80131 - (1) חשבון אינפיניטסימלי

מרצה: רז קופרמן

מתרגלים: אור יער ודניאל רוזנבלט

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

תוכן העניינים

3	ולה	התח	1
3	פונקציות זוגיות ואי-זוגיות	1.1	
4	טענות וזהויות טריגונומטריות	1.2	
5	של פונקציה בנקודה	גבול	2
5	אפיון היינה ותנאי קושי	2.1	
6	משפטים נוספים	2.2	
6	חסימות וסדר		3
7	רציפות		4
7	משפטי רציפות	4.1	
8	פולינומים ופונקציות טריגונומטריות	4.2	
9	ת במובן הרחב		5
12	וונוטוניות		6
13	יכות		7
14	קציה האקספוננציאלית	8 הפונקציה האקספוננציאלית	
14	הגדרת הפונקציה האקספוננציאלית	8.1	
14	תכונות הפונקציה האקספוננציאלית	8.2	
15	הלוגריתם הטבעי	8.3	
15	חזקה ממשית ולוגריתמים בבסיסים שונים מ-e e חזקה ממשית ולוגריתמים בבסיסים שונים	8.4	
16	יפות במידה שווה		9

באינפי' 1 השלמנו כמה נושאים שלא למדנו בסמסטר שלפניו. באינפי' זאת הבאתי אותם כאן מפני שהם שייכים לחומר של אינפי' 1 .

* * *

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד, כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה; אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

> לסיכומים נוספים היכנסו לאתר: אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה https://srayaa.wixsite.com/math

^{. (80132)} א' תשפ"ג (80132). 1

²הנושאים שהושלמו הם: אסימפטוטות, תנאי קושי לגבולות (במובן הצר ובמובן הרחב) ורציפות במידה שווה.

1 התחלה

1 התחלה

במתמטיקה המודרנית פונקציה היא מושג מתורת הקבוצות וככזו ישנם מושגים ומשפטים רבים בנושא שאינם קשורים דווקא למספרים הממשיים (ראו בקובץ "תורת הקבוצות הנאיבית"), בקבצים אלו נעסוק אך ורק בהגדרות ובמשפטים הקשורות למספרים הממשיים.

- אם $\mathbb R$ (אלא אם בכל הסיכומים של קורסי אינפי' נדבר אך ורק על פונקציות שהתחום והטווח שלה הם תתי-קבוצות של (או איחוד של מקטעים) ועל הקורא נאמר אחרת במפורש), כמעט תמיד יהיה מדובר בפונקציה שהתחום שלה הוא מקטע $^{\mathfrak s}$ (או איחוד של מקטעים) ועל הקורא תוטל המשימה להבין מן ההקשר מתי מדובר גם בפונקציות שהתחום שלהן אינו בהכרח מקטע.
- ישנה הסכמה מקובלת למחצה שאם נתון רק כלל ההתאמה של פונקציה (ללא התחום ו/או הטווח) אז הטווח הוא \blacksquare והתחום הוא קבוצת כל הנקודות ב- \blacksquare שעבורן כלל ההתאמה מוגדר, מוסכמה זו נקראת "מוסכמת התחום המרבי" ונתקלנו בה כבר בתיכון; למרות הנוחות שבמוסכמה זו אני אשתדל שלא להסתמך עליה ולציין בכל מקום במפורש את התחום והטווח.

1.1 פונקציות זוגיות ואי-זוגיות

תהיינה $f,g:D o\mathbb{R}$ שתי פונקציות.

.1.1 טענה

- וגית. f+g אם f+g זוגיות אז יוגית f+g
- אי-זוגית. f+g אי-זוגיות אז אם f+g אי-זוגית.

.1.2 טענה

- . אם f ו-g זוגיות אז $f \cdot g$ זוגיות יוגיות •
- אנית. $f \cdot g$ אם $f \cdot g$ זוגיות אי $f \cdot g$ זוגיות.
- אי-זוגית $f \cdot g$ אי-זוגית g אי-זוגית $f \cdot g$
- בפרט הכפלה בקבוע אינה משנה את הזוגיות/אי-זוגיות של פונקציה.

 $x \in D$ לכל $q(x) \neq 0$ נניח ש-1.3 למה 1.3.

- . אם g זוגית אז גם $\frac{1}{g}$ זוגית
- אם g אי-זוגית אז גם $\frac{1}{q}$ אי-זוגית.

מסקנה 1.4.

- . אם f ווg זוגיות אז f זוגית י
- . אם f ו-g אי-זוגיות אז $\frac{f}{g}$ זוגית י
- אר-זוגית אז $\frac{f}{g}$ אי-זוגית פg- אם יוגית ווגית פ

 $^{.(}a,b)\subseteq I$ מתקיים $a,b\in I$ כך שלכל בך כך ו $I\subseteq\mathbb{R}$ תת-קבוצה הוא מקטע מקטיים הזכורת:

.טענה $h_2:B o C$ יות. $h_1:A o B$ פונקציות. 1.5 טענה

- . נניח h_1 זוגית, אם h_2 זוגית או ש- h_2 אי-זוגית אז ווגית, אם h_2 זוגית.
- . נניח ש- h_1 זוגית, אם h_1 זוגית או ש- h_1 אי-זוגית אז אי זוגית, אם נניח ש-
 - אי-זוגית. $h_2\circ h_1$ אם $h_2\circ h_1$ אי-זוגית אי

 $x \in D$ טענה 1.6. תהיינה $h_1,h_2:D o \mathbb{R}$ שתי פונקציות שתי 1.6. תהיינה

$$h_1(x) = f(x) - f(-x)$$

 $h_2(x) = f(x) + f(-x)$

אי-זוגית ו- h_2 זוגית.

 $f=f_{ ext{Odd}}+f_{ ext{Even}}$ מענה 1.7. קיים זוג פונקציות יחיד $f_{ ext{Odd}}+f_{ ext{Even}}$ כך ש- $f_{ ext{Odd}}$ אי-זוגית ו- $f_{ ext{Codd}}$ זוגית יחיד $f_{ ext{Even}}=f_{ ext{Odd}}$ כך ש- $f_{ ext{Odd}}=f_{ ext{Odd}}$ מענה 1.7. קיים זוג פונקציות המוגדרות ע"י (לכל $f_{ ext{Even}}=f_{ ext{Odd}}=f_{ ext{Odd}}$

$$f_{\text{Odd}}(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$
$$f_{\text{Even}}(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

1.2 טענות וזהויות טריגונומטריות

לא נגדיר כאן את הפונקציות הטריגונומטריות ונסתמך על הגדרתן ע"פ מעגל היחידה כפי שלמדנו בתיכון כאשר את הזוויות נמדוד ברדיאנים.

 $|\cos heta| \leq 1$ וגם $|\sin heta| \leq 1$ טענה 1.8 לכל

 $|\sin heta| \leq | heta|$ מתקיים $heta \in \mathbb{R}$ טענה 1.9. לכל

:טענה 1.10. לכל $lpha, eta, heta \in \mathbb{R}$ מתקיימות הזהויות הבאות

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\sin\left(\alpha \pm \beta\right) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta \qquad \qquad \cos\left(\alpha \pm \beta\right) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \qquad \qquad \cos\alpha + \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \qquad \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

טענה sin .1.11 היא פונקציה אי-זוגית ו-cos היא פונקציה זוגית.

2 גבול של פונקציה בנקודה

2 גבול של פונקציה בנקודה

משפט 2.1. יחידות הגבול

 $a\in\mathbb{R}$ יש לכל היותר גבול אחד בנקודה f לפונקציה

 $\lim_{x \to 0} f\left(a + x
ight)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה a, הגבול קיים אם הגבול פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה a, הגבול נקודה המחקיים גם:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to 0} f(a+x)$$

2.1 אפיון היינה ותנאי קושי

משפט 2.3. אפיון היינה⁴ לגבול של פונקציה בנקודה

 $L \in \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ ויהי של נקודה מנוקבת בסביבה מנוקציה מנוקציה פונקציה מנוקבת

 $\lim_{n \to \infty} f\left(x_n
ight) = L$ מתקיים U-ם שכל איבריה ב-u שכל איבריה לכל סדרה לכל סדרה לכל סדרה אם ווו $\lim_{x \to a} f\left(x\right) = L$

 $a \in \mathbb{R}$ מסקנה U של נקודה מנוקבת המוגדרת פונקציה המוגדרת פונקציה מוקבת f

לפונקציה u בירה ב-u הסדרה u אם"ם לכל סדרה u אם"ם לכל סדרה u אם"ם לכל סדרה u אם"ם לכל שנקציה u אם שכל איבריה ב-u אם אם"ם לכל סדרה לפונקציה u אם"ם לכל סדרה לכל סדרה מתרנסת

משפט 2.5. אפיון היינה לגבול חד-צדדי של פונקציה בנקודה

 $L \in \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ ויהי של נקודה U של נקודה $a \in \mathbb{R}$ ויהי מנית/שמאלית

 $\lim_{n \to \infty} f\left(x_n
ight) = L$ מתקיים U- מתקיים שכל איבריה שכל איבריה לכל סדרה לכל סדרה לכל סדרה ווו $\lim_{x \to a^\pm} f\left(x
ight) = L$ מתקיים

 $a\in\mathbb{R}$ מסקנה 2.6. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית/שמאלית f של נקודה

 $(f(x_n))_{n=1}^\infty$ הסדרה ב- שכל איבריה ב- a שכל שכל מימין/משמאל בנקודה $a \in A$ אם"ם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ המתכנסת ל- $a \in A$ אם שכל בנקודה $a \in A$ הסדרה בתכנסת.

משפט 2.7. תנאי קושי לגבול של פונקציה בנקודה

 $a \in \mathbb{R}$ של מנוקבת מנוקבת המוגדרת המוגדרת פונקציה המוגדרת

תנאי הכרחי ומספיק לקיום הגבול $\lim_{x\to a}f\left(x\right)$ הוא שלכל $\delta\in\mathbb{R}$ קיימת הכרחי ומספיק לקיום הגבול $\lim_{x\to a}f\left(x\right)$ הוא שלכל $\left|f\left(x_{1}\right)-f\left(x_{2}\right)\right|<\varepsilon$

משפט 2.8. תנאי קושי לגבול חד-צדדי של פונקציה בנקודה

a שלית מנוקבת של מוגדרת מנית/שמאלית פונקציה ותהא $a \in \mathbb{R}$ מוגדרת בסביבה מוגדרת מנוקבת של

תנאי הכרחי ומספיק לקיום הגבול $\lim_{x \to a^+} f\left(x\right)$ הוא שלכל הכרחי ומספיק לקיום הגבול ווm $_{x \to a^+} f\left(x\right)$ הוא הכרחי ומספיק לקיום הגבול $|f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right)| < \varepsilon$

תנאי הכרחי ומספיק לקיום הגבול $x_1,x_2\in(a-\delta,a)$ כך שלכל $0<\delta\in\mathbb{R}$ קיימת שלכל שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ מתקיים הגבול $\lim_{x\to a^-}f(x)$ הגבול $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

 $^{^{4}}$ ערך בוויקיפדיה: אדוארד היינה.

2.2 משפטים נוספים

משפט 2.9. אריתמטיקה של גבולות

:תהיינה פונקציות ממשיות המוגדרות בסביבה מנוקבת של $a\in\mathbb{R}$ בך שהגבולות הבאים קיימים

$$l := \lim_{x \to a} f(x), \ m := \lim_{x \to a} g(x)$$

:מתקיימים כל הפסוקים הבאים

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = l+m$$
 .1

$$\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = l\cdot m$$
 .2

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$$
 אז $m \neq 0$ 3.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$
 אם $m \neq 0$ אם .4

המשפט נובע ישירות מאפיון היינה לגבול של פונקציה בנקודה ומאריתמטיקה של גבולות לסדרות.

משפט 2.10. משפט ההצבה בגבולות לפונקציות לא רציפות

תהיינה $m:=\lim_{y\to l}g\left(y\right)$ ו ו $l:=\lim_{x\to a}f\left(x\right)$ שתי פונקציות כך שתי פונקציות פונק $g:B\to C$ ו ו $f:A\to B$ היינה $\lim_{x\to a}\left(g\circ f\right)\left(x\right)=m$ שתיימת שקיים שקיימת של בוסף שקיימת סביבה $u\in U$ של בוסף שקיימת סביבה של בוסף שקיימת סביבה של הי), אם נתון בנוסף שקיימת סביבה של היט, אם נתון בנוסף שקיימת סביבה של היט, אם נתון בנוסף שקיימת סביבה של היט, אם נתון בנוסף שקיימת סביבה של היט של היט של היט של היט של היט של היט שקיימת סביבה של היט ש

3 חסימות וסדר

 $a \in \mathbb{R}$ של U פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של f,g,h

. טענה 1 $\lim_{x\to a}g$ ו וי $\lim_{x\to a}f\left(x\right)$ קיימים. 3.1 טענה 3.1 נניח שהגבולות

$$l \leq m$$
 אז $f(x) < g(x)$ מתקיים $x \in U$ אז .1

$$x \in B_{\delta}^{\circ}(a)$$
 אז $f(x) < g(x)$ פך ש- $0 < \delta \in \mathbb{R}$ אז קיימת $\lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x)$.2

משפט 3.2. משפט הכריך

U-טענה 3.3. אם הגבול $\lim_{x \to a} f(x)$ קיים אז קומית ב-

$$\lim_{x \to a} (f(x) - l) = 0$$
 סענה 3.4. הגבול $\lim_{x \to a} f(x)$ קיים אם

משפט 3.5. כלל אפסה וחסומה

$$\lim_{x \to a} \left(f \cdot g \right) (x) = 0$$
 אם $\lim_{x \to a} f \left(x \right) = 0$ אם lim $_{x \to a} f \left(x \right) = 0$

 $\left| 7 \right|$ רציפות 4

4 רציפות

4.1 משפטי רציפות

משפט 4.1. אפיון היינה לרציפות של פונקציה בנקודה

 $a \in \mathbb{R}$ של נקודה U של בסביבה המוגדרת פונקציה המוגדרת פונקציה המוגדרת

 $\lim_{n \to \infty} f\left(x_n
ight) = f\left(a
ight)$ מתקיים ב-U מתקיים ל-u שכל המתכנסת ל-u המתכנסת ל-u המתכנסת ל-u המתכנסת ל-u

מסקנה 4.2. אפיון היינה לרציפות חד-צדדית של פונקציה בנקודה

 $a \in \mathbb{R}$ של נקודה U של מנית/שמאלית בסביבה המוגדרת פונקציה המוגדרת מנית/שמאלית

 $\lim_{n \to \infty} f\left(x_n\right) = f\left(a\right)$ מתקיים Uב מימין/משמאל ב-u אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-

משפט 4.3. אריתמטיקה של רציפות

. באים: פונקציות הפסוקים שלושת מתקיימים הבאים, $a\in\mathbb{R}$ בנקודה רציפות פונקציות וועק פונקציות הפסוקים הבאים:

- a-ביפה ב-f+g .1
- a-ב רציפה ב-2
- a-ם ביפה גם $\frac{1}{a}$ רציפה ב-3.
- a-ם a- אז גם אז a רציפה ב-4.

משפט 4.4. משפט ההצבה בגבולות לפונקציות רציפות

תהיינה $g:A \to B$ ו ו- $g:A \to B$ ו היא נקודה פנימית $g:A \to B$ ו ו- $g:A \to B$ ו ו- $g:A \to B$ ו היינה מנימית מחיינה $g:A \to B$ ו ו- $g:A \to B$ ו ו-g

- המשפט נובע כמעט באופן ישיר ממשפט ההצבה בגבולות לפונקציות לא רציפות (משפט 2.10).
 - A-ביפה ב- $g\circ f$ אז $g\circ f$ רציפה ב-g רציפה ב-g רציפה ב-

 $y \in \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ ויהי בנקודה רציפה פונקציה פונקציה משפט 4.5.

- $x\in U$ לכל $f\left(x
 ight) >y$ של כך של סביבה סביבה אז לכל לכל $f\left(a
 ight) >y$ אם •
- $x \in U$ לכל $f\left(x\right) < y$ של כך ש- a של u סביבה אז קיימת אז קיימת סביבה u
- . המשפט נכון גם עבור רציפות חד-צדדית וסביבה חד-צדדית מתאימה.

משפט 4.6. משפט ערך הביניים

 $f\left(c
ight)=y$ פרנקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, לכל [a,b], לכל $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, לכל

.מסקנה f פונקציה רציפה המוגדרת על מקטע כלשהו, גם התמונה של f היא מקטע מסקנה f.

משפט 4.8. משפט ויירשטראס הראשון

I-ם חסומה f , $I\subseteq\mathbb{R}$ חסומה ב-קטע סגור f חסומה ב-

משפט 4.9. עיקרון המקסימום והמינימום של ויירשטראס (משפט ויירשטראס השני)

. תהא f (ו-f) יש מקסימום ומינימום f יש מקסימום ומינימום ומינימום f יש מקסימום ומינימום).

. רציפה ($f\left(x\right):=|x|$) טענה 4.10 פונקציית הערך המוחלט

 $[\]left[f\left(a
ight),f\left(a
ight)
ight]=\left\{f\left(b
ight)
ight\}$ אז מדובר ב"קטע" הסגור $f\left(a
ight)=f\left(b
ight)$ אם לאם ל

⁶ערך בוויקיפדיה: קארל ויירשטראס.

4.2 פולינומים ופונקציות טריגונומטריות

. רציפה (Id (x):=x) טענה 4.11 פונקציית הזהות

מסקנה 4.12. כל פולינום הוא פונקציה רציפה.

: כך שמתקיים ($a_{n-1} \neq 0$) $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ כלומר קיימים, תוקן מדרגה מתוקן מדרגה $p \in \mathbb{R}[x]$ כל שמתקיים.

$$p(x) = x^{n} + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_{1} \cdot x + a_{0}$$

יהיו $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ כנ"ל.

(ובנוסף: $p\left(x\right) > 0$ מתקיים $M \leq x \in \mathbb{R}$ קיים ס
 $0 < M \in \mathbb{R}$ קיים

- $p\left(x
 ight)>0$ מתקיים $-M\geq x\in\mathbb{R}$ אז לכל $n\in\mathrm{Even}$
- $p\left(x
 ight)<0$ מתקיים $-M\geq x\in\mathbb{R}$ אז לכל $n\in\mathrm{Odd}$ אם

 $p\left(x
ight)=0$ - פרלינום מתוקן כך ש-deg $p\in \mathrm{Odd}$, קיים $x\in \mathbb{R}$ כך ש- $p\in \mathbb{R}\left[x
ight]$ מסקנה 4.14 יהי

 $p\left(x
ight)=y$ פולינום מתוקן כך ש-deg $p\in \mathrm{Odd}$, לכל $y\in \mathbb{R}\left[x
ight]$ פולינום מתוקן כך פולינום מתוקן כך ש-deg $p\in \mathrm{Odd}$

. יש ל- $p \in \mathbb{R}\left[x
ight]$ יש ל- $p \in \mathbb{R}\left[x
ight]$ משפט 4.16. יהי יהי ו $p \in \mathbb{R}\left[x
ight]$ פולינום מתוקן כך

: המקיים $m\in\mathbb{R}$ קיים, $\deg p\in \mathrm{Even}$ בולינום מתוקן כך פולינום $p\in\mathbb{R}\left[x\right]$ המקיים

- x(x)=yיים $x\in\mathbb{R}$ קיים $m\leq y\in\mathbb{R}$.1
- $p\left(x
 ight)=y$ בך ש-ע כך לא קיים $x\in\mathbb{R}$ לא קיים מ

. מסקנה 4.18. יהי $p\in\mathbb{R}\left[x
ight]$ פולינום מדרגה $n\in\mathbb{N}$ מתקיימים כל הפסוקים הבאים מסקנה

- $q\left(x
 ight)=y$ ע כך ש- $x\in\mathbb{R}$ קיים $y\in\mathbb{R}$ אז לכל $n\in\mathrm{Odd}$ אם $n\in\mathrm{Odd}$
 - $n \in$ נניח שויח •
- $x\in\mathbb{R}$ כך שלכל $m>y\in\mathbb{R}$ ולכל $p\left(x
 ight)=y$ כך ש $x\in\mathbb{R}$ כך שלכל $m\leq y\in\mathbb{R}$ לא קיים $m\leq y\in\mathbb{R}$ לא קיים m>0 כך שy=y נקודת מינימום.
- לא קיים $M< y\in \mathbb{R}$ אז קיים p(x)=y אז פרים $x\in \mathbb{R}$ קיים $M\geq y\in \mathbb{R}$ כך שלכל $M\in \mathbb{R}$ אז קיים $h_n< 0$ אם סימום. $h_n< 0$ בפרט יש ל- $h_n< 0$ בפרט יש ל- $h_n< 0$ כך ש- $h_n< 0$ כך ש- $h_n< 0$ כך ש-

טענה 4.19. הפונקציות sin רציפות.

:טענה 4.20. מתקיים

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

5 גבולות במובן הרחב

5 גבולות במובן הרחב

כמעט כל המשפטים הבאים הם גרסאות של המשפטים המתאימים לגבול של פוקנציה בנקודה והוכחותיהם דומות מאד לאלו שכבר ראינו.

משפט 5.1. תהא f פונקציה, הגבול $\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)$ קיים במובן הרחב הרחב ובמקרה $\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)$ קיים במובן הרחב ובמקרה זה מתקיים גם:

$$\lim_{x \to \mp \infty} f\left(-x\right) = \lim_{x \to \pm \infty} f\left(x\right)$$

משפט 5.2. אפיון היינה לגבולות במובן הרחב

 $A \in \mathbb{R}$ ויהי פונקציה $f:A \to B$ תהא

- , $a\in\mathbb{R}$ של נקודה U שכל איבריה שייכים לu מתקיים u שם"ם לכל סדרה u של סדרה u של סדרה u שכל איבריה שייכים לu מתקיים u של המתכנסת לu של המתכנסת לבים לכל סדרה u של המתכנסת לבים של המתכנסת לבים של המתכנסת המתכנסת המתכנסת של המתכנסת המתכנ
- , $a\in\mathbb{R}$ של נקודה U של נניח ש-U מתקיים U-שמתקיים שכל איבריה שייכים לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ אם"ם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ המתכנסת ל-U מתקיים U-שיכים ל-U מתקיים U-שיכים לכל סדרה לבע מדרה שייכים לכל סדרה U-שיכים לכל סדרה לבע מתקיים לכל סדרה U-שיכים לכל סדרה לבע מתקיים לבע מתקיים לכל סדרה לבע מתקיים לכל סדרה לבע מתקיים לכל סדרה לבע מתקיים לכל מתקיים לכל סדרה לבע מתקיים לכל סדרה לבע מתקיים לכל מתקיים לבע מתקיים לבע
 - ,D מוגדרת על קרן ימנית f •
- $\lim_{n \to \infty} f\left(x_n\right) = L$ מתקיים D- מתקיים שכל איבריה לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ אם"ם לכל סדרה $\lim_{x \to \infty} f\left(x\right) = L$ מתקיים D- מתקיים לכל סדרה $\lim_{n \to \infty} f\left(x_n\right) = \lim_{x \to \infty} f\left(x\right) = \pm \infty$ שכל איבריה שייכים ל- $\lim_{x \to \infty} f\left(x\right) = \pm \infty$ שכל סדרה $\lim_{x \to \infty} f\left(x\right) = \pm \infty$
 - D נניח שf מוגדרת על קרן שמאלית •
- $\lim_{n\to -\infty}f\left(x_n
 ight)=$ מתקיים ב-D מתקיים שכל איבריה לכל סדרה מדרה אם"ם לכל סדרה $\left(x_n
 ight)_{n=1}^\infty$ אם"ם לכל סדרה $\lim_{x\to -\infty}f\left(x\right)=L$
- D-ט שייכים שייכים ל- $-\infty$ שייכים ל- $(x_n)_{n=1}^\infty$ אם"ם לכל סדרה אם"ם איבריה שייכים ל- $\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\pm\infty$. $\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=\pm\infty$

$\pm\infty$ -משפט 5.3. תנאי קושי לגבול של פונקציה ב

- $\lim_{x \to \infty} f\left(x
 ight)$ הוא שלכל $\lim_{x \to \infty} f\left(x
 ight)$ הגבול ומספיק הגרות ומספיק פניקציה המוגדרת בקרן המנית, תנאי הכרחי ומספיק לקיום הגבול $\left|f\left(x_1
 ight) f\left(x_2
 ight)
 ight| < arepsilon$ מתקיים $M < x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ כך שלכל $M \in \mathbb{R}$
- $0<arepsilon\in\mathbb{R}$ הוא שלכל $\lim_{x o-\infty}f\left(x
 ight)$ הגבול הגבול ומספיק שמאלית, תנאי הכרחי ומספיק קיים f המוגדרת בקרן שמאלית, תנאי הכרחי ומספיק $m>x_1,x_2\in\mathbb{R}$ כך שלכל $m>x_1,x_2\in\mathbb{R}$

משפט 5.4. אריתמטיקה של גבולות במובן הרחב

. פיימים הבאים פונקציות ממשיות המוגדרות בקרן מתאימה כך שהגבולות הבאים קיימים g-ו ו-g

$$l := \lim_{x \to +\infty} f(x), \ m := \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

$$\lim_{x \to \pm \infty} (f + g)(x) = l + m$$
 .1

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f\cdot g)(x) = l\cdot m$$
 .2

$$\lim_{x \to \pm \infty} rac{1}{g(x)} = rac{1}{m}$$
 אם $m
eq 0$ אם .3

$$\lim_{x \to \pm \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$
 אם $m \neq 0$.4

משפט 5.5. משפט ההצבה בגבולות במובן הרחב

gו פונקציות המוגדרות על כל הישר gו ו-g

- $l:=\lim_{x o\pm\infty}f\left(x
 ight)$ נניח ש- $l:=\lim_{x o\pm\infty}f\left(x
 ight)$ נניח
- $\lim_{x\rightarrow\pm\infty}\left(g\circ f\right)\left(x\right)=g\left(l\right)$ אם אז מתקיים gרציפה ב-lאם רציפה ב-
- קיים במובן $\lim_{x \to l} g\left(x\right)$ והגבול בקרן לכל $f\left(x\right) \neq l$ שנית קרן ימנית/שמאלית קרן ימנית/שמאלית קרן אינה רציפה ב-lim אינה הרחב אז

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(g\circ f\right)\left(x\right)=\lim_{x\to l}g\left(x\right)$$

- $\lim_{x o\pm\infty}\left(g\circ f\right)\left(x
 ight)=\lim_{x o\infty}g\left(x
 ight)$ אם הגבול $\lim_{x o\infty}g\left(x
 ight)$ קיים במובן הרחב אז $\lim_{x o\pm\infty}f\left(x
 ight)=\infty$.
- $\lim_{x \to \pm \infty} \left(g \circ f\right)(x) = \lim_{x \to -\infty} g\left(x\right)$ נניח שיש, אם הגבול הגבול ווו $\lim_{x \to -\infty} g\left(x\right)$ אם הגבול הגבול יים במובן הרחב אז יים במובן הרחב $\lim_{x \to +\infty} f\left(x\right) = -\infty$

משפט 5.6. משפט הפרוסה

 $.f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$ מתקיים $x\in\mathbb{R}$ שלכל כל הישר כל מל המוגדרות המוגדרות פונקציות היינה g

- $\lim_{x\to\pm\infty}g\left(x\right)=\infty$ אם אז $\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=\infty$ •
- $\lim_{x o \pm \infty} f\left(x
 ight) = -\infty$ כמו כך, אם אם $\lim_{x o \pm \infty} g\left(x
 ight) = -\infty$ כמו כך, אם אם •

משפט 5.7. כלל אפסה וחסומה לגבולות במובן הרחב

. פונקציות המוגדרות על כל הישר gו- ו- gוינה תהיינה g

- $\lim_{x \to \infty} \left(f \cdot g \right)(x) = 0$ אם פרן ימנית אז וgו וו $\lim_{x \to \infty} f\left(x \right) = 0$ אם •
- $\lim_{x \to -\infty} \left(f \cdot g \right)(x) = 0$ אם מלרע בקרן שמאלית וו $\lim_{x \to -\infty} f\left(x
 ight) = 0$ כמו כן, אם •

משפט 5.8. כלל המכפלה לגבולות במובן הרחב

 $a \in \mathbb{R}$ פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של נקודה g-ו ו-g

- $\lim_{x o a}\left(f\cdot g
 ight)(x)=\infty$ אם $\lim_{x o a}f\left(x
 ight)=\infty$ וגם $\lim_{x o a}f\left(x
 ight)=\infty$ אם •
- $\lim_{x o a}\left(f\cdot g
 ight)(x)=-\infty$ אם חיובי אז $\lim_{x o a}f\left(x
 ight)=-\infty$ אם הסומה מלרע ע"י

[.] ניתן גם להגדיר אותן רק על הקרנות המתאימות, הערה זו תקפה גם בשני המשפטים הבאים.

5 גבולות במובן הרחב

. פונקציה f:A o B מונקציה. סענה 5.9

 $x\in U$ לכל $f\left(x
ight)
eq0$ כך ש- $a\in\mathbb{R}$ כקודה של נקודה מנוקבת סביבה מכילה סביבה לניח ש-

$$\lim_{x
ightarrow a} rac{1}{|f(x)|} = \infty$$
 אם $\lim_{x
ightarrow a} f\left(x
ight) = 0$ אם –

$$\lim_{x
ightarrow a} rac{1}{f(x)} = 0$$
 אם או $\lim_{x
ightarrow a} |f\left(x
ight)| = \infty$ -

, נניח ש-A מכילה קרן שמאלית כך ש- $f\left(x\right)
eq 0$ לכל x בקרן מכילה מכילה קרן שמאלית כך

$$\lim_{x o \pm \infty} rac{1}{|f(x)|} = \infty$$
 אם $\lim_{x o \pm \infty} f\left(x
ight) = 0$ אם -

$$\lim_{x o \pm \infty} rac{1}{f(x)} = 0$$
 אם ווו $\lim_{x o \pm \infty} |f\left(x
ight)| = \infty$.

:מתקיים f מתקיים מה שהטענה אומרת בעצם הוא שלכל

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty \iff \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x \to \pm \infty} |f(x)| = \infty \Longleftrightarrow \lim_{x \to \pm \infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

טענה 5.10. תהא $\pm\infty$ ב אם"ם מתקיים (במובן $\{(x,ax+b)\mid x\in\mathbb{R}\}$ פונקציה, ישר $f:D o\mathbb{R}$ אם מתקיים (במובן הוא אסימפטוטה הצר):

$$\lim_{x \to \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \to \pm \infty} (f(x) - ax) = b$$

: טענה $\lim_{x \to \infty} p\left(x\right) = \infty$ יהיים מתוקן מדרגה מתוקן פולינום פולינום $p \in \mathbb{R}\left[x\right]$ יהי יהי .5.11

- $\lim_{x \to -\infty} p(x) = \infty$ וא $n \in \text{Even}$ אם •
- $\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$ אז $n \in \text{Odd}$ אם •

.מסקנה 1.5.12 ימי של החזקה ה- $n\in\mathbb{N}$ פולינום מדרגה $p\in\mathbb{R}\left[x
ight]$ את המקדם של החזקה ה-n-ית שלו.

- $a_n>0$ נניח ש
- . $\lim_{x\to\infty}p\left(x\right)=\infty$ וגם ווח $\lim_{x\to\infty}p\left(x\right)=\infty$ אז מתקיים הא $n\in \mathrm{Even}$ –
- . $\lim_{x\to\infty}p\left(x\right)=-\infty$ וגם $\lim_{x\to\infty}p\left(x\right)=\infty$ אז מתקיים הא $n\in\mathrm{Odd}$
 - $a_m < 0$ ננים ש
- . $\lim_{x\to\infty}p\left(x\right)=-\infty$ אז $\lim_{x\to\infty}p\left(x\right)=-\infty$ אז מתקיים הא $n\in \mathrm{Even}$ אם הא n
 - . $\lim_{x\to\infty}p\left(x\right)=\infty$ וגם ואם ואם $\lim_{x\to\infty}p\left(x\right)=-\infty$ אז מתקיים $n\in\mathrm{Odd}$

cטענה 5.13. יהיו $a_n
eq 0$ ו- $a_n \neq 0$ כך שמתקיים ($b_m \neq 0$ ו- $a_n \neq 0$) כ $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ ויהיו

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

$$g(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + b_1 \cdot x + b_0$$

- $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ אם n < m .
- $\lim_{x \to \infty} \frac{f\left(x
 ight)}{g\left(x
 ight)} = \frac{a_n}{b_n}$ אם n = m אם
 - m > mננים ש

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$
 אם $\operatorname{sgn}(a_n) = \operatorname{sgn}(b_m)$ אם -

.
$$\lim_{x \to \infty} \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = -\infty$$
 אז $\mathrm{sgn}\left(a_{n}\right) \neq \mathrm{sgn}\left(b_{m}\right)$ –

6 מונוטוניות

טענה 6.1. קיום גבולות חד-צדדיים של פונקציות מונוטוניות וחסומות:

- וחסומה מלעיל בסביבה הגבול $a\in\mathbb{R}$ של נקודה U של נקודה בסביבה המוגדרת בסביבה וו, הגבול המוגדרת בסביבה $a\in\mathbb{R}$ וחסומה ליים ושווה ל- $\lim_{x\to a^-}f(x)$
- $\lim_{x \to a^+} f\left(x
 ight)$ אוחסומה מלרע בסביבה זו, הגבול של נקודה עולה מנית של נקודה $a \in \mathbb{R}$ של נקודה בסביבה ימנית בסביבה זו, הגבול נחואה בסביבה ימנית של נקודה ליים ושווה ל- $\inf f\left(U
 ight)$.
- 13. תהא $a\in\mathbb{R}$ וחסומה מלרע בסביבה הגבול בסביבה וו, הגבול המוגדרת פונקציה מונוטונית יורדת המוגדרת בסביבה האלית שמאלית ווווה ל- $\lim_{x\to a^-}f(x)$
- $\lim_{x \to a^+} f\left(x
 ight)$ זו, הגבול בסביבה מונוטונית וודת של נקודה $a \in \mathbb{R}$ של נקודה של נקודה בסביבה או, הגבול פריכה מונוטונית וודת המוגדרת בסביבה מניית של נקודה $a \in \mathbb{R}$ המניח המוגדרת בסביבה מניית של נקודה של נקודה של נקודה מונוטונית וודת המוגדרת בסביבה מניית של נקודה של נקודה של נקודה של נקודה של נקודה מניית מונוטונית וודת בסביבה המוגדרת בסביבה מניית בסביבה מניית בסביבה המוגדרת בסביבה מניית בסביבה מניית בסביבה המוגדרת בסביבה מניית בסביבה בסביבה בסביבה מניית בכיבה מניית בסביב

a של נקודה אז שני הגבולות אז שני הגבולות מסקנה f אם אם $a\in\mathbb{R}$ אם מנוסונית החד-צדדיים של פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה a

- , $\lim_{x \to a^{-}} f\left(x\right) \leq \lim_{x \to a^{+}} f\left(x\right)$ אם f מונוטונית עולה אז •
- $\lim_{x\to a^{-}} f(x) \geq \lim_{x\to a^{+}} f(x)$ או יורדת אז יורדת אז יורדת אז •

 $a \in \mathbb{R}$ מסקנה 6.3. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה של

- , $\lim_{x \to a^{-}} f\left(x\right) \leq f\left(a\right) \leq \lim_{x \to a^{+}} f\left(x\right)$ אם f מונוטונית עולה אז
- $\lim_{x\to a^{-}}f\left(x
 ight)\geq f\left(a
 ight)\geq \lim_{x\to a^{+}}f\left(x
 ight)$ אם f מונוטונית יורדת אז •

. טענה 6.4. תהא [a,b] באותו סוג מונוטונית ב[a,b] אז [a,b] באותו סוג מונוטוניות. f פונקציה רציפה, אם מונוטונית ב-[a,b]

13 7 הפיכות

הפיכות

.טענה f מונוטונית ממש. f פונקציה מונוטונית וחח"ע, f מונוטונית ממש

. משפט 3.7. תהא $f:I o\mathbb{R}$ מונוטונית ממש פוחי"ע המוגדרת על מקטע $f:I o\mathbb{R}$ מונוטונית ממש

: פונקציה פסוקים אחד משני מתקיים אחד משני $f:[a,b] o \mathbb{R}$ משפט 7.3. תהא

- $\operatorname{Im} f = [f(a), f(b)]$ עולה ממש ואז $f \bullet$
- $\operatorname{Im} f = [f(b), f(a)]$ יורדת ממש ואז $f \bullet$
- המשפט נכון גם עבור מקטעים שאינם קטעים סגורים אך בשינוי קל: התמונה של פונקציה רציפה וחח"ע המוגדרת על מקטע היא מקטע בעל אותן תכונות של סגירות/פתיחות, כלומר לכל אחת משלוש הקטגוריות הבאות הפונקציה תעתיק מקטע מקטגוריה כלשהי למקטע מאותה קטגוריה:
 - .1 מקטעים סגורים קטעים סגורים.
 - 2. מקטעים פתוחים קטעים פתוחים, קרנות פתוחות והישר כולו.
 - 3. מקטעים חצי סגורים קטעים חצי סגורים וקרנות סגורות.

. רציפה f^{-1} משפט 7.4. תהא $f:[a,b] o\mathbb{R}$ משפט 7.4. תהא

האינטואיציה למשפט היא שהגרף של f^{-1} הוא שיקוף הגרף של f ביחס לאלכסון הראשי, כלומר כל ציור של הגרף של הוא הגרף של f^{-1} (נחליף בין הצירים), ולכן אם אפשר "לצייר" את הגרף של f מבלי "להרים את העיפרון fמהדף" הרי שבכך "ציירנו" גם את הגרף של f^{-1} מבלי לעשות זאת.

כדאי להוסיף תמונה.

את y- מכיוון y- ביפה y- נקבל המשמט שהפונקציה המצומצמת המצומצמת העונק $f^{-1}(y) \in I'$ את לקטע סגור I'. מקומית תכונה היא צמצום של f^{-1} נדע שגם f^{-1} היא רציפה שהרי רציפות היא מכונה מקומית.

. מסקנה $f:[0,\infty) \to f$ ותהא $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ ותהא $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ ותהא פונקציה המוגדרת ע"י מסקנה $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$

משפט 7.6. תהא f פונקציה מונוטונית והפיכה, f^{-1} היא פונקציה מונוטונית בעלת אותו סוג מונוטוניות, כלומר מתקיים אחד משני :הפסוקים הבאים

- . עולה ממש ואז גם f^{-1} עולה ממש f .1
- . עולה ממש ואז גם f^{-1} יורדת ממש f .2
- גם כאן (כמו במשפטים רבים העוסקים בפונקציות הפיכות) עוזרת ההבחנה שהגרף של f^{-1} הוא שיקוף הגרף של fלאלכסון הראשי.

. מסקנה $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ ותהא $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ ותהא $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ מסקנה $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ ותהא $\lim_{x \to 0} \sqrt[n]{x} = 0$ וכמו כן גם ווו $\lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{x} = \infty$ מתקיים $n \in \mathbb{N}$ לכל 7.8 מסקנה

I'ט שהיא הופכית של f המצומצמת הופכית שהיא $\left(f\mid_{I'}\right)^{-1}$ כוונתי לפונקציה -8

8 הפונקציה האקספוננציאלית

8.1 הגדרת הפונקציה האקספוננציאלית

יים. $\lim_{n\to\infty}a_n$ סדרה שהגבול $a_n:=\left(1+rac{lpha}{n}
ight)^n$ סדרה המוגדרת ע"י סדרה מוגדרת ע"י $a_n:=\left(1+rac{lpha}{n}
ight)^n$ סדרה המוגדרת ע"י סדרה a_n סדרה מונוטונית עולה. a_n

.טענה 8.2 חסומה $\left(a_n
ight)_{n=1}^{\infty}$.

.מסקנה (a_n) $_{n=1}^\infty$.8.3 מסקנה

 $x\in\mathbb{R}$ מסקנה 1.8.4 הגבול $\lim_{n o\infty}\left(1+rac{x}{n}
ight)^n$ קיים לכל

8.2 תכונות הפונקציה האקספוננציאלית

.exp (x)>0 מתקיים $x\in\mathbb{R}$ לכל .8.5 טענה

.exp $(x) \geq 1 + x$ מתקיים $x \in \mathbb{R}$ לכל.8.6 טענה

:למה $x\in\mathbb{R}$ לכל למה $x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n^2} \right)^n = 1$$

 $\exp\left(-x
ight)=rac{1}{\exp(x)}$ מתקיים $x\in\mathbb{R}$.8.8. טענה

. exp $(x+y)=\exp{(x)}\cdot\exp{(y)}$ מתקיים $x,y\in\mathbb{R}$ לכל .8.9

:מסקנה 8.10 לכל הכל $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp\left(x_k\right)$$

.exp $(q)=e^q$ מתקיים $q\in\mathbb{O}$ לכל.8.11 טענה

 $x \in (-1,1)$ למה 8.12. למה לכל

$$1 + x \le \exp\left(x\right) \le \frac{1}{1 - x}$$

.0-טענה exp .8.13 טענה

 \mathbb{R} טענה 8.14 רציפה בכל exp

טענה exp .8.15 סענה exp

:טענה 8.16. מתקיים

$$\lim_{x\to\infty}\exp\left(x\right)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty}\exp\left(x\right)=0$$

מסקנה exp .8.17 חח"ע ועל ומכאן שהיא הפיכה.

8.3 הלוגריתם הטבעי

. עולה ממשפט ln נובע שגם ln ממשפט 8.18 טענה

. $\ln\left(x\cdot y\right) = \ln\left(x\right) + \ln\left(y\right)$ מתקיים $0 < x, y \in \mathbb{R}$ לכל .8.19 טענה

:מתקיים מסקנה $0 < x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ לכל 8.20 מתקיים

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(x_k\right)$$

 $\ln\left(a^q
ight) = q \cdot \ln\left(a
ight)$ מתקיים $q \in \mathbb{Q}$ וכל $0 < a \in \mathbb{R}$ למה 8.21. למה

.exp $(q \cdot \ln{(a)}) = a^q$ מסקנה $q \in \mathbb{Q}$ ולכל $0 < a \in \mathbb{R}$ לכל .8.22

e-e חזקה ממשית ולוגריתמים בבסיסים שונים מ-8.4

משפט 8.23. חוקי חזקות כשהמעריד ממשי

:מתקיימים כל הפסוקים הבאים, $0 < a, b \in \mathbb{R}$ יהיו

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y . 1$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} .2$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$
 .3

$$a^x > b^x$$
 אז $0 > x$ פמו כן אם $0 < a < b$, כמו כן אז $a^x < b^x$ אז $0 < x$ פאז $0 < a < b$.

$$a^x < a^y$$
 אמ $x < y$ -ן $1 < a$ אם 5.

$$a^x > a^y$$
 אז $x < y$ -1 $0 < a < 1$ אם .6

;($x\in\mathbb{R}$ לכל f (x) איי $f:\mathbb{R} o (0,\infty)$ מסקנה 8.24. יהי $0< a\in\mathbb{R}$ ונגדיר את הפונקציה

- . אם f אז f אם •
- . אם a<1 אורדת ממש
- f(x)=1 לכל f(x)=1 לכל f(x)=1 אם f(x)=1

. מכאן מסיק שאם $a \neq 1$ חח"ע ועל וממילא הפיכה מכאן מכאן

. או \log_a יורדת ממש ואם a < 1 או \log_a או או a < 1 או חובה מסקנה מסקנה מסקנה מסקנה מ-1, אם מסקנה מ-1, אם מסקנה מסקנה מסקנה מסקנה מסקנה מסקנה מיר מו

a-מסקנה $a \in \mathbb{R}$ יהי .8.26 מסקנה

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty$$
ו וו $\lim_{x \to \infty} \log_a(x) = \infty$ וכמו כן $\lim_{x \to \infty} a^x = 0$ ו וו $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$ אם $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$ ווו $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$

: טענה $0 < x \in \mathbb{R}$ לכל מתקיים $0 < a \in \mathbb{R}$ מתקיים.

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

משפט 8.28. חוקי לוגריתמים

: באים הבסוקים כל הפסוקים מ-1, מתקיימים כל a-ט כך ש-b-ט כך ט כל הפסוקים הבאים יהיו

$$.\log_b\left(c\right) = \frac{\log_a\left(c\right)}{\log_a\left(b\right)} .1$$

$$^{9}\log_{a}(c \cdot d) = \log_{a}(c) + \log_{a}(d)$$
 .2

$$\log_a\left(\frac{c}{d}\right) = \log_a\left(c\right) - \log_a\left(d\right)$$
 .3

$$\log_a\left(c^x
ight) = x \cdot \log_a\left(c
ight)$$
 מתקיים $x \in \mathbb{R}$.4

9 רציפות במידה שווה

 $I\subseteq\mathbb{R}$ על מקטע אפונקציה המוגדרת פונקציה f

 $J\subseteq I$ טענה אווה על כל מקטע במידה במידה אווה על אז אווה על אווה על במידה פווה אווה על פור .9.1

I-ביפה גם רציפה אז f אז f אז רציפה במידה במידה אז f אם רציפה ב-9.2

משפט 9.3. אם I רציפה במידה שווה על I אז לכל סדרה מתכנסת $(a_n)_{n=1}^\infty$ שכל איבריה בI אם הסדרה במידה שווה על I אז לכל סדרה מתכנסת.

שימו לב: העובדה ש- $(a_n)_{n=1}^\infty$ מחכנסת ושכל איבריה ב-I אינה אומרת שגם ווו $(a_n)_{n=1}^\infty$ מסיבה זו המשפט אינו נכון לכל פונקציה רציפה.

לדוגמה: הפונקציה שכל איבריה בקטע $a_n=\frac{1}{n}$ ו (0,1] רציפה בקטע איבריה $f(x)=\frac{1}{x}$ היא סדרה מתכנסת לדוגמה: $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\infty$

משפט 9.4. "אפיון היינה" לרציפות במידה שווה של פונקציה

 $\lim_{n \to \infty} |x_n - y_n| = 0$ המקיימות I ב-I המקיימות שכל איבריהן ו-I שכל איבריהן המקיימות של אם"ם לכל שתי סדרות $\lim_{n \to \infty} |x_n - y_n| = 0$ שכל איבריהן ב- $\lim_{n \to \infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0$ מתקיים

משפט 9.5. אריתמטיקה של רציפות במידה שווה

.(ניח ש-f רציפה במידה שווה על I ותהא g גם היא פונקציה רציפה במידה שווה על I (ובפרט מוגדרת בו).

- .I רציפה במידה שווה על f+g .1
- I או שווה על במידה במידה ווה על ב- $f\cdot g$ אז ב-g אם $f\cdot g$ אם ב-2
- .I או שווה במידה במידה ווה אז או $\frac{1}{g}$ אא $x \in I$ לכל ווה על $|g\left(x
 ight)| \geq c$ כך ש
- |I| אז |f| רציפה במידה שווה על פוא |g| לכל פך שיס |g| כך שיס |f| רציפה במידה וגם קיים 4.

משפט 9.6. נניח ש-f רציפה במידה שווה על I ותהא I ותהא שווה על $g: {
m Im} f o \mathbb{R}$, גם הפונקציה רציפה במידה שווה על $g: {
m Im} f o \mathbb{R}$, גם הפונקציה $g: {
m Im} f o \mathbb{R}$, גם הפונקציה $g: {
m Im} f o \mathbb{R}$, גם הפונקציה $g: {
m Im} f o \mathbb{R}$

[.] ⁹ניתן להסיק מכאן (באינדוקציה) גם ליותר משני מוכפלים.

[.] הוא מקטע ו-f הוא הוא ${
m Im} f$ נובע וובע פובע (9.2 משפט ביפה ווא מקטע ווא מקטע.

9 רציפות במידה שווה

 $\lim_{x o a^+}f\left(x
ight)$ משפט 9.7. נניח ש-I הוא קטע פתוח ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש $a,b\in\mathbb{R}$, אם I ר- $\lim_{x o a^+}f\left(x
ight)$ קיימים.

מסקנה 9.8. "משפט ויירשטראס" לרציפות במידה שווה

I-נניח ש-I הוא קטע פתוח, אם f רציפה במידה שווה על I אז I חסומה ב-

 ${}_{,}I$ מסקנה 9.9. נניח שf רציפה במידה שווה על

- $\lim_{x
 ightarrow a^{-}} f\left(x
 ight)$ אז הגבול (עבור $a \in \mathbb{R}$ עבור $I = (a, \infty)$
- . עבור $\lim_{x \to a^+} f\left(x\right)$ אז הגבול (עבור $a \in \mathbb{R}$ עעבור ועבור $I = (-\infty, a)$

 \mathbb{R} משפט 9.10. תהא $g:\mathbb{R} o \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, אם ל-g יש אסימפטוטות משופעות ב-0 אז $g:\mathbb{R} o \mathbb{R}$ רציפה במידה שווה על כל $g:\mathbb{R} o \mathbb{R}$ משקנה 1.1. נגיח ש-f רציפה ב-f

- I אם f רציפה במידה שווה על f יש אסימפטוטה שווה על f יש אסימפטוטה יש היא קרן ימנית ול-
- .I אם f רציפה במידה שווה על f יש אסימפטוטה שוופעת ב- ∞ אז א קרן שמאלית ול-

משפט 9.12. משפט קנטור

I נניח ש-I הוא קטע סגור, אם f רציפה ב-I אז ווה על ווה על ווה על

 $n\geq k\in\mathbb{N}$ טענה $A:=I_1\cup I_2\cup\ldots\cup I_n$ מקטעים, נסמן $I_1,I_2,\ldots,I_n\subseteq\mathbb{R}$ יהיו פונקציה המוגדרת ב-4, אם לכל פונה 11. או $A:=I_1\cup I_2\cup\ldots\cup I_n$ מקטעים, נסמן $A:=I_1\cup I_2\cup\ldots\cup I_n$ מקטעים, מקטע

 \mathbb{R} מסקנה $g:\mathbb{R} o \mathbb{R}$ במידה שווה על כל $g:\mathbb{R} o \mathbb{R}$ מחזורית ורציפה אז

משפט 9.15. תנאי ליפשיץ

אט f אז $\left|rac{f\left(x_1
ight)-f\left(x_2
ight)}{x_1-x_2}
ight|\leq K$ מתקיים ($x_1
eq x_2$) מתקיים אווה על $x_1,x_2\in I$ אז $K\in\mathbb{R}$ אם קיים $K\in\mathbb{R}$ אם קיים $K\in\mathbb{R}$ מתקיים ווה על .I

 \sqrt{x} ער את א תנאי מספיק המעתיקה את אינו תנאי הכרחי, לדוגמה הפונקציה את לרציפות במידה שווה אך אינו תנאי הכרחי, לדוגמה הפונקציה את לרציפות במידה שווה מפני שהיא פונקציה רציפה על קטע סגור [0,1] אינו מפני שהיא פונקציה רציפה על קטע סגור [0,1] אינו במידה שווה מפני שהיא פונקציה רציפה על קטע סגור [0,1] אינו במידה שווה מפני שהיא פונקציה רציפה על קטע סגור [0,1]

$$\left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} \right| = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} > K$$

I אזירה ב-14 ו-f' חסומה ב-1 אז f רציפה במידה שווה על ווה על f' אם אם f' אם אווה על

 $^{0&}lt;\delta\in\mathbb{R}$ קיימת A אם לכל A אם לכל A אם לכל במידה שווה על איחוד מקטעים בצורה הבאה: g תיקרא תיקרא במידה שווה על איחוד מקטעים בצורה הבאה: $|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)|<arepsilon$ מקריים $|x_1-x_2|<\delta$ המקיימים $|x_1,x_2\in A|$

שימו לב לכך שאם A היא מקטע בעצמה (בנוסף לכך שהיא איחוד מקטעים) אז ההגדרה מתלכדת אם ההגדרה הרגילה.

ערך בוויקיפדיה: רודולף ליפשיץ, ראו גם תנאי ליפשיץ.

[.]ראו את משפט קנטור להלן 13

מדובר באזירות חד-צדדית מדובר מדובר באחד הקצוות אז סגור באחד סגור ווע סגור אז סגור באחד או סגור אז מדובר באחד הקצוות המדובר באחד הקצוות המדובר באחד הקצוות המדובר באחד הקצוות המדובר באחד המדובר באוד המדובר באוד המדובר באחד המדובר באוד המדובר ב