תורת הגרפים - הוכחות נבחרות

מתמטיקה בדידה - 80181

מרצה: צור לוריא

מתרגלת: שני שלומי

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

1 **התחלה** 3

2 **מסלולים וקשירות** 3

3 **מסלולים מיוחדים** 3

4 **עצים** 4

5 **תורת רמזי** 4

6 **קוביות, גרפים דו-צדדיים וזיווגים** 6

קובץ זה נמצא בכתיבה, נכון לרגע זה יש בו שתי הוכחות בלבד.

* * *

תודתי נתונה לגלעד שרם על סיכומיו המצוינים שהיו לי לעזור רב עד כדי כך שניתן לומר שהסיכום הזה מבוסס על סיכומיו.

* * *

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

♣ לכל $n \in \mathbb{N}$ מספר הצלעות ב-K_n הוא $\binom{n}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \sum_{i=1}^{n-1} i$.

יהי $G := (V, E)$ גרף.

טענה 1.1. נסמן $V := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ וא"כ $\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2|E|$, בפרט סכום דרגות הקודקודים של כל גרף הוא זוגי.

מסקנה 1.2. מספר הקודקודים ב-G שדרגתם אי-זוגית הוא אי-זוגי.

2 מסלולים וקשירות

יהי $G := (V, E)$ גרף לא מכוון.

טענה 2.1.

1. G קשיר אם"ם ל-G יש רכיב קשירות יחיד.
2. החיתוך של שני רכיבי קשירות שונים ריק.
3. לכל שני קודקודים ברכיבי קשירות שונים v, u אין צלע המחברת ביניהם ($\{v, u\} \notin E$).

טענה 2.2. נסמן ב-r את מספר רכיבי הקשירות של G, מתקיים $r \geq |V| - |E|$.

3 מסלולים מיוחדים

יהי $G := (V, E)$ גרף לא מכוון.

טענה 3.1. אם $|V| \geq 3$ ו-$|E| \geq |V|$ אז יש ב-G מעגל פשוט.

♣ אין גרפים המקיימים $|E| \geq |V|$ וגם $|V| < 3$, התנאי הראשון מיותר.

נניח ש-G קשיר.

טענה 3.2. אם יש ב-G מעגל אוילר אז דרגתו של כל אחד מן הקודקודים זוגית.

משפט 3.3. יש ב-G מעגל אוילר אם"ם דרגתו של כל אחד מן הקודקודים זוגית.

טענה 3.4. אם יש ב-G מסילת אוילר אז דרגתו של כל אחד מן הקודקודים זוגית או שיש בדיוק שני קודקודים שדרגתם אי-זוגית.

4 עצים

טענה 4.1. בכל עץ יש עלה.

מסקנה 4.2. בכל עץ עם יותר מקודקוד אחד יש שני עלים.

טענה 4.3. יהי $G := (V, E)$ עץ, מתקיים $|E| = |V| - 1$.

טענה 4.4. יהי $G := (V, E)$ גרף קשיר כך ש-$|E| = |V| - 1$, אין ב-G מעגל פשוט (כלומר G הוא עץ).

♣ יחד עם טענה 3.1 נקבל שבגרף קשיר יש מעגל פשוט אם"ם $|E| \geq |V|$.

למה 4.5. יהי $G := (V, E)$ גרף קשיר, אם $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ הוא מעגל פשוט ב-G אז גם הגרף $G' := (V, E \setminus \{v_1, v_2\})$ הוא גרף קשיר.

מסקנה 4.6. יהי $G := (V, E)$ גרף, כל שניים מהתנאים הבאים גוררים את השלישי:

1. G קשיר.
2. G חסר מעגלים פשוטים.[1]
3. מתקיים $|E| = |V| - 1$.

♣ בפרט אם $|E| = |V| - 1$ ומתקיים אחד משני התנאים האחרים אז G הוא עץ.

5 תורת רמזי

טענה 5.1. יהיו $2 \leq n, m \in \mathbb{N}$, אם קיימים $a, b \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים:

1. ב-K_a הצבוע באדום וכחול יש בהכרח תת-גרף K_n הצבוע כולו אדום ו/או תת-גרף K_{m-1} הצבוע כולו כחול.
2. ב-K_b הצבוע באדום וכחול יש בהכרח תת-גרף K_{n-1} הצבוע כולו אדום ו/או תת-גרף K_m הצבוע כולו כחול.

אז ב-K_{a+b} הצבוע באדום וכחול יש בהכרח תת-גרף K_n הצבוע כולו אדום ו/או K_m הצבוע כולו כחול.

הוכחה. נניח שקיימים a, b כנ"ל ונגדיר $(V, E) := K_{a+b}$.
יהי $v \in V$, מהגדרת K_{a+b} מתקיים $\deg(v) = a + b - 1$ ולכן מעקרון שובך היונים נובע שאחד מן השניים מתקיים:

- מקרה 1: יש לפחות a צלעות ב-E הכוללות את v וצבועות כולן בכחול.
- מקרה 2: יש לפחות b צלעות ב-E הכוללות את v וצבועות כולן באדום.

במקרה 1 נתבונן ב-K_a המורכב מהקודקודים המתאימים, ע"פ הנתון יש בו K_n הצבוע כולו אדום (וסיימנו) או שיש בו K_{m-1} הצבוע כולו כחול (ואז נצרף אליו את v ונקבל K_m כחול וסיימנו).
במקרה 2 נתבונן ב-K_b המורכב מהקודקודים המתאימים, ע"פ הנתון יש בו יש בו K_m הצבוע כולו כחול (וסיימנו) או שיש בו K_{n-1} הצבוע כולו אדום (ואז נצרף אליו את v ונקבל K_n אדום וסיימנו).

■

[1] שקול לחסר מעגלים.

משפט 5.2. משפט רמזי[2]
יהיו $2 \le n, m \in \mathbb{N}$, נסמן $N := \binom{n+m-2}{n-1}$ ויהי K_N כשהוא צבוע באדום וכחול, יש ב-K_N תת-גרף K_n שכולו צבוע אדום ו/או שיש ב-K_N תת-גרף K_m שכולו צבוע כחול.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על $n+m$.

- <u>בסיס האינדוקציה:</u> $n+m=4$ ומכאן ש-$n=m=2$ ו-$N := \binom{2+2-2}{2-1} = \binom{2}{1} = 2$ ואכן ב-K_2 יש רק צלע אחת וממילא הוא מקיים שיש בו תת-גרף K_2 הצבוע כולו באותו צבע (אדום/כחול).
- <u>צעד האינדוקציה:</u> יהי $4 \le k \in \mathbb{N}$ ונניח שלכל $2 \le a, b \in \mathbb{N}$ המקיימים $k = a+b$ יש ב-K_N[3] (כשהוא צבוע אדום וכחול) תת-גרף K_aצבוע כולו אדום ו/או שיש בו תת-גרף K_b הצבוע כולו כחול.

  יהיו $2 \le n.m \in \mathbb{N}$ כך ש-$k+1 = n+m$, נשים לב שמתקיים $k = n+(m-1)$ ו-$k = (n-1)+m$ ונגדיר:
  $$N := \binom{n+m-2}{n-1} = \binom{n+m-3}{n-1} + \binom{n+m-3}{n-2} = \binom{n+(m-1)-2}{n-1} + \binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1}$$
  מהנחת האינדוקציה ומהטענה הקודמת נובע שיש ב-K_N תת-גרף K_n שכולו צבוע אדום ו/או שיש ב-K_N תת-גרף K_m שכולו צבוע כחול.

■

מסקנה 5.3. לכל $N < M \in \mathbb{N}$ ובהינתן צביעה של K_M באדום וכחול יש ב-K_M תת-גרף K_n שכולו צבוע אדום ו/או שיש ב-K_M תת-גרף K_m שכולו צבוע כחול.

טענה 5.4. בהינתן צביעה של K_6 באדום וכחול קיים ב-K_6 תת-גרף K_3 שכל צלעותיו צבועות באותו הצבע.

מסקנה 5.5. $R(3,3) = 6$.

טענה 5.6. לכל $2 \le n \in \mathbb{N}$ מתקיים $R(2,n) = n$.

טענה 5.7. מתקיים $R(3,4) = 9$.

טענה 5.8. לכל $2 \le n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $R(n,m) = R(m,n)$.

[2] ערך בוויקיפדיה: פרנק רמזי.
[3] כאשר $N := \binom{a+b-2}{a-1}$.

6 קוביות, גרפים דו-צדדיים וזיווגים

טענה 6.1. ב-$Q_n = (V, E)$ מתקיים:

1. $|V| = 2^n$.
2. $\deg(v) = n$ לכל $v \in V$.
3. $|E| = n \cdot 2^{n-1}$.

טענה 6.2. לכל $2 \leq n \in \mathbb{N}$ יש ב-Q_n מעגל המילטון.

יהי $G := (V_1 \cup V_2, E)$ גרף דו-צדדי כאשר V_1 ו-V_2 הם צדדיו.

טענה 6.3. לכל מעגל $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ב-G מתקיים $n \in \text{Even}$.

♣ זיווג מושלם בגרף דו-צדדי מגדיר פונקציה חח"ע ועל מצד אחד לצד השני, מכאן שאם יש בגרף דו-צדדי זיווג מושלם אז צדדיו באותו גודל.

טענה 6.4. אם קיימים $v, u \in V_1$ שדרגתם היא 1 וקיים $w \in V_2$ כך ש-$\{w, v\}, \{w, u\} \in E$ אז אין ב-G זיווג מושלם.

טענה 6.5. לכל $S \subseteq V_1$ מתקיים $N(S) \subseteq V_2$.

טענה 6.6. אם יש ב-G זיווג מושלם אז לכל $S \subseteq V_1$ מתקיים $|N(S)| \geq |S|$.

♣ זוהי הכללה של טענה 6.4.

משפט 6.7. משפט החתונה - משפט הול[4]

אם $|V_1| = |V_2|$ וגם לכל $S \subseteq V_1$ מתקיים $|N(S)| \geq |S|$ אז יש ב-G זיווג מושלם.

♣ בהנחה ש-$|V_1| = |V_2|$ מתקיים: יש ב-G זיווג מושלם אם"ם $|N(S)| \geq |S|$ לכל $S \subseteq V_1$.

טענה 6.8. אם G הוא גם d-רגולרי (עבור $d \in \mathbb{N}$ כלשהו[5]) אז יש ב-G זיווג מושלם.

---

[4] ערך בוויקיפדיה: פיליפ הול.

[5] d בהכרח שונה מ-0.