עומדים לפתח אלגוריתם למציאת האינטגרל של כל פונקציה רציונלית ולשם כך נוכיח כעת משפט באמצעות כלים שנלמדו בקורס "אלגברה ליניארית (2)", אין צורך בהכרת כלים אלו ע"מ להפעיל את האלגוריתם אך יש צורך בידיעת המשפט בשבילו.

1.2 פירוק לשברים חלקיים

מכיוון שמדובר בקובץ מסקנות בלבד נסתפק בידיעת המשפט הבא.

משפט. פירוק לשברים חלקיים

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $0\neq F,G\in\mathbb{F}\left[x\right]$.

יהיו $P_{1},P_{2},\ldots,P_{n}\in\mathbb{F}\left[x\right]$ פולינומים אי-פריקים שונים זה מזה ו-$e_{1},e_{2},\ldots,e_{n}\in\mathbb{N}$ כך שמתקיים:

$$G=\prod_{i=1}^{n}\left(P_{i}\right)^{e_{i}}$$

קיימים פולינומים $Q,F_{1,1},F_{1,2}\ldots,F_{1,e_{1}},F_{2,1},F_{2,2}\ldots,F_{1,e_{2}},\ldots\ldots\ldots,F_{n,1},F_{n,2}\ldots,F_{1,e_{n}}\in\mathbb{F}\left[x\right]$ יחידים כך ש-$\deg F_{i,j}<\deg P_{i}$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ ולכל $e_{i}\geq j\in\mathbb{N}$ המקיימים:

$$\frac{F}{G}=Q+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{e_{i}}\frac{F_{ij}}{\left(P_{i}\right)^{j}}$$

כאשר $\deg Q=\deg F-\deg G$ אם $\deg F\geq\deg G$ ואחרת $Q=0$.

- ♣ ניתן לדרוש ש-$P_{1},P_{2},\ldots,P_{n}$ הם פולינומים מתוקנים ואז קיים $c\in\mathbb{F}$ (המקדם של החזקה הגדולה ביותר ב-G) כך שמתקיים:

$$G=c\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(P_{i}\right)^{e_{i}}$$

ואז המשפט אומר שקיימים פולינומים ... המקיימים:

$$\frac{F}{G}=Q+\frac{1}{c}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{e_{i}}\frac{A_{ij}}{\left(P_{i}\right)^{j}}$$

1.3 איך בפועל מוצאים את הפולינומים שהמשפט מבטיח את קיומם?

יופי, ראינו שקיימים פולינומים כנ"ל, אבל למצוא אותם בדרך שהופיעה בהוכחה (ראו בקובץ ההוכחות) נראה כמו משימה ארוכה ומייגעת; למזלנו ניתן למצוא אותם בדרך פשוטה יותר נשתמש בסימוני המשפט:

- כדי למצוא את Q עלינו לחלק את F ב-G עם שארית והמנה המתקבלת היא Q.
- כדי למצוא את הפירוק של G לגורמים אי-פריקים אין שיטה כללית, אך בדרך כלל נקבל בתרגילים ובמבחנים פולינומים מדרגה נמוכה שקל לפרק ע"י ניחוש השורשים שלהם.
- כדי למצוא את $F_{i,j}$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ ולכל $e_i \geq j \in \mathbb{N}$ נשים לב לכך שמתקיים:

$$R = G \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{e_i} \frac{F_{i,j}}{(P_i)^j} = \prod_{i=1}^{n} (P_i)^{e_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{e_i} \frac{F_{i,j}}{(P_i)^j}$$

נפתח את הסוגריים ונקבל את המקדם של כל חזקה כביטוי של המקדמים של הפולינומים ה-$F_{i,j}$-ים (שאינם ידועים לנו), ומכיוון שקיימת רק דרך אחת להציג פולינום בצורה זו והמקדמים של R ידועים לנו (הוא השארית של חילוק F ב-G) הרי שקיבלנו מערכת משוואות ליניאריות שאנחנו כבר יודעים לפתור וכבר ידוע לנו שקיים פתרון יחיד.
למעשה ניתן לפשט את הדרך עוד יותר ע"י הצבת x-ים מסוימים ב-R כדי לאפס חלק מהאיברים ולהתמקד באחרים.

2 האלגוריתם

תזכורת: בליניארית 2 הוכחנו בקורס שכל פולינום אי-פריק מעל שדה הממשיים הוא מדרגה 1 או 2.

מהמשפט שראינו בפרק הקודם נובע שכדי למצוא את האינטגרל הלא מסוים מספיק שנדע למצוא את האינטגרל של פונקציה רציונלית שבה המכנה הוא חזקה של פולינום מתוקן מדרגה 1 או 2 והמונה הוא פולינום מדרגה קטנה ממש מזו של המכנה.

א"כ אנו רוצים לחשב את האינטגרלים הבאים (עבור $A,B,a,b\in\mathbb{R}$ ו-$1<n\in\mathbb{N}$ נתונים):

$$\int\frac{Ax+B}{x^{2}+ax+b}dx \qquad \int\frac{B}{x+b}dx$$

$$\int\frac{Ax+B}{\left(x^{2}+ax+b\right)^{n}}dx \qquad \int\frac{B}{\left(x+b\right)^{n}}dx$$

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ו-$1<n\in\mathbb{N}$ ונחשב את האינטגרלים הנ"ל, שני המקרים הראשונים (השמאליים) פשוטים:

$$\int\frac{B}{x+b}dx=B\cdot\int\frac{1}{x+b}dx=B\cdot\ln\left|x+b\right|+C$$

$$\int\frac{B}{\left(x+b\right)^{n}}dx=B\cdot\int\frac{1}{\left(x+b\right)^{k}}dx=-\frac{B}{\left(k-1\right)\left(x+b\right)^{k-1}}+C$$

בקובץ "על פתרון משוואות ונוסחת השורשים" (בנספח) ניתן לראות שקיימים $d,r\in\mathbb{R}$ כך ש-$r>0$[1] המקיימים (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$x^{2}+ax+b=\left(x-d\right)^{2}+r$$

בקובץ ההוכחות ראינו שעבור d ו-r כנ"ל מתקיים:

$$\int\frac{Ax+B}{x^{2}+ax+b}dx=\frac{A}{2}\cdot\ln\left|x^{2}+ax+b\right|+\left(B-\frac{A\cdot a}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\arctan\left(\frac{x-d}{\sqrt{r}}\right)+C$$

$$\int\frac{Ax+B}{\left(x^{2}+ax+b\right)^{n}}dx=-\frac{A}{2\left(n-1\right)\cdot\left(x^{2}+ax+b\right)^{n-1}}+\left(B-\frac{A\cdot a}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{r}}{r^{n}}\cdot I_{n}\left(\frac{x-d}{\sqrt{r}}\right)+C$$

כאשר הסדרה $\left(I_{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ היא סדרת פונקציות המוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה הבאה (לכל $1<k\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in\mathbb{R}$):

$$I_{1}\left(x\right):=\arctan\left(x\right)$$

$$I_{k}\left(x\right):=\frac{2k-3}{2k-2}\cdot I_{k-1}\left(x\right)+\frac{1}{2k-2}\cdot\frac{x}{\left(1+x^{2}\right)^{k-1}}$$

---

[1] $d=-\frac{a}{2}$ ו-$r=b-\frac{a^{2}}{4}$, נשים לב לכך ש-$x^{2}+ax+b$ אי פריק ולכן $4r=a^{2}-4b>0$.