פונקציות נפח - הגדרות בלבד

אלגברה ליניארית (1) - 80134

מרצה: ערן נבו

מתרגלים: איתמר ישראלי ושני שלומי

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

1 התחלה **3**

1.1 במרחב וקטורי כללי . . . 4

1.2 מולטי-ליניאריות והתחלפות . . . 5

1.3 במרחב הקואורדינטות . . . 6

2 הדטרמיננטה **7**

3 המטריצה המצורפת וחיות אחרות **7**

3.1 כלל קרמר . . . 7

3.2 המטריצה המצורפת . . . 8

3.3 מטריצת ונדרמונד . . . 9

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

הקדמה

הנה סרטון של 3blue1brown העוסק בדטרמיננטה, מומלץ לצפות בו לפני העיון בקובץ זה.

בנושא הקודם ראינו שהעתקות ליניאריות ממרחב וקטורי לעצמו מעוותות את המרחב בצורה מסוימת, טבעי מאד לשאול עד כמה העתקה ליניארית נתונה מותחת או מכווצת את המרחב שעליו היא פועלת.

כרגיל האינטואיציה שלנו היא המישור ($\mathbb{R}^2$) והמרחב התלת-ממדי ($\mathbb{R}^3$), וכדי לפשט את השאלה אנחנו נשאל פי כמה גדול או קטן השטח/הנפח של הריבוע/הקובייה המוגדרת ע"י וקטורי הבסיס הסטנדרטי - מכיוון שמדובר בהעתקה ליניארית התשובה לשאלה זו תיתן לנו את התשובה עבור כל המישור/המרחב. המשמעות של פישוט השאלה הנ"ל היא שאנו מחפשים פונקציה (שתיקרא הדטרמיננטה ותסומן ב-det) שתקבל סדרה בת שני וקטורים מ-$\mathbb{R}^2$ או שלושה וקטורים מ-$\mathbb{R}^3$ (או n וקטורים מ-$\mathbb{R}^n$) ותחזיר את השטח/הנפח של המקבילית/המקבילון המוגדרים ע"י וקטורים אלה; כפי שכבר הזכרנו לא פעם בעבר ניתן להסתכל על סדרה כזו גם כמטריצה[1] (ריבועית במקרה זה), ואכן אנו נגדיר את הדטרמיננטה כפונקציה ממרחב המטריצות הריבועיות לשדה.

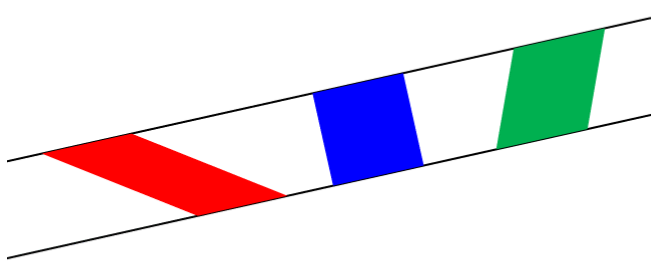
הנה כמה דברים בסיסיים שהיינו רוצים לדרוש מהדטרמיננטה:

תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ ונסמן את העמודה ה-i של A ב-a_i ואת זו של B ב-b_i (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$).

1. $\det I_n=1$.
2. אם A ו-B זהות בכל פרט לכך ש-$b_i=c\cdot a_i$ (עבור $c\in\mathbb{R}$[2] ו-$n\geq i\in\mathbb{N}$) ב-A אז $\det B=c\cdot\det A$.
3. אם A ו-B זהות בכל פרט לכך ש-$b_j=a_j+c\cdot a_i$ (עבור $c\in\mathbb{R}$ ו-$n\geq i,j\in\mathbb{N}$ כך ש-$i\neq j$) אז $\det B=\det A$.

הסבר:

1. הדרישה הראשונה היא סה"כ קובעת שיחידת המידה של השטח/הנפח שלנו היא השטח/הנפח של המקבילית/המקבילון המוגדרים ע"י וקטורי הבסיס הסטנדרטי (במקרה מדובר גם בריבוע/קובייה), אך אין זו דרישה הכרחית, ניתן היה לבחור כל מקבילית/מקבילון אחרים כאמת המידה שלנו.
2. מתיחה של אחת הצלעות במקבילית/מקבילון ע"י כפל בסקלר מגדילה את השטח/הנפח בהתאם.
3. הדרישה הרביעית נראית מוזרה מאוד במבט ראשון, לפני שאנסה לשכנע אתכם שהדטרמיננטה אכן צריכה לקיים אותה אני רוצה להבהיר במה אני צריך לשכנע אתכם: הטענה היא ששטח המקבילית המוגדרת ע"י הווקטורים a_i ו-a_j שווה לשטח המקבילית המוגדרת ע"י הווקטורים a_i ו-$a_j+c\cdot a_i$ (לכל $c\in\mathbb{R}$). כדי לשכנע אתכם אני רוצה שנשים לב לכך שהקבוצה $\{a_j+c\cdot a_i\mid c\in\mathbb{R}\}$ היא ישר המכיל את a_j ומקביל לישר הנפרש ע"י a_i - מכאן שהגובה לצלע המוגדרת ע"י a_i לא השתנה, שהרי זהו המרחק שבין שני הישרים, ולכן גם שטחי המקביליות שווים!



איור 1: השטחים של כל המקביליות שווים משום שלכולן בסיס באותו אורך והגובה הוא המרחק שבין שני הישרים

[1] אין כאן שום בעיה מפני שמטריצה מעתיקה את וקטורי הבסיס הסטנדרטי אל הווקטורים המהווים את סדרת העמודות שלה, ולפיכך היא מותחת או מכווצת את המרחב בדיוק ע"פ היחס בין השטח/הנפח של המקבילית/המקבילון שמגדירות עמודותיה לבין זה שמגדירים וקטורי הבסיס הסטנדרטי.

[2] שימו לב ש-c יכול להיות שלילי, במקרה כזה אנחנו נקבל שטח/נפח "שלילי", כלומר השטח/הנפח שהדטרמיננטה מודדת הוא שטח/נפח מכוון.

במובן מסוים אנחנו מבצעים כאן דילוג מחשבתי: אנחנו רוצים לעסוק בשטחים ונפחים עוד לפני שיש לנו מושג מהו אורך במרחב וקטורי (על האורך נלמד בקורס הבא), למזלנו שלוש התכונות שראינו לעיל מספיקות כדי לאפיין את הדטרמיננטה, כלומר קיימת רק פונקציה אחת המקיימת את שלוש התכונות הנ"ל (נוכיח זאת בהמשך), זו גם הסיבה לכך שלא הבאתי כאן דרישות בסיסיות נוספות כגון: שאם אחת העמודות במטריצה היא כפולה של אחרת (או אפילו צר"ל של העמודות האחרות) אז הדטרמיננטה היא 0, שהדטרמיננטה של מטריצה אלכסונית היא מכפלת הסקלרים שעל האלכסון וכו'.

1.1 במרחב וקטורי כללי

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל לשדה $\mathbb{F}$ ונסמן $n := \dim V$.

הגדרה 1.1. פונקציית נפח

פונקציה $D : V^n \to \mathbb{F}$ תיקרא <u>פונקציית נפח</u> אם היא מקיימת את שתי התכונות הבאות:

1. לכל $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ ולכל $c \in \mathbb{F}$ מתקיים $D\left(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, \boldsymbol{c \cdot v_i}, v_{i+1}, \ldots, v_n\right) = \boldsymbol{c} \cdot D\left(v_1, v_2, \ldots, v_n\right)$.
2. לכל $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, לכל $n \geq i, j \in \mathbb{N}$ כך ש-$i \neq j$ ולכל $c \in \mathbb{F}$ מתקיים $D\left(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, \boldsymbol{v_i + c \cdot v_j}, v_{i-1}, , \ldots, v_n\right) = D\left(v_1, v_2, \ldots, v_n\right)$.

♣ את האינטואיציה שמאחורי הגדרה זו כבר ראינו לעיל אלא שכאן אנו עובדים עם מרחב וקטורי כללי ולכן אין לנו את בסיס סטנדרטי שיהווה את אמת המידה.

♣ אם $V = \mathbb{F}^n$ נוכל להתייחס ל-V^n כ-$M_n(\mathbb{F})$ ואז התכונה הראשונה אומרת שהכפלת אחת העמודות בסקלר מכפילה את התמונה באותו סקלר, ואילו התכונה השנייה אומרת שהוספת כפולה של עמודה אחת לאחרת אינה משנה את התמונה.

♣ שימו לב לדמיון שבין התכונות הללו לשתי פעולות השורה האלמנטריות האחרונות (הכפלת שורה בסקלר והוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת).

♣ ניתן היה להחליף את התכונה השנייה בכך שמתקיים $D\left(v_1, v_2, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_n\right) = D\left(v_1, v_2, \ldots, v_n\right)$ (ללא כפל בסקלר) משום שיחד עם התכונה הראשונה יתקיים (נניח בהג"כ ש-$i < j$ וש-$c \neq 0$):

$$\begin{aligned}
D\left(v_1, v_2, \ldots, v_i + c \cdot v_j, \ldots, v_j \ldots, v_n\right) &= D\left(v_1, v_2, \ldots, v_i + c \cdot v_j, \ldots, c^{-1} \cdot c \cdot v_j \ldots, v_n\right) \\
&= c^{-1} \cdot D\left(v_1, v_2, \ldots, v_i + c \cdot v_j, \ldots, c \cdot v_j \ldots, v_n\right) \\
&= c^{-1} \cdot D\left(v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, c \cdot v_j \ldots, v_n\right) \\
&= c^{-1} \cdot c \cdot D\left(v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_j \ldots, v_n\right) = D\left(v_1, v_2, \ldots, v_n\right)
\end{aligned}$$

למרות זאת בחרתי להגדיר את התכונה השנייה משום שאינני מחזיק בשיטה האומרת "נניח כמה שפחות כל עוד נרוויח את אותו הדבר", לדעתי המהות (האינטואיטיבית) של פונקציית נפח אינה מבדילה בין הוספה של וקטור לבין הוספה של כפולה שלו (כפי שהסברתי לעיל) ולכן גם ההגדרה הפורמלית לא צריכה להבדיל ביניהן.

♣ גם פונקציית האפס היא פונקציית נפח ע"פ הגדרה זו.

♣ במקומות אחרים מגדירים פונקציית נפח ע"י מולטי-ליניאריות והתחלפות ו/או מגדירים פונקציות נפח על מטריצות ריבועיות בלבד (ולא על סדרות וקטורים), אנחנו נראה שההגדרה ע"י מולטי-ליניאריות והתחלפות שקולה לזו שהגדרנו ושהיא מהווה הכללה של ההגדרה עבור מטריצות.

1.2 מולטי-ליניאריות והתחלפות

יהי V מרחב וקטורי מעל לשדה $\mathbb{F}$.

הגדרה 1.2. מולטי-ליניאריות

נאמר שפונקציה $f:V^n\to\mathbb{F}$ היא מולטי-ליניארית אם היא ליניארית בכל רכיב בנפרד;
כלומר לכל $v_1,v_2,\ldots,v_n\in V$, לכל $w\in V$ ולכל $c\in\mathbb{F}$ מתקיים (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$):

$$f\left(v_1,v_2,\ldots,v_{i-1},\boldsymbol{v_i}+\boldsymbol{w},v_{i+1},\ldots,v_n\right)=f\left(v_1,v_2,\ldots,\boldsymbol{v_i},\ldots,v_n\right)+f\left(v_1,v_2,\ldots,v_{i-1},\boldsymbol{w},v_{i+1},\ldots,v_n\right)$$

$$f\left(v_1,v_2,\ldots,v_{i-1},\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{v_i},v_{i+1},\ldots,v_n\right)=\boldsymbol{c}\cdot f\left(v_1,v_2,\ldots,\boldsymbol{v_i},\ldots,v_n\right)$$

הגדרה 1.3. התחלפות

- נניח שב-$\mathbb{F}$ מתקיים $1+1\neq 0$[3], נאמר שפונקציה מולטי-ליניארית $f:V^n\to\mathbb{F}$ היא מתחלפת אם לכל $\in$ $v_1,v_2,\ldots,v_n$ Vמתקיים:

$$f\left(v_1,v_2,\ldots v_{i-1},\boldsymbol{v_j},v_{i+1}\ldots,v_{j-1},\boldsymbol{v_i},v_{j+1},\ldots,v_n\right)=-f\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)$$

  כלומר החלפת שני וקטורים זה בזה הופכת את הסימן של התמונה.

- נניח שב-$\mathbb{F}$ מתקיים $1+1=0$, נאמר שפונקציה מולטי-ליניארית $f:V^n\to\mathbb{F}$ היא מתחלפת אם לכל $v_1,v_2,\ldots,v_n\in V$ כך ש-$v_i=v_j$ ו-$i\neq j$ (לכל $n\geq i,j\in\mathbb{N}$) מתקיים $f\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)=0$.

♣ אנחנו רוצים את שתי התכונות בפונקציה מתחלפת: החלפת זה בזה הופכת את הסימן ושני וקטורים זהים מאפסים את התמונה, הבעיה היא שהתכונה השנייה אמנם גוררת את הראשונה תמיד[4]:

$$0=f\left(v+w,v+w\right)=f\left(v,v\right)+f\left(v,w\right)+f\left(w,v\right)+f\left(w,w\right)=f\left(v,w\right)+f\left(w,v\right)$$

אבל כדי שהראשונה תגרור את השנייה עלינו להניח ש-$1+1\neq 0$[5]:

$$f\left(v,v\right)=-f\left(v,v\right)$$

$$\Rightarrow\left(1+1\right)\cdot f\left(v,v\right)=f\left(v,v\right)+f\left(v,v\right)=0$$

אם למישהו יש הוכחה לכך שגם כאשר $1+1=0$ התכונה הראשונה גוררת את השנייה, או לחלופין: יש דוגמה לפונקציה מולטי-ליניארית המקיימת את התכונה הראשונה ואינה מקיימת את התכונה השנייה - אשמח לשמוע על כך.

♣ יש המגדירים את התכונות הללו עבור שני וקטורים באינדקסים סמוכים, זה לא משנה מפני שניתן להחליף שני וקטורים שאינם סמוכים ע"י סדרה של החלפות של וקטורים סמוכים ובכל סדרה כזו יש מספר אי-זוגי של מהלכים שכל אחד מהם הופך את הסימן[6] כך שבסופו של דבר אנחנו מקבלים את הנגדי.

---

[3] כלומר המאפיין של $\mathbb{F}$ אינו 2.

[4] מובאת כאן הוכחה עבור $n=2$ אבל הוכחה זו תקפה לכל $1<n\in\mathbb{N}$ עם ההתאמות נדרשות.

[5] גם הוכחה זו תקפה לכל $1<n\in\mathbb{N}$ עם ההתאמות הנדרשות.

[6] באותה דרך שהוכחנו קודם שכל החלפה הופכת את הסימן נוכיח כעת שכל החלפה של וקטורים סמוכים הופכת את הסימן.

1.3 במרחב הקואורדינטות

נניח כעת ש-$V = \mathbb{F}^n$ ונשתמש באיזומורפיזם בין V^n ל-$M_n(\mathbb{F})$.

הגדרה 1.4. פונקציית נפח במרחב הקואורדינטות

פונקציה $D : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ תיקרא פונקציית נפח אם היא מקיימת את שתי התכונות הבאות:

1. לכל שתי מטריצות $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, אם A מתקבלת מ-B ע"י כפל עמודה כלשהי בסקלר $c \in \mathbb{F}$ אז $D(A) = c \cdot D(B)$.
2. לכל שתי מטריצות $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, אם A מתקבלת מ-B ע"י הוספת כפולה של עמודה אחת לעמודה אחרת אז $D(A) = D(B)$.

♣ כבר עכשיו ניתן לראות מהתכונה השנייה שהערך שמחזירה פונקציית נפח עבור מטריצה משולשית שווה לערך שהיא מחזירה עבור המטריצה האלכסונית שיש לה את אותו אלכסון ראשי.

הגדרה 1.5. מולטי-ליניאריות במרחב הקואורדינטות

נאמר שפונקציה $f : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ היא מולטי-ליניארית אם היא מקיימת את שתי התכונות הבאות:

1. לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ ולכל $c_1, c_2, \ldots, c_i, c_i', \ldots, c_n \in \mathbb{F}^n$ מתקיים

$$f\left(\begin{bmatrix} | & | & & | & & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_i + c_i' & \cdots & c_n \\ | & | & & | & & | \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} | & | & & | & & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_i & \cdots & c_n \\ | & | & & | & & | \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} | & | & & | & & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_i' & \cdots & c_n \\ | & | & & | & & | \end{bmatrix}\right)$$

2. לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in \mathbb{F}$ מתקיים

$$f\left(\begin{bmatrix} | & | & & | & & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & x \cdot c_i & \cdots & c_n \\ | & | & & | & & | \end{bmatrix}\right) = x \cdot f\left(\begin{bmatrix} | & | & & | & & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_i & \cdots & c_n \\ | & | & & | & & | \end{bmatrix}\right)$$

הגדרה 1.6. התחלפות במרחב הקואורדינטות

- נניח שב-$\mathbb{F}$ מתקיים $1 + 1 \neq 0$, נאמר שפונקציה $f : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ היא מתחלפת אם לכל $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}^n$ ולכל $n \geq i, j \in \mathbb{N}$ כך ש-$i < j$ מתקיים:

$$f\left(\begin{bmatrix} | & | & & | & | & | & & | & | & | & & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{i-1} & c_j & c_{i+1} & \cdots & c_{j-1} & c_i & c_{j+1} & \cdots & c_n \\ | & | & & | & | & | & & | & | & | & & | \end{bmatrix}\right) = -f\left(\begin{bmatrix} | & | & & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}\right)$$

- נניח שב-$\mathbb{F}$ מתקיים $1 + 1 \neq 0$, נאמר שפונקציה $f : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ היא מתחלפת אם לכל מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ בעלת שתי עמודות זהות מתקיים $f(A) = 0$.

♣ במקומות אחרים מגדירים מולטי-ליניאריות והתחלפות ע"פ שורות המטריצה ולא ע"פ העמודות, אנחנו נראה שזה לא משנה מפני שלכל פונקציית נפח מתקיים $f(A^t) = f(A)$ וכל פונקציה מולטי-ליניארית מתחלפת היא פונקציית נפח.[7]

[7] אנחנו לא מתעניינים כרגע בפונקציות מולטי-ליניאריות שאינן מתחלפות.

2 הדטרמיננטה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

הגדרה 2.1. תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה נסמן ב-A_{ij} את תת-המטריצה של A הנוצרת ע"י מחיקת השורה ה-i והעמודה ה-j (עבור $n \geq i, j \in \mathbb{N}$), תת-מטריצה כזו תיקרא מינור של A.

♣ שימו לב: ע"פ הסימונים שלנו $[A]_{ij}$ ו-a_{ij} הם האיבר שבקואורדינטה ה-ij של A ואילו A_{ij} הוא המינור הנוצר ממחיקת השורה ה-i והעמודה ה-j.

הגדרה 2.2. פונקציית נפח $D : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ תיקרא מנורמלת אם $D(I_n) = 1$.

♣ בקובץ הטענות אנחנו נראה שבכל מרחב קואורדינטות קיימת פונקציית נפח מנורמלת יחידה, ובפרט בכל מרחב קואורדינטות קיימת פונקציית נפח שאינה פונקציית האפס.

הגדרה 2.3. פונקציית נפח מנורמלת נקראת דטרמיננטה והיא מסומנת ב-det או ב-$|\cdot|$ (כלומר $\det A = |A|$).

♣ בקובץ הטענות אנחנו נראה שהדטרמיננטות של מטריצות דומות שוות, מכאן שלכל ה"ל $f : V \to V$ מעל מ"ו נ"ס V ולכל שני בסיסים $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ של V מתקיים:

$$\det\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right) = \det\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right)$$

כלומר הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת אינה משתנה אם נחליף את הבסיס, זוהי תכונה שנובעת מההעתקה הליניארית עצמה.

הגדרה 2.4. יהי V מ"ו נ"ס, תהא $f : V \to V$ ה"ל ויהי $\mathcal{B}$ בסיס סדור של V, הדטרמיננטה של f היא $\det\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$.

3 המטריצה המצורפת וחיות אחרות

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

3.1 כלל קרמר

למה. תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה, יהי $b \in \mathbb{F}^n$ ונסמן ב-$A^{(i)}$ את המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת העמודה ה-i ב-b (לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$).
אם קיים $x \in \mathbb{F}^n$ כך ש-$A \cdot x = b$ אז עבור אותו x מתקיים (לכל $n \geq k \in \mathbb{N}$):

$$\det A^{(k)} = (\det A) \cdot x_k$$

♣ כדי שנוכל להסביר את האינטואיציה הגאומטרית מאחורי הלמה נשים לב לשלוש נקודות:

- $\det A$ הוא הפקטור שבו A מותחת/מכווצת **כל** צורה בעלת נפח n-ממדי.
- $A^{(k)}$ היא סדרת התמונות של איברי הבסיס הסטנדרטי מלבד העמודה ה-k שמוחלפת ב-b שהוא תמונה של x.
- הנפח של המקבילון הנוצר ע"י וקטורי הבסיס הסטנדרטי כאשר e_k מוחלף ב-x הוא בדיוק x_k.

לפיכך $\det A^{(k)}$ הוא הנפח של המקבילון הנ"ל כשהוא מוכפל בפקטור המתיחה/הכיווץ שהוא $\det A$.

♣ את האינטואיציה הזו למדתי מסרטון של 3blue1brown, אמנם הוא מדבר שם דווקא על מצב שבו A הפיכה אך היא תקפה בכל מצב שבו יש ל-b מקור.

מסקנה. כלל קרמר[8]

תהא $P\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה הפיכה, יהי $b\in\mathbb{F}^{n}$ ונסמן ב-$P^{(i)}$ את המטריצה המתקבלת מ-P ע"י החלפת העמודה ה-i ב-b (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$).

הפתרון היחיד לממ"ל $P\cdot x=b$ הוא:

$$x:=\frac{1}{\det P}\cdot\begin{bmatrix}\det P^{(1)}\\ \det P^{(2)}\\ \vdots\\ \det P^{(n)}\end{bmatrix}$$

כלומר הקואורדינטה ה-i של הפתרון היא $\frac{1}{\det P}\cdot\det P^{(i)}$.

♣ כלל קרמר אינו יעיל במיוחד לחישובים (אפילו לא כדי להשיג קואורדינטה בודדת של הפתרון) וזאת משום שהחישוב הישיר של הדטרמיננטה ארוך ומייגע, ואם אנחנו כבר מדרגים את המטריצה כדי לחשב את הדטרמיננטה נוכל למצוא בקלות את כל הפתרון כפי שעשינו בעבר. כוחו של כלל קרמר הוא ביכולת שלו להראות את קיום הפתרון ע"פ הדטרמיננטה.

3.2 המטריצה המצורפת

♣ תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$, הלמה שלעיל (לפני כלל קרמר) מעלה בנו את הרעיון להגדיר את הפונקציה הבאה - תהא $f_{A}:\mathbb{F}^{n}\to\mathbb{F}^{n}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לעכל $b\in\mathbb{F}^{n}$):

$$f_{A}\left(b\right)=\begin{bmatrix}\det A_{b}^{(1)}\\ \det A_{b}^{(2)}\\ \vdots\\ \det A_{b}^{(n)}\end{bmatrix}$$

כאשר $A_{b}^{(i)}$ היא המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת העמודה ה-i ב-b (לכל $b\in\mathbb{F}^{n}$ ולכל $n\geq i\in\mathbb{N}$).

ע"פ הלמה f_{A} מעתיקה כל וקטור אל אחד המקורות שלו (אם קיים כזה) ביחס לפונקציה T_{A} עד כדי כפל בקבוע $\det A$, ולכן במובן מסוים היא הופכית של T_{A} גם אם T_{A} אינה הפיכה.

מתכונות הדטרמיננטה נובע ש-f הנ"ל היא העתקה ליניארית ולכן קיימת מטריצה יחידה $B\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ כך ש-$f_{A}=T_{B}$, אבל איזו מטריצה זו?

[8] ערך בוויקיפדיה: גבריאל קרמר.

הגדרה 3.1. תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה ($n>1$), המטריצה המצורפת של A (נקראת גם הצמודה הקלאסית) היא המטריצה $\text{adj}A$ המוגדרת ע"י (לכל $n\geq i,j\in\mathbb{N}$):

$$[\text{adj}A]_{ij}:=(-1)^{i+j}\cdot|A_{ji}|$$

- ♣ נשים לב שלכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ מתקיים $A_{ji}=\left(A_b^{(i)}\right)_{ji}$, ולכן אם נפתח את הדטרמיננטה של $A_b^{(i)}$ לפי העמודה ה-i נקבל שלכל $b\in\mathbb{F}^n$ הקואורדינטה ה-i של $(\text{adj}A)\cdot b$ היא:

$$\sum_{j=1}^{n}[\text{adj}A]_{ij}\cdot b_j=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot|A_{ji}|\cdot b_j=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot\left|\left(A_b^{(i)}\right)_{ji}\right|\cdot\left[A_b^{(i)}\right]_{ji}=\det A_b^{(i)}$$

כלומר $\text{adj}A$ היא המטריצה שחיפשנו.

- ♣ לעיל ראינו ש-f_A מחזירה כל וקטור למקורו (אם יש לו כזה) ביחס ל-T_A כשהוא מוכפל בקבוע $\det A$, מכאן שמתקיים $(\text{adj}A)\cdot A=(\det A)\cdot I_n$ ולכן אם A הפיכה אז $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\text{adj}A$.

בדרך כלל מוכיחים את כלל קרמר באמצעות המטריצה המצורפת (זו ממש אלגברה פשוטה אחרי הנוסחה המפורשת של הדטרמיננטה), אני בחרתי להציג אותם בסדר הפוך מפני שהאינטואיציה לכלל קרמר אינה קשורה למטריצה המצורפת (שללא ההסבר לעיל נראית כהגדרה אלגברית מוזרה ביותר) ויתרה מזאת - כלל קרמר הוא הסיבה לכך שהמטריצה המצורפת מוגדרת דווקא כך.

- ♣ מהעובדה שהדטרמיננטה של מטריצה ושל המשוחלפת שלה שוות נקבל שמתקיים (לכל $n\geq i,j$):

$$[\text{adj}A]_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot|A_{ji}|=(-1)^{i+j}\cdot\left|\left(A^t\right)_{ij}\right|$$

בדרך זו קל יותר לחשב כל קואורדינטה במטריצה המצורפת.

- ♣ כדי לזכור את הסימן הנוצר ע"י הביטוי "$(-1)^{i+j}$" ניתן להיעזר בלוח השחמט - במשבצות הלבנות מתקיים $(-1)^{i+j}=1$ ובמשבצות השחורות נקבל $(-1)^{i+j}=-1$.

תזכורת: בשחמט נהוג לשחק כאשר המשבצת הימנית התחתונה לבנה וממילא גם השמאלית העליונה כזו.

3.3 מטריצת ונדרמונד

הגדרה 3.2. מטריצת ונדרמונד[9]

מטריצת ונדרמונד היא מטריצה שבה כל שורה היא סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא 1, כלומר עבור $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ זוהי מטריצה מהצורה הבאה:

$$\begin{bmatrix}1 & x_1 & (x_1)^2 & \ldots & (x_1)^{n-1}\\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \ldots & (x_2)^{n-1}\\ 1 & x_3 & (x_3)^2 & \ldots & (x_3)^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_m & (x_m)^2 & \ldots & (x_m)^{n-1}\end{bmatrix}$$

כאשר $x_1,x_2,\ldots,x_m\in\mathbb{F}$.

[9] ערך בוויקיפדיה אלכסנדר ונדרמונד.