המרחב - הגדרות בלבד

אנליזה אלמנטרית רב-ממדית - 80116

מרצה: נועה ניצן

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 קבוצות מיוחדות במרחב

♣ באופן אינטואיטיבי יש הבדל בין וקטורים (חיצים בעלי גודל וכיוון) לבין נקודות, למרות זאת מבחינה אלגברית שני האובייקטים מיוצגים באמצעות סדרת מספרים ממשיים והאיזומורפיזם ביניהן ברור כל כך שעד כה לא עסקנו בו בכלל. למרות זאת קורס זה נועד לתת לנו את האינטואיציה למרחב $\mathbb{R}^n$[1] ולכן אנחנו נבדיל בין נקודות לווקטורים בסימון בלבד: נסמן נקודות בסוגריים מעוגלים ואילו וקטורים סומנו בסוגריים מרובעים[2], כמו כן לכל שתי נקודות $P,Q\in\mathbb{R}^n$ נגדיר את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ כווקטור שגודלו וכיוונו הם כאלה שאם נשים את ראשיתו ב-P אזי ייגע ראשו ב-Q (מבחינה פורמלית $\overrightarrow{PQ}$ הוא הווקטור $Q-P$ כשהחיסור מתבצע קואורדינטה קואורדינטה, ומהגדרה מתקיים $\overrightarrow{PP}=\vec{0}$ ו-$-\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QP}$).

סימון: אזכיר את הסימון שלנו מקורסי ליניארית, אנחנו מסמנים את הקואורדינטה ה-i של וקטור $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ ב-x_i ואת הקואורדינטה ה-ij של מטריצה $A\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ ב-$[A]_{ij}$.

הגדרה 1.1. יהיו $\vec{0}\neq\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ וקטור ו-$P\in\mathbb{R}^n$ נקודה, תת-הקבוצה $\{P+t\cdot\vec{v}\mid t\in\mathbb{R}\}$ נקראת <u>הישר העובר דרך</u> P <u>בכיוון הווקטור</u> $\vec{v}$ (תת-קבוצה $L\subseteq\mathbb{R}^n$ תקרא <u>ישר</u> אם קיימים $\vec{v}$ ו-P כך ש-$L=\{P+t\cdot\vec{v}\mid t\in\mathbb{R}\}$).

הגדרה 1.2. תת-קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ תקרא <u>מישור</u> אם קיימים נקודה $P\in\mathbb{R}^n$ ושני וקטורים בת"ל $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ כך שמתקיים $M=\{P+s\cdot\vec{v}+t\cdot\vec{w}\mid s,t\in\mathbb{R}\}$.

♣ ישרים ומישורים הם מה שקראנו לו בליניארית 1 בשם "ישריות" וכך מרחב הכיוונים של ישר הוא ממד 1 ומרחב הכיוונים של מישור הוא ממד 2.

הגדרה 1.3. נאמר שנקודות $P_1,P_2,\ldots P_k\in\mathbb{R}^n$ הן <u>קו-מישוריות</u> אם קיים מישור $M\subseteq\mathbb{R}^k$ כך ש-$P_1,P_2,\ldots P_k\in M$.

הגדרה 1.4. נאמר ששני מישורים $M_1,M_2\subseteq\mathbb{R}^3$ מקבילים ונסמן $M_1\parallel M_2$ אם קיימים $P_1,P_2,\vec{v_1},\vec{w_1}\vec{v_2},\vec{w_2}\in\mathbb{R}^3$ כך שההצגות הפרמטריות שלהם הן:

$$M_1=\{P_1+s\cdot\vec{v_1}+t\cdot\vec{w_1}\mid s,t\in\mathbb{R}\}$$
$$M_2=\{P_2+s\cdot\vec{v_2}+t\cdot\vec{w_2}\mid s,t\in\mathbb{R}\}$$

ובנוסף מתקיים $\operatorname{span}\{\vec{v_1},\vec{w_1}\}=\operatorname{span}\{\vec{v_2},\vec{w_2}\}$.

♣ כלומר שני מישורים הם מקבילים אם"ם מרחבי הכיוונים שלהם זהים.

♣ ניתן לתת הגדרה דומה לכל סוג של ישריות בכל מרחב שהוא.

[1] מסיבה זו חלק מן ההגדרות שנראה בקורס זה אינן פורמליות לחלוטין.

[2] כך: $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ ו-$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

2 נורמה ומטריקה

הגדרה 2.1. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, פונקציה $\|\cdot\|:V\times V\to\mathbb{R}$ תקרא נורמה אם מתקיימות שלוש התכונות הבאות (לכל $\vec{v},\vec{w}\in V$ ו-$c\in\mathbb{R}$):

1. חיוביות (או חיוביות בהחלט): $\|\vec{v}\|\geq0$, ובנוסף: $\|\vec{v}\|=0$ אם"ם $v=0_V$.
2. הומוגניות (הלימה לכפל בסקלר): $\|c\cdot\vec{v}\|=|c|\cdot\|\vec{v}\|$.
3. א"ש המשולש: $\|\vec{v}+\vec{w}\|\leq\|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|$.

♣ כפי שניתן לראות נורמה היא בעצם דרך למדוד את גודלו של וקטור ובכך להגדיר את המושג "גודל של וקטור".

הגדרה 2.2. V ייקרא מרחב נורמי אם ניתן להגדיר עליו נורמה.

הגדרה 2.3. תהא A קבוצה, פונקציה $d:A\times A\to\mathbb{R}$ תקרא מטריקה אם מתקיימות שלושת התכונות הבאות (לכל $x,y,z\in A$):

1. חיוביות בהחלט - $d\left(x,y\right)\geq0$, ובנוסף: $d\left(x,y\right)=0$ אם"ם $x=y$.
2. סימטריה - $d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$.
3. א"ש המשולש - $d\left(x,z\right)\leq d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)$.

♣ מטריקה כשמה כן היא: דרך למדוד את המרחק (ולמעשה להגדיר אותו) בין שני איברים בקבוצה, דרישת החיוביות בהחלט והסימטריה הן טריוויאליות ודרישת א"ש המשולש מפרמלת אינטואיציה ברורה: הוספת "תחנה" בדרך יכולה רק להאריך אותה אך לעולם לא תקצר.

♣ כל נורמה מגדירה מטריקה ע"י $d\left(\vec{v},\vec{w}\right):=\|\vec{v}-\vec{w}\|$, לעומת זאת לא כל מטריקה מגדירה נורמה, הדוגמה הקלאסית לכך היא המטריקה הדיסקרטית:

$$d\left(x,y\right):=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$$

הגדרה 2.4. ישנה סדרה קלאסית של מטריקות על המרחב האוקלידי $\mathbb{R}^n$ המסומנת ב-$\left(d_k\right)_{k=1}^{\infty}$ ומוגדרת ע"י (לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$):

$$d_k\left(x,y\right):=\sqrt[k]{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-y_i\right|^k}$$

♣ עבור $m=1$ מתקיים $d_1=d_2=d_3=\ldots$ אך עבור ממדים גבוהים יותר d_2 תהיה המטריקה האוקלידית המבוססת על הכללת משפט פיתגורס לממדים גבוהים יותר ואילו d_1 תהיה "מטריקת נהגי המוניות של מנהטן".

הגדרה 2.5. קיימת מטריקה נוספת "בסדרה" המוגדרת ע"י:

$$d_\infty\left(x,y\right):=\max\left\{\left|x_i-y_i\right|:n\geq i\in\mathbb{N}\right\}$$

♣ הסיבה לסימון "d_∞" היא שלכל $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ ולכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $d_k\left(\vec{x},\vec{y}\right)\geq d_{k+1}\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ וגם $d_k\left(\vec{x},\vec{y}\right)\geq d_\infty\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ ובצורה קצת יותר ציורית: $d_1\left(\vec{x},\vec{y}\right)\geq d_2\left(\vec{x},\vec{y}\right)\geq d_3\left(\vec{x},\vec{y}\right)\geq\ldots\geq d_\infty\left(\vec{x},\vec{y}\right)$.

הגדרה 2.6. יהי V מרחב נורמי ותהא $\|\cdot\|:V\times V\to\mathbb{R}$ נורמה על V, נאמר שווקטור $\vec{v}\in V$ הוא וקטור יחידה אם $\|\vec{v}\|=1$.

3 המכפלה הסקלרית

מפרק זה והלאה (כל עוד לא נאמר אחרת) אנו עוסקים בנורמה ובמטריקה האוקלידיות.

♣ מומלץ מאד לצפות בסרטונים של 3blue1brown, ובפרט בסרטון שלו על המכפלה הסקלרית.

הגדרה 3.1. יהיו $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ ותהא $\theta\in\mathbb{R}$ זווית[3] בין $\vec{v}$ ל-$\vec{w}$[4], המכפלה הסקלרית של $\vec{v}$ ו-$\vec{w}$ היא:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}:=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos\theta$$

♣ ההגדרה תופסת גם כאשר $\vec{v}=\vec{0}$ ו/או $\vec{w}=\vec{0}$ משום שאז $\|\vec{v}\|=0$ ו/או $\|\vec{w}\|=0$ (בהתאמה) ולכן לכל ערך של θ נקבל $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$.

♣ נשים לב לכך שההיטל של $\vec{w}$ על $\vec{v}$ הוא בדיוק:

$$\text{Proj}_{\vec{v}}\left(\vec{w}\right):=\left(\frac{\|\vec{w}\|\cdot\cos\theta}{\|\vec{v}\|}\right)\cdot\vec{v}=\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\cdot\vec{v}$$

ולהפך, ההיטל של $\vec{v}$ על $\vec{w}$ הוא בדיוק:

$$\text{Proj}_{\vec{w}}\left(\vec{v}\right):=\left(\frac{\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta}{\|\vec{w}\|}\right)\cdot\vec{w}=\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right)\cdot\vec{w}$$

כמובן שההטלות בכיוון הניצב הן בדיוק $\vec{w}-\text{Proj}_{\vec{v}}\left(\vec{w}\right)$ (ההיטל של $\vec{w}$ בכיוון הניצב ל-$\vec{v}$) ו-$\vec{v}-\text{Proj}_{\vec{w}}\left(\vec{v}\right)$ (ההיטל של $\vec{v}$ בכיוון הניצב ל-$\vec{w}$).

מסקנה 3.2. לכל $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$.

מסקנה 3.3. א"ש קושי-שוורץ

לכל $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\vec{v}\cdot\vec{w}\leq\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|$, ומתקיים שוויון אם"ם $\vec{v}$ ו-$\vec{w}$ תלויים ליניארית.

מסקנה 3.4. יהיו $\vec{0}\neq\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ ונסמן ב-θ את הזווית הקטנה מבין השתיים הנוצרות ביניהם, מתקיים:

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot\vec{w}>0&\Longleftrightarrow 0\leq\theta<\frac{\pi}{2}\\ \vec{v}\cdot\vec{w}=0&\Longleftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\\ \vec{v}\cdot\vec{w}<0&\Longleftrightarrow\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\end{aligned}$$

הגדרה 3.5. נאמר ששני וקטורים $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ ניצבים זה לזה אם $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$ ואז נסמן $\vec{v}\perp\vec{w}$.

♣ כן, וקטור האפס ניצב לכל וקטור אחר.

♣ מהגדרת המכפלה הסקלרית ומהחיוביות של הנורמה נובע שאם $\vec{v}$ ו-$\vec{w}$ שונים מ-$\vec{0}$ אז $\vec{v}\perp\vec{w}\Longleftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$.

הגדרה 3.6. נאמר שווקטור $\vec{0}\neq\vec{N}\in\mathbb{R}^2$ ניצב לישר $L\subseteq\mathbb{R}^2$ (או ש-$\vec{N}$ הוא נורמל של L) אם $\vec{N}$ ניצב למרחב הכיוונים של L.

[3] אנחנו לא נגדיר כאן מהי זווית בין וקטורים, באופן אינטואיטיבי $\vec{v}$ ו-$\vec{w}$ פורשים מישור המהווה תמ"ו של $\mathbb{R}^n$ ובמישור זה אנו מודדים את הזווית כרגיל.

[4] זה לא משנה באיזו זווית בוחרים מפני ש-$\cos\left(\theta\right)=\cos\left(-\theta\right)=\cos\left(2\pi-\theta\right)$.

4 המכפלה הווקטורית

♣ מומלץ מאד לצפות בסרטונים של 3blue1brown, ובפרט בסרטון שלו על המכפלה הווקטורית.

♣ בהינתן שני וקטורים $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^{3}$ נוכל להגדיר העתקה ליניארית $l:\mathbb{R}^{3}\rightarrow\mathbb{R}$ (להעתקות כאלה נתנו את השם פונקציונלים) ע"י:

$$l\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:=\det\left(\begin{bmatrix}a_{1} & b_{1} & x\\a_{2} & b_{2} & y\\a_{3} & b_{3} & z\end{bmatrix}\right)$$

כלומר l מחזירה לכל וקטור $\vec{c}\in\mathbb{R}^{3}$ את הנפח המכוון של המקבילון שמגדירה סדרת הווקטורים $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.
l הנ"ל היא פונקציונל ולכן כפי שלמדנו בליניארית 2 (משפט ההצגה של ריס) קיים וקטור $\vec{v}\in\mathbb{R}^{3}$ יחיד כך שלכל $\vec{c}\in\mathbb{R}^{3}$ מתקיים $l\left(\vec{c}\right)=\vec{v}\cdot\vec{c}$, באיזה וקטור מדובר?
אתנחתא קצרה של גאומטריה: הנפח של המקבילון שמגדירים הווקטורים $\vec{a}$, $\vec{b}$ ו-$\vec{c}$ הוא שטח המקבילית שמגדירים $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$ כפול אורך הגובה היורד מ-$\vec{c}$ למישור שפורשים $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$. כלומר הדבר היחיד שמעניין ב-$\vec{c}$ הוא הרכיב שלו בכיוון המאונך למישור זה, ולכן ה-$\vec{v}$ המבוקש מוכרח להיות מאונך למישור כדי שמכפלה סקלרית איתו תתייחס אך ורק לרכיב הרצוי; בנוסף אנחנו יודעים שמתקיים $\vec{v}\cdot\vec{c}=\left\Vert \vec{v}\right\Vert \cdot\text{Proj}_{\vec{v}}\left(\vec{c}\right)$ ולכן כדי ש-$\vec{v}\cdot\vec{c}$ יהיה שווה לנפח המקבילון הרצוי הנורמה של $\vec{v}$ ($\left\Vert \vec{v}\right\Vert$) צריכה להיות שטח המקבילית שפורשים $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$ שהוא בדיוק $\left|\sin\theta\right|\cdot\left\Vert \vec{b}\right\Vert \cdot\left\Vert \vec{a}\right\Vert$ כאשר θ היא זווית הנוצרת בין $\vec{a}$ ל-$\vec{b}$[5]. עד כאן ראינו על איזה ישר היוצא מן הראשית צריך להיות $\vec{v}$ ומהי הנורמה שלו, אבל קיימים שני וקטורים כאלה ($\vec{v}$ ו-$-\vec{v}$), באיזה מהם נבחר? כאן צריך להכניס את העניין שהדטרמיננטה מחזירה נפח מכוון ולכן היחס בין $\vec{v}$ לבין $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$ צריך להיות כמו היחס של ציר ה-z לצירי ה-x וה-y בהתאמה, כלומר אם נסמן ב-$\vec{a}\times\vec{b}$ את $\vec{v}$ הנ"ל אז הכיוון של $\vec{a}\times\vec{b}$ נקבע לפי כלל יד ימין (ראו איור בעמוד הבא).
מצד שני מהנוסחה המפורשת של הדטרמיננטה נובע שמתקיים[6]:

$$\begin{aligned}\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) & =\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=l\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\det\left(\begin{bmatrix}a_{1} & b_{1} & x\\a_{2} & b_{2} & y\\a_{3} & b_{3} & z\end{bmatrix}\right)\\
 & =x\cdot\det\left(\begin{bmatrix}a_{2} & b_{2}\\a_{3} & b_{3}\end{bmatrix}\right)-y\cdot\det\left(\begin{bmatrix}a_{1} & b_{1}\\a_{3} & b_{3}\end{bmatrix}\right)+z\cdot\det\left(\begin{bmatrix}a_{1} & b_{1}\\a_{2} & b_{2}\end{bmatrix}\right)\\
 & =x\cdot\left(a_{2}\cdot b_{3}-a_{3}\cdot b_{2}\right)+y\cdot\left(-\left(a_{1}\cdot b_{3}-a_{3}\cdot b_{1}\right)\right)+z\cdot\left(a_{1}\cdot b_{2}-a_{2}\cdot b_{1}\right)
\end{aligned}$$

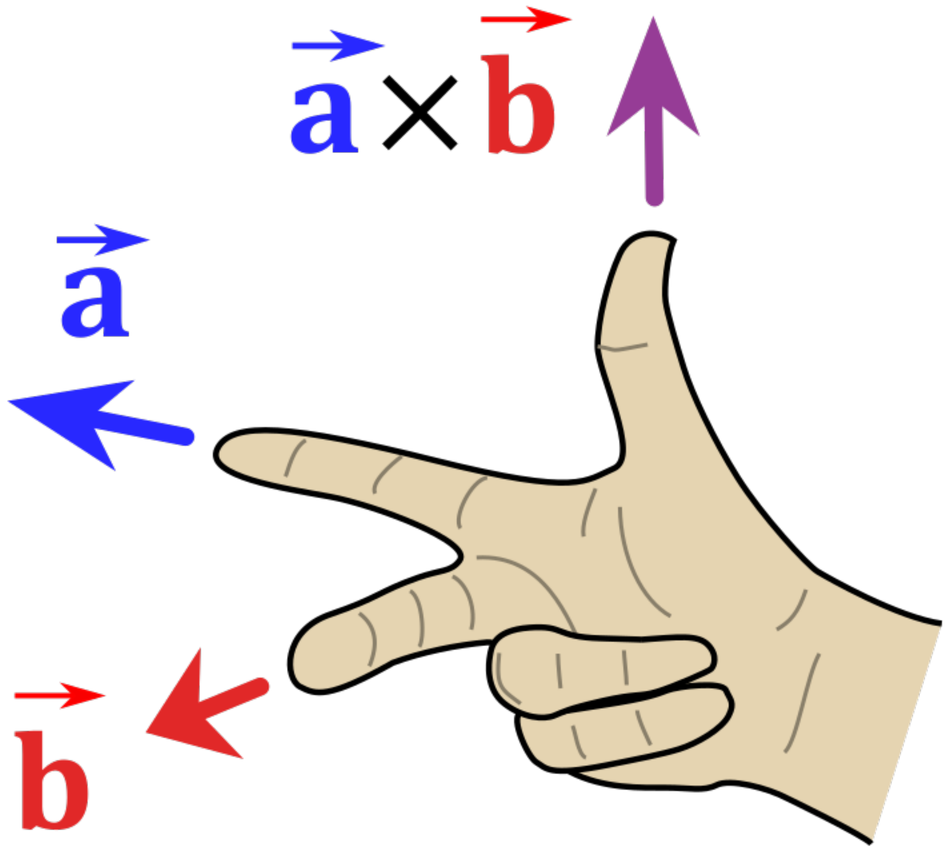
וממילא:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{bmatrix}a_{2}\cdot b_{3}-a_{3}\cdot b_{2}\\a_{3}\cdot b_{1}-a_{1}\cdot b_{3}\\a_{1}\cdot b_{2}-a_{2}\cdot b_{1}\end{bmatrix}$$

♣ את ההסבר לקשר שבין המכפלה הווקטורית לדטרמיננטה למדתי מסרטון של 3blue1brown. בניגוד אליו בחרתי שהעמודה שבה נכנסות הקואורדינטות של $\vec{c}$ היא העמודה השלישית (מתכונות הדטרמיננטה נובע שזה לא משנה), וזאת כדי שיהיה ברור שהיחס בין $\vec{a}\times\vec{b}$ לבין $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$ צריך להיות כמו היחס של ציר ה-z לצירי ה-x וה-y בהתאמה, וכמו כן בחירה זו מתאימה יותר לאיור של כלל יד ימין המופיע בעמוד הבא.

[5] זה לא משנה באיזו זווית מדובר מפני ש-$\left|\sin\theta\right|=\left|-\sin\theta\right|=\left|\sin\left(-\theta\right)\right|=\left|\sin\left(2\pi-\theta\right)\right|$.
[6] המכפלה $\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ נקראת גם "מכפלה מעורבת", כלומר המכפלה המעורבת של וקטורים מחזירה את נפח המקבילון שהם מגדירים.

הגדרה 4.1. יהיו $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ ותהא $\theta\in\mathbb{R}$ זווית בין $\vec{a}$ ל-$\vec{b}$, <u>המכפלה הווקטורית</u> של $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$ היא וקטור המסומן ב-$\vec{a}\times\vec{b}$ שהנורמה שלו היא $\|\vec{a}\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|\cdot|\sin\theta|$ והוא מאונך למישור שפורשים $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$ (כלומר הוא מאונך הן ל-$\vec{a}$ והן ל-$\vec{b}$) כאשר כיוונו של הווקטור נקבע ע"פ כלל יד ימין (ראו איור למטה).



איור 1: כלל יד ימין

מקור: התמונה שלעיל נלקחה מוויקישיתוף, שם נכתב שהיא מופיעה ברישיון CC BY-SA 3.0.

- ♣ ההגדרה תופסת גם כאשר $\vec{a}=\vec{0}$ ו/או $\vec{b}=\vec{0}$ משום שאז $\|\vec{a}\|=0$ ו/או $\left\|\vec{b}\right\|=0$ (בהתאמה) ולכן לכל ערך של θ נקבל $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|=0$ (כלומר $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$).
- ♣ ההגדרה תקפה גם כאשר $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$ תלויים ליניארית משום שאז $\sin\theta=0$ ולכן $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|=0$, כלומר $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ ואין זה משנה באיזה כיוון "נפעיל" את כלל יד ימין.

מסקנה 4.2. לכל $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ מתקיים $\vec{b}\times\vec{a}=-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

הגדרה 4.3. נאמר שווקטור $\vec{0}\neq\vec{N}\in\mathbb{R}^3$ <u>ניצב</u> למישור $M\subseteq\mathbb{R}^3$ (או ש-$\vec{N}$ הוא <u>נורמל</u> של M) אם $\vec{N}$ ניצב למרחב הכיוונים של M.