אינטגרלים - הוכחות נבחרות

חשבון אינפיניטסימלי (3) - 80415

מרצה: תמר (תמי) ציגלר

מתרגלים: אריה דויטש, קרן דניאל ואור קופרמן

סוכם ע"י שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ד, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

תודה לגלעד שרם על סיכומו המצוין, נעזרתי בו רבות בכתיבת הסיכום שלפניכם.

* * *

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 אינטגרביליות על תיבות

תהא $A \subseteq \mathbb{R}^k$ תיבה סגורה, ותהיינה $f, g : A \to \mathbb{R}$ פונקציות חסומות.

משפט 1.1. ***ליניאריות האינטגרל***
נניח ש-f ו-g אינטגרביליות על A.

- לכל $c \in \mathbb{R}$ מתקיים $\int_A (c \cdot f)(x)\,dx = c \cdot \int_A f(x)\,dx$.
- מתקיים $\int_A (f \pm g)(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx \pm \int_A g(x)\,dx$.

משפט 1.2. **מונוטוניות האינטגרל**
נניח ש-f ו-g אינטגרביליות על A, אם $f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in A$ אז:

$$\int\limits_A f(x)\,dx \leq \int\limits_A g(x)\,dx$$

מסקנה 1.3. נניח ש-f אינטגרבילית על A, מתקיים:

$$\left|\int\limits_A f(x)\,dx\right| \leq V(A) \cdot \sup_{x \in A} |f(x)|$$

טענה 1.4. תהיינה P ו-Q חלוקות של A כך ש-$P \subseteq Q$; מתקיים:

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,Q)$$

משפט 1.5. f אינטגרבילית על A אם"ם לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיימת חלוקה P של A כך ש-$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$.

משפט 1.6. תהא B תיבה כך ש-$A \cup B$ היא תיבה ו-$A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$, ותהא $h : A \cup B \to \mathbb{R}$ פונקציה.
h אינטגרבילית על $A \cup B$ אם"ם היא אינטגרבילית על A ועל B בנפרד, ובמקרה כזה מתקיים:

$$\int\limits_{A \cup B} h(x)\,dx = \int\limits_A h(x)\,dx + \int\limits_B h(x)\,dx$$

הוכחה. ראשית נשים לב לכך שמהעובדה ש-$A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$ נובע שלכל חלוקה P של $A \cup B$, התיבות הנוצרות ע"י P מתחלקות לשתי קבוצות **זרות** - אלו שנוצרות ע"י $P \cap A$ ואלו שנוצרות ע"י $P \cap B$. מכאן שלכל חלוקה P של $A \cup B$ מתקיים:

$$\underline{S}(h,P) = \underline{S}(h,P \cap A) + \underline{S}(h,P \cap B)$$
$$\overline{S}(h,P) = \overline{S}(h,P \cap A) + \overline{S}(h,P \cap B)$$

- $\Leftarrow$
נניח בשלילה ש-h אינה אינטגרבילית על A ו/או על B, ונניח בהג"כ ש-h אינה אינטגרבילית על A.
ע"פ משפט 1.5 קיים $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ כך שלכל חלוקה Q של A מתקיים:

$$\overline{S}(h,Q) - \underline{S}(h,Q) \geq \varepsilon$$

יהי ε כנ"ל, ומכאן שלכל חלוקה P של $A\cup B$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\overline{S}(h,P)-\underline{s}(h,P)&=\left(\overline{S}(h,P\cap A)+\overline{S}(h,P\cap B)\right)-\left(\underline{s}(h,P\cap A)+\underline{s}(h,P\cap B)\right)\\&=\left(\overline{S}(h,P\cap A)-\underline{s}(h,P\cap A)\right)+\left(\overline{S}(h,P\cap B)-\underline{s}(h,P\cap B)\right)\geq\varepsilon+0=\varepsilon\end{aligned}$$

כלומר h אינה אינטגרבילית על $A\cup B$ (משפט 1.5).

מכאן שאם h אינטגרבילית על $A\cup B$ אז היא אינטגרבילית על A ועל B בנפרד.

- $\Rightarrow$

נניח ש-h אינטגרבילית על A ועל B בנפרד, ותהיינה P_A ו-P_B חלוקות של A ושל B בהתאמה.

ע"פ טענה 1.4 לכל חלוקה P של $A\cup B$ כך ש-$P_A,P_B\subseteq P$ מתקיים:

$$\underline{s}(h,P_A)+\underline{s}(h,P_B)\leq\underline{s}(h,P\cap A)+\underline{s}(h,P\cap B)=\underline{s}(h,P)\leq\overline{S}(h,P)=\overline{S}(h,P\cap A)+\overline{S}(h,P\cap B)\leq\overline{S}(h,P_A)+\overline{S}(h,P_B)$$

ולפיכך:

$$\underline{\int}_A h(x)\,dx+\underline{\int}_B h(x)\,dx\leq\underline{\int}_{A\cup B}h(x)\,dx\leq\overline{\int}_{A\cup B}h(x)\,dx\leq\overline{\int}_A h(x)\,dx+\overline{\int}_B h(x)\,dx$$

אבל:

$$\underline{\int}_A h(x)\,dx+\underline{\int}_B h(x)\,dx=\overline{\int}_A h(x)\,dx+\overline{\int}_B h(x)\,dx$$

ומכאן ש-h אינטגרבילית על $A\cup B$ ומתקיים:

$$\int\limits_{A\cup B}h(x)\,dx=\int\limits_A h(x)\,dx+\int\limits_B h(x)\,dx$$

$\blacksquare$

טענה 1.7. תהא $A\subseteq B$ תיבה סגורה, קיימות תיבות סגורות $C_1,C_2,\ldots,C_m\subseteq A$ המקיימות:

1. $C_i^\circ\cap C_j^\circ=\emptyset$ ו-$B^\circ\cap C_i^\circ$ לכל $m\geq i,j\in\mathbb{N}$ כך ש-$i\neq j$.
2. $B\cup\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m}C_i\right)=A$.

מסקנה 1.8. f אינטגרבילית על A אם"ם f אינטגרבילית על כל תיבה $B\subseteq A$.

טענה 1.9. החיתוך של שתי תיבות סגורות הוא תיבה סגורה.

מסקנה 1.10. תהא B תיבה ותהא $h:A\cup B\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה, h אינטגרבילית על $A\cup B$ אם"ם היא אינטגרבילית על A ועל B בנפרד, ובמקרה כזה מתקיים:

$$\int\limits_{A\cup B}h(x)\,dx=\int\limits_A h(x)\,dx+\int\limits_B h(x)\,dx-\int\limits_{A\cap B}h(x)\,dx$$

משפט 1.11. אם f רציפה אז היא אינטגרבילית על A.

הוכחה. נניח ש-f רציפה, A היא קבוצה קומפקטית ולכן ע"פ משפט קנטור f רציפה במידה שווה על A.

יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ ותהא $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x,y\in A$ המקיימים $\|x-y\|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2\cdot V(A)}$.

תהא P חלוקה של A כך שלכל $x,y\in A$ השייכים לאותה תיבה הנוצרת מן החלוקה יתקיים $\|x-y\|<\delta$, ותהיינה $A_1,A_2,\ldots,A_r$

כל התיבות הנוצרות מחלוקה זו.

א"כ מתקיים:

$$\begin{aligned}\overline{S}\left(f,P\right)-\underline{s}\left(f,P\right) &= \sum_{i=1}^{r}V\left(A_{i}\right)\cdot\left(\sup_{x\in A_{i}}f\left(x\right)-\inf_{x\in A_{i}}f\left(x\right)\right)\\ &\leq\sum_{i=1}^{r}V\left(A_{i}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot V\left(A\right)}=\frac{\varepsilon}{2\cdot V\left(A\right)}\cdot\sum_{i=1}^{r}V\left(A_{i}\right)\\ &=\frac{\varepsilon}{2\cdot V\left(A\right)}\cdot V\left(A\right)=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\end{aligned}$$

ממשפט 1.5 נובע ש-f אינטגרבילית על A. ■

טענה 1.12. תהא $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, אם f אינטגרבילית על A אז גם $h\circ f$ אינטגרבילית על A.

הוכחה. נניח ש-f אינטגרבילית על A, מכאן ש-f חסומה, א"כ יהי $M\in\mathbb{R}$ כך ש-$\left|f\left(x\right)\right|<M$ לכל $x\in A$.
ע"פ משפט קנטור h רציפה במידה שווה על $\left[-M,M\right]$, א"כ יהיו $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ ו-$0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x,y\in\left[-M,M\right]$ המקיימים $\left|x-y\right|<\delta$ מתקיים $\left|h\left(x\right)-h\left(y\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2\cdot V(A)}$.
ע"פ משפט 1.5 קיימת חלוקה P של A כך שמתקיים $\overline{S}\left(f,P\right)-\underline{s}\left(f,P\right)<\frac{\varepsilon\cdot\delta}{4M}$, א"כ תהא P חלוקה כזו, ותהיינה $A_{1},A_{2},\ldots,A_{r}$ כל התיבות הנוצרות מחלוקה זו.
לכל $r\geq i\in\mathbb{N}$ נסמן:

$$\begin{aligned}W_{i}\left(f\right) &:= \sup_{x\in A_{i}}f\left(x\right)-\inf_{x\in A_{i}}f\left(x\right)\\ W_{i}\left(h\circ f\right) &:= \sup_{x\in A_{i}}h\left(f\left(x\right)\right)-\inf_{x\in A_{i}}h\left(f\left(x\right)\right)\end{aligned}$$

מכאן שלכל $r\geq i\in\mathbb{N}$ המקיים $W_{i}<\delta$ מתקיים:

$$W_{i}\left(h\circ f\right)<\frac{\varepsilon}{2\cdot V\left(A\right)}$$

בנוסף מתקיים:

$$\delta\cdot\sum_{W_{i}\geq\delta}V\left(A_{i}\right)\leq\sum_{i=1}^{r}V\left(A_{i}\right)\cdot W_{i}=\overline{S}\left(f,P\right)-\underline{s}\left(f,P\right)<\frac{\varepsilon\cdot\delta}{4M}$$

ולכן גם:

$$\sum_{W_{i}\geq\delta}V\left(A_{i}\right)<\frac{\varepsilon}{4M}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\overline{S}\left(h\circ f,P\right)-\underline{s}\left(h\circ f,P\right) &= \sum_{i=1}^{r}V\left(A_{i}\right)\cdot W_{i}\left(h\circ f\right)\\ &= \sum_{W_{i}<\delta}V\left(A_{i}\right)\cdot W_{i}\left(h\circ f\right)+\sum_{W_{i}\geq\delta}V\left(A_{i}\right)\cdot W_{i}\left(h\circ f\right)\\ &< \sum_{W_{i}<\delta}V\left(A_{i}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot V\left(A\right)}+\sum_{W_{i}\geq\delta}V\left(A_{i}\right)\cdot 2M\\ &= \frac{\varepsilon}{2\cdot V\left(A\right)}\cdot\sum_{W_{i}<\delta}V\left(A_{i}\right)+2M\cdot\sum_{W_{i}\geq\delta}V\left(A_{i}\right)\\ &< \frac{\varepsilon}{2\cdot V\left(A\right)}\cdot V\left(A\right)+2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

ושוב ממשפט 1.5 נקבל ש-$h\circ f$ אינטגרבילית על A. ■

מסקנה 1.13. אי-שוויון המשולש האינטגרלי
אם f אינטגרבילית על A אז מתקיים:

$$\left|\int\limits_A f(x)\,dx\right| \le \int\limits_A |f(x)|\,dx$$

2 מידה אפס ואינטגרביליות (משפט לבג)

2.1 משפט לבג

טענה 2.1. תת-קבוצה של קבוצה ממידה אפס גם היא ממידה אפס.

טענה 2.2. איחוד סופי או בן-מנייה של קבוצות ממידה אפס הוא קבוצה ממידה אפס.

מסקנה 2.3. כל קבוצה בת-מנייה היא קבוצה ממידה אפס.

משפט 2.4. משפט לבג[1]
תהא $A \subseteq \mathbb{R}^k$ תיבה סגורה ותהא $f : A \to \mathbb{R}^k$ פונקציה, f אינטגרבילית על A אם"ם קבוצת נקודות האי-רציפות של f היא ממידה אפס.

הוכחה.

- $\Leftarrow$
  - נניח ש-f אינטגרבילית על A, ותהא $g : A \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $a \in A$)[2]:

$$g(a) := \lim_{r \to 0^+} \operatorname{diam}(f(B_r(a)))$$

g אכן מוגדרת היטב מפני שלכל $a \in A$ הפונקציה $r \mapsto \operatorname{diam}(f(B_r(a)))$ מונוטונית עולה וחסומה[3] בסביבה ימנית של 0, ומכאן שהגבול החד-צדדי הנ"ל קיים ב-0.

  - נסמן $C := \{x \in A \mid g(x) > 0\}$ ו-$C_n := \left\{x \in A \mid g(x) > \frac{1}{n}\right\}$, א"כ מתקיים:

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

כעת נשים לב לכך שלכל $x \in A$ מתקיים $g(x) \ge 0$ ובנוסף $g(x) = 0$ אם"ם f רציפה ב-x, כלומר C היא קבוצת נקודות האי-רציפות של f.
נניח בשלילה ש-C אינה ממידה אפס, מכאן שע"פ טענה 2.2 קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-C_n אינה ממידה אפס. א"כ יהיו $n \in \mathbb{N}$ ו-$0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ כך שלכל סדרת תיבות סגורות $(B_l)_{l=1}^{\infty}$ המקיימת $C_n \subseteq \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l$ מתקיים $\sum_{l=1}^{\infty} V(B_l) \ge \varepsilon$.

  - כעת תהא P חלוקה של A, ותהיינה $A_1, A_2, \ldots, A_r$ כל התיבות הנוצרות ע"י חלוקה זו; מהשורה הקודמת ומהעובדה ש-∂A_i היא ממידה אפס לכל $r \ge i \in \mathbb{N}$ נובע כי:

$$\sum_{A_i^\circ \cap C_n \neq \emptyset} V(A_i) \ge \varepsilon$$

[1] ערך בוויקיפדיה: אנרי לבג.
[2] נזכור שהקוטר של קבוצה S במרחב מטרי הוא $\operatorname{diam}(S) := \sup\{d(x,y) \mid x, y \in S\}$, כלומר לכל $0 < r \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\operatorname{diam}(f(B_r(a))) = \sup_{x,y \in B_r(a) \cap A} |f(x) - f(y)| = \sup_{x \in B_r(a) \cap A} f(x) - \inf_{x \in B_r(a) \cap A} f(x)$$

[3] מההערה הקודמת ומהיות f חסומה נובע שהפונקציה $r \mapsto \operatorname{diam}(f(B_r(a)))$ אכן חסומה.

ולכן מהגדרת g נובע כי:

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,P)-\underline{s}(f,P)&=\sum_{i=1}^{r}V(A_i)\cdot\left(\sup_{x\in A_i}f(x)-\inf_{x\in A_i}f(x)\right)\geq\sum_{i=1}^{r}V(A_i)\cdot\left(\sup_{x\in A_i^\circ}f(x)-\inf_{x\in A_i^\circ}f(x)\right)\\&\geq\sum_{i=1}^{r}V(A_i)\cdot\sup_{x\in A_i^\circ}g(x)=\sum_{A_i^\circ\cap C_n\neq\emptyset}V(A_i)\cdot\sup_{x\in A_i^\circ}g(x)+\sum_{A_i^\circ\cap C_n=\emptyset}V(A_i)\cdot\sup_{x\in A_i^\circ}g(x)\\&\geq\sum_{A_i^\circ\cap C_n\neq\emptyset}V(A_i)\cdot\frac{1}{n}+\sum_{A_i^\circ\cap C_n=\emptyset}V(A_i)\cdot 0=\frac{1}{n}\cdot\sum_{A_i^\circ\cap C_n\neq\emptyset}V(A_i)\geq\frac{\varepsilon}{n}\end{aligned}$$

בסתירה לכך ש-f אינטגרבילית על A. מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-C ממידה אפס כנדרש.

- $\Rightarrow$

– תהא $D\subseteq A$ קבוצת נקודות האי-רציפות של f, ונניח ש-D ממידה אפס.
יהי $M\in\mathbb{R}$ כך ש-$|f(x)|\leq M$ לכל $x\in A$, יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$, ותהא $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת תיבות סגורות המקיימת[4]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}V(B_n)<\frac{\varepsilon}{4M}\qquad\qquad D\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n^\circ$$

לכל $x\in A\setminus D$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $y\in B_\delta(x)$ מתקיים $|f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{4\cdot V(A)}$ (כי f רציפה ב-x), ולכן גם $|f(y)-f(z)|<\frac{\varepsilon}{2\cdot V(A)}$ לכל $y,z\in B_\delta(x)$.

– מכאן שלכל $x\in A\setminus D$ קיימת תיבה סגורה C_x כך ש-$x\in C_x^\circ$ ו-$|f(y)-f(z)|<\frac{\varepsilon}{2\cdot V(A)}$ לכל $y,z\in C_x^\circ$, א"כ לכל $x\in A\setminus D$ נסמן ב-C_x תיבה כזו.

$$\Rightarrow A\subseteq\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n^\circ\right)\cup\left(\bigcup_{x\in A\setminus D}C_x^\circ\right)$$

A היא תיבה סגורה וככזו היא קומפקטית, א"כ יהיו $n_1,n_2,\ldots,n_r\in\mathbb{N}$ ו-$x_1,x_2,\ldots,x_m\in A\setminus D$ כך שמתקיים:

$$A\subseteq\left(\bigcup_{i=1}^{r}B_{n_i}^\circ\right)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{m}C_{x_i}^\circ\right)$$

– תהא P חלוקה של A המכילה את כל הקודקודים של התיבות $B_{n_1},B_{n_2},\ldots,B_{n_r},C_{x_1},C_{x_2},\ldots,C_{x_m}$.
תהיינה $A_1,A_2,\ldots,A_s$ כל התיבות הנוצרות ע"י החלוקה P, מכאן שלכל $s\geq j\in\mathbb{N}$ מתקיימת לפחות אחת משתי האפשרויות הבאות:

1. קיים $r\geq i\in\mathbb{N}$ כך ש-$A_j\subseteq B_{n_i}$ - נסמן ב-I_B את קבוצת האינדקסים המקיימים את אפשרות זו, כלומר $I_B\subseteq\{1,2,\ldots,s\}$ ולכל $j\in I_B$ קיים $r\geq i\in n$ כך ש-$A_j\subseteq B_{n_i}$.
2. קיים $m\geq i\in\mathbb{N}$ כך ש-$A_j\subseteq C_{x_i}$ - נסמן $I_C:=\{1,2,\ldots,s\}\setminus I_B$, א"כ $I_B\cup I_C=\{1,2,\ldots,s\}$.

[4] כדי ש-D תהיה מוכלת באיחוד הפנימים של התיבות נוכל לקחת סדרת תיבות סגורות עבור $2^{-k}\cdot\frac{\varepsilon}{4M}$, ואז להתבונן על מתיחת התיבות הללו פי 2 בכל כיוון.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overline{S}(f,P)-\underline{s}(f,P) &= \sum_{j=1}^{s} V(A_j)\cdot\left(\sup_{x\in A_j} f(x)-\inf_{x\in A_j} f(x)\right)\\
&= \sum_{j\in I_B} V(A_j)\cdot\left(\sup_{x\in A_j} f(x)-\inf_{x\in A_j} f(x)\right)+\sum_{j\in I_C} V(A_j)\cdot\left(\sup_{x\in A_j} f(x)-\inf_{x\in A_j} f(x)\right)\\
&\le \sum_{j\in I_B} V(A_j)\cdot 2M+\sum_{j\in I_C} V(A_j)\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot V(A)} = 2M\cdot\sum_{j\in I_B} V(A_j)+\frac{\varepsilon}{2\cdot V(A)}\cdot\sum_{j\in I_C} V(A_j)\\
&\le 2M\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} V(B_n)\right)+\frac{\varepsilon}{2\cdot V(A)}\cdot V(A) < 2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}$$

ε הנ"ל היה שרירותי ולכן ממשפט 1.5 נובע ש-f אינטגרבילית על A.

■

מסקנה 2.5. תהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ תיבה סגורה, תהיינה $f_1,f_2,\ldots,f_m:A\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות על A, ותהא $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
תהא $h:A\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $h(x):=g(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_m(x))$ לכל $x\in A$, h אינטגרבילית על A.

♣ בפרט נובע מכאן שמכפלת פונקציות אינטגרביליות היא אינטגרבילית.

למה 2.6. תהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ תיבה סגורה ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית על A כך ש-$f(x)\ge 0$ לכל $x\in A$.
מתקיים $\int_A f(x)\,dx=0$ אם"ם קיימת קבוצה $E\subseteq A$ ממידה אפס כך ש-$f(x)=0$ לכל $x\in A\setminus E$.

הוכחה.

- $\Leftarrow$
  נניח ש-$\int_A f(x)\,dx=0$ ונסמן (לכל $n\in\mathbb{N}$):

$$E:=\{x\in A\mid f(x)>0\}$$
$$E_n:=\left\{x\in A\mid f(x)>\frac{1}{n}\right\}$$

כעת נניח בשלילה ש-E אינה ממידה אפס, ונשים לב לכך שמתקיים:

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$$

מכאן שע"פ טענה 2.2 קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-E_n אינה ממידה אפס, א"כ יהיו $n\in\mathbb{N}$ ו-$0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ כך שלכל סדרת תיבות סגורות $(B_l)_{l=1}^{\infty}$ המקיימת $E_n\subseteq\bigcup_{l=1}^{\infty}B_l$ מתקיים $\sum_{l=1}^{\infty}V(B_l)\ge\varepsilon$.
כעת תהא P חלוקה של A, ותהיינה $A_1,A_2,\ldots,A_r$ כל התיבות הנוצרות ע"י חלוקה זו; מהשורה הקודמת נובע כי:

$$\sum_{A_i\cap E_n\neq\emptyset}V(A_i)\ge\varepsilon$$

ולכן מהיות f אי-שלילית נובע כי:

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,P) &= \sum_{A_i\cap E_n\neq\emptyset}V(A_i)\cdot\sup_{x\in A_i}f(x)+\sum_{A_i\cap E_n=\emptyset}V(A_i)\cdot\sup_{x\in A_i}f(x)\\
&\ge \sum_{A_i\cap E_n\neq\emptyset}V(A_i)\cdot\frac{1}{n}+\sum_{A_i\cap E_n=\emptyset}V(A_i)\cdot 0=\frac{1}{n}\cdot\sum_{A_i\cap E_n\neq\emptyset}V(A_i)\ge\frac{\varepsilon}{n}
\end{aligned}$$

P הנ"ל הייתה שרירותית ולכן נובע מכאן שמתקיים:

$$\overline{\int_A} f(x)\,dx \geq \frac{\varepsilon}{n} > 0 = \int_A f(x)\,dx$$

בסתירה לכך ש-f אינטגרבילית על A. מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-E ממידה אפס כנדרש.

- $\Rightarrow$

נניח שקיימת קבוצה $E \subseteq A$ ממידה אפס כך ש-$f(x) = 0$ לכל $x \in A \setminus E$.
מכאן שלכל תיבה סגורה $B \subseteq A$ כך ש-$V(B) > 0$ קיימת נקודה $x \in B$ כך ש-$f(x) = 0$, ולפיכך כל סכום תחתון של f על A הוא 0.
נתון ש-f אינטגרבילית על A ולכן מהשורה הקודמת נובע כי:

$$\int_A f(x)\,dx = \underline{\int_A} f(x)\,dx = 0$$

■

מסקנה 2.7. תהא $A \subseteq \mathbb{R}^k$ תיבה סגורה ותהינה $f, g : A \to \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות על A, מתקיים $\int_A f(x)\,dx = \int_A g(x)\,dx$ אם"ם קיימת קבוצה $E \subseteq A$ ממידה אפס כך ש-$f(x) = g(x)$ לכל $x \in A \setminus E$.

2.2 טענות נוספות על קבוצות ממידה אפס

טענה 2.8. תהא $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ פונקציה רציפה לפי ליפשיץ, לכל קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}^k$ ממידה אפס גם $h(E)$ ממידה אפס.

הוכחה. **בהוכחה זו נעבוד בנורמת ℓ_∞, כלומר הכדורים שלנו יהיו קוביות.**
יהי $M \in \mathbb{R}$ כך ש-$\|h(x) - h(y)\|_\infty \leq M \cdot \|x - y\|_\infty$, ותהא E קבוצה ממידה אפס.
יהי $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ותהא $(C_n)_{n=1}^\infty$ סדרת קוביות כך שמתקיים:

$$\sum_{n=1}^\infty V(C_n) < \frac{\varepsilon}{2^k M^k} \qquad E \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty C_n$$

תהא $(x_n)_{n=1}^\infty$ סדרה כך ש-$x_n \in C_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ותהא $(r_n)_{n=1}^\infty$ סדרה אורכי המקצועות של $(C_n)_{n=1}^\infty$.
מכאן שלכל $y \in E$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $\|y - x_n\|_\infty \leq \operatorname{diam}(C_n) = r_n$, ולכן גם $\|f(y) - f(x_n)\|_\infty \leq M \cdot \|y - x_n\|_\infty \leq M \cdot r_n$.

$$\Rightarrow f(E) \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty B_{M \cdot r_n}^{\hat{}}(f(x_n))$$

והרי:

$$\sum_{n=1}^\infty V(B_{M \cdot r_n}(f(x_n))) = \sum_{n=1}^\infty (2M \cdot r_n)^k = 2^k M^k \cdot \sum_{n=1}^\infty (r_n)^k = 2^k M^k \cdot \sum_{n=1}^\infty V(C_n) < 2^k M^k \cdot \frac{\varepsilon}{2^k M^k} = \varepsilon$$

ולכן ע"פ הגדרה $f(E)$ ממידה אפס. ■

מסקנה 2.9. בפרט לכל העתקה ליניארית $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ולכל קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}^k$ ממידה אפס גם $T(E)$ ממידה אפס.

מסקנה 2.10. כל תת-מרחב ממש של $\mathbb{R}^k$ הוא ממידה אפס.

טענה 2.11. תהא $K \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה קומפקטית, ותהא $f : K \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה; הגרף של f (שהוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}^{k+1}$) הוא קבוצה ממידה אפס.

צריך לכתוב הוכחה.

מסקנה 2.12. תהא $S \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה הניתנת להצגה כאיחוד סופי או בן-מנייה של קבוצות קומפקטיות, ותהא $f : S \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה; הגרף של f (שהוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}^{k+1}$) הוא קבוצה ממידה אפס.

♣ בפרט פונקציה הגרף של פונקציה רציפה $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

3 אינטגרביליות על קבוצות בעלות נפח

3.1 התחלה

משפט 3.1. תכונות בסיסיות של האינטגרל
תהא $S \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה בעלת נפח, ותהיינה $f, g : S \to \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות על S.

1. ליניאריות האינטגרל -
   - לכל $c \in \mathbb{R}$ מתקיים $c \cdot \int_S f(x)\,dx = \int_S (c \cdot f)(x)\,dx$.
   - מתקיים $\int_S (f \pm g)(x)\,dx = \int_S f(x)\,dx \pm \int_S g(x)\,dx$.
2. מונוטוניות האינטגרל -
   - אם $f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in S$ אז:
   $$\int_S f(x)\,dx \leq \int_S g(x)\,dx$$
   - אם $f(x) \geq 0$ לכל $x \in S$ אז לכל קבוצה בעלת נפח $T \subseteq S$ מתקיים:
   $$\int_T f(x)\,dx \leq \int_S f(x)\,dx$$
3. אי-שוויון המשולש האינטגרלי -
$$\left|\int_S f(x)\,dx\right| \leq \int_S |f(x)|\,dx$$

טענה 3.2. תהא $S \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה בעלת נפח ותהא $f : S \to \mathbb{R}$ פונקציה, אם f אינטגרבילית על S אז f חסומה ומתקיים:
$$\left|\int_S f(x)\,dx\right| \leq V(S) \cdot \sup_{x \in S} |f(x)|$$

בפרט, אם $V(S) = 0$ אז $\int_S f(x)\,dx = 0$.

טענה 3.3. כל קבוצה בעלת נפח היא קבוצה חסומה.

טענה 3.4. לכל שתי קבוצות בעלות נפח $S, T \subseteq \mathbb{R}^k$ כך ש-$S \subseteq T$ מתקיים $V(S) \leq V(T)$.

3.2 מסקנות ממשפט לבג

מסקנה 3.5. קבוצה $S\subseteq\mathbb{R}^{k}$ היא בעלת נפח אם"ם השפה של S (∂S) היא קבוצה ממידה אפס.

מסקנה 3.6. תהא $S\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה בעלת נפח ותהא $f:S\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה, f אינטגרבילית על S אם"ם קבוצת נקודות האי-רציפות של f היא ממידה אפס.

מסקנה 3.7. תהיינה $S,T\subseteq\mathbb{R}^{k}$ שתי קבוצות בעלות נפח.

- $S\cup T$ ו-$S\cap T$ בעלות נפח.
- תהא $f:S\cup T\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה, f אינטגרבילית על $S\cup T$ אם"ם היא אינטגרבילית על S ועל T בנפרד, ובמקרה כזה היא אינטגרבילית גם על $S\cap T$ ומתקיים:

$$\int\limits_{S\cup T}f\left(x\right)dx=\int\limits_{S}f\left(x\right)dx+\int\limits_{T}f\left(x\right)dx-\int\limits_{S\cap T}f\left(x\right)dx$$

- מתקיים:

$$V\left(S\cup T\right)=V\left(S\right)+V\left(T\right)-V\left(S\cap T\right)$$

הוכחה.

- מהגדרה מתקיים $\partial\left(S\cup T\right)\subseteq\left(\partial S\right)\cup\left(\partial T\right)$ ו-$\partial\left(S\cap T\right)\subseteq\left(\partial S\right)\cup\left(\partial T\right)$.
ע"פ מסקנה 3.5 ∂S ו-∂T הן קבוצות ממידה אפס, מכאן ש-$\left(\partial S\right)\cup\left(\partial T\right)$ ממידה אפס, וממילא גם $\partial\left(S\cup T\right)$ ו-$\partial\left(S\cap T\right)$ ממידה אפס, ושוב ממסקנה 3.5 נקבל ש-$S\cup T$ ו-$S\cap T$ הן קבוצות בעלות נפח.

- אם f אינטגרבילית על $S\cup T$ אז ע"פ מסקנה 3.6 קבוצת נקודות האי-רציפות שלה היא ממידה אפס, ולכן גם קבוצות נקודות האי-רציפות שלה על S ועל T בנפרד הן קבוצות ממידה אפס (כי הן מוכלות בזו של $S\cup T$), ושוב ממסקנה 3.6 נקבל ש-f אינטגרבילית על S ועל T בנפרד. באותו אופן אם f אינטגרבילית על S ועל T בנפרד אז קבוצות נקודות האי-רציפות שלה על S ועל T בנפרד הן קבוצות ממידה אפס, ולכן גם קבוצת נקודות האי-רציפות שלה על $S\cup T$ כזו (כי מוכלת באיחוד של שתי הראשונות), ושוב נקבל ש-f אינטגרבילית על $S\cup T$.
תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ תיבה סגורה כך ש-$S\cup T\subseteq S$, ותהיינה $f_{S},f_{T},f_{S\cap T}:\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}$ פונקציות המוגדרות ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}^{k}$):

$$f_{S}\left(x\right):=\begin{cases}f\left(x\right) & x\in S\\ 0 & x\notin S\end{cases}\qquad f_{S\cap T}\left(x\right):=\begin{cases}f\left(x\right) & x\in S\cap T\\ 0 & x\notin S\cap T\end{cases}$$

$$f_{T}\left(x\right):=\begin{cases}f\left(x\right) & x\in T\\ 0 & x\notin T\end{cases}\qquad f_{S\cup T}\left(x\right):=\begin{cases}f\left(x\right) & x\in S\cup T\\ 0 & x\notin S\cup T\end{cases}$$

נשים לב לכך שלכל $x\in\mathbb{R}^{k}$ מתקיים:

$$f_{S\cup T}\left(x\right)=f_{S}\left(x\right)+f_{T}\left(x\right)-f_{S\cap T}\left(x\right)$$

ולכן ע"פ הגדרה מתקיים:

$$\begin{aligned}\int\limits_{S\cup T} f(x)\,dx=\int\limits_{A} f_{S\cup T}(x)\,dx&=\int\limits_{A} f_S(x)+f_T(x)-f_{S\cap T}(x)\,dx\\&=\int\limits_{A} f_S(x)+\int\limits_{A} f_T(x)\,dx-\int\limits_{A} f_{S\cap T}(x)\,dx\\&=\int\limits_{S} f(x)+\int\limits_{T} f(x)\,dx-\int\limits_{S\cap T} f(x)\,dx\end{aligned}$$

- נובע ישירות מהסעיף הקודם עבור $f\equiv 1$.

■

3.3 אינטגרביליות על פנים וסגור

טענה 3.8 תהיינה $B_1,B_2,\ldots,B_n\subseteq\mathbb{R}^k$ תיבות סגורות, קיימות תיבות סגורות $C_1,C_2,\ldots,C_m\subseteq\mathbb{R}^k$ המקיימות:

1. $C_i^\circ\cap C_j^\circ=\emptyset$ לכל $m\geq i,j\in\mathbb{N}$ כך ש-$i\neq j$.
2. $\bigcup\limits_{i=1}^{m}C_i=\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$.

טענה 3.9 קיימות תיבות סגורות $B_1,B_2,\ldots,B_n$ המקיימות:

1. $B_i^\circ\cap B_j^\circ=\emptyset$ לכל $n\geq i,j\in\mathbb{N}$ כך ש-$i\neq j$.
2. $\mathrm{ar}(B_i)\leq 2$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$.
3. $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_n$.

הוכחה. הסעיפים הראשון והשלישי מתקבלים היישר מן הטענה הקודמת (3.8), כדי להשיג את הססעיף השני נפעיל את האלגוריתם הרקורסיבי הבא:

- עבור כל אחת מהתיבות שאינן מקיימות את סעיף 2, "נחתוך" את התיבה באמצע המקצוע הארוך ביותר של התיבה. התוצאה היא שתי תיבות שכל מקצועותיהן זהות לאלו של המקורית מלבד המקצוע המתאים למקצוע הארוך ביותר (במקורית) שאורכה הוא חצי מהאורך המקורי. מכיוון שבשלב הקודם היה אורך המקצוע הארוך ביותר לפחות פי שניים מאורך המקצוע הקצר ביותר, נדע שחצי אורכה עדיין גדול מאורך המקצוע הקצר ביותר ולכן בהכרח לא הגדלנו את יחס האורך-רוחב של התיבה.
- כל עוד נותרו תיבות שאינן מקיימות את סעיף 2 נחזור על השלב הקודם על כל התיבות שיש לנו כעת (כולל אלו שנוצרו מחציית התיבות המקוריות בשלב הקודם).

תהליך זה מוכרח להיעצר מפני שלכל תיבה ולכל התיבות שתיווצרנה ממנה בתהליך זה (מהגדרה כולן זהות זו לזו בכל שלב ולכן די לדבר על אחת מהן), היחס בין המקצוע אותו אנו חוצים לבין הקצר ביותר קטן פי שניים בכל שלב, ומכיוון שכך הרי שבשלב כלשהו התהליך ייעצר עבור מקצוע זה, כעת היות שלתיבה יש מספר סופי של מקצועות נדע שהתהליך ייעצר בשלב כלשהו עבור כל המקצועות ביחד.

■

טענה 3.10. יהי $1 \le M \in \mathbb{R}$, לכל תיבה סגורה $B \subseteq \mathbb{R}^k$ כך ש-$\text{ar}\,(B) \le M$ קיימת קובייה סגורה $C \subseteq \mathbb{R}^k$ המקיימת:

$$B \subseteq C \qquad\qquad V\left(C\right) \le M^{k-1} \cdot V\left(B\right)$$

הוכחה. תהא $B \subseteq \mathbb{R}^k$ תיבה סגורה כך ש-$\text{ar}\,(B) \le M$, מהגדרה B מוכלת בקובייה סגורה $C \subseteq \mathbb{R}^k$ שאורך כל מקצוע שלה הוא כאורך המקצוע הארוך ביותר של B, תהא C כנ"ל ונסמן את אורך המקצוע שלה ב-d.
נסמן ב-h את אורך המקצוע הקצר ביותר של B, מהנתון $\text{ar}\,(B) \le M$ נובע שקיימת תיבה $\tilde{C}$ שאורך כל המקצועות שלה ב-$k-1$ ממדים הוא $M \cdot h$ ובממד האחרון אורך המקצועות שלה הוא d, כך ש-$C \subseteq \tilde{C}$.

$$\Rightarrow V\left(C\right) \le V\left(\tilde{C}\right) = \left(M \cdot h\right)^{k-1} \cdot d = M^{k-1} \cdot h^{k-1} \cdot d \le M^{k-1} \cdot V\left(B\right)$$

■

מסקנה 3.11. יהי $1 \le M \in \mathbb{R}$, לכל תיבה סגורה $B \subseteq \mathbb{R}^k$ כך ש-$\text{ar}\,(B) \le M$ ולכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיימת קובייה $C \subseteq \mathbb{R}^k$ המקיימת:

$$B \subseteq C^{\circ} \qquad\qquad V\left(C\right) \le M^{k-1} \cdot V\left(B\right) + \varepsilon$$

הוכחה. תהא $B \subseteq \mathbb{R}^k$ תיבה סגורה כך ש-$\text{ar}\,(B) \le M$, ותהא $\tilde{C} \subseteq \mathbb{R}^k$ קובייה סגורה המקיימת:

$$B \subseteq \tilde{C} \qquad\qquad V\left(\tilde{C}\right) \le M^{k-1} \cdot V\left(B\right)$$

נסמן ב-d את אורך המקצוע של $\tilde{C}$, וכמו כן נסמן:

$$S := \max\left\{1, \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \cdot d^i\right\}$$

כעת יהי $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ונניח בהג"כ ש-$\varepsilon < 1$, ותהא $C \subseteq \mathbb{R}^k$ קובייה סגורה שאורך המקצוע שלה הוא $d + \frac{\varepsilon}{S}$ כך ש-$\tilde{C} \subseteq C^{\circ}$.

$$\Rightarrow V\left(C\right) = \left(d + \frac{\varepsilon}{S}\right)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot d^i \cdot \left(\frac{\varepsilon}{S}\right)^{k-i} \le d^k + \frac{\varepsilon}{S} \cdot \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \cdot d^i \le d^k + \frac{\varepsilon}{S} \cdot S = d^k + \varepsilon = V\left(\tilde{C}\right) + \varepsilon \le M^{k-1} \cdot V\left(B\right) + \varepsilon$$

■

מסקנה 3.12. תהא $E \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה ממידה אפס. לכל $0 < \varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ קיימת סדרה $\left(C_n\right)_{n=1}^{\infty}$ של קוביות סגורות כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $V\left(C_n\right) < \delta$, ובנוסף:

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_n^{\circ} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} V\left(C_n\right) < \varepsilon$$

♣ כמובן שקיום כיסוי של קוביות פתוחות גורר קיום של כיסוי ע"י קוביות סגורות.

הוכחה. יהיו $0 < \varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ ותהא $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת תיבות סגורות כך שמתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} V(B_n) < \frac{\varepsilon}{2^k} \qquad E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_n$$

מטענה 3.9 נובע שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימות תיבות סגורות $B_{n,1}, B_{n,2}, \ldots, B_{n,s_n}$ כך שמתקיים:

1. $B_{n,i}^{\circ} \cap B_{n,j}^{\circ} = \emptyset$ לכל $s_n \geq i, j \in \mathbb{N}$ כך ש-$i \neq j$.
2. $\text{ar}(B_{n,i}) \leq 2$ לכל $s_n \geq i \in \mathbb{N}$.
3. $B_n = \bigcup_{i=1}^{s_n} B_{n,i}$.

ולכן ע"פ המסקנה הקודמת (3.11) נובע שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימות קוביות סגורות $C_{n,1}, C_{n,2}, \ldots, C_{n,s_n}$ יתקיים:

$$\sum_{i=1}^{s_n} V(C_{n,i}) \leq 2^{k-1} \cdot V(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \qquad B_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{s_n} C_{n,i}^{\circ}$$

כל קובייה כזו ניתנת לחלוקה ל-N^k קוביות סגורות בעלות פנימים זרים שאורך המקצוע של כל אחת מהן הוא $\frac{1}{N^k}$ מאורך המקצוע של הקובייה המקורית, לכן ניתן לחלק כל קובייה כזו לקוביות בעלות פנימים זרים שנפח כל אחת מהן קטן מ-δ.
איחוד בן-מנייה של קבוצות סופיות הוא בן-מנייה ולכן נובע מזה שקיימת סדרת קוביות $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$V(C_n) < \delta$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ובנוסף:

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_n^{\circ}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} V(C_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{k-1} \cdot V(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) = 2^{k-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} V(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < 2^{k-1} \cdot \frac{\varepsilon}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כנדרש. ■

טענה 3.13. תהא $K \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה קומפקטית ובעלת נפח, ותהא $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת תיבות סגורות כך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} V(B_n)$ מתכנס ו-$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^{\circ}$.
קיימת סדרה אינדקסים סופית ועולה ממש $(n_j)_{j=1}^{m}$ כך שמתקיים:

$$V(K) \leq \sum_{j=1}^{m} V\left(B_{n_j}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} V(B_n) \qquad K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_{n_j}^{\circ}$$

הוכחה. מהקומפקטיות של K נובע שקיימת סדרת אינקסים סופית ועולה ממש $(n_j)_{j=1}^{m}$ כך ש-$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_{n_j}^{\circ}$, וע"פ טענה 3.4 כל סדרה כזו מקיימת:

$$V(K) \leq \sum_{j=1}^{m} V\left(B_{n_j}\right) \qquad K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_{n_j}^{\circ}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} V(B_n)$ הוא טור חיובי ולכן $\sum_{j=1}^{m} V\left(B_{n_j}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} V(B_n)$. ■

מסקנה 3.14. תהא $K\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה קומפקטית, אם K ממידה אפס אז K בעלת נפח ומתקיים $V\left(K\right)=0$.

הוכחה. K קומפקטית, כלומר היא סגורה וחסומה ובפרט $\partial K\subseteq K$, מהיות K ממידה אפס נובע ש-∂K ממידה אפס ולכן ע"פ מסקנה 3.5 K בעלת נפח.

ע"פ מסקנה 3.12, לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת סדרה $\left(C_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ של קוביות סגורות כך שמתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty}V\left(C_{n}\right)<\varepsilon \qquad\qquad K\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}C_{n}^{\circ}$$

ולכן ע"פ הטענה הקודמת (3.13) לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ מתקיים $V\left(K\right)<\varepsilon$, כלומר $V\left(K\right)=0$. ■

מסקנה 3.15. תהא $S\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה בעלת נפח, אם S ממידה אפס אז $V\left(S\right)=0$.

♣ מכאן שהאינטגרל של כל פונקציה חסומה, על קבוצה בעלת נפח ממידה אפס, הוא 0.

מסקנה 3.16. תהא $S\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה בעלת נפח, מתקיים $V\left(S\right)>0$ אם"ם $S^{\circ}\neq\emptyset$.

הוכחה.

- $\Leftarrow$

  S היא קבוצה בעלת נפח ולכן היא חסומה (טענה 3.3), מכאן שגם ∂S חסומה ומכיוון ש-∂S גם סגורה הרי שהיא קומפקטית.
  מהיות S בעלת נפח נובע ש-∂S ממידה אפס, ולכן ע"פ המסקנה הקודמת (3.14) ∂S בעלת נפח ו-$V\left(\partial S\right)=0$.
  כעת, אם $S^{\circ}=\emptyset$ אז $S\subseteq\partial S$ ומטענה 3.4 ינבע ש-$V\left(S\right)=0$; מכאן שאם $V\left(S\right)>0$ אז $S^{\circ}\neq\emptyset$.

- $\Rightarrow$

  נניח ש-$S^{\circ}\neq\emptyset$, מכאן שקיימת תיבה סגורה $A\subseteq S^{\circ}\subseteq S$ כך ש-$V\left(A\right)>0$, ולכן ע"פ טענה 3.4 גם $V\left(S\right)>0$.

■

מסקנה 3.17. תהא $S\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה בעלת נפח ותהא $f:\overline{S}\to\mathbb{R}$ פונקציה, התנאים הבאים שקולים:

- f אינטגרבילית על S.
- f אינטגרבילית על $\overline{S}$.
- f אינטגרבילית על S°.

ואם אחד מהם מתקיים אז $\int_{S}f\left(x\right)dx=\int_{\overline{S}}f\left(x\right)dx=\int_{S^{\circ}}f\left(x\right)dx$.

הוכחה. אנחנו יודעים ש-$\partial\left(\overline{S}\right)\subseteq\partial S$ ו-$\partial\left(S^{\circ}\right)$, ומכאן שע"פ מסקנה 3.5 אם S בעלת נפח אז גם $\overline{S}$ ו-S° בעלות נפח.
מהגדרה מתקיים $\overline{S}\setminus S^{\circ}=\partial S$, $\overline{S}\setminus S\subseteq\overline{S}\setminus S^{\circ},S\setminus S^{\circ}$, ומהיות S בעלת נפח נובע ש-∂S ממידה אפס, וממילא גם $S\setminus S^{\circ}$, $\overline{S}\setminus S^{\circ}$ ו-$\overline{S}\setminus S$ ממידה אפס. מכאן שע"פ משפט לבג אינטגרביליות של f על אחת משלוש הקבוצות גוררת את היותה אינטגרבילית על שתי האחרות. כמו כן מתקיים (מסקנה 3.7):

$$\int\limits_{S^{\circ}}f\left(x\right)dx\leq\int\limits_{S}f\left(x\right)dx\leq\int\limits_{\overline{S}}f\left(x\right)dx=\int\limits_{S^{\circ}}f\left(x\right)dx+\int\limits_{\partial S}f\left(x\right)dx-\int\limits_{\emptyset}f\left(x\right)dx\leq\int\limits_{S^{\circ}}f\left(x\right)dx+0-0=\int\limits_{S^{\circ}}f\left(x\right)dx$$

$$\Rightarrow\int\limits_{S^{\circ}}f\left(x\right)dx=\int\limits_{S}f\left(x\right)dx=\int\limits_{\overline{S}}f\left(x\right)dx$$

■

מסקנה 3.18. תהא $S\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה, אם S בעלת נפח אז גם $\overline{S}$ ו-S° בעלות נפח ומתקיים:

$$V\left(S\right)=V\left(\overline{S}\right)=V\left(S^{\circ}\right)$$

4 אינטגרלים לא אמיתיים

משפט 4.1. לכל קבוצה פתוחה יש סדרת מיצוי.

♣ מדרך ההוכחה של המשפט ניתן לראות שלכל קבוצה פתוחה יש סדרת מיצוי שבה כל אחד מהאיברים הוא איחוד סופי של תיבות סגורות, וניתן להניח גם שהתיבות הללו בעלות פנימים זרים.

הוכחה. **בהוכחה זו נעבוד בנורמת ℓ_∞, כלומר הכדורים שלנו יהיו קוביות.**
תהא $U \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה, מכאן ש-$C := \mathbb{R}^k \setminus U$ היא קבוצה סגורה.
תהא $f : U \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(x) := \inf\{\|x-y\|_\infty : y \in U\}$ לכל $x \in U$ (זהו המרחק של x מ-C), ולכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן:

$$D_n := \left\{x \in U \mid \|x\|_\infty \leq n,\ \ f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

מהגדרה מתקיים (לכל $n \in \mathbb{N}$):

- D_n סגורה וחסומה, כלומר קומפקטית.
- $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.
- $D_n \subseteq D_{n+1}^\circ$.

אך $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ אינה בהכרח סדרת מיצוי של U, שכן ייתכן שקבוצות אחדות מאיבריה אינן בעלות נפח.
לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in D_n$ קיימת תיבה סגורה $B_x \subseteq D_{n+1}^\circ$ כך ש-$x \in B_x^\circ$ (שכן D_{n+1}° היא קבוצה פתוחה), ומכאן שניתן לכסות את D_n ע"י תיבות פתוחות שהסגור של כל אחת מהן (הקובייה הסגורה המתאימה) מוכל ב-D_{n+1}°.
D_nהיא קבוצה קומפקטית לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכן נובע מזה שקיימת קבוצה סופית של תיבות פתוחות שהסגור שלכל אחת מהן מוכל ב-D_{n+1}° ואיחודן מכסה את D_n; כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת קבוצה סופית של תיבות סגורות המוכלות כל אחת ב-D_{n+1}° ואיחודן מכסה את D_n, א"כ לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן ב-K_n איחוד כזה של תיבות סגורות.[5]
מהגדרה מתקיים (לכל $n \in \mathbb{N}$):

- K_n היא קבוצה קומפקטית (מכיוון שהיא איחוד סופי של קבוצות קומפקטיות).
- K_n היא קבוצה בעלת נפח (היא איחוד של תיבות סגורות).
- $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, מפני שמתקיים $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{n+1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = U$.
- $K_n \subseteq D_{n+1}^\circ \subseteq K_{n+1}^\circ$, שכן $D_{n+1} \subseteq K_{n+1}$ ולכן $D_{n+1}^\circ \subseteq K_{n+1}^\circ$.

א"כ ע"פ הגדרה $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת מיצוי של U. ■

משפט 4.2. תהא $U \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה, ותהא $f : U \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה[6]; f אינטגרבילית על U אם"ם לכל סדרת מיצוי $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ של U קיים הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{K_n} f(x)\,dx$$

ובמקרה כזה מתקיים:

$$\int\limits_U f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{K_n} f(x)\,dx$$

[5] ע"פ טענה 3.8 ניתן להניח שהפנימים של כל שתי תיבות סגורות באיחוד זרים זה לזה.
[6] למעשה מספיק ש-f אינטגרבילית על כל תת-קבוצה קומפקטית של U.

הוכחה. נסמן:

$$X_1 := \left\{ \ \int_K f^+(x)\,dx \ \middle|\ K\subseteq U,\ \text{קומפקטית ובעלת נפח } K \ \right\}$$
$$X_2 := \left\{ \ \int_K f^-(x)\,dx \ \middle|\ K\subseteq U,\ \text{קומפקטית ובעלת נפח } K \ \right\}$$

- $\Leftarrow$

נניח ש-f אינטגרבילית על U, מהגדרה לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\int\limits_U f^+(x)\,dx = \sup\left\{ \ \int_K f^+(x)\,dx \ \middle|\ K\subseteq U,\ \text{קומפקטית ובעלת נפח } K \ \right\} \geq \int\limits_{K_n} f^+(x)\,dx$$
$$\int\limits_U f^-(x)\,dx = \sup\left\{ \ \int_K f^-(x)\,dx \ \middle|\ K\subseteq U,\ \text{קומפקטית ובעלת נפח } K \ \right\} \geq \int\limits_{K_n} f^-(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int\limits_U f^+(x)\,dx \geq \lim_{n\to\infty}\int\limits_{K_n} f^+(x)\,dx$$
$$\Rightarrow \int\limits_U f^-(x)\,dx \geq \lim_{n\to\infty}\int\limits_{K_n} f^-(x)\,dx$$

מצד שני לכל קבוצה קומפקטית ובעלת נפח $K\subseteq U$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$K\subseteq K_n$, וממונוטוניות האינטגרל גם:

$$\int\limits_{K_n} f^+(x)\,dx \geq \int\limits_K f^+(x)\,dx$$
$$\int\limits_{K_n} f^-(x)\,dx \geq \int\limits_K f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int\limits_U f^+(x)\,dx \leq \lim_{n\to\infty}\int\limits_{K_n} f^+(x)\,dx$$
$$\Rightarrow \int\limits_U f^-(x)\,dx \leq \lim_{n\to\infty}\int\limits_{K_n} f^-(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int\limits_U f(x)\,dx = \int\limits_U f^+(x)\,dx - \int\limits_U f^-(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{K_n} f^+(x)\,dx - \lim_{n\to\infty}\int\limits_{K_n} f^-(x)\,dx$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_{K_n} f^+(x)\,dx - \int\limits_{K_n} f^-(x)\,dx\right) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{K_n} f^+(x)-f^-(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{K_n} f(x)\,dx$$

- $\Rightarrow$

נניח שהגבול $\lim_{n\to\infty}\int_{K_n}f\left(x\right)dx$ קיים, **צריך להסביר למה זה אומר שהגבולות** $\lim_{n\to\infty}\int_{K_n}f^{+}\left(x\right)dx$ **ו-**$\lim_{n\to\infty}\int_{K_n}f^{-}\left(x\right)dx$ **קיימים או להפריך זאת.**

לכל קבוצה קומפקטית ובעלת נפח $K\subseteq U$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$K\subseteq K_n$ ולכן גם[7]:

$$\int_{K}f^{+}\left(x\right)dx\leq\int_{K_n}f^{+}\left(x\right)dx\leq\lim_{n\to\infty}\int_{K_n}f^{+}\left(x\right)dx$$
$$\int_{K}f^{-}\left(x\right)dx\leq\int_{K_n}f^{-}\left(x\right)dx\leq\lim_{n\to\infty}\int_{K_n}f^{-}\left(x\right)dx$$

מכאן שקיימים החסמים העליונים הבאים:

$$\sup\left\{ \int_{K}f^{+}\left(x\right)dx\;\middle|\;K\subseteq U,\ \text{קומפקטית ובעלת נפח } K\right\}$$
$$\sup\left\{ \int_{K}f^{-}\left(x\right)dx\;\middle|\;K\subseteq U,\ \text{קומפקטית ובעלת נפח } K\right\}$$

כלומר f^{+} ו-f^{-} אינטגרביליות על U, ולכן ע"פ הגדרה גם f אינטגרבילית על U.

כבר ראינו בכיוון ההפוך שבמקרה כזה מתקיים השוויון המבוקש.

■

משפט 4.3. תהא $U\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה פתוחה, ותהא $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית על U.
לכל קבוצה סגורה ובעלות נפח $C\subseteq U$, קיימות סדרות $\left(A_n\right)_{n=1}^{\infty}$ ו-$\left(B_n\right)_{n=1}^{\infty}$ של קבוצות קומפקטיות כך ש-A_n ו-B_n כך ש-$A_n\subseteq C\subseteq B_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$, ובנוסף:

$$\int_{C}f\left(x\right)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}f\left(x\right)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{B_n}f\left(x\right)dx$$

♣ גם כאן ניתן להניח שכל איבר בשתי הסדרות הנ"ל הוא איחוד סופי של תיבות סגורות בעלות פנימים זרים.

הוכחה. מהיות C בעלת נפח נובע שהיא חסומה, ולכן מהעובדה שהיא גם סגורה נובע שהיא קומפקטית, ולפיכך מהנתון ש-f אינטגרבילית על U נובע ש-f אינטגרבילית על C.
ע"פ מסקנה 3.17 f אינטגרבילית על C° ומתקיים:

$$\int_{C^{\circ}}f\left(x\right)dx=\int_{C}f\left(x\right)dx$$

C° היא קבוצה פתוחה ולכן ע"פ שני המשפטים האחרונים (4.1 ו-4.2) קיימת סדרת מיצוי $\left(A_n\right)_{n=1}^{\infty}$ של C° המקיימת:

$$\int_{C}f\left(x\right)dx=\int_{C^{\circ}}f\left(x\right)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}f\left(x\right)dx$$

■

צריך להמשיך את ההוכחה.

[7] הסדרות שהאיברים ה-n-יים שלהן הם $\int_{K_n}f^{\pm}\left(x\right)dx$ הן סדרות עולות (מונוטוניות האינטגרל).

משפט 4.4. תכונות בסיסיות של האינטגרל

תהא $U\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה פתוחה, ותהיינה $f,g:S\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות על U.

1. ליניאריות האינטגרל -
   - לכל $c\in\mathbb{R}$ מתקיים $c\cdot\int_{U}f\left(x\right)dx=\int_{U}\left(c\cdot f\right)\left(x\right)dx$.
   - מתקיים $\int_{U}\left(f\pm g\right)\left(x\right)dx=\int_{U}f\left(x\right)dx\pm\int_{U}g\left(x\right)dx$.
2. מונוטוניות האינטגרל -
   - אם $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$ לכל $x\in U$ אז:
   $$\int\limits_{U}f\left(x\right)dx\leq\int\limits_{U}g\left(x\right)dx$$
   - כמו כן אם $f\left(x\right)\geq0$ לכל $x\in U$ ו-f אינטגרבילית על קבוצה פתוחה / בעלת נפח $S\subseteq U$ אז:
   $$\int\limits_{S}f\left(x\right)dx=\int\limits_{U}f\left(x\right)dx$$
3. אי-שוויון המשולש האינטגרלי -
   $$\left|\int\limits_{U}f\left(x\right)dx\right|\leq\int\limits_{U}\left|f\left(x\right)\right|dx$$

5 משפט פוביני והחלפת משתנה

5.1 משפט פוביני

משפט 5.1. משפט פוביני[8]

תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ ו-$B\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תיבות, ותהא $f:A\times B\to\mathbb{R}$ פונקציה.

אם f אינטגרבילית על $A\times B$ ($A\times B\subseteq\mathbb{R}^{k+m}$) אז האינטגרלים:

$$\int\limits_{A}\left(\underline{\int}_{B}f\left(x,y\right)dy\right)dx\qquad\int\limits_{A}\left(\overline{\int}_{B}f\left(x,y\right)dy\right)dx$$

$$\int\limits_{B}\left(\underline{\int}_{A}f\left(x,y\right)dx\right)dy\qquad\int\limits_{B}\left(\overline{\int}_{A}f\left(x,y\right)dx\right)dy$$

קיימים ושווים ל-$\int\limits_{A\times B}f\left(x,y\right)dxdy$.

הוכחה. נוכיח את המשפט עבור השורה העליונה, ההוכחה עבור התחתונה כמעט זהה.

נניח ש-f אינטגרבילית על $A\times B$, ויהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$. מכאן שקיימת חלוקה P של $A\times B$ כך שמתקיים:

$$\overline{S}\left(f,P\right)-\underline{s}\left(f,P\right)<\varepsilon$$

[8] ערך בוויקיפדיה: גווידו פוביני.

תהא P כנ"ל ותהיינה P_A ו-P_B חלוקות של A ושל B בהתאמה כך שמתקיים $P = P_A \times P_B$.
תהיינה $A_1, A_2, \ldots, A_r$ כל התיבות המתאימות לחלוקה P_A, ותהיינה $B_1, B_2, \ldots, B_t$ כל התיבות המתאימות לחלוקה P_A; מכאן שכל תיבה הנוצרת ע"י החלוקה P היא מהצורה $A_i \times A_j$ עבור $\mathbb{N} \ni i \le r$ ו-$\mathbb{N} \ni j \le t$ כלשהם.
תהיינה $g : A \to \mathbb{R}$ ו-$h : A \to \mathbb{R}$ פונקציות המוגדרות ע"י (לכל $x \in A$):

$$g(x) := \underline{\int}_B f(x,y)\,dy$$
$$h(x) := \overline{\int}_B f(x,y)\,dy$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underline{s}(f,P) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{t} V(A_i \times B_j) \cdot \inf_{(x,y)\in A_i\times B_j} f(x,y) \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{t} V(A_i) \cdot V(B_j) \cdot \inf_{(x,y)\in A_i\times B_j} f(x,y) \\
&= \sum_{i=1}^{r} V(A_i) \cdot \left(\sum_{j=1}^{t} V(B_j) \cdot \inf_{(x,y)\in A_i\times B_j} f(x,y)\right) \\
&\le \sum_{i=1}^{r} V(A_i) \cdot \inf_{x\in A_i} \left(\sum_{j=1}^{t} V(B_j) \cdot \inf_{y\in B_j} f(x,y)\right) \\
&\le \sum_{i=1}^{r} V(A_i) \cdot \inf_{x\in A_i} \left(\underline{\int}_B f(x,y)\,dy\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} V(A_i) \cdot \inf_{x\in A_i} g(x) = \underline{s}(g,P_A)
\end{aligned}$$

ובאותו אופן נקבל:

$$\overline{S}(h,P_A) \le \overline{S}(f,P)$$

ולכן ע"פ הגדרת P מתקיים:

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy - \varepsilon < \underline{s}(f,P) \le \underline{s}(g,P_A) \le \overline{S}(g,P_A) \le \overline{S}(h,P_A) \le \overline{S}(f,P) < \int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy + \varepsilon$$
$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy - \varepsilon < \underline{s}(f,P) \le \underline{s}(g,P_A) \le \underline{s}(h,P_A) \le \overline{S}(h,P_A) \le \overline{S}(f,P) < \int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy + \varepsilon$$

ε הנ"ל היה שרירותי ולכן מהגדרת האינטגרביליות נקבל שקיימים האינטגרלים:

$$\int_A g(x)\,dx \qquad\qquad \int_A h(x)\,dx$$

ומתקיימים השוויונות:

$$\int_A \left(\underline{\int}_B f(x,y)\,dy\right) dx = \int_A g(x)\,dx = \int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy$$
$$\int_A \left(\overline{\int}_B f(x,y)\,dy\right) dx = \int_A h(x)\,dx = \int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy$$

■

מסקנה 5.2. תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ ו-$B\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תיבות, ותהא $f:A\times B\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית (ב-$\mathbb{R}^{k+m}$).
אם לכל $a\in A$ ולכל $b\in B$ קיימים האינטגרלים:

$$\int\limits_{B}f\left(a,y\right)dy \qquad \int\limits_{A}f\left(x,b\right)dx$$

אז מתקיים:

$$\int\limits_{A\times B}f\left(t\right)dt=\int\limits_{B}\left(\int\limits_{A}f\left(x,y\right)dx\right)dy=\int\limits_{A}\left(\int\limits_{B}f\left(x,y\right)dy\right)dx$$

♣ בפרט עבור כל פונקציה רציפה על תיבה ניתן "לפרק" את האינטגרל לאינטגרלים מממד 1 ולחשב אותם בכל סדר שנרצה.

לכתוב על הקשר למשפט שוורץ.

מסקנה 5.3. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a\leq b$ ותהיינה $g_{1},g_{2}:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות כך ש-$g_{1}\left(x\right)\leq g_{2}\left(x\right)$ לכל $x\in[a,b]$.
נסמן:

$$S:=\left\{ \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{2}\mid x\in\left[a,b\right],\ y\in\left[g_{1}\left(x\right),g_{2}\left(x\right)\right]\right\}$$

S היא קבוצה בעלת נפח ולכל פונקציה רציפה $f:S\to\mathbb{R}$ [9] מתקיים:

$$\int\limits_{S}f\left(t\right)dt=\int\limits_{a}^{b}\left(\int\limits_{g_{1}\left(x\right)}^{g_{2}\left(x\right)}f\left(x,y\right)dy\right)dx$$

♣ כמובן שניתן להמשיך ולהגדיר פונקציות רציפות $h_{1},h_{2}:S\to\mathbb{R}$ כך ש-$h_{1}\left(x,y\right)\leq h_{2}\left(x,y\right)$ לכל $\left(x,y\right)\in A$, לסמן:

$$T:=\left\{ \ \left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^{3}\ \middle|\ x\in\left[a,b\right],\ y\in\left[g_{1}\left(x\right),g_{2}\left(x\right)\right],\ z\in\left[h_{1}\left(x,y\right),h_{2}\left(x,y\right)\right]\ \right\}$$

ואז לכל פונקציה רציפה $f:T\to\mathbb{R}$ יתקיים:

$$\int\limits_{T}f\left(t\right)dt=\int\limits_{a}^{b}\left(\int\limits_{g_{1}\left(x\right)}^{g_{2}\left(x\right)}\left(\int\limits_{h_{1}\left(x,y\right)}^{h_{2}\left(x,y\right)}f\left(x,y,z\right)dz\right)dy\right)dx$$

וכן הלאה...

[9] ניתן להחליף את התנאי ש-f רציפה בכך שהאינטגרל $\int_{g_{1}(x)}^{g_{2}(x)}f\left(x,y\right)dy$ מוגדר לכל $x\in[a,b]$.

5.2 החלפת משתנה

♣ באינפי' 2 ראינו את המשפט הבא:

משפט. הצבה

תהא $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה על קטע סגור I ותהא $\varphi:[a,b]\to I$ פונקציה גזירה כך ש-φ' אינטגרבילית רימן על $[a,b]$, מתקיים:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

והסקנו ממנו משפט נוסף:

משפט. הצבה הפוכה

תהיינה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ותהא $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ פונקציה הפיכה וגזירה כך ש-φ' אינטגרבילית רימן על $[\alpha,\beta]$, מהרציפות וההפיכות של φ נובע שהיא מונוטונית ממש.

1. אם φ עולה ממש אז:

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx$$

2. אם φ יורדת ממש אז:

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_{\varphi^{-1}(b)}^{\varphi^{-1}(a)} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx$$

נשים לב לכך שבכל מקרה זה אומר שמתקיים:

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\cdot|\varphi'(x)|\,dx$$

כעת עולה השאלה האם משפטים דומים מתקיימים גם בממדים גבוהים יותר, אמנם ההוכחה המקורית של משפט ההצבה הסתמכה על קיום פונקציה קדומה ל-f אך האינטואיציה תקפה גם כאן.

תזכורת: ראינו שעבור $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ הומיאומורפיזם וקבוצה $S\subseteq\mathbb{X}$ מתקיים:

$$f(S)^\circ=f(S^\circ)$$
$$\partial f(S)=f(\partial S)$$
$$\overline{f(S)}=f(\overline{S})$$

וכמו עבור כל פונקציה רציפה גם $f(S)$ קומפקטית.

בכיתה ראינו את הטענה עבור קבוצות קומפקטיות אך היא נכונה באופן כללי.

טענה 5.4. תהא $U,V\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצות פתוחות, ותהא $g:U\to V$ פונקציה גזירה ברציפות, חח"ע ועל, לכל קבוצה $E\subseteq U$ ממידה אפס גם $g(E)$ ממידה אפס.

צריך לכתוב הוכחה

טענה 5.5. תהא $T:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ העתקה ליניארית, ותהא $S\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה בעלת נפח; מתקיים:

$$V\left(T\left(S\right)\right)=\int\limits_{T(S)}1\;dx=\int\limits_{S}\left|\det T\right|dx=V\left(S\right)\cdot\left|\det T\right|$$

♣ טענה זו מראה שהגדרת "פונקציית **נפח**" שראינו בליניארית 1 אכן מתיישבת עם הגדרת **נפח** בקורס זה.

צריך לכתוב הוכחה

סימון: לכל $x\in\mathbb{R}^k$ ולכל $0<r\in\mathbb{R}$ נסמן $C_r\left(x\right):=\left[x_1-r,x_1+r\right]\times\left[x_2-r,x_2+r\right]\times\ldots\times\left[x_k-r,x_k+r\right]$, זוהי הקובייה הסגורה שמרכזה ב-x ואורך כל מקצוע שלה הוא $2r$.

♣ נזכור שמתקיים $C_r\left(x\right)=\left\{y\in\mathbb{R}^k:\left\|y-x\right\|_\infty\leq r\right\}$, כלומר קובייה סגורה בנורמה האוקלידית היא כדור סגור בנורמת ℓ_∞.

תזכורת: לפני שהוכחנו את משפט הפונקציה ההפוכה ראינו את שתי הלמות שלהלן, אמנם אז חשבנו על הנורמה האוקלידית אך בהוכחה לא השתמשנו בהנחה זו ולכן היא תקפה לכל נורמה ובפרט עבור נורמת ℓ_∞.

למה. תהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה ותהא $g:A\to\mathbb{R}^k$ פונקציה גזירה, אם קיים $\varepsilon\in\left(0,1\right)$ כך שלכל $x\in A$ מתקיים:

$$\left\|Dg_x-\text{Id}\right\|_{\text{op}}\leq\varepsilon$$

אז לכל $a\in A$ ולכל $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_r\left(a\right)\subseteq A$ מתקיים (עבור אותו ε):

$$B_{(1-\varepsilon)r}\left(g\left(a\right)\right)\subseteq g\left(B_r\left(a\right)\right)\subseteq B_{(1+\varepsilon)r}\left(g\left(a\right)\right)$$

למה. תהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה, ותהא $f:A\to\mathbb{R}^k$ פונקציה חח"ע וגזירה ברציפות כך ש-Df_a הפיכה לכל $a\in A$. אם קיים $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ כך שלכל $x\in A$ מתקיים:

$$\left\|\left(Df_a\right)^{-1}\circ Df_x-\text{Id}\right\|_{\text{op}}\leq\varepsilon$$

אז לכל $a\in A$ ולכל $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_r\left(a\right)\subseteq A$ מתקיים (עבור אותו ε):

$$Df_a\left(B_{(1-\varepsilon)r}\left(\left(Df_a\right)^{-1}\left(f\left(a\right)\right)\right)\right)\subseteq f\left(B_r\left(a\right)\right)\subseteq Df_a\left(B_{(1+\varepsilon)r}\left(\left(Df_a\right)^{-1}\left(f\left(a\right)\right)\right)\right)$$

מסקנה 5.6. תהיינה $U\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה פתוחה, ו-$B\subseteq U$ תיבה שמרכזה[10] בנקודה $a\in\mathbb{R}^k$, כך ש-$\text{ar}\left(B\right)\leq 2$, ותהא $g:U\to\mathbb{R}^k$ פונקציה חח"ע וגזירה ברציפות כך ש-Dg_x הפיכה לכל $x\in U$.
אם קיים $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ כך ש ש-$\left\|\left(Dg_a\right)^{-1}\circ Dg_x-\text{Id}\right\|_{\text{op}_\infty}<\varepsilon$[11] לכל $x\in U$, אז $g\left(B\right)$ בעלת נפח ומתקיים:

$$\left(1-2\varepsilon\right)^k\cdot\left|J_g\left(a\right)\right|\cdot V\left(B\right)\leq V\left(g\left(B\right)\right)\leq\left(1+2\varepsilon\right)^k\cdot\left|J_g\left(a\right)\right|\cdot V\left(B\right)$$

צריך לכתוב הוכחה

[10] המרכז של תיבה $\left[a_1,b_1\right]\times\left[a_2,b_2\right]\times\ldots\times\left[a_k,b_k\right]$ הוא הנקודה $\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\ldots,\frac{a_k+b_k}{2}\right)$.
[11] הכוונה כאן לנורמה האופרטורית עבור נורמת ℓ_∞.

משפט 5.7. חילוף משתנה לקבוצות קומפקטיות

תהא $U \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה, תהא $g : U \to \mathbb{R}^k$ פונקציה חח"ע וגזירה ברציפות כך ש-$J_g(x) \neq 0$ לכל $x \in U$, ותהא $K \subseteq g(U)$ קבוצה קומפקטית בעלת נפח.

לכל פונקציה אינטגרבילית $f : K \to \mathbb{R}$ כך ש-$f \circ g$ אינטגרבילית על $g^{-1}(K)$[12] מתקיים:

$$\int\limits_K f(x)\,dx = \int\limits_{g^{-1}(K)} f(g(x)) \cdot |J_g(x)|\,dx$$

צריך לכתוב הוכחה

מסקנה 5.8. חילוף משתנה לקבוצות פתוחות

תהא $U \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה, תהא $g : U \to \mathbb{R}^k$ פונקציה חח"ע וגזירה ברציפות כך ש-$J_g(x) \neq 0$ לכל $x \in U$.

לכל פונקציה אינטגרבילית $f : g(U) \to \mathbb{R}$ כך ש-$f \circ g$ אינטגרבילית על U מתקיים:

$$\int\limits_{g(U)} f(x)\,dx = \int\limits_U f(g(x)) \cdot |J_g(x)|\,dx$$

צריך לכתוב הוכחה

[12] ע"פ משפט הפונקציה ההפוכה g^{-1} עומדת באותם תנאים של g, ולכן ע"פ טענה 5.4 $g^{-1}(K)$ בעלת נפח (השפה שלה ממידה אפס).

נספח: מערכות קואורדינטות

דוגמה 5.9. חילופי משתנים נפוצים - מערכות קואורדינטות

- המעבר ממערכת קואורדינטות קוטביות/גליליות לקרטזיות מתבצע ע"י ההעתקות:

$$(r,\theta)\mapsto(r\cdot\cos\theta,r\cdot\sin\theta)$$
$$(\rho,\theta,z)\mapsto(\rho\cdot\cos\theta,\rho\cdot\sin\theta,z)$$

הדיפרנציאלים של העתקות אלו הם:

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\cdot\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cdot\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\cdot\sin\theta\\ \sin\theta & r\cdot\cos\theta\end{bmatrix}$$

ולפיכך היעקוביאן בכל נקודה הוא r או ρ בהתאמה, וכמובן היעקוביאן בכיוון ההפוך הוא $\frac{1}{r}$ ו-$\frac{1}{\rho}$ בהתאמה.

- המעבר ממערכת קואורדינטות גליליות לכדוריות מתבצע ע"י ההעתקה $(r,\theta,\phi)\mapsto(r\cdot\sin\theta\cdot\cos\phi,r\cdot\sin\theta\cdot\sin\phi,r\cdot\cos\theta)$[13], [14] הדיפרנציאל של העתקה זו הוא:

$$\begin{bmatrix}\sin\theta\cdot\cos\phi & r\cdot\cos\theta\cdot\cos\phi & -r\cdot\sin\theta\cdot\sin\phi\\ \sin\theta\cdot\sin\phi & r\cdot\cos\theta\cdot\sin\phi & r\cdot\sin\theta\cdot\cos\phi\\ \cos\theta & -r\cdot\sin\theta & 0\end{bmatrix}$$

ולפיכך היעקוביאן בכל נקודה הוא (נפתח את הדטרמיננטה לפי השורה התחתונה):

$$\begin{aligned}
&\cos\theta\cdot(r\cdot\cos\theta\cdot\cos\phi\cdot r\cdot\sin\theta\cdot\cos\phi+r\cdot\sin\theta\cdot\sin\phi\cdot r\cdot\cos\theta\cdot\sin\phi)\\
&-(-r\cdot\sin\theta)\cdot(\sin\theta\cdot\cos\phi\cdot r\cdot\sin\theta\cdot\cos\phi+r\cdot\sin\theta\cdot\sin\phi\cdot\sin\theta\cdot\sin\phi)\\
=&\cos\theta\cdot\left(r^2\cdot\cos^2\phi\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta+r^2\cdot\sin^2\phi\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta\right)\\
&+r\cdot\sin\theta\cdot\left(r\cdot\sin^2\theta\cdot\cos^2\phi+r\cdot\sin^2\theta\cdot\sin^2\phi\right)\\
=&r^2\cdot\sin\theta\cdot\left(\cos^2\phi\cdot\cos^2\theta+\sin^2\phi\cdot\cos^2\theta\right)\\
&+r^2\cdot\sin\theta\cdot\left(\sin^2\theta\cdot\cos^2\phi+\sin^2\theta\cdot\sin^2\phi\right)\\
=&r^2\cdot\sin\theta\cdot\left(\cos^2\phi\cdot\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)+\sin^2\phi\cdot\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\right)\\
=&r^2\cdot\sin\theta\cdot\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\cdot\left(\sin^2\phi+\cos^2\phi\right)=r^2\cdot\sin\theta
\end{aligned}$$

בכל אחת מהחלפת הקואורדינטות הללו היעקוביאן יוצא חיובי ולכן אין צורך לקחת את הערך המוחלט שלו. ♣

[13] כאן יש לדייק ולומר ש-$\theta\in[0,\pi]$, כמובן שניתן להחליט באופן שרירותי ש-$\theta\in[\pi,2\pi]$ (או כל קטע אחר באורך π).

[14] **שימו לב לכך ש התפקידים של θ ו-ϕ הפוכים מאלה שבתרגול 11.**