דוגמאות לחישובי אינטגרלים

חשבון אינפיניטסימלי (2) - 80132

מרצה: יורם לסט

מתרגלים: דניאל אופנר ומתן בן-אשר

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ג, האונ' העברית

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

דוגמה. יהיו $\alpha \in \mathbb{R}$ ו-$0 < \beta \in \mathbb{R}$.
האינטגרל (הלא אמיתי) $\int_1^\infty x^\alpha \cdot \sin\left(x^\beta\right) dx$ מתכנס אם"ם $\alpha < \beta - 1$.

הוכחה.
נסמן $u := x^\beta$.

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\beta} \cdot u^{\frac{1}{\beta}-1} \Rightarrow dx = \frac{1}{\beta} \cdot u^{\frac{1-\beta}{\beta}}\ \ du$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_1^\infty x^\alpha \cdot \sin\left(x^\beta\right) dx &= \int_1^\infty u^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \sin(u) \cdot \frac{1}{\beta} \cdot u^{\frac{1-\beta}{\beta}} du \\ &= \frac{1}{\beta} \cdot \int_1^\infty u^{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta}} \cdot \sin(u)\, du\end{aligned}$$

- $\Leftarrow$
  נניח ש-$\alpha \geq \beta - 1$ ומכאן ש-$\alpha + 1 - \beta \geq 0$ ולכן גם $\frac{\alpha+1-\beta}{\beta} \geq 0$.
  אם $\frac{\alpha+1-\beta}{\beta} = 0$ אז:

$$\frac{1}{\beta} \cdot \int_1^\infty u^{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta}} \cdot \sin(u)\, du = \frac{1}{\beta} \cdot \int_1^\infty \sin(u)\, du$$

וכבר ראינו שהאינטגרל הלא אמיתי $\int_1^\infty \sin(u)\, du$ אינו מתכנס ולכן גם $\frac{1}{\beta} \cdot \int_1^\infty \sin(u)\, du$ אינו מתכנס.
א"כ נתמקד במקרה שבו $P := \frac{\alpha+1-\beta}{\beta} > 0$, לכל $1 < u \in \mathbb{N}$ מתקיים $u^P > 1$.
ע"פ נוסחת לייבניץ-ניוטון (sin היא פונקציה רציפה בכל $\mathbb{R}$) לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\left|\int_{2\pi n}^{2\pi n+\frac{\pi}{2}} u^{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta}} \cdot \sin(u)\, du\right| &\geq \int_{2\pi n}^{2\pi n+\frac{\pi}{2}} u^{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta}} \cdot \sin(u)\ \ du \geq \int_{2\pi n}^{2\pi n+\frac{\pi}{2}} \sin(u)\ \ du \\ &= -\cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) - \left[-\cos(2\pi n)\right] \\ &= -(-1) - (-1) = 2\end{aligned}$$

א"כ נבחר $\varepsilon := 2$ ולכל $B \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\frac{B}{2\pi} < n$ (ולכן גם $B < 2\pi n < 2\pi n + \frac{\pi}{2}$) המקיים:

$$\left|\int_{2\pi n}^{2\pi n+\frac{\pi}{2}} u^{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta}} \cdot \sin(u)\ \ du\right| \geq 2 = \varepsilon$$

מתנאי קושי להתכנסות של אינטגרל לא אמיתי נובע ש-$\frac{1}{\beta} \cdot \int_1^\infty u^{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta}} \cdot \sin(u)\, du$ מתבדר ולכן גם $\int_1^\infty x^\alpha \cdot \sin\left(x^\beta\right) dx$ מתבדר.

- $\Rightarrow$
  נניח כי $\alpha < \beta - 1$ ומכאן ש-$\alpha + 1 - \beta < 0$ ולכן גם $P := \frac{\alpha+1-\beta}{\beta} < 0$.
  sin היא פונקציה שהצוברת שלה (cos) חסומה ו-u^P היא פונקציה מונוטונית יורדת כך ש-$\lim_{u\to\infty} u^P = 0$ והנגזרת שלה אינטגרבילית על כל תת-קטע סגור של $[1, \infty)$, ממבחן דיריכלה להתכנסות אינטגרלים לא אמיתיים נובע ש-$\frac{1}{\beta} \cdot \int_1^\infty u^{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta}} \sin(u)\, du$ מתכנס ולכן גם $\int_1^\infty x^\alpha \cdot \sin\left(x^\beta\right) dx$ מתכנס.

■

♣ למעשה, מבחינה פורמלית מה שעשינו בשלב הראשון של ההוכחה היה התהליך המפרך המפורט להלן, ודאי תבינו מדוע לא הבאתי אותו ראשון...

תהא $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:

$$f(x)=x^{\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}}\cdot\sin(x)$$

תהא $\varphi:[1,\infty)\to[1,\infty)$ המוגדרת ע"י $\varphi(x)=x^{\beta}$ (לכל $x\in[1,\infty)$), א"כ ילכל $x\in[1,\infty)$ מתקיים $\varphi'(x)=\beta\cdot x^{\beta-1}$.

נשים לב לכך ש-f רציפה וש-φ' אינטגרבילית רימן על כל תת-קטע סגור של $[1,\infty)$ ולכן ניתן להשתמש במשפט ההצבה.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{1}^{\infty}x^{\alpha}\cdot\sin\left(x^{\beta}\right)dx&=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b}\left(x^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\sin\left(x^{\beta}\right)\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\left(x^{\beta}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}\cdot\beta\cdot\left(x^{\beta}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}}dx\\
&=\frac{1}{\beta}\cdot\lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b}\left(x^{\beta}\right)^{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta}}\cdot\sin\left(x^{\beta}\right)\cdot\beta\cdot\left(x^{\beta}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}}dx\\
&=\frac{1}{\beta}\cdot\lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b}\left(\varphi(x)\right)^{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta}}\cdot\sin\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x)\,dx\\
&=\frac{1}{\beta}\cdot\lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b}f\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x)\,dx=\frac{1}{\beta}\cdot\lim_{b\to\infty}\int\limits_{\varphi(1)}^{\varphi(b)}f(t)\,dt\\
&=\frac{1}{\beta}\cdot\lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b^{\beta}}f(t)\,dt=\frac{1}{\beta}\cdot\lim_{c\to\infty}\int\limits_{1}^{c}t^{\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}}\cdot\sin(t)\,dt
\end{aligned}$$

♣ אז איך נמנעים מהסיבוך המיותר הזה? התשובה היא שעלינו להראות שהתנאים למשפט ההצבה מתקיימים ואז לבצע את ההצבה כפי שהיינו עושים עבור אינטגרל לא מסוים ולבסוף עלינו לבחור את הקצוות לפי הערך ש-φ מקבלת עבורם, במקרה הזה כש-x נע בין 1 ל-b $\varphi(x)=u$ נע בין 1^{β} ל-b^{β} ומכיוון שהצוברת רציפה ו-$\lim_{b\to\infty}b^{\beta}=\infty=\lim_{c\to\infty}c$ יכולנו להחליף את b^{β} ב-c.

דוגמה. יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ כך שלפחות אחד מהם אי-זוגי, מתקיים:

$$\int\sin^{n}\theta\cdot\cos^{m}\theta\ d\theta$$

כאשר לפחות אחד מ-n ו-m אי-זוגי.

נניח בהג"כ ש-m אי-זוגי, נציב $u=\sin\theta$

$$\Rightarrow\frac{du}{d\theta}=\cos\theta\Rightarrow du=\cos\theta\ d\theta$$

א"כ נקבל:

$$\begin{aligned}\int\sin^{n}\theta\cdot\cos^{m}\theta d\theta&=\int\sin^{n}\theta\cdot\left(\cos^{2}\theta\right)^{\frac{m-1}{2}}\cdot\cos\left(\theta\right)d\theta\\&=\int\sin^{n}\theta\cdot\left(1-\sin^{2}\theta\right)^{\frac{m-1}{2}}\cdot\cos\left(\theta\right)d\theta\\&=\int u^{n}\cdot\left(1-u^{2}\right)^{\frac{m-1}{2}}du\end{aligned}$$

וזהו כבר אינטגרל של פולינום (נפתח סוגריים).

דוגמה. חישוב גבולות באמצעות אינטגרלי רימן

מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot\sin\left(\frac{1}{k}\right)=\lim_{\delta\to0^{+}}\int\limits_{\delta}^{1}\sin\left(x\right)dx=\int\limits_{0}^{1}\sin\left(x\right)dx=\left(-\cos\left(1\right)\right)-\left(-\cos\left(0\right)\right)=1-\cos\left(1\right)$$