דיפרנציאביליות - הגדרות בלבד

חשבון אינפיניטסימלי (3) - 80415

מרצה: תמר (תמי) ציגלר

מתרגלים: אריה דויטש, קרן דניאל ואור קופרמן

סוכם ע"י שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ד, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

♣ בסיכומים של נושא זה נעבוד אך ורק עם הנורמה והמטריקה האוקלידיות על $\mathbb{R}^n$ ועם הנורמה האופרטורית ב-$\text{Hom}\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$, כמו כן כמעט כל הפונקציות שנעבוד איתן תהיינה מהצורה $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ (יהיו $k, m \in \mathbb{R}$) ולא נזכיר את כל אלו בכל פעם מחדש.

♣ נרצה להגדיר גזירות של פונקציה מהצורה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ בנקודה $a \in \mathbb{R}^n$, הבעיה היא שאי אפשר לחלק וקטור אחד באחר ולכן ביטוי מהצורה $\frac{f(x) - f(a)}{a - a}$ אינו מוגדר ובוודאי שאי אפשר לקחת עליו גבול.
למעשה זו לא בעיה כל כך קשה, הרעיון בהגדרת הנגזרת של אינפי' 1 הוא למדוד את השינוי בערכי f עבור תזוזות קטנות מהנקודה, לכן נוכל להחליף את הביטוי הנ"ל בביטוי הבא:
$$\frac{f(x) - f(a)}{\|x - a\|}$$
זה כבר ביטוי מוגדר[1] אלא שכעת יש לנו בעיה נוספת: הביטוי הזה הוא איבר ב-$\mathbb{R}^m$ ולכן גם הגבול שלו כזה (אם הוא קיים), לפיכך פונקציה גזירה לפי הרעיון הזה תצטרך להיראות חד-ממדית בסביבה קטנה מספיק של x שכן ההפרשים בין התמונות של הפונקציה באותה סביבה לבין $f(x)$ יצטרכו להיות כמעט בכיוון של וקטור הנגזרת[2]. אם $n = 1$ ו/או ש-$m = 1$ זה לא כל כך יפריע לנו מפני שהפונקציה אכן תהיה חד-ממדית[3], אבל כאשר n ו-m גדולים מ-1 הרעיון הזה יוביל לכך שפונקציות מעטות מאוד תהיינה גזירות. מסיבה זו נצטרך למצוא רעיון חדש להגדיר את הגזירות בממדים גבוהים, אבל אנחנו נראה בהמשך שהרעיון הזה קשור בקשר הדוק לגזירות כזו.
לגזירות של פונקציה בנקודה הייתה אינטואיציה נוספת - הישר המשיק, באינפי' 1 ראינו את המשפט הבא:

משפט. תהא $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה $a \in \mathbb{R}$. g גזירה ב-a אם"ם קיים $m \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים:
$$\lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - (m \cdot h + g(a))}{h} = 0$$
ובמקרה כזה מתקיים $m = g'(a)$.

כאשר g גזירה ב-a הישר $g'(a) \cdot (x - a) + (g(a) - g'(a) \cdot a)$ הוא הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(a, g(a)) \in \mathbb{R}^2$, אבל מהו המשיק לגרף של פונקציה מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}^m$?
ב-$\mathbb{R}^3$ אנחנו מכירים את הרעיון של מישור המשיק לצורה גאומטרית כלשהי (למשל כדור), לכן נצפה שאם $n = 2$ ו-$m = 1$ אז הגזירות של f תייצג את המישור המשיק לגרף; מישור ב-$\mathbb{R}^3$ הוא אובייקט שכבר נתקלנו בו בליניארית 1 - ישריות שמרחב הכיוונים שלהם הוא בעל ממד 2 הן מישורים, כעת אנחנו יכולים לצפות שגם עבור n ו-m כלליים הגזירות של f תייצג את הישריה המשיקה לגרף הפונקציה.

האם באמת אין שום קשר למהירות רגעית?

[1] חילוק של וקטור בסקלר הוגדר להיות הכפלתו בהופכי של אותו סקלר.
[2] למעשה יש מקרה שבו הטיעון הזה אינו תקף: כאשר וקטור הנגזרת הוא וקטור האפס.
[3] אנחנו נראה בהמשך שגזירות במקרים אלו אכן תתאים לרעיון זה.

הגדרה 1.1. גזירות (דיפרנציאביליות) של פונקציה בנקודה

תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ ו-$f:A\to\mathbb{R}^{m}$, נאמר ש-f גזירה (או דיפרנציאבילית) בנקודה פנימית $a\in A$ אם קיימת העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}^{m}$ כך שמתקיים:

$$\lim_{x\to0}\frac{f\left(a+x\right)-\left(T\left(x\right)+f\left(a\right)\right)}{\left\Vert x\right\Vert }=0$$

אנחנו נראה בקובץ הטענות שאם קיימת העתקה ליניארית כזו אז היא יחידה ולכן נסמן אותה ב-Df_{a} ונקרא לה הנגזרת (או הדיפרנציאל) של f בנקודה a, אם f היא מסילה אז נסמן את הנגזרת גם ב-$f'\left(a\right)$.

נאמר ש-f גזירה/דיפרנציאבילית בקבוצה פתוחה $U\subseteq A$ אם היא גזירה בכל נקודה ב-U, כמו כן נאמר ש-f גזירה/דיפרנציאבילית אם היא גזירה בכל תחום הגדרתה.

- ♣ הגרף של T הוא תמ"ו של $\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{m}$, לכן הגרף של הפונקציה $T\left(v\right)+f\left(a\right)$ הוא ישריה שעוברת בנקודה $\left(a,f\left(a\right)\right)$ ומשיקה לגרף של f בנקודה זו[4].

- ♣ בסופו של דבר הרעיון שיהיה תקף עבור כל מצב שבו הפונקציה גזירה הוא שהפונקציה ניתנת לקירוב ע"י פונקציה ליניארית בצורה כל כך טובה עד שאפילו אם מחלקים את גודל השגיאה במרחק מנקודת הדיפרנציאביליות, אפילו אז הערכים שואפים ל-0 כשמתקרבים לנקודה. לקירוב כזה קוראים בפיזיקה קירוב מסדר ראשון ואנחנו נראה שכמו באינפי' 1 הוא מאפשר לנו לחקור פונקציות מסובכות ע"י קירובן לפונקציות פשוטות יותר - ההעתקות הליניאריות.

סימון: בהינתן פונקציה $f:A\to\mathbb{R}^{m}$ נסמן ב-$f_{1},f_{2},\ldots,f_{m}$ את הפונקציות מ-A ל-$\mathbb{R}$ המקיימות (לכל $a\in A$):

$$f\left(a\right)=\begin{bmatrix}f_{1}\left(a\right)\\ f_{2}\left(a\right)\\ \vdots\\ f_{m}\left(a\right)\end{bmatrix}$$

מסקנה 1.2. תהא f פונקציה, f גזירה בנקודה $a\in\mathbb{R}^{k}$ אם"ם לכל $m\geq i\in\mathbb{N}$ הפונקציה f_{i} גזירה ב-a.

הגדרה 1.3. נגזרות כיווניות ונגזרות חלקיות

תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ ו-$f:A\to\mathbb{R}^{m}$ ויהי $v\in\mathbb{R}^{k}$, נאמר של-f יש נגזרת כיוונית בנקודה פנימית $a\in A$ בכיוון v אם קיים הגבול:

$$\lim_{t\to0}\frac{f\left(a+t\cdot v\right)-f\left(a\right)}{t}$$

ובמקרה כזה נסמן את הגבול הנ"ל ב-$\partial_{v}f\left(a\right)$ ונקרא לו הנגזרת הכיוונית של f בכיוון v בנקודה a.

עבור איברי הבסיס הסטנדרטי הנגזרות הכיווניות נקראות גם נגזרות חלקיות ומסומנות ע"י $\partial_{i}f\left(a\right):=\partial_{e_{i}}f\left(a\right)$ לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$.

מגדירים נגזרת כיוונית עבור וקטור האפס?

- ♣ יש המגדירים את הנגזרת החלקית ע"י (לכל $0\neq v\in\mathbb{R}^{k}$):

$$\partial_{v}f\left(a\right):=\lim_{t\to0}\frac{f\left(a+t\cdot v\right)-f\left(a\right)}{\left\Vert t\cdot v\right\Vert }$$

בצורה זו הנגזרת הכיוונית קבועה לכל הווקטורים שכיוונם זהה גם אם גודלם שונה - לפיכך נקרא שמה **הנגזרת הכיוונית**, אנחנו נראה בהמשך באיזה מובן יש עדיפות להגדרה שהבאנו לעיל על פני הגדרה זו.

[4] את האינטואיציה לכך שהיא אכן משיקה ולא סתם עוברת בנקודה אנחנו נראה בהמשך.

♣ במקומות אחרים מסמנים את הנגזרות הכיווניות והחלקיות בסימונים אחרים:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a):=D_{v}f(a):=\partial_{v}f(a)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_{i}}(a):=D_{i}f(a):=\partial_{i}f(a)$$
$$f_{x}(a):=\partial_{x}f(a):=\frac{\partial f}{\partial x}(a):=D_{1}f(a):=\partial_{1}f(a)$$
$$f_{y}(a):=\partial_{y}f(a):=\frac{\partial f}{\partial y}(a):=D_{2}f(a):=\partial_{2}f(a)$$
$$f_{z}(a):=\partial_{z}f(a):=\frac{\partial f}{\partial z}(a):=D_{3}f(a):=\partial_{3}f(a)$$

הגדרה 1.4. הגרדיאנט

תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ ו-$f:A\to\mathbb{R}$, הגרדיאנט של f בנקודה פנימית $a\in A$ הוא הווקטור:

$$\nabla f(a):=\begin{bmatrix}\partial_{1}f(a)\\ \partial_{2}f(a)\\ \vdots\\ \partial_{k}f(a)\end{bmatrix}$$

♣ כפי שנראה בקובץ הטענות הנגזרת של f ניתן לייצוג באמצעות מטריצת שורה, הגרדיאנט הוא אותה מטריצה לאחר שחלוף.

הגדרה 1.5. תהא f פונקציה גזירה בקבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}^{k}$, פונקציית הנגזרת של f ב-U היא הפונקציה $Df:U\to\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{k},\mathbb{R}^{m}\right)$ המוגדרת ע"י (לכל $a\in U$ ולכל $x\in\mathbb{R}^{k}$):

$$Df(a)x:=Df_{a}(x)$$

הגדרה 1.6. תהא f פונקציה גזירה, נאמר ש-f גזירה ברציפות בקבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}^{k}$ אם Df רציפה[5] ב-U; כמו כן נאמר ש-f גזירה ברציפות אם היא גזירה ברציפות בכל תחום הגדרתה.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה פתוחה, ונסמן ב-$C^{1}(A,\mathbb{R}^{m})$ את קבוצת הפונקציות הגזירות ברציפות שתחום ההגדרה שלהן הוא A והטווח שלהן הוא $\mathbb{R}^{m}$.

♣ באופן כללי $C^{n}(A,\mathbb{R}^{m})$ מסמן את קבוצת הפונקציות הגזירות ברציפות n פעמים, כאשר $n=0$ מדובר בקבוצת הפונקציות הרציפות וכאשר $n=\infty$ זוהי קבוצת הפונקציות החלקות - אלו שגזירות מכל סדר.

2 כללי גזירה

אין הגדרות בפרק זה.

[5] הרציפות של Df נקבעת ע"פ הנורמה ב-$\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{k},\mathbb{R}^{m}\right)$ כלומר ע"פ הנורמה האופרטורית.

3 יחסי הגומלין בין פונקציה לנגזרתה

3.1 התחלה

3.2 נגזרות גבוהות

♣ להלן שתי נקודות מבט על נגזרות גבוהות:

- ראינו שהנגזרת של פונקציה $f:\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}^{m}$ היא פונקציה $Df:\mathbb{R}^{k}\to\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{k},\mathbb{R}^{m}\right)$, בליניארית 1 ראינו ש-$\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{k},\mathbb{R}^{m}\right)$ איזומורפי ל-$M_{k\times m}\left(\mathbb{R}\right)$ שאיזומורפי ל-$\mathbb{R}^{k\cdot m}$, לכן נוכל להסתכל פונקציית הנגזרת כהעתקה מ-$\mathbb{R}^{k}$ ל-$\mathbb{R}^{k\cdot m}$ ולגזור אותה כרגיל. התהליך הזה לא נעצר כאן: הנגזרת השנייה היא פונקציה מ-$\mathbb{R}^{k}$ ל-$\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{k},\mathbb{R}^{k\cdot m}\right)$ ולכן ניתן לגזור גם אותה ע"י אותו איזומורפיזם שהוזכר לעיל וחוזר חלילה.
- בהגדרת הנגזרת לא היה שום צורך להניח שהתחום של הפונקציה הוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}^{k}$ והטווח שלה הוא $\mathbb{R}^{m}$, ניתן היה לקחת כל פונקציה בין שני מרחבים נוצרים סופית (מעל $\mathbb{R}$) - אנחנו יודעים שכל הנורמות על מרחבים נורמיים נוצרים סופית שקולות זו לזו ולכן זה לא משנה לפי אלו נורמות נחשב את הגבול שמופיע בהגדרת הנגזרת.
לכן ניתן לקחת את פונקציית הנגזרת $Df:\mathbb{R}^{k}\to\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{k},\mathbb{R}^{m}\right)$ שהיא פונקציה בין שני מרחבים נורמיים נוצרים סופית ולגזור אותה ע"פ הגדרה; אנחנו נקבל פונקציה $D^{2}f:\mathbb{R}^{k}\to\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{k},\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{k},\mathbb{R}^{m}\right)\right)$ שהיא הנגזרת השנייה, וגם היא פונקציה בין שני מרחבים נורמיים נוצרים סופית שניתן לגזור באמצעות אותה הגדרה ולקבל פונקציה $D^{3}f:\mathbb{R}^{k}\to\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{k},\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{k},\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{k},\mathbb{R}^{m}\right)\right)\right)$.
א"כ הנגזרת ה-n-ית היא פונקציה שמקבלת נקודה ב-$\mathbb{R}^{k}$ ומחזירה העתקה ליניארית, ההעתקה הליניארית הזו מקבלת גם היא וקטור ב-$\mathbb{R}^{k}$ ומחזירה העתקה ליניארית - כך $n-1$ פעמים עד שכאשר פועלת ההעתקה הליניארית ה-n על וקטור ב-$\mathbb{R}^{k}$ היא מחזירה וקטור ב-$\mathbb{R}^{m}$. מי שתכנת מעט והגיע לפונקציות שמחזירות פונקציות אינו מופתע לראות את הסימון $T\left(v\right)\left(w\right)$ - T מקבלת קלט v ומחזירה פונקציה $T\left(v\right)$ שמקבלת קלט w ומחזירה פלט $T\left(v\right)\left(w\right)$, באותה אופן $D^{n}f_{a}\left(v_{1}\right)\left(v_{2}\right)\ldots\left(v_{n-1}\right)$ היא העתקה ליניארית מ-$\mathbb{R}^{k}$ ל-$\mathbb{R}^{m}$ ואילו $D^{n}f_{a}\left(v_{1}\right)\left(v_{2}\right)\ldots\left(v_{n}\right)$ הוא וקטור ב-$\mathbb{R}^{m}$.

בסופו של דבר שתי נקודות המבט הללו איזומורפיות ולכן נוכל להשתמש באיזו מהן שנרצה לפי העניין, בכיתה ראינו את נקודת המבט הראשונה אך באופן אישי אני מעדיף את נקודת המבט השנייה והיא זו שתשלוט בסיכומים אלו ללא עוררין.

הגדרה 3.1. גזירות (דיפרנציאביליות) של פונקציה בנקודה במרחב וקטורי כללי

יהיו V ו-W מרחבים נורמיים נוצרים סופית מעל $\mathbb{R}$, תהא $A\subseteq V$ ותהא $f:A\to V$.

נאמר ש-f גזירה (או דיפרנציאבילית) בנקודה פנימית $a\in A$ אם קיימת העתקה ליניארית $T:V\to W$ כך שמתקיים:

$$\lim_{v\to0}\frac{f\left(a+v\right)-\left(T\left(v\right)+f\left(a\right)\right)}{\left\Vert v\right\Vert }=0$$

אנחנו נראה בקובץ הטענות שאם קיימת העתקה ליניארית כזו אז היא יחידה ולכן נסמן אותה ב-Df_{a} ונקרא לה הנגזרת (או הדיפרנציאל) של f בנקודה a, אם f היא מסילה אז נסמן את הנגזרת גם ב-$f'\left(a\right)$.

נאמר ש-f גזירה/דיפרנציאבילית בקבוצה פתוחה $U\subseteq A$ אם היא גזירה בכל נקודה ב-U, כמו כן נאמר ש-f גזירה/דיפרנציאבילית אם היא גזירה בכל תחום הגדרתה.

♣ **לא ראינו את ההגדרה הזו בכיתה אבל אני צריך אותה כדי לעבוד עם נקודת המבט השנייה.**

♣ אם פונקציה f גזירה על קבוצה פתוחה $U\subseteq A$ ניתן לדבר על פונקציית הנגזרת שלה באותה קבוצה שהיא פונקציה $Df:U\to\text{Hom}\left(V,W\right)$, שגם הוא מרחב נורמי נוצר סופית ולכן ניתן לגזור גם את Df ע"פ אותה הגדרה ולדבר על הנגזרת השנייה של f בנקודה a שהיא הנגזרת של Df בנקודה a, וכך לגבי נגזרת שלישית וכן הלאה; הנגזרת ה-n-ית של f בנקודה a מסומנת ב-$D^{n}f\left(a\right)$.

סימון: תהא f פונקציה גזירה n פעמים בנקודה $a\in\mathbb{R}^{k}$, לכל $v_{1},v_{2},\ldots,v_{n}\in\mathbb{R}^{k}$ נסמן:

$$D^{n}f_{a}\left(v_{1},v_{2},\ldots,v_{n}\right):=D^{n}f_{a}\left(v_{1}\right)\left(v_{2}\right)\ldots\left(v_{n}\right)$$

כלומר אנו מתייחסים לנגזרת ה-n-ית כפונקציה מ-$\overbrace{\mathbb{R}^{k}\times\mathbb{R}^{k}\ldots\times\mathbb{R}^{k}}^{n\text{ פעמים}}$ ל-$\mathbb{R}^{m}$.

♣ עבור נגזרות חלקיות וכיווניות מסדר גבוה אין שום צורך בהגדרה נוספת - הנגזרת החלקית $D_{v}f$ היא פונקציה מ-$\mathbb{R}^{k}$ ל-$\mathbb{R}^{m}$ ולכן ניתן לדבר על הנגזרת הכיוונית שלה בכל כיוון שהוא.

סימון: תהיינה f פונקציה ו-$a\in\mathbb{R}^{k}$ נקודה כך שהנגזרת הכיוונית $D_{v}f$ מוגדרת בסביבה של a (עבור $v\in\mathbb{R}^{k}$ כלשהו), לכל $u\in\mathbb{R}^{k}$ נסמן[6]:

$$\partial_{vu}f\left(a\right):=\partial_{u}\partial_{v}f\left(a\right)=\lim_{t\to0}\frac{\partial_{v}f\left(a+t\cdot u\right)-\partial_{v}f\left(a\right)}{t}$$

$D_{vu}f$ תיקרא נגזרת כיוונית מסדר שני, עבור איברי הבסיס הסטנדרטי הנגזרות הכיווניות מסדר שני נקראות גם נגזרות חלקיות מסדר שני או נגזרות מעורבות, ומסומנות ע"י (לכל $k\geq i,j\in\mathbb{N}$)

$$\partial_{ij}f\left(a\right):=\partial_{e_{i}e_{j}}f\left(a\right):=\left(\partial_{e_{j}}\partial_{e_{i}}f\right)\left(a\right)=\partial_{j}\partial_{i}f\left(a\right)$$

כן, אני יודע שזה הפוך מאיך שסימנתי את הנגזרות החלקיות באנליזה אלמנטרית, לא מצאתי שום מקור שתומך בסימון מאנליזה ולעומת זאת בוויקיפדיה האנגלית מופיע סימון שתומך יותר בכיוון זה, ראו כאן.

♣ סימונים נוספים שניתקל בהם:

$$\frac{\partial^{2}f}{\partial u\partial v}\left(a\right):=\frac{\partial_{v}f}{\partial u}\left(a\right):=D_{vu}f\left(a\right):=\partial_{vu}f\left(a\right)\qquad\frac{\partial^{2}f}{\partial v^{2}}\left(a\right):=D_{vv}f\left(a\right):=\partial_{vv}f\left(a\right)$$

$$\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{j}\partial x_{i}}\left(a\right):=\frac{\partial_{i}f}{\partial x_{j}}\left(a\right):=D_{ij}f\left(a\right):=\partial_{ij}f\left(a\right)\qquad\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}^{2}}\left(a\right):=D_{ii}f\left(a\right):=\partial_{ii}f\left(a\right)$$

$$f_{xy}\left(a\right):=\partial_{xy}f\left(a\right):=\frac{\partial^{2}f}{\partial y\partial x}\left(a\right):=\frac{\partial f_{x}}{\partial y}\left(a\right):=D_{12}f\left(a\right):=\partial_{12}f\left(a\right)\qquad f_{xx}\left(a\right):=\partial_{xx}f\left(a\right):=\frac{\partial^{2}f}{\partial x^{2}}\left(a\right):=D_{11}f\left(a\right):=\partial_{11}f\left(a\right)$$

$$f_{yx}\left(a\right):=\partial_{yx}f\left(a\right):=\frac{\partial^{2}f}{\partial x\partial y}\left(a\right):=\frac{\partial f_{y}}{\partial x}\left(a\right):=D_{21}f\left(a\right):=\partial_{21}f\left(a\right)\qquad f_{yy}\left(a\right):=\partial_{yy}f\left(a\right):=\frac{\partial^{2}f}{\partial y^{2}}\left(a\right):=D_{22}f\left(a\right):=\partial_{22}f\left(a\right)$$

$$f_{xz}\left(a\right):=\partial_{xz}f\left(a\right):=\frac{\partial^{2}f}{\partial z\partial x}\left(a\right):=\frac{\partial f_{x}}{\partial z}\left(a\right):=D_{13}f\left(a\right):=\partial_{13}f\left(a\right)\qquad f_{zz}\left(a\right):=\partial_{zz}f\left(a\right):=\frac{\partial^{2}f}{\partial z^{2}}\left(a\right):=D_{33}f\left(a\right):=\partial_{33}f\left(a\right)$$

$$f_{zx}\left(a\right):=\partial_{zx}f\left(a\right):=\frac{\partial^{2}f}{\partial x\partial z}\left(a\right):=\frac{\partial f_{z}}{\partial x}\left(a\right):=D_{31}f\left(a\right):=\partial_{31}f\left(a\right)$$

$$f_{yz}\left(a\right):=\partial_{yz}f\left(a\right):=\frac{\partial^{2}f}{\partial z\partial y}\left(a\right):=\frac{\partial f_{y}}{\partial z}\left(a\right):=D_{23}f\left(a\right):=\partial_{23}f\left(a\right)$$

$$f_{zy}\left(a\right):=\partial_{zy}f\left(a\right):=\frac{\partial^{2}f}{\partial y\partial z}\left(a\right):=\frac{\partial f_{z}}{\partial y}\left(a\right):=D_{32}f\left(a\right):=\partial_{32}f\left(a\right)$$

[6] כמובן שהגבול אינו קיים בהכרח, אם הוא קיים אז נסמן אותו ב-$\partial_{vu}f\left(a\right)$.

הגדרה 3.2. מטריצת הסיאן[7]

תהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה כך שכל הנגזרות החלקיות מסדר שני של f ב-a קיימות, מטריצת ההסיאן של f בנקודה a היא מטריצה $H\left(f\right)\in M_k\left(\mathbb{R}\right)$ המוגדרת ע"י:

$$\left[H\left(f\right)\right]_{ij}:=\partial_{ji}f\left(a\right)=\partial_i\partial_j f\left(a\right)$$

כלומר:

$$H\left(f\right):=\begin{bmatrix}\partial_{11}f\left(a\right) & \partial_{21}f\left(a\right) & \cdots & \partial_{k1}f\left(a\right)\\ \partial_{21}f\left(a\right) & \partial_{22}f\left(a\right) & \cdots & \partial_{k2}f\left(a\right)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_{k1}f\left(a\right) & \partial_{k2}f\left(a\right) & \cdots & \partial_{kk}f\left(a\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\partial_1\partial_1 f\left(a\right) & \partial_1\partial_2 f\left(a\right) & \cdots & \partial_1\partial_k f\left(a\right)\\ \partial_2\partial_1 f\left(a\right) & \partial_2\partial_2 f\left(a\right) & \cdots & \partial_2\partial_k f\left(a\right)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_k\partial_1 f\left(a\right) & \partial_k\partial_2 f\left(a\right) & \cdots & \partial_k\partial_k f\left(a\right)\end{bmatrix}$$

3.3 נקודות קיצון

הגדרה 3.3. נקודות קיצון כלליות

תהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה.

- נאמר שנקודה $a\in A$ היא נקודת מקסימום של f אם לכל $x\in A$ מתקיים $f\left(x\right)\leq f\left(a\right)$.
- נאמר שנקודה $a\in A$ היא נקודת מינימום של f אם לכל $x\in A$ מתקיים $f\left(x\right)\leq f\left(a\right)$.

הגדרה 3.4. נקודות קיצון מקומיות

תהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה.

- נאמר שנקודה פנימית $a\in A$ היא נקודת מקסימום מקומית של f אם קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in B_\delta\left(a\right)$ מתקיים $f\left(a\right)\geq f\left(x\right)$.
- נאמר שנקודה פנימית $a\in A$ היא נקודת מינימום מקומית של f אם קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in B_\delta\left(a\right)$ מתקיים $f\left(a\right)\leq f\left(x\right)$.

הגדרה 3.5. נקודות קריטיות

תהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה, נאמר שנקודה פנימית $a\in A$ היא נקודה קריטית אם f גזירה ב-a ו-$Df_a=0$.

הגדרה 3.6. נקודת אוכף

תהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה, נאמר שנקודה פנימית $a\in A$ היא נקודת אוכף אם f גזירה ב-a ו-$Df_a=0$ אך a אינה נקודת קיצון, כלומר נקודת אוכף היא נקודה קריטית שאינה נקודת קיצון.

הגדרה 3.7. פולינום טיילור[8] **מסדר n של פונקציה בנקודה**

תהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ פונקציה גזירה n פעמים בנקודה פנימית $a\in A$. פולינום טיילור מסדר n של f בנקודה a הוא הפונקציה $P_{n,f,a}:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ המוגדרת ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}^k$):

$$P_{n,f,a}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot D^k f_a\left(\overbrace{x,x,\ldots,x}^{k\text{ פעמים}}\right)$$

[7] נקראת על שמו של לודוויג אוטו הסה, ערך בוויקיפדיה האנגלית: Otto Hesse.

[8] ערך בוויקיפדיה: ברוק טיילור.

4 משפט הפונקציה ההפוכה ומסקנותיו

הגדרה 4.1. נקודות קיצון כלליות בקבוצה

תהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה.

- נאמר שנקודה $a\in A$ היא נקודת מקסימום של f ב-A אם לכל $x\in A$ מתקיים $f\left(x\right)\leq f\left(a\right)$.
- נאמר שנקודה $a\in A$ היא נקודת מינימום של f ב-A אם לכל $x\in A$ מתקיים $f\left(x\right)\geq f\left(a\right)$.

הגדרה 4.2. נקודות קיצון מקומיות שאינן פנימיות

תהיינה $U\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה ו-$f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה, ותהא $A\subseteq U$ קבוצה כלשהי (לאו דווקא פתוחה).

- נאמר שנקודה $a\in A$ היא נקודת מקסימום מקומית של f ב-A אם קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in B_{\delta}\left(a\right)\cap A$ מתקיים $f\left(x\right)\leq f\left(a\right)$.
- נאמר שנקודה $a\in A$ היא נקודת מינימום מקומית של f ב-A אם קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in B_{\delta}\left(a\right)\cap A$ מתקיים $f\left(x\right)\geq f\left(a\right)$.