אינטגרלים - הגדרות בלבד

חשבון אינפיניטסימלי (3) - 80415

מרצה: תמר (תמי) ציגלר

מתרגלים: אריה דויטש, קרן דניאל ואור קופרמן

סוכם ע״י שריה אנסבכר

סמסטר א׳ תשפ״ד, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

1 אינטגרביליות על תיבות

♣ האינטגרלים שנעסוק בהם בקורס זה הם אינטגרלים מסוימים בלבד שכן בממדים גבוהים אין משמעות לפונקציה קדומה: בד"כ היא אינה מוגדרת וגם כשכן היא חסרת משמעות. נראה לי שהסיבה לכך היא השוני שבין הגזירות החד-ממדית לדיפרנציאביליות הרב-ממדית: בעוד שהנגזרת מנסה לפרמל את מושג המהירות הרגעית הדיפרנציאל אינו יכול להתיימר לעשות זאת והוא מסתפק בכך שהפונקציה "יפה" במובן שקצב השינוי שלה דומה לזה של העתקה ליניארית; מכיוון שכך אין משמעות פילוסופית לשאלה איזו פונקציה הייתה נותנת דיפרנציאל כזה וכזה לו היינו גוזרים אותה, ובזאת נסתם הגולל על הפונקציה הקדומה.

הגדרה 1.1. תיבה סגורה ב-$\mathbb{R}^k$ היא קבוצה מהצורה:

$$\prod_{i=1}^{k}[a_i,b_i]:=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_k,b_k]$$

עבור $a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_k,b_k\in\mathbb{R}$ כך ש-$a_i\leq b_i$[1] לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$, אם בנוסף מתקיים $b_i-a_i=b_j-a_j$ לכל $k\geq i,j\in\mathbb{N}$ נאמר גם שזוהי קובייה סגורה.

הפנים של תיבה סגורה ייקרא תיבה פתוחה, והפנים של קובייה סגורה ייקרא קובייה פתוחה.

מסקנה 1.2. תיבה סגורה היא קבוצה קומפקטית, ותיבה פתוחה היא קבוצה פתוחה.

הגדרה 1.3. תהא $B:=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_k,b_k]$ תיבה, נסמן ב-$\text{ar}(B)$ את היחס המקסימלי בין אורכיהן של זוג מקצועות של B; כלומר:

$$\text{ar}(B):=\max_{k\geq i,j\in\mathbb{N}}\left(\frac{b_i-a_i}{b_j-a_j}\right)=\frac{\max\{b_i-a_i\mid k\geq i\in\mathbb{N}\}}{\min\{b_j-a_j\mid k\geq j\in\mathbb{N}\}}$$

מספר זה ייקרא יחס האורך-רוחב של B.

מסקנה 1.4. לכל תיבה $B\subseteq\mathbb{R}^k$ מתקיים $\text{ar}(B)\geq 1$, ו-$\text{ar}(B)=1$ אם"ם B היא קובייה.

הגדרה 1.5. תהא $A:=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_k,b_k]$ תיבה סגורה ב-$\mathbb{R}^k$, הנפח של A הוא:

$$V(A):=\prod_{i=1}^{k}(b_i-a_i)$$

♣ כלומר הנפח של תיבה הוא מכפלת אורכי המקצועות שלה.

מסקנה 1.6. לכל שתי תיבות סגורות $A,B\subseteq\mathbb{R}^k$ כך ש-$A\subseteq B$ מתקיים $V(B)\subseteq V(A)$.

תזכורת: נאמר שקבוצה סופית $P\subseteq[a,b]$ היא חלוקה של הקטע $[a,b]$ אם $a,b\in P$.

הגדרה 1.7. תהא $A:=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_k,b_k]$ תיבה סגורה ב-$\mathbb{R}^k$, חלוקה של A היא קבוצה מהצורה $P_1\times P_2\times\ldots\times P_k$ כאשר P_i היא חלוקה של $[a_i,b_i]$ לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$.

נאמר שחלוקה P של A היא עידון של חלוקה Q של A אם $P\subseteq Q$.

[1] אם $a_i=b_i$ אז הקטע $[a_i,b_i]$ מנוון, כלומר $[a_i,b_i]=\{a_i\}$.

אם אתם רוצים להישאר נאמנים למה שראינו בכיתה עליכם להחליף את שמו של דארבו בשמו של רימן בכל מקום.

הגדרה 1.8. סכומי דארבו[2]

תהא $A:=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_k,b_k]$ תיבה סגורה ב-$\mathbb{R}^k$, ותהא $P:=P_1\times P_2\times\ldots\times P_k$ חלוקה של A.
לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$ יהיו $x_{i,0},x_{i,1},\ldots,x_{i,l_i}\in\mathbb{R}$ כך ש-$P_i=\{x_{i,0},x_{i,1},\ldots,x_{i,l_i}\}$ ו-$a_i=x_{i,0}<x_{i,1}<\ldots<x_{i,l_i}=b_i$.
לכל $s:=\left(x_{1,j_1},x_{2,j_2},\ldots,x_{k,j_k}\right)$ כך ש-$l_i\geq j_i\in\mathbb{N}$ לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$, נסמן:

$$A_s:=\left[x_{1,(j_1-1)},x_{1,j_1}\right]\times\left[x_{2,(j_2-1)},x_{2,j_2}\right]\times\ldots\times\left[x_{k,(j_k-1)},x_{k,j_k}\right]$$

וכמו כן נסמן $r:=\prod_{i=1}^{k}l_k$. א"כ קיבלנו r תיבות שהאיחוד שלהן הוא A והפנימים של כל שתיים מהן זרים, תהיינה $A_1,A_2,\ldots,A_r$ כל התיבות הללו בסדר כלשהו.
לכל פונקציה חסומה $f:A\to\mathbb{R}$ נסמן (לכל $r\geq i\in\mathbb{N}$):

$$M_i(f,P):=\sup\{f(x)\mid x\in A_i\},\ m_i(f,P):=\inf\{f(x)\mid x\in A_i\}$$

ונגדיר:

$$\overline{S}(f,P):=\sum_{i=1}^{r}M_i(f,P)\cdot V(A_i)$$
$$\underline{s}(f,P):=\sum_{i=1}^{r}m_i(f,P)\cdot V(A_i)$$

ל-$\overline{S}(f,P)$ נקרא <u>סכום דארבו העליון</u> של f עבור P ול-$\underline{s}(f,P)$ נקרא <u>סכום דארבו התחתון</u> של f עבור P.

♣ כמובן שמהגדרה מתקיים $\underline{s}(f,P)\leq\overline{S}(f,P)$.

הגדרה 1.9. אינטגרל עליון ואינטגרל תחתון

תהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ תיבה סגורה, לכל פונקציה חסומה $f:A\to\mathbb{R}$ נסמן:

$$\overline{\int_A}f(x)\,dx:=\inf\left\{\ \overline{S}(f,P)\ \middle|\ P\text{ חלוקה של }A\ \right\}$$
$$\underline{\int_A}f(x)\,dx:=\sup\left\{\ \underline{s}(f,P)\ \middle|\ P\text{ חלוקה של }A\ \right\}$$

$\overline{\int_A}f$ ייקרא <u>האינטגרל העליון</u> של f על A, ו-$\underline{\int_A}f$ ייקרא <u>האינטגרל התחתון</u> של f על A.

הגדרה 1.10. אינטגרביליות לפי דארבו

תהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ תיבה סגורה, נאמר שפונקציה חסומה $f:A\to\mathbb{R}$ <u>אינטגרבילית לפי דארבו</u> על A אם $\underline{\int_A}f(x)\,dx=\overline{\int_A}f(x)\,dx$, ובמקרה כזה נסמן:

$$\int_A f(x)\,dx:=\overline{\int_A}f(x)\,dx=\underline{\int_A}f(x)\,dx$$

$\int_A f(x)\,dx$ ייקרא <u>האינטגרל</u> של f על A.

♣ להלן נאמר גם סתם "אינטגרבילית" במקום "אינטגרבילית לפי דארבו".

♣ לפעמים מסמנים גם $\int_A f(x)\,dx:=\int_A f(x_1,x_2,\ldots,x_k)\,dx_1dx_2\ldots dx_k$.

[2] ערך בוויקיפדיה: ז'אן גסטון דארבו.

2 מידה אפס ואינטגרביליות (משפט לבג)

הגדרה 2.1. מידה אפס

נאמר שקבוצה $E\subseteq\mathbb{R}^{k}$ היא קבוצה ממידה אפס אם לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת סדרת תיבות סגורות $\left(B_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים:

$$E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}B_{n}\qquad\qquad\sum_{n=1}^{\infty}V\left(B_{n}\right)<\varepsilon$$

♣ מידה אפס תמיד מוגדרת לפי המרחב שבו אנחנו נמצאים: הקבוצה $[0,1]\times[0,1]$ אינה ממידה אפס מפני שהיא תת-קבוצה של $\mathbb{R}^{2}$, אבל הקבוצה $[0,1]\times[0,1]\times\{0\}$ היא קבוצה ממידה אפס מפני שהיא תת-קבוצה של $\mathbb{R}^{3}$.

♣ מידת לבג של קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ היא:

$$\inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty}V\left(B_{n}\right)\;\middle|\;A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}B_{n},\ n\in\mathbb{N}\text{ לכל } \text{היא תיבה } B_{n}\right\}$$

כלומר מידת לבג של קבוצה היא מיצוי מבחוץ שלה ע"י תיבות.

3 אינטגרביליות על קבוצות בעלות נפח

למה 3.1. לכל תיבה סגורה $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ מתקיים $\int_{A}1\ dx=V\left(A\right)$.

תזכורת: לכל קבוצה S מגדירים את הפונקציה χ_{S} ע"י (לכל x בקבוצה כלשהי[3]):

$$\chi_{S}\left(x\right):=\begin{cases}1 & x\in S\\0 & x\notin S\end{cases}$$

למה 3.2. תהא $S\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה; אם קיימת תיבה סגורה $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ כך ש-$S\subseteq A$ ו-χ_{S} אינטגרבילית על A, אז χ_{S} אינטגרבילית על כל תיבה סגורה המכילה את S, ולכל שתי תיבות $A,B\subseteq\mathbb{R}^{k}$ כאלה מתקיים:

$$\int_{A}\chi_{S}\left(x\right)dx=\int_{B}\chi_{S}\left(x\right)dx$$

הגדרה 3.3. נאמר שקבוצה $S\subseteq\mathbb{R}^{k}$ היא בעלת נפח אם קיימת תיבה סגורה $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ כך ש-$S\subseteq A$ ו-χ_{S} אינטגרבילית על A, ובמקרה כזה הנפח של S יוגדר ע"י:

$$V\left(S\right):=\int_{A}\chi_{S}\left(x\right)dx$$

♣ נשים לב לכך שע"פ הגדרה זו כל תיבה סגורה היא אכן בעלת נפח, והנפח שלה הוא אכן מכפלת אורכי המקצועות שלה כפי שהגדרנו.

[3] כמובן שבד"כ יש קשר בין S לקבוצה המדוברת (במקרה שלנו נגדיר את χ_{S} על $\mathbb{R}^{k}$), אבל הנקודה היא שזה משתנה לפי ההקשר.

למה 3.4 תהיינה $S\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה בעלת נפח ו-$f:S\to\mathbb{R}$ פונקציה, ותהא $f_{S}:\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}^{k}$):

$$f_{S}\left(x\right):=\begin{cases} f\left(x\right) & x\in S\\ 0 & x\notin S \end{cases}$$

אם קיימת תיבה סגורה $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ כך ש-$S\subseteq A$ ו-f_{S} אינטגרבילית על A, אז f_{S} אינטגרבילית על כל תיבה סגורה המכילה את S, ולכל שתי תיבות $A,B\subseteq\mathbb{R}^{k}$ כאלה מתקיים:

$$\int\limits_{A}f_{S}\left(x\right)dx=\int\limits_{B}f_{S}\left(x\right)dx$$

♣ למעשה היינו רוצים לדבר על $\chi_{S}\cdot f$ במקום על f_{S} אלא ש-$\left(\chi_{S}\cdot f\right)\left(x\right)$ אינו מוגדר עבור $x\notin S$.

הגדרה 3.5 תהיינה $S\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה בעלת נפח ו-$f:S\to\mathbb{R}$ פונקציה, ותהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ תיבה סגורה כך ש-$S\subseteq\mathbb{R}^{k}$.
נאמר ש-f אינטגרבילית על S אם האינטגרל $\int_{A}f_{S}\left(x\right)dx$ קיים (f_{S} מוגדרת כבלמה הקודמת), ובמקרה כזה נגדיר את האינטגרל של f על S ע"י:

$$\int\limits_{S}f\left(x\right)dx:=\int\limits_{A}f_{S}\left(x\right)dx$$

מסקנה 3.6 לכל קבוצה בעלת נפח $S\subseteq\mathbb{R}^{k}$ מתקיים $\int_{S}1\ dx=V\left(S\right)$.

4 אינטגרלים לא אמיתיים

♣ כמו באינפי' 2 נרצה גם בקורס זה להגדיר אינטגרלים לא אמיתיים על קבוצות שאינן בעלות נפח ו/או על פונקציות שאינן חסומות.

סימון: לכל פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ ($D\subseteq\mathbb{R}^{k}$) נגדיר את הפונקציות $f^{+},f^{-}:D\to\mathbb{R}$ ע"י (לכל $x\in D$):

$$f^{+}\left(x\right):=\begin{cases} f\left(x\right) & f\left(x\right)\geq0\\ 0 & f\left(x\right)<0 \end{cases}$$

$$f^{-}\left(x\right):=\begin{cases} 0 & f\left(x\right)\geq0\\ -f\left(x\right) & f\left(x\right)<0 \end{cases}$$

א"כ לכל פונקציה f מתקיים $f=f^{+}-f^{-}$ ו-$\left|f\right|=f^{+}+f^{-}$.

למה 4.1 תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה, ותהא $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה; f רציפה בנקודה $x\in D$ אם"ם f^{+} ו-f^{-} רציפות ב-x.

למה 4.2 תהיינה $U\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה פתוחה[4] בעלת נפח ו-$f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה ואי-שלילית.
f אינטגרבילית על U אם"ם מוגדר החסם העליון[5]:

$$\sup\left\{ \int_{K}f\left(x\right)dx\ \middle|\ K\subseteq U,\ \text{קומפקטית ובעלת נפח } K\right\}$$

ובמקרה כזה הוא שווה ל-$\int_{U}f\left(x\right)dx$.

[4] האם באמת יש צורך בכך ש-U תהיה פתוחה?
[5] למה אנחנו עובדים רק עם קבוצות קומפקטיות ולא עם סתם קבוצות בעלות נפח?

מסקנה 4.3. תהיינה $U\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה פתוחה בעלת נפח ו-$f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.
f אינטגרבילית על U אם"ם מוגדרים החסמים העליונים:

$$M:=\sup\left\{ \int_{K}f^{+}\left(x\right)dx\;\middle|\;K\subseteq U,\ K\text{ קומפקטית ובעלת נפח}\right\}$$
$$m:=\sup\left\{ \int_{K}f^{-}\left(x\right)dx\;\middle|\;K\subseteq U,\ K\text{ קומפקטית ובעלת נפח}\right\}$$

ובמקרה כזה מתקיים:

$$\int\limits_{U}f\left(x\right)dx=M-m$$

הגדרה 4.4. אינטגרביליות על קבוצה פתוחה[6]

תהיינה $U\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה פתוחה בעלת נפח ו-$f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה, נאמר ש-f אינטגרבילית על U אם מוגדרים החסמים העליונים:

$$M:=\sup\left\{ \int_{K}f^{+}\left(x\right)dx\;\middle|\;K\subseteq U,\ K\text{ קומפקטית ובעלת נפח}\right\}$$
$$m:=\sup\left\{ \int_{K}f^{-}\left(x\right)dx\;\middle|\;K\subseteq U,\ K\text{ קומפקטית ובעלת נפח}\right\}$$

ובמקרה כזה נסמן:

$$\int\limits_{U}f\left(x\right)dx:=M-m$$

למה אנחנו כל הזמן עובדים דווקא עם קבוצות פתוחות???

בכיתה הגדרנו רק עבור פונקציות רציפות, אין בזה שום צורך.

מסקנה 4.5. תהא f פונקציה אינטגרבילית על קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}^{k}$, מתקיים:

$$\int\limits_{U}f\left(x\right)dx=\int\limits_{U}f^{+}\left(x\right)dx-\int\limits_{U}f^{-}\left(x\right)dx$$

הגדרה 4.6. סדרת מיצוי של קבוצה פתוחה

תהא $U\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה פתוחה, סדרה של קבוצות קומפקטיות ובעלות נפח $\left(K_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ תיקרא סדרת מיצוי של U אם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $K_{n+1}\subseteq K_{n}^{\circ}$ ובנוסף:

$$U=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_{n}$$

5 משפט פוביני וחילוף משתנה

הגדרה 5.1. היעקוביאן[7]

תהא f פונקציה גזירה בנקודה $a\in\mathbb{R}^{k}$, היעקוביאן של f ב-a הוא:

$$J_{f}\left(a\right):=\det\left(Df_{a}\right)$$

[6] שאינה בהכרח בעלת נפח.

[7] נקרא על שמו של קרל גוסטב יעקב יעקובי.