מרחבים וקטוריים - הגדרות בלבד

אלגברה ליניארית (1) - 80134

מרצה: ערן נבו

מתרגלים: איתמר ישראלי ושני שלומי

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

1.1 הגדרת מרחב וקטורי

הגדרה 1.1. מרחב וקטורי (להלן גם: מ"ו) מעל לשדה $\mathbb{F}$ הוא קבוצה V (שאיבריה נקראים וקטורים) בעלת איבר אחד לפחות שיקרא "וקטור האפס" (יסומן ב-0_V ב-$\vec{0}$ או פשוט ב-0) שעליה מוגדרת פעולה דו-מקומית הנקראת "חיבור וקטורי" (תסומן ב-"+") ובנוסף קיימת פעולה דו-מקומית הנקראת "כפל בסקלר" (תסומן ב-"·") מ-$\mathbb{F} \times V$ ל-V כך שמתקיימות 8 התכונות הבאות (נקראות גם "אקסיומות המרחב הווקטורי"):

תכונה	חיבור וקטורי (לכל $v, w, u \in V$)	כפל בסקלר (לכל $v, w \in V$ ולכל $a, b \in \mathbb{F}$)
חילוף (קומוטטיביות)	$v + w = w + v$	ראה הערה 1.
קיבוץ (אסוציאטיביות)	$(v + w) + u = v + (w + u)$	$a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$[1]
קיום איבר אדיש (ניטרלי)	$v + 0_V = v$	$1 \cdot v = v$
קיום איבר נגדי	$\exists x \in V : v + x = 0_V$	ראה הערה 2.
פילוג (דיסטריבוטיביות) ביחס לחיבור וקטורי	$a \cdot (v + w) = (a \cdot v) + (a \cdot w)$[2]	
פילוג (דיסטריבוטיביות) ביחס לחיבור בשדה	$(a + b) \cdot v = (a \cdot v) + (b \cdot v)$[3]	

הערות:

1. אין צורך בחילוף משום שהסקלר נמצא תמיד משמאל לווקטור (ניתן כמובן לאפשר שיבוא מימין ואז לדרוש חילוף).
2. לא שייך לדבר על איבר הופכי משום שהווקטור והסקלר באים (בד"כ) מקבוצות שונות.
3. מהחילוף נובע שלכל $v \in V$ מתקיים גם $0_V + v = v$ ושקיים $x \in V$ כך ש-$x + v = 0_V$.
4. נשים לב שלגבי החיבור הווקטורי דרשנו את כל הדרישות שדרשנו מחיבור בשדה ולכן ניתן "לייבא" טענות משם לכאן, בפרט לכל $v \in V$ קיים נגדי יחיד ומוצדק לתת לו סימון $-v$.
5. כמו בשדה גם במרחב וקטורי החיסור יוגדר כחיבור הנגדי.

♣ החילוף של החיבור הווקטורי נובע מהתכונות האחרות, לכל $v, w \in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned} v + v + w + w &= 1 \cdot v + 1 \cdot v + 1 \cdot w + 1 \cdot w = (1 + 1) \cdot v + (1 + 1) \cdot w \\ &= 1 \cdot v + w + 1 \cdot v + w = v + w + v + w \end{aligned}$$

כעת נחבר לשני האגפים את $-v$ משמאל ו-$-w$ מימין ומהקיבוץ של החיבור הווקטורי נקבל שמתקיים $v + w = w + v$.
למרות זאת זוהי ההגדרה המקובלת, אך יותר מזה: אני לא דוגל בשיטה של "בואו נניח כמה שפחות ונרוויח כמה שיותר", מבחינתי אם המהות של המרחב הווקטורי דורשת שהחיבור הווקטורי יהיה חילופי (וזה אכן המצב) אז ראוי שההגדרה תכלול את התכונה הזו גם אם ניתן להסיק אותה מן האחרות.

סימון: יהי V מרחב וקטורי מעל לשדה $\mathbb{F}$, לכל $v \in V$ ולכל $0 \neq a \in \mathbb{F}$ נסמן:

$$\frac{v}{a} := \frac{1}{a} \cdot v$$

[1] נשים לב שבאגף שמאל שתי פעולות הכפל הן כפל וקטור בסקלר בעוד שבאגף ימין פעולת הכפל השמאלית מתבצעת בשדה.
[2] ישנה מוסכמה שמצעים כפל לפני חיבור ולכן באגף ימין ניתן היה לכתוב $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$
[3] נשים לב שהחיבור באגף שמאל הוא חיבור בשדה ואילו החיבור באגף ימין הוא חיבור וקטורי.

1.2 דוגמאות למרחבים וקטוריים

תזכורת: לכל קבוצה A ולכל $n\in\mathbb{N}$ הגדרנו

$$A^n:=\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{\text{n פעמים}}=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\mid \forall n\geq i\in\mathbb{N}:a_i\in A\}$$

כלומר A^n היא קבוצת הסדרות באורך n (נקראות גם: n-יות) שכל איבריהן ב-A.

סימון: עד כה סימנו סדרות כך: $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, באלגברה ליניארית נוהגים לסמן גם $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ ו-$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$ - אלו סימונים שקולים.

סימון: נכתוב את ה-n-יות ב-$\mathbb{F}^n$ גם בצורה אנכית, נסמן אותן באותיות קטנות ואת האיבר בכל קואורדינטה/אינדקס נסמן ע"י אותה אות קטנה עם האינדקס המתאים; כך יסומן האיבר ה-i ב-n-יה $x\in\mathbb{F}^n$ ע"י x_i[4], כלומר (לכל $x\in\mathbb{F}^n$):

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}:=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}:=(x_1,x_2,\ldots,x_n):=x$$

להלן כמה דוגמאות למרחבים וקטוריים מעל השדה $\mathbb{F}$.

דוגמה 1.2. מרחב הקואורדינטות $\mathbb{F}^n$ עם פעולות החיבור הווקטורי והכפל בסקלר המוגדרות רכיב רכיב - לכל $x,y\in\mathbb{F}^n$ ולכל $a\in\mathbb{F}$ נגדיר את החיבור הווקטורי והכפל בסקלר ע"י:

$$x+y:=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{bmatrix}$$

$$a\cdot x:=a\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}a\cdot x_1\\a\cdot x_2\\\vdots\\a\cdot x_n\end{bmatrix}$$

- ♣ בקובץ ההקדמה לקורס פירטתי את האינטואיציה הגאומטרית של הפעולות הללו כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ו-$n=2$ או $n=3$.
- ♣ ישנו איזומורפיזם ברור מאד בין $\mathbb{F}^1$ ל-$\mathbb{F}$ - נעתיק כל איבר בשדה לסדרה באורך 1 המכילה אותו, א"כ כל שדה הוא מרחב וקטורי מעל עצמו.

[4] פעמים רבות יהיו אלה דווקא וקטורים ממוספרים ולא קואורדינטות של וקטור יחיד - אנו נאמר בפירוש שמדובר בווקטורים כשנעבוד כך, אך גם אם נשכח לעשות זאת יהיה הדבר ברור מן ההקשר, ובנוסף הדבר יקרה כמעט תמיד עם האותיות v, w ו-u (כלומר $v_1,v_2,\ldots,v_n$ הם וקטורים בעוד ש-$x_1,x_2,\ldots,x_n$ הן קואורדינטות של וקטור x).

דוגמה 1.3. מרחב הקואורדינטות האין-סופי $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$[5] עם פעולות החיבור הווקטורי והכפל בסקלר המוגדרות אינדקס אינדקס כבדוגמה הקודמת הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

דוגמה 1.4. תהא A קבוצה, מרחב הפונקציות $\mathbb{F}^A$ עם פעולות החיבור והכפל שלו[6] הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

♣ בפרט ניתן היה להחליף בדוגמה הקודמת את $\mathbb{N}$ ב-$\mathbb{Z}$ ולקבל את מרחב הסדרות האין-סופיות לשני הכיוונים.

דוגמה 1.5. קבוצת הפולינומים בעלי מקדמים ב-$\mathbb{F}$ היא מרחב וקטורי מעליו.

על מרחב זה כתבתי קובץ מפורט בשם "על פולינומים" המופיע באתר שלי במשבצת של הנושאים הבסיסיים., קובץ זה כולל נושאים נוספים ששייכים לליניארית 2, הפרקים השייכים לקורס זה הם הראשון והרביעי.

דוגמה 1.6. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, V הוא מרחב וקטורי מעל כל תת-שדה של $\mathbb{F}$ עם אותן פעולות חיבור וכפל.

♣ א"כ $\mathbb{F}$ הוא מרחב וקטורי מעל כל תת-שדה שלו.

♣ יש לשים לב שכעת הסקלר בו אנו מכפילים את הווקטורים מגיע כעת מתת-השדה ולא מכל השדה, לדוגמה $\mathbb{R}^n$ הוא מ"ו מעל $\mathbb{Q}$ אך $\mathbb{Q}^n$ אינו מ"ו מעל $\mathbb{R}$ מפני שהרי $\sqrt{2}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\notin\mathbb{Q}^n$.

דוגמה 1.7. יהיו $V_1,V_2,\ldots,V_n$ מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$, הקבוצה $V_1\times V_2\times\ldots\times V_n$ עם פעולות החיבור הווקטורי והכפל בסקלר המוגדרות רכיב רכיב:

$$(v_1,v_2,\ldots,v_n)+(w_1,w_2,\ldots,w_n)=(v_1+w_1,v_2+w_2,\ldots,v_n+w_n)$$
$$a\cdot(v_1,v_2,\ldots,v_n)=(a\cdot v_1,a\cdot v_2,\ldots,a\cdot v_n)$$

היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

1.3 תתי-מרחבים וקטוריים

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

הגדרה 1.8. תת-קבוצה $W\subseteq V$ תקרא תת-מרחב וקטורי (להלן גם: תמ"ו) או פשוט תת-מרחב אם מתקיימות שלוש התכונות הבאות:

1. $0_V\in W$
2. W סגורה לחיבור הווקטורי: לכל $w_1,w_2\in W$ מתקיים $w_1+w_2\in W$
3. W סגורה לכפל בסקלר: לכל $w\in W$ ולכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $a\cdot w\in W$

♣ ישנם שני תתי-מרחבים טריוויאליים: V הוא תמ"ו של עצמו ו-$\{0_V\}$ גם הוא תמ"ו של V.

♣ ניתן היה להחליף את התכונה הראשונה בכך ש-$W\neq\emptyset$: הנחנו ש-$W\neq\emptyset$ נוכל לומר "יהי $w\in W$", מהתכונה השלישית נובע שגם $-w=-1\cdot w\in W$ ולכן מהתכונה השנייה נקבל שגם $0_V=w-w\in W$.
ע"פ הפילוסופיה של "בואו נניח כמה שפחות ונרוויח כמה שיותר" זוהי הגדרה טובה יותר אך אני לא מאמין בפילוסופיה הזאת, מבחינתי המהות של תת-מרחב וקטורי היא שהוא מרחב וקטורי בפני עצמו (נראה זאת מיד) ומכיוון שהקיום של וקטור האפס הוא חלק מן המהות של מרחב וקטורי איני מוכן שלא יופיע בהגדרה.

---

[5] כזכור הגדרנו את B^A בתור קבוצת הפונקציות מ-A ל-B, א"כ $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ היא קבוצת הפונקציות מ-$\mathbb{N}$ ל-$\mathbb{F}$ כלומר קבוצת הסדרות האין-סופיות שאיבריהן ב-$\mathbb{F}$.

[6] לכל $f,g:A\to\mathbb{F}$ הגדרנו את $f+g$ ע"י $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$ (לכל $x\in\mathbb{F}$), ולכל $f:A\to\mathbb{F}$ ו-$c\in\mathbb{F}$ הגדרנו את $c\cdot f$ ע"י $(c\cdot f)(x):=c\cdot f(x)$.

מסקנה 1.9. יהי $W \subseteq V$ תת-מרחב וקטורי, W הוא מ"ו בפני עצמו מעל לאותו שדה עם אותן פעולות חיבור וקטורי וכפל בסקלר של V.

♣ מסקנה זו היא המוטיבציה להגדרת תת-מרחב וקטורי.

סימון: פעמים רבות מקצרים וכותבים "$W \leq V$" במקום "$W \subseteq V$ הוא תמ"ו של V", אני כמעט לא אשתמש בסימון הזה בסיכומים אלו.

♣ הסימון הזה הוא סימון כללי במתמטיקה לתת-קבוצה המקיימת את התכונות של הקבוצה הגדולה יותר.

2 תלות ליניארית ופרישה

יהי V מ"ו מעל לשדה $\mathbb{F}$.

הגדרה 2.1. פרוש

- תהא $S \subseteq V$ תת-קבוצה, <u>הפרוש</u> של S הוא חיתוך של כל תתי-המרחבים הווקטוריים שמכילים את S, נסמן אותו ב-$\text{span}S$ או ב-$\langle S \rangle$.
- תהא $(v_i)_{i=1}^n = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ סדרת וקטורים ב-V ($v_i \in V$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$) <u>הפרוש</u> של $(v_i)_{i=1}^n$ הוא הפרוש קבוצת איבריה:

$$\text{span}(v_1, v_2, \ldots, v_n) := \text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

♣ בניגוד לסדרה $(v_i)_{i=1}^n$ הקבוצה S יכולה להיות אין-סופית, אמנם ניתן היה להגדיר פרוש גם עבור סדרות אין-סופיות אך אנו לא נעסוק בסדרות כאלה בקורס זה והכללה זו תסרבל את הכתיבה.

מסקנה 2.2. תהא $S \subseteq V$ תת-קבוצה, מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

- $\text{span}S$ הוא תמ"ו של V.
- $S \subseteq \text{span}S$.
- לכל תמ"ו $W \subseteq V$ המקיים $S \subseteq W$ מתקיים $\text{span}S \subseteq W$.

♣ מסקנה זו היא המוטיבציה להגדרת פרוש, זהו התמ"ו הקטן ביותר שמכיל את S.

♣ כמובן ששלושת הפסוקים הללו מתקיימים גם עבור סדרות ב-V.

הגדרה 2.3. צירוף ליניארי

- תהא $S \subseteq V$ תת-קבוצה, צירוף ליניארי (להלן גם: צר"ל) של S הוא ביטוי מהצורה:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \ldots + a_n \cdot v_n$$

כאשר $a_i \in \mathbb{F}$ ו-$v_i \in S$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.

- תהא $(w_i)_{i=1}^n = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ סדרת וקטורים ב-V, צירוף ליניארי (להלן גם: צר"ל) של $(w_i)_{i=1}^n$ הוא ביטוי מהצורה:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot w_i$$

כאשר $a_i \in \mathbb{F}$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.

♣ שימו לב להבדל בין ההגדרה של צר"ל עבור קבוצה לבין ההגדרה עבור סדרה סופית: בהגדרה עבור סדרה סופית דרשנו שכל הווקטורים ישתתפו בסכימה, כמובן שאפשר לכפול וקטורים לא רצויים באפס ובכך להוציא אותם מהסכימה, אך להבדל הזה תהיה משמעות בהמשך.

♣ הסכום הנ"ל יכול להיות ריק ואז הוא שווה לאיבר האדיש לחיבור שהוא 0_V, א"כ לקבוצה הריקה יש צר"ל יחיד שהוא סכום ריק השווה לווקטור האפס[7].

הגדרה 2.4. תלות ליניארית

- תת-קבוצה $S \subseteq V$ תקרא תלויה ליניארית (להלן גם: ת"ל) אם קיים $v \in S$ כך שקיים צר"ל של איברי $S \setminus \{v\}$ השווה ל-v, אחרת תקרא בלתי תלויה ליניארית (להלן גם: בת"ל).

- סדרת וקטורים $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ב-V תקרא תלויה ליניארית (להלן גם: ת"ל) אם קיים $n \geq k \in \mathbb{N}$ כך שקיים צר"ל של הסדרה $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ השווה ל-v_k, אחרת תקרא בלתי תלויה ליניארית (להלן גם: בת"ל).

♣ ראינו בקובץ הטענות שקבוצת הצר"ל של S היא בדיוק $\text{span}S$ ולכן ההגדרה של קבוצה תלויה ליניארית שקולה לכך שקיים $v \in S$ כך ש-$v \in \text{span}\left(S \setminus \{v\}\right)$.

♣ בניגוד לקבוצה, בסדרה איבר יכול להופיע פעמיים ולכן ע"פ ההגדרה כל סדרה כזו היא תלויה ליניארית, מכאן שאם קבוצת האיברים של סדרה היא קבוצה תלויה ליניארית אז גם הסדרה תלויה ליניארית אך הכיוון ההפוך אינו נכון.

♣ הקבוצה $\{0_V\}$ נחשבת תלויה ליניארית משום ש-0_V הוא ערכו של סכום ריק, כלומר קיים צר"ל של הקבוצה הריקה השווה ל-0_V; לעומת זאת הקבוצה הריקה נחשבת בלתי תלויה ליניארית משום שלא קיים בה וקטור הניתן להצגה כצר"ל של האחרים (לא קיים בה וקטור בכלל).

הגדרה 2.5. פרישה

- נאמר שתת-קבוצה $S \subseteq V$ פורשת או יוצרת את V (או שהיא קבוצה פורשת/יוצרת של V) אם $\text{span}S = V$.

- נאמר שסדרת וקטורים $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ב-V פורשת את V (או שהיא סדרה פורשת של V) אם $\text{span}\left(v_1, v_2, \ldots, v_n\right) = V$.

♣ כפי שראינו $\text{span}S$ הוא תמ"ו וכל תמ"ו הוא מ"ו בפני עצמו, א"כ כל קבוצה פורשת את הפרוש שלה.

הגדרה 2.6. צר"ל של קבוצה/סדרה ייקרא מתאפס אם הוא שווה ל-0_V וייקרא טריוויאלי אם כל הסקלרים שבו הם אפסים (משום שאז מובן מאליו שהוא שווה לווקטור האפס).

[7]תודה לנאוה מקונט על הבנה זו.

3 בסיסים וממדים

יהי V מ"ו מעל לשדה $\mathbb{F}$.

הגדרה 3.1. נאמר ש-V נוצר סופית (להלן גם: נ"ס) אם יש לו קבוצה/סדרה סופית[8] פורשת.

הגדרה 3.2. בסיס

- נאמר שתת-קבוצה $S \subseteq V$ היא בסיס של V אם היא בת"ל ופורשת את V.
- נאמר שסדרת וקטורים $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ב-V היא בסיס (להלן גם: בסיס סדור) של V אם היא בת"ל ופורשת את V.

♣ בקובץ הטענות אנחנו נראה שאם V נ"ס אז יש לו בסיסים וכל שני בסיסים הם בהכרח סופיים ובאותו הגודל, לכן מוצדק לדבר על הגודל הזה כתכונה של V ולתת לו שם.

נניח ש-V נ"ס.

הגדרה 3.3. נסמן ב-$\dim V$ את גודל הבסיסים של V ונקרא לגודל זה הממד של V.

♣ עם קצת אינטואיציה לגאומטריה אוקלידית במרחב ניתן לראות שנקודה אחת מגדירה רק את עצמה, שתי נקודות שונות מגדירות ישר, שלוש נקודות שונות שאינן נמצאות על אותו הישר (לא תלויות ליניארית!) מגדירות מישור וארבע נקודות שאינן נמצאות על מישור אחד כבר פורשות את המרחב התלת-ממדי כולו. מכיוון שאנחנו דורשים שכל תמ"ו יכיל את וקטור האפס כבר יש לנו נקודה אחת ולכן כל וקטור שונה מאפס פורש ישר וכל שני וקטורים שאינם תלויים ליניארית פורשים מישור ושלושה כאלה כבר פורשים את המרחב התלת-ממדי כולו. זו הסיבה לכך שאנו אומרים שהממד של נקודה הוא 0 או שהיא חסרת ממדים, שישר הוא ממד 1, הממד של המישור הוא 2 והמרחב התלת-ממדי נקרא כך מפני שממדו הוא 3.

♣ נחזור לרגע אל הדוגמאות שהבאנו בתחילת הקובץ:

- $\mathbb{F}^n$ הוא מרחב וקטורי נ"ס מעל $\mathbb{F}$ ומתקיים $\dim \mathbb{F}^n = n$.
- הקבוצה הריקה היא בסיס של מרחב האפס ולכן $\dim \{0_V\} = |\emptyset| = 0$.
- אם הקבוצה A אין-סופית אז המרחב $\mathbb{F}^A$ אינו נוצר סופית, בפרט מרחב הקואורדינטות האין-סופי ($\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$) אינו נוצר סופית.
- הממד של $\mathbb{C}$, כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, הוא 2.
- $\mathbb{R}$, כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$, אינו נוצר סופית.

[8] כולל הקבוצה הריקה והסדרה הריקה, כלומר גם מרחב האפס הוא מרחב נ"ס.

4 חיבור קבוצות במרחב וקטורי

יהי V מ"ו מעל לשדה $\mathbb{F}$.

תזכורת: כמו עבור כל פעולה גם עבור החיבור הווקטורי אנו מגדירים $S+T:=\{s+t\mid s\in S,\ t\in T\}$ לכל $S,T\subseteq V$.

4.1 סכומים של תתי-מרחבים וקטוריים

הגדרה 4.1. סכום ישר

נאמר שסדרת תתי-מרחבים $(V_1,V_2,\ldots,V_n)$ של מ"ו V היא בת"ל אם כל סדרת וקטורים $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ כך ש-$0_V\neq v_i\in V_i$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ היא סדרה בת"ל.

נאמר שסדרה כזו היא סכום ישר של V אם היא בת"ל ומתקיים $V=V_1+V_2+\ldots+V_n$, במקרה כזה נסמן:

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\ldots\oplus V_n=\bigoplus_{i=1}^{n}V_i$$

הגדרה 4.2. שני תתי-מרחבים $U,W\subseteq V$ ייקראו משלימים (זה את זה) אם $V=W\oplus U$.

4.2 ישריות

הגדרה 4.3. קבוצה $S\subseteq V$ תקרא ישריה (יִשְׁרִיָּה) אם קיימים תמ"ו $W\subseteq V$ ו-$v\in V$ כך ש-$S=\{v\}+W$.

- ♣ נשים לב שאותו v מקיים $v\in S$ שכן מהיות W תמ"ו נובע ש-$0_V\in W$.
- ♣ במרחב התלת-ממדי ישריות הן נקודות, ישרים ומישורים שאינם עוברים בהכרח בראשית הצירים: אנו לוקחים את W ומזיזים כל נקודה בו ע"פ הווקטור v.
- ♣ מהגדרה לכל $s\in S$ קיים $w\in W$ יחיד כך ש-$s=v+w$.

מסקנה 4.4. תהיינה $S_1,S_2\subseteq V$ ישריות, גם S_1+S_2 היא ישריה.

טענה. תהא $S\subseteq V$ ישריה ויהיו $W,U\subseteq V$ תמ"וים ו-v_1,v_2 כך ש-$S=\{v_1\}+W$ וגם $S=\{v_2\}+U$, מתקיים $W=U$.

- ♣ א"כ לכל ישריה קיים תמ"ו יחיד המקיים את ההגדרה עבורה, מסיבה זו מוצדק לתת לו שם.

הגדרה 4.5. תהא $S\subseteq V$ ישריה ויהיו $W\subseteq V$ תמ"ו ו-$v\in V$ כך ש-$S=\{v\}+W$, W זה יקרא מרחב הכיוונים של S.