פונקציות נפח - הוכחות נבחרות

אלגברה ליניארית (1) - 80134

מרצה: ערן נבו

מתרגלים: איתמר ישראלי ושני שלומי

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומות השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

1.1 במרחב וקטורי כללי

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל לשדה $\mathbb{F}$ כך ש-$\dim V > 0$, נסמן $n := \dim V$.
נניח שקיימת פונקציית נפח $D : V^n \to \mathbb{F}$, תהא D כנ"ל ויהיו $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$.

טענה 1.1. אם קיים $\mathbb{N} \ni i \leq n$ כך ש-$v_i = 0_V$ אז $D(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$.

הוכחה. הטענה נובעת ישירות מהתכונה הראשונה של פונקציות נפח: אם $v_i = 0$ אז $v_i = 0 \cdot v_i$ ולכן $D(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0 \cdot D(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$. ■

מסקנה 1.2. אם הסדרה $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ תלויה ליניארית אז $D(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$.

♣ כלומר אם $D(v_1, v_2, \ldots, v_n) \neq 0$ אז הסדרה $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ בת"ל וממילא היא בסיס של V, אנחנו נראה בהמשך שגם הכיוון ההפוך נכון (אלא אם D היא פונקציית האפס).

הוכחה. נניח שהסדרה $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ תלויה ליניארית ובהג"כ נניח ש-v_n ניתן להצגה כצר"ל של שאר הווקטורים בסדרה.
יהיו $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot v_i$, מהתכונה השנייה של פונקציות נפח נובע כי:

$$\begin{aligned} D(v_1, v_2, \ldots, v_n) &= D\left(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot v_i\right) = D\left(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-2} a_i \cdot v_i\right) \\ &= D\left(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-3} a_i \cdot v_i\right) = \ldots = D(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, 0_V + a_1 \cdot v_1) = D(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, 0_V) \end{aligned}$$

ולכן מהטענה הקודמת (1.1) נובע ש-$D(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$. ■

טענה 1.3. יהיו $\mathbb{N} \ni i, j \leq n$ כך ש-$i < j$, מתקיים:

$$D(v_1, v_2, \ldots v_{i-1}, \boldsymbol{v_j}, v_{i+1} \ldots, v_{j-1}, \boldsymbol{v_i}, v_{j+1}, \ldots, v_n) = -D(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

♣ כלומר החלפה של שני וקטורים זה בזה משנה את הסימן של נפח ה"מקבילון", הטענה הזו אינטואיטיבית למדי: החלפה של שני וקטורים שקולה לשיקוף סביב ציר הסימטרייה שלהם (בסימוני הטענה ציר הסימטרייה הוא $\operatorname{span}(\boldsymbol{v_i} + \boldsymbol{v_j})$) ושיקוף אכן משנה את הסימן של שטח/נפח מכוון. מי שזה לא מספיק לו מוזמן להסתכל על החלפה של שני צירים כהכפלת אחד מהם ב--1 ואז סיבוב ב-$90°$, אין ספק שהכפל ב--1 צריך לשנות את הסימן ושהסיבוב אינו משנה דבר בכל הקשור לשטחים ונפחים.

הוכחה. מהתכונה השנייה של פונקציות נפח נובע כי:

$$\begin{aligned} D(v_1, v_2, \ldots v_{i-1}, \boldsymbol{v_j}, v_{i+1} \ldots, v_{j-1}, \boldsymbol{v_i}, v_{j+1}, \ldots, v_n) &= D(v_1, v_2, \ldots v_{i-1}, \boldsymbol{v_j}, v_{i+1} \ldots, v_{j-1}, \boldsymbol{v_i} + \boldsymbol{v_j}, v_{j+1}, \ldots, v_n) \\ &= D(v_1, v_2, \ldots v_{i-1}, \boldsymbol{v_j} - (\boldsymbol{v_i} + \boldsymbol{v_j}), v_{i+1} \ldots, v_{j-1}, \boldsymbol{v_i} + \boldsymbol{v_j}, v_{j+1}, \ldots, v_n) \\ &= D(v_1, v_2, \ldots v_{i-1}, \boldsymbol{-v_i}, v_{i+1} \ldots, v_{j-1}, \boldsymbol{v_i} + \boldsymbol{v_j}, v_{j+1}, \ldots, v_n) \\ &= D(v_1, v_2, \ldots v_{i-1}, \boldsymbol{-v_i}, v_{i+1} \ldots, v_{j-1}, \boldsymbol{v_i} + \boldsymbol{v_j} + (\boldsymbol{-v_i}), v_{j+1}, \ldots, v_n) \\ &= D(v_1, v_2, \ldots v_{i-1}, \boldsymbol{-v_i}, v_{i+1} \ldots, v_{j-1}, \boldsymbol{v_j}, v_{j+1}, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

ולכן מהתכונה הראשונה נקבל:

$$\begin{aligned}D\left(v_1,v_2,\dots v_{i-1},\boldsymbol{v_j},v_{i+1}\dots,v_{j-1},\boldsymbol{v_i},v_{j+1},\dots,v_n\right)&=D\left(v_1,v_2,\dots v_{i-1},\mathbf{-1}\cdot\boldsymbol{v_i},v_{i+1}\dots,v_{j-1},\boldsymbol{v_j},v_{j+1},\dots,v_n\right)\\&=\mathbf{-1}\cdot D\left(v_1,v_2,\dots v_{i-1},\boldsymbol{v_i},v_{i+1}\dots,v_{j-1},\boldsymbol{v_j},v_{j+1},\dots,v_n\right)\\&=-D\left(v_1,v_2,\dots,v_n\right)\end{aligned}$$

■

סימון: לכל פעולת שורה אלמנטרית $\varepsilon:M_n\left(\mathbb{F}\right)\to M_n\left(\mathbb{F}\right)$ נתאים פונקציה $\varepsilon^*:V^n\to V^n$ המהווה את פעולת ה"עמודה" האלמנטרית המקבילה, כלומר[1]:

1. אם ε היא החלפת השורות ה-i וה-j זו בזו ($n\geq i,j\in\mathbb{N}$) אז

$$\varepsilon^*\left(v_1,v_2,\dots,v_n\right)=\left(v_1,v_2,\dots v_{i-1},v_j,v_{i+1}\dots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\dots,v_n\right)$$

2. אם ε הכפלת השורה ה-i בסקלר $0\neq c\in\mathbb{F}$ ($n\geq i\in\mathbb{N}$) אז

$$\varepsilon^*\left(v_1,v_2,\dots,v_n\right)=\left(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},v_i+c\cdot v_j,v_{i-1},,\dots,v_n\right)$$

3. אם ε היא הוספת כפולה של שורה j (בסקלר $0\neq c\in\mathbb{F}$) לשורה i ($n\geq i,j\in\mathbb{N}$ ו-$i\neq j$) אז

$$\varepsilon^*\left(v_1,v_2,\dots,v_n\right)=\left(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},c\cdot v_i,v_{i+1},\dots,v_n\right)$$

סימון: תהא $\varepsilon^*:V^n\to V^n$ פעולת "עמודה" אלמנטרית, נסמן ב-$\mu\left(\varepsilon^*\right)$ את קבוע הפעולה ε^*, כאשר:

1. אם ε^* היא החלפה של שני וקטורים זה בזה אז $\mu\left(\varepsilon^*\right):=-1$.
2. אם ε^* היא הכפלת וקטור מסוים בסקלר $0\neq c\in\mathbb{R}$ אז $\mu\left(\varepsilon^*\right):=c$.
3. אם ε^* היא הוספת כפולה של וקטור אחד לאחר אז $\mu\left(\varepsilon^*\right):=1$.

טענה 1.4. תהא $\varepsilon^*:V^n\to V^n$ פעולת "עמודה" אלמנטרית, מתקיים:

$$D\left(\varepsilon^*\left(v_1,v_2,\dots,v_n\right)\right)=D\left(v_1,v_2,\dots,v_n\right)\cdot\mu\left(\varepsilon^*\right)$$

הוכחה. נחלק למקרים:

1. אם ε^* היא החלפה של שני וקטורים זה בזה אז הטענה נובעת מהטענה האחרונה (1.3).
2. אם ε^* היא הכפלת וקטור מסוים בסקלר אז הטענה היא פשוט התכונה הראשונה של פונקציות נפח.
3. אם ε^* היא הוספת כפולה של וקטור אחד לאחר אז אז הטענה נובעת ישירות מהתכונה השנייה של פונקציות נפח.

■

מסקנה 1.5. תהיינה $\varepsilon_1^*,\varepsilon_2^*,\dots,\varepsilon_r^*:V^n\to V^n$ פעולות "עמודה" אלמנטריות, מתקיים:

$$D\left(\varepsilon_r^*\left(\varepsilon_{r-1}^*\left(\dots\varepsilon_2^*\left(\varepsilon_1^*\left(v_1,v_2,\dots,v_n\right)\right)\right)\right)\right)=D\left(v_1,v_2,\dots,v_n\right)\cdot\mu\left(\varepsilon_1^*\right)\cdot\mu\left(\varepsilon_2^*\right)\cdot\ldots\cdot\mu\left(\varepsilon_r^*\right)$$

[1] שימו לב שלא מדובר ממש בפעולת "עמודה" מפני ש-V אינו בהכרח מרחב קואורדינטות.

טענה 1.6. תהא ε פעולת שורה אלמנטרית ותהא $E\in M_n(\mathbb{F})$ המטריצה האלמנטרית המתאימה לה, מתקיים:

$$\varepsilon^*(v_1,v_2,\ldots,v_n)=(v_1,v_2,\ldots,v_n)\cdot E^t$$

♣ כדי להבין את האינטואיציה לטענה זו נזכור שניתן להתייחס למטריצה כסדרה של וקטורים במרחב הקואורדינטות ונשים לב לכך שכדי להפעיל על מטריצה A פעולת "עמודה" אלמנטרית יש לשחלף אותה, להפעיל עליה את פעולת השורה המקבילה ולשחלף בחזרה, כלומר:

$$\varepsilon^*(A)=\left(\varepsilon\left(A^t\right)\right)^t=\left(E\cdot A^t\right)^t=A\cdot E^t$$

למה 1.7. מטריצה $E\in M_n(\mathbb{F})$ היא מטריצה אלמנטרית אם"ם גם E^t היא מטריצה אלמנטרית.
יתרה מזאת: אם E מתאימה להחלפת שורות או לכפל שורה בסקלר אז $E=E^t$ (כלומר E סימטרית ו-E^t מתאימה לאותה פעולת שורה),
ואם E מתאימה להוספת כפולה של השורה ה-i לשורה ה-j אז E^t מתאימה להוספת אותה כפולה של השורה ה-j לשורה ה-i.

מסקנה 1.8. יהיו $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ בסיסים סדורים של V, תהיינה $E_1,E_2,\ldots,E_r\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצות אלמנטריות כך שמתקיים:

$$[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}=(E_1)^t\cdot(E_2)^t\cdot\ldots\cdot(E_r)^t$$

ותהיינה $\varepsilon_1^*,\varepsilon_2^*,\ldots,\varepsilon_r^*:V^n\to V^n$ פעולות העמודה האלמנטריות המתאימות; מתקיים:

$$D(\mathcal{C})=D(\mathcal{B})\cdot\mu(\varepsilon_1^*)\cdot\mu(\varepsilon_2^*)\cdot\ldots\cdot\mu(\varepsilon_r^*)$$

מסקנה 1.9. נניח ש-D אינה פונקציית האפס ויהי $\mathcal{B}$ בסיס סדור של V כך ש-$D(\mathcal{B})\neq 0$.[2]
לכל פונקציית נפח $D':V^n\to\mathbb{F}$ מתקיים:

$$D'(v_1,v_2,\ldots,v_n)=\frac{D'(\mathcal{B})}{D(\mathcal{B})}\cdot D(v_1,v_2,\ldots,v_n)$$

♣ כלומר כל פונקציות הנפח נבדלות זו מזו בכפל בקבוע בלבד.

מסקנה 1.10. אם D אינה פונקציית האפס אז לכל בסיס סדור $\mathcal{B}$ (של V) מתקיים $D(\mathcal{B})\neq 0$.

טענה 1.11. קבוצת פונקציות הנפח היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ובפרט היא סגורה לחיבור ולכפל בסקלר, כלומר לכל שתי פונקציות נפח D_1 ו-D_2 גם D_1+D_2 היא פונקציית נפח ולכל $c\in\mathbb{F}$ גם $c\cdot D$ היא פונקציית נפח.

מסקנה 1.12. אם קיימת פונקציית נפח $D':V^n\to\mathbb{F}$ שאינה פונקציית האפס אז לכל בסיס סדור $\mathcal{B}$ (של V) קיימת פונקציית נפח $D_{\mathcal{B}}:V^n\to\mathbb{F}$ יחידה כך ש-$D_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})=1$.

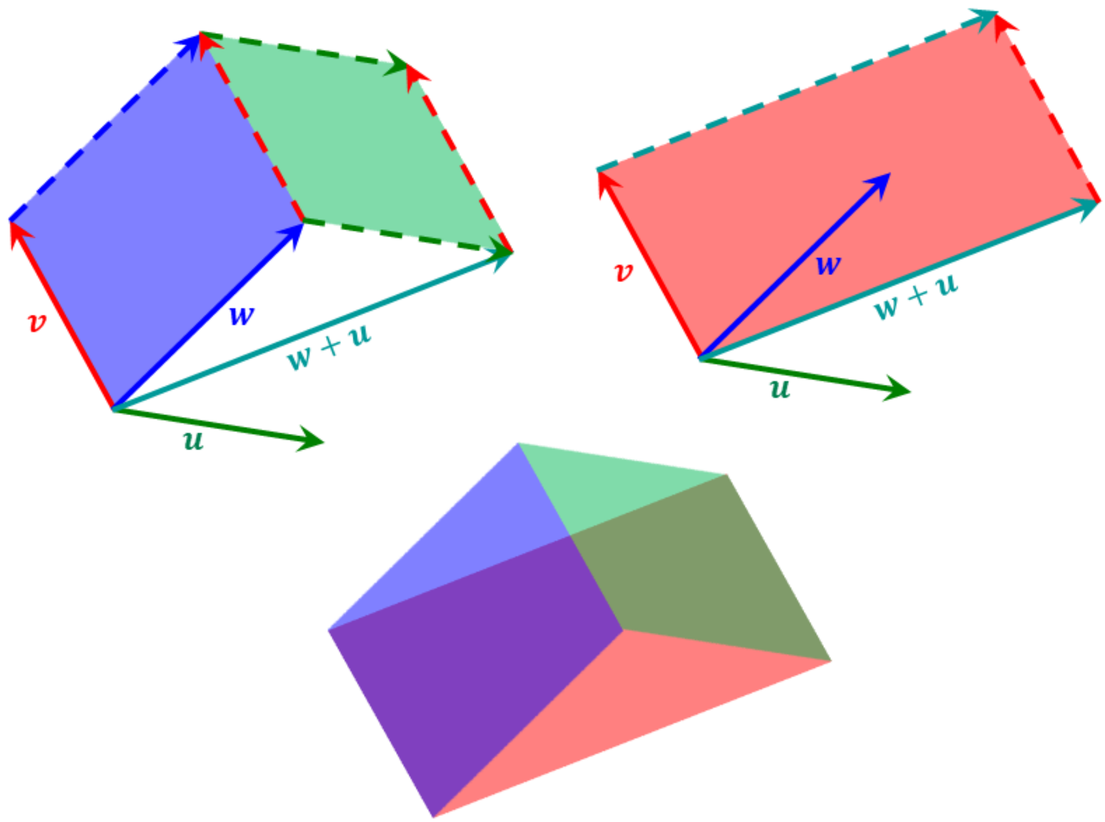
♣ אנחנו נראה בהמשך שאכן קיימת פונקציית נפח שאינה פונקציית האפס.

[2] כזכור אם פונקציית נפח מחזירה ערך שונה מ-0 אז מדובר בבסיס.

1.2 מולטי-ליניאריות והתחלפות

משפט 1.13. פונקציה $f:V^n\to\mathbb{F}$ היא פונקציית נפח אם"ם היא מולטי-ליניארית ומתחלפת.

♣ מהגדרה כל פונקציית נפח היא כפלית בכל רכיב (התכונה הראשונה) ומטענה 1.3 נובע שכל פונקציית נפח גם מתחלפת (אם ב-$\mathbb{F}$ מתקיים $1+1=0$ אז נקבל זאת ממסקנה 1.2), אבל למה פונקציית נפח גם חיבורית בכל רכיב? אני מאמין שכדי להסביר את האינטואיציה כאן אין טוב יותר ממראה עיניים:



איור 1: פונקציית נפח היא חיבורית

המקבילית הכחולה היא זו שנפרשת ע"י v ו-w, הירוקה היא זו של v ו-u ואילו האדומה נפרשת ע"י v ו-$u+w$; חפיפת משולשים פשוטה מראה ששטחה של האדומה שווה לסכום שטחיהן של האחרות.

הוכחה.

- $\Leftarrow$
  נניח ש-f היא פונקציית נפח, כפי שראינו לעיל נותר לנו להוכיח רק ש-f חיבורית בכל רכיב בנפרד.
  יהיו $w\in V$ ו-$n\geq i\in\mathbb{N}$, אנחנו צריכים להוכיח שמתקיים:

$$f\left(v_1,v_2,\ldots,v_{i-1},\boldsymbol{v_i}+\boldsymbol{w},v_{i+1},\ldots,v_n\right)=f\left(v_1,v_2,\ldots,\boldsymbol{v_i},\ldots,v_n\right)+f\left(v_1,v_2,\ldots,v_{i-1},\boldsymbol{w},v_{i+1},\ldots,v_n\right)$$

  נחלק למקרים:

  – אם הסדרה $(v_1,v_2,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_n)$ תלויה ליניארית אז ממסקנה 1.2 נובע ששני האגפים שווים ל-0.

– אם הסדרה $(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n)$ בת"ל אבל הסדרה $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ תלויה ליניארית אז v_i ניתן להצגה כצר"ל של שאר הווקטורים בסדרה , מכאן שע"פ התכונה השנייה של פונקציות נפח וע"פ המסקנה הנ"ל מתקיים:

$$f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_i}+\boldsymbol{w},v_{i+1},\dots,v_n)=f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{w},v_{i+1},\dots,v_n)$$
$$f(v_1,v_2,\dots,\boldsymbol{v_i},\dots,v_n)=0$$

ושוב קיבלנו את השוויון המבוקש.

– אם הסדרה $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ בת"ל אז היא בסיס, א"כ יהיו $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{F}$ כך ש-$\boldsymbol{w}=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a_j}\cdot\boldsymbol{v_j}$, מהתכונה השנייה של פונקציות נפח נובע כי:

$$\begin{aligned}f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_i}+\boldsymbol{w},v_{i+1},\dots,v_n)&=f\left(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_i}+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a_j}\cdot\boldsymbol{v_j},v_{i+1},\dots,v_n\right)\\&=f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_i}+\boldsymbol{a_i}\cdot\boldsymbol{v_i},v_{i+1},\dots,v_n)\\&=f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},(1+\boldsymbol{a_i})\cdot\boldsymbol{v_i},v_{i+1},\dots,v_n)\\f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{w},v_{i+1},\dots,v_n)&=f\left(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a_j}\cdot\boldsymbol{v_j},v_{i+1},\dots,v_n\right)\\&=f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{a_i}\cdot\boldsymbol{v_i},v_{i+1},\dots,v_n)\end{aligned}$$

ולכן ע"פ התכונה הראשונה מתקיים:

$$\begin{aligned}f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_i}+\boldsymbol{w},v_{i+1},\dots,v_n)&=(1+\boldsymbol{a_i})\cdot f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_i},v_{i+1},\dots,v_n)\\&=f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_i},v_{i+1},\dots,v_n)+\boldsymbol{a_i}\cdot f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_i},v_{i+1},\dots,v_n)\\&=f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_i},v_{i+1},\dots,v_n)+f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{a_i}\cdot\boldsymbol{v_i},v_{i+1},\dots,v_n)\\&=f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_i},v_{i+1},\dots,v_n)+f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{w},v_{i+1},\dots,v_n)\end{aligned}$$

כנדרש.

• $\Rightarrow$

נניח ש-f מולטי-ליניארית ומתחלפת, מהגדרה f מקיימת את התכונה הראשונה של פונקציות נפח ולכן נותר לנו להוכיח רק את השנייה.

יהיו $c\in\mathbb{F}$ ו-$i,j\in\mathbb{N}$ כך ש-$n\geq i,j$, $i\neq j$, מהיותה של f מולטי-ליניארית נובע כי:

$$f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_i}+c\cdot\boldsymbol{v_j},v_{i-1},,\dots,v_n)=f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_i},v_{i-1},,\dots,v_n)+c\cdot f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_j},v_{i-1},,\dots,v_n)$$

מכיוון ש-$j\neq i$ נדע שבסדרה $(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_j},v_{i-1},,\dots,v_n)$ ישנם שני וקטורים זהים ולכן מההתחלפות של f נובע ש-$f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_j},v_{i-1},,\dots,v_n)=0$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_i}+c\cdot\boldsymbol{v_j},v_{i-1},,\dots,v_n)&=f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_i},v_{i-1},,\dots,v_n)+c\cdot 0\\&=f(v_1,v_2,\dots,v_{i-1},\boldsymbol{v_i},v_{i-1},,\dots,v_n)\end{aligned}$$

■

1.3 במרחב הקואורדינטות

נניח כעת ש-$V=\mathbb{F}^{n}$ ונשתמש באיזומורפיזם בין V^{n} ל-$M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$, א"כ D היא פונקציה מ-$M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ ל-$\mathbb{F}$ ופעולות "עמודה" אלמנטריות הן באמת פעולות עמודה.

♣ כל הטענות הבאות הן הטענות שראינו עבור מרחב וקטורי כללי כשהפעם הן מנוסחות בשפה של מטריצות.

טענה 1.14. לכל פעולת שורה אלמנטרית מתקיים $\varepsilon^{*}\left(I_{n}\right)=\left(\varepsilon\left(I_{n}\right)\right)^{t}$.

♣ כלומר המטריצה המתאימה לפעולת עמודה היא המשוחלפת של המטריצה המתאימה לפעולת השורה המקבילה.

טענה 1.15. תהיינה $A,B\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$, מתקיים:

1. אם A מתקבלת מ-B ע"י החלפת עמודות אז $D\left(A\right)=-D\left(B\right)$.
2. אם A מתקבלת מ-B ע"י כפל עמודה כלשהי בסקלר $c\in\mathbb{F}$ אז $D\left(A\right)=c\cdot D\left(B\right)$.
3. אם A מתקבלת מ-B ע"י הוספת כפולה של עמודה אחת לעמודה אחרת אז $D\left(A\right)=D\left(B\right)$.

מסקנה 1.16. תהיינה $A,E\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ כך ש-E היא מטריצה אלמנטרית, מתקיים:

1. אם E היא מטריצה המתאימה להחלפת שורות אז $D\left(A\cdot E^{t}\right)=-D\left(A\right)$.
2. אם E היא מטריצה המתאימה לכפל שורה בסקלר $0\neq c\in\mathbb{F}$ אז $D\left(A\cdot E^{t}\right)=c\cdot D\left(A\right)$.
3. אם E היא מטריצה המתאימה להוספת כפולה של שורה אחת לאחרת אז $D\left(A\cdot E^{t}\right)=D\left(A\right)$.

נניח ש-D אינה פונקציית האפס.

מסקנה 1.17. $D\left(I_{n}\right)\neq0$.

טענה 1.18. לכל פונקציית נפח $D':M_{n}\left(\mathbb{F}\right)\to\mathbb{F}$ שאינה פונקציית האפס ולכל מטריצה אלמנטרית $E\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מתקיים:

$$\frac{D\left(E^{t}\right)}{D\left(I_{n}\right)}=\frac{D\left(E\right)}{D\left(I_{n}\right)}=\frac{D'\left(E\right)}{D'\left(I_{n}\right)}=\frac{D'\left(E^{t}\right)}{D'\left(I_{n}\right)}$$

מסקנה 1.19. תהא $P\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה הפיכה ותהיינה $E_{1},E_{2},\ldots,E_{r}\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצות אלמנטריות כך ש-$P=\left(E_{1}\right)^{t}\cdot\left(E_{2}\right)^{t}\cdot\ldots\cdot\left(E_{r}\right)^{t}$; מתקיים:

$$D\left(P\right)=D\left(I_{n}\right)\cdot\prod_{i=1}^{r}\frac{D\left(\left(E_{i}\right)^{t}\right)}{D\left(I_{n}\right)}=D\left(I_{n}\right)\cdot\prod_{i=1}^{r}\frac{D\left(E_{i}\right)}{D\left(I_{n}\right)}=D\left(P^{t}\right)$$

מסקנה 1.20. לכל מטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מתקיים $D\left(A^{t}\right)=D\left(A\right)$.[3]

♣ המסקנה הקודמת (1.19) מאפשרת לנו לחשב במהירות את הערך שמחזירה D לכל מטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אם אנחנו יודעים את הערך של $D\left(I_{n}\right)$: נדרג את המטריצה ונכפול את $D\left(I_{n}\right)$ בסקלרים המתאימים, ממסקנה זו נובע שאנחנו יכולים לדרג כרגיל (לפי שורות) ואין צורך לעבוד לפי עמודות.

מסקנה 1.21. לכל פונקציית נפח $D':M_{n}\left(\mathbb{F}\right)\to\mathbb{F}$ ולכל $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מתקיים:

$$D'\left(A\right)=\frac{D'\left(I_{n}\right)}{D\left(I_{n}\right)}\cdot D\left(A\right)$$

[3] כמובן שטענה זו נכונה גם עבור פונקציית האפס.

מסקנה 1.22. מטריצה $P\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ היא הפיכה אם"ם $D\left(P\right)\neq0$.

מסקנה 1.23. אם קיימת פונקציית נפח $D':V^{n}\to\mathbb{F}$ שאינה פונקציית האפס אז לכל מטריצה הפיכה $P\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ קיימת פונקציית נפח יחידה $D_{P}:M_{n}\left(\mathbb{F}\right)\to\mathbb{F}$ כך ש-$D_{P}\left(P\right)=1$.

2 הדטרמיננטה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

2.1 הנוסחה המפורשת

למה 2.1. הפונקציה $D_{1}:M_{1}\left(\mathbb{F}\right)\to\mathbb{F}$ המוגדרת ע"י $D_{1}\left(A\right):=\left[A\right]_{11}$ (לכל $A\in M_{1}\left(\mathbb{F}\right)$) היא פונקציית נפח מנורמלת.

משפט 2.2. יהיו $n\in\mathbb{N}$ ו-$n+1\geq j\in\mathbb{N}$, ונניח שקיימת פונקציית נפח מנורמלת $D_{n}:M_{n}\left(\mathbb{F}\right)\to\mathbb{F}$ (תהא D_{n} כנ"ל). תהא $D_{n+1}:M_{n+1}\left(\mathbb{F}\right)\to\mathbb{F}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $A\in M_{n+1}\left(\mathbb{F}\right)$):

$$D_{n+1}\left(A\right):=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(-1\right)^{i+j}\cdot\left[A\right]_{ij}\cdot D_{n}\left(A_{ij}\right)\right)$$

D_{n+1} היא פונקציית נפח מנורמלת.

♣ כדי להבין מהיכן "צצה" הנוסחה הזו יש לזכור שכל פונקציית נפח היא חיבורית בכל רכיב בנפרד (במטריצות זה אומר שהיא חיבורית בכל עמודה), א"כ ניתן "לפרק" את המטריצה ל-n מטריצות כבכל אחת מהן רכיב אחד בלבד של העמודה ה-j, לדוגמה (כאן $j=n+1=3$):

$$D_{3}\left(\begin{bmatrix}a & d & \boldsymbol{g}\\ b & e & \boldsymbol{h}\\ c & f & \boldsymbol{i}\end{bmatrix}\right)=D_{3}\left(\begin{bmatrix}a & d & \boldsymbol{g}\\ b & e & \mathbf{0}\\ c & f & \mathbf{0}\end{bmatrix}\right)+D_{3}\left(\begin{bmatrix}a & d & \mathbf{0}\\ b & e & \boldsymbol{h}\\ c & f & \mathbf{0}\end{bmatrix}\right)+D_{3}\left(\begin{bmatrix}a & d & \mathbf{0}\\ b & e & \mathbf{0}\\ c & f & \boldsymbol{i}\end{bmatrix}\right)$$

מהתכונה השנייה של פונקציות נפח נקבל:

$$D_{3}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{g}\\ b & e & \mathbf{0}\\ c & f & \mathbf{0}\end{bmatrix}\right)=D_{3}\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & \boldsymbol{g}\\ b & e & \mathbf{0}\\ c & f & \mathbf{0}\end{bmatrix}\right)$$

$$D_{3}\left(\begin{bmatrix}a & d & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{h}\\ c & f & \mathbf{0}\end{bmatrix}\right)=D_{3}\left(\begin{bmatrix}a & d & \mathbf{0}\\ 0 & 0 & \boldsymbol{h}\\ c & f & \mathbf{0}\end{bmatrix}\right)$$

$$D_{3}\left(\begin{bmatrix}a & d & \mathbf{0}\\ b & e & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{i}\end{bmatrix}\right)=D_{3}\left(\begin{bmatrix}a & d & \mathbf{0}\\ b & e & \mathbf{0}\\ 0 & 0 & \boldsymbol{i}\end{bmatrix}\right)$$

הנפח של כל מנסרה הוא שטח הבסיס כפול הגובה ולכן נקבל (נזכור שאנו עוסקים כאן בנפח מכוון):

$$\left|D_3\left(\begin{bmatrix}0&0&g\\b&e&0\\c&f&0\end{bmatrix}\right)\right|=\left|g\cdot D_2\left(\begin{bmatrix}b&e\\c&f\end{bmatrix}\right)\right|$$

$$\left|D_3\left(\begin{bmatrix}a&d&0\\0&0&h\\c&f&0\end{bmatrix}\right)\right|=\left|h\cdot D_2\left(\begin{bmatrix}a&d\\c&f\end{bmatrix}\right)\right|$$

$$\left|D_3\left(\begin{bmatrix}a&d&0\\b&e&0\\0&0&i\end{bmatrix}\right)\right|=\left|i\cdot D_2\left(\begin{bmatrix}a&d\\b&e\end{bmatrix}\right)\right|$$

א"כ השאלה היחידה היא מהו הסימן של כל איבר בסכום הנ"ל, נשים לב לכך שצריך להתקיים (ללא ערך מוחלט):

$$D_3\left(\begin{bmatrix}0&0&g\\b&e&0\\c&f&0\end{bmatrix}\right)=g\cdot D_2\left(\begin{bmatrix}b&e\\c&f\end{bmatrix}\right)$$

$$D_3\left(\begin{bmatrix}a&0&d\\0&h&0\\c&0&f\end{bmatrix}\right)=h\cdot D_2\left(\begin{bmatrix}a&d\\c&f\end{bmatrix}\right)$$

$$D_3\left(\begin{bmatrix}0&a&d\\0&b&e\\i&0&0\end{bmatrix}\right)=i\cdot D_2\left(\begin{bmatrix}a&d\\b&e\end{bmatrix}\right)$$

ולכן הסימן תלוי בזוגיות של מספר ההחלפות שיש לבצע כדי "להחזיר כל וקטור למקומו"[4], א"כ קיבלנו:

$$D_3\left(\begin{bmatrix}0&0&g\\b&e&0\\c&f&0\end{bmatrix}\right)=g\cdot D_2\left(\begin{bmatrix}b&e\\c&f\end{bmatrix}\right)=(-1)^{1+3}\cdot g\cdot D_2\left(\begin{bmatrix}b&e\\c&f\end{bmatrix}\right)$$

$$D_3\left(\begin{bmatrix}a&d&0\\0&0&h\\c&f&0\end{bmatrix}\right)=-h\cdot D_2\left(\begin{bmatrix}a&d\\c&f\end{bmatrix}\right)=(-1)^{2+3}\cdot h\cdot D_2\left(\begin{bmatrix}a&d\\c&f\end{bmatrix}\right)$$

$$D_3\left(\begin{bmatrix}a&d&0\\b&e&0\\0&0&i\end{bmatrix}\right)=i\cdot D_2\left(\begin{bmatrix}a&d\\b&e\end{bmatrix}\right)=(-1)^{3+3}\cdot i\cdot D_2\left(\begin{bmatrix}a&d\\b&e\end{bmatrix}\right)$$

כמובן שאת כל התהליך הזה יכולנו לבצע עבור כל גודל של מטריצה ובכל עמודה.

הוכחה. ראו את ההוכחה לטענה 2.4. ■

מסקנה 2.3. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת פונקציית נפח מנורמלת יחידה עבור מרחב הקואורדינטות $\mathbb{F}^n$.

♣ בפרט קיימת פונקציית נפח שאינה פונקציית האפס בכל מרחב קואורדינטות.

[4] זה לא משנה שיש דרכים רבות לעשות זאת - לנו מספיקה רק אחת מהן כדי לקבוע את הסימן; ניתן ללמוד מזה שהזוגיות של כל הדרכים הללו זהה, ואכן זוהי טענה שנלמד במבנים 1 כאשר נעסוק בתמורות (ראו כאן).

טענה 2.4. יהי $1 < n \in \mathbb{N}$ ותהא $A \in M_n(\mathbb{F})$.

- לכל $n \geq j \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i+j} \cdot [A]_{ij} \cdot |A_{ij}| \right)$$

- לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{i+j} \cdot [A]_{ij} \cdot |A_{ij}| \right)$$

♣ את הנוסחה הראשונה ראינו לעיל (משפט 2.2) ולה קוראים "פיתוח דטרמיננטה לפי עמודה"[5], לנוסחה השנייה קוראים "פיתוח דטרמיננטה לפי שורה" ולשתיהן יחד - "פיתוח דטרמיננטה לפי מינורים".

♣ בדרך כלל לא כדאי לחשב את הדטרמיננטה בצורה זו אלא לדרג את המטריצה ולחשב את מכפלת הסקלרים המתאימים כפי שנראה בסעיף הבא, לפעמים יש הרבה אפסים במטריצה ואז ע"י בחירה מושכלת של שורה/עמודה ניתן לפתח את הדטרמיננטה לפי מינורים בקלות רבה.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על n, את בסיס האינדוקציה ראינו בלמה 2.1 ולכן נעבור ישירות לצעד האינדוקציה.
נניח שקיימת פונקציית נפח מנורמלת $|\cdot| : M_{n-1}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ ויהי $n \geq i \in \mathbb{N}$. תהא $D_n : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $A \in M_n(\mathbb{F})$):

$$D_n(A) := \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{i+j} \cdot [A]_{ij} \cdot |A_{ij}| \right)$$

- נוכיח ש-D_n מולטי-ליניארית:

– תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$, יהיו $n \geq k \in \mathbb{N}$ ו-$c \in \mathbb{F}$, ונסמן ב-B את המטריצה המתקבלת מ-A ע"י הכפלת העמודה ה-k ב-c.
מהגדרה לכל $n \geq j \in \mathbb{N}$ כך ש-$j \neq k$ מתקיים $|B_{ij}| = c \cdot |A_{ij}|$ ו-$[B]_{ij} = [A]_{ij}$, וכמו כן מתקיים גם $|B_{ik}| = |A_{ik}|$ ו-$[B]_{ik} = c \cdot [A]_{ik}$.
מכאן שלכל $n \geq j \in \mathbb{N}$ מתקיים $(-1)^{i+j} \cdot [B]_{ij} \cdot |B_{ij}| = c \cdot (-1)^{i+j} \cdot [A]_{ij} \cdot |A_{ij}|$ וממילא:

$$D_n(B) = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{i+j} \cdot [B]_{ij} \cdot |B_{ij}| \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(c \cdot (-1)^{i+j} \cdot [A]_{ij} \cdot |A_{ij}| \right) = c \cdot \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{i+j} \cdot [A]_{ij} \cdot |A_{ij}| \right)$$

– יהי $x \in \mathbb{F}^n$ ונסמן ב-C את המטריצה המתקבלת ע"י הוספת x לעמודה ה-k, כמו כן נסמן ב-$\tilde{C}$ את המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת העמודה ה-k ב-x.
מהגדרה לכל $n \geq j \in \mathbb{N}$ כך ש-$j \neq k$ מתקיים $|C_{ij}| = |A_{ij}| + \left|\tilde{C}_{ij}\right|$ ו-$[C]_{ij} = [A]_{ij} = \left[\tilde{C}\right]_{ij}$, וכמו כן מתקיים גם $\left|\tilde{C}_{ik}\right| = |C_{ik}| = |A_{ik}|$ ו-$[C]_{ik} = [A]_{ik} + \left[\tilde{C}\right]_{ik}$.

[5] אנחנו בוחרים עמודה j וכל מחובר בסכום הוא איבר בעמודה כפול המינור המתאים כשהסימן מתחלף בכל שורה.

נניח בהג"כ ש-$k=1$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow D_n(C) &= \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{i+j}\cdot[C]_{ij}\cdot|C_{ij}|\right)\\ &= (-1)^{i+k}\cdot[C]_{ik}\cdot|C_{ik}|+\sum_{j=k+1}^{n}\left((-1)^{i+j}\cdot[C]_{ij}\cdot|C_{ij}|\right)\\ &= (-1)^{i+k}\cdot\left([A]_{ik}+\left[\tilde{C}\right]_{ik}\right)\cdot|C_{ik}|+\sum_{j=k+1}^{n}\left((-1)^{i+j}\cdot[C]_{ij}\cdot\left(|A_{ij}|+\left|\tilde{C}_{ij}\right|\right)\right)\\ &= (-1)^{i+k}\cdot[A]_{ik}\cdot|C_{ik}|+(-1)^{i+k}\cdot\left[\tilde{C}\right]_{ik}\cdot|C_{ik}|+\sum_{j=k+1}^{n}\left((-1)^{i+j}\cdot[C]_{ij}\cdot|A_{ij}|\right)+\sum_{j=k+1}^{n}\left((-1)^{i+j}\cdot[C]_{ij}\cdot\left|\tilde{C}_{ij}\right|\right)\\ &= (-1)^{i+k}\cdot[A]_{ik}\cdot|A_{ik}|+(-1)^{i+k}\cdot\left[\tilde{C}\right]_{ik}\cdot\left|\tilde{C}_{ik}\right|+\sum_{j=k+1}^{n}\left((-1)^{i+j}\cdot[A]_{ij}\cdot|A_{ij}|\right)+\sum_{j=k+1}^{n}\left((-1)^{i+j}\cdot\left[\tilde{C}\right]_{ij}\cdot\left|\tilde{C}_{ij}\right|\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{i+j}\cdot[A]_{ij}\cdot|A_{ij}|\right)+\sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{i+j}\cdot\left[\tilde{C}\right]_{ij}\cdot\left|\tilde{C}_{ij}\right|\right)=D_n(A)+D_n\left(\tilde{C}\right)\end{aligned}$$

- נוכיח ש-D_n מתחלפת: יהי $n\geq k'\in\mathbb{N}$ כך ש-$k\neq k'$ ונניח שהעמודות ה-k וה-k' ב-A שוות.

מהגדרה לכל $n\geq j\in\mathbb{N}$ כך ש-$j\neq k$ ו-$j\neq k'$ מתקיים $|A_{ij}|=0$, כמו כן מתקיים $[A]_{ik}=[A]_{ik'}$ ומכיוון ש-$|\cdot|$ (הדטרמיננטה עבור $M_{n-1}(\mathbb{F})$) מתחלפת מתקיים גם $|A_{ik'}|=(-1)^{k-k'+1}\cdot|A_{ik}|$[6].

$$\begin{aligned}\Rightarrow D_n(A) &= \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{i+j}\cdot[A]_{ij}\cdot|A_{ij}|\right)=(-1)^{i+k}\cdot[A]_{ik}\cdot|A_{ik}|+(-1)^{i+k'}\cdot[A]_{ik'}\cdot|A_{ik'}|\\ &= (-1)^{i+k}\cdot[A]_{ik}\cdot|A_{ik}|+(-1)^{i+k'}\cdot[A]_{ik}\cdot(-1)^{k-k'+1}\cdot|A_{ik}|\\ &= (-1)^{i+k}\cdot[A]_{ik}\cdot|A_{ik}|+(-1)^{i+k+1}\cdot[A]_{ik}\cdot|A_{ik}|=0\end{aligned}$$

במשפט 1.13 ראינו שכל פונקציה מולטי-ליניארית ומתחלפת היא פונקציית נפח, א"כ D_n היא פונקציית נפח.

נוכיח ש-D_n מנורמלת: לכל $n\geq j\in\mathbb{N}$ כך ש-$j\neq i$ המינור $(I_n)_{ij}$ הוא מטריצה שבה השורה ה-j והעמודה i הן שורת/עמודת אפסים ולכן $\left|(I_n)_{ij}\right|=0$, ובנוסף מתקיים $(I_n)_{ii}=I_{n-1}$ ולכן $|(I_n)_{ii}|=1$.

$$\Rightarrow D_n(I_n):=\sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{i+j}\cdot[I_n]_{ij}\cdot\left|(I_n)_{ij}\right|\right)=(-1)^{i+i}\cdot|(I_n)_{ii}|=1\cdot1=1$$

עד כאן הוכחנו את הנכונות של פיתוח הדטרמיננטה לפי שורה, הנכונות של הפיתוח לפי עמודה נובע מהעובדה ש-$\det A=\det A^t$. ■

מסקנה 2.5. הדטרמיננטה של מטריצת סיבוב היא 1.

הוכחה. מהנוסחה המפורשת של הדטרמיננטה נובע שלכל $a,b,c,d\in\mathbb{F}$ מתקיים $\det\left(\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}\right)=a\cdot d-b\cdot c$, ובפרט לכל $\theta\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$|R(\theta)|=\det\left(\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\right)=\cos^2\theta-\sin\theta\cdot(-\sin\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

■

[6] אם $k-k'=\pm1$ אז $A_{ik}=A_{ik'}$, לכן אם $k-k'$ אי-זוגי אז $|A_{ik'}|=|A_{ik}|$ ואם $k-k'$ זוגי אז $|A_{ik'}|=-|A_{ik}|$.

מסקנה 2.6. הדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא מכפלת הסקלרים שעל האלכסון הראשי.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה, עבור מטריצות מגודל 1×1 הטענה טריוויאלית ולכן נעבור ישירות לצעד האינדוקציה.
יהי $1<n\in\mathbb{N}$ ונניח שהטענה נכונה ב-$M_{n-1}\left(\mathbb{F}\right)$.
תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה משולשית עליונה[7] ונפתח את הדטרמיננטה של A לפי העמודה הראשונה:

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(-1\right)^{i+j}\cdot\left[A\right]_{i1}\cdot\left|A_{i1}\right|\right)=\left(-1\right)^{2}\cdot\left[A\right]_{11}\cdot\left|A_{11}\right|+\sum_{i=2}^{n}\left(\left(-1\right)^{i+j}\cdot 0\cdot\left|A_{i1}\right|\right)=\left[A\right]_{11}\cdot\left|A_{11}\right|$$

מהנחת האינדוקציה נובע ש-$\left|A_{11}\right|$ היא מכפלת הסקלרים שעל האלכסון הראשי במינור A_{11} ומכאן ש-$\left|A_{11}\right|\cdot\left[A\right]_{11}$ היא מכפלת הסקלרים שעל האלכסון הראשי ב-A. ■

טענה 2.7. הדטרמיננטה של מטריצה משולשית לפי בלוקים (ובפרט של אלכסונית לפי בלוקים) היא מכפלת הדטרמיננטות של הבלוקים על האלכסון הראשי (לפי הבלוקים).

♣ לדוגמה המטריצה:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 5 & 8 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 6 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 7 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 5 & 2 & 4 & 1 & 4 & 0\\ 2 & 5 & 8 & 3 & 9 & 0\\ \hline 3 & 7 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{array}\right]$$

היא מטריצה משולשית לפי בלוקים, אתם מוזמנים גם לעיין בערך מטריצת בלוקים בוויקיפדיה.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על הגודל של המטריצות, עבור מטריצות מגודל 1×1 הטענה טריוויאלית ולכן נעבור ישירות לצעד האינדוקציה.
יהי $1<n\in\mathbb{N}$ ונניח שהטענה נכונה ב-$M_{n-1}\left(\mathbb{F}\right)$.
תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה משולשית עליונה לפי בלוקים[8], מכיוון שהחלוקה לבלוקים היא שרירותית נוכל להניח ש-M מחולקת ל-4 בלוקים בלבד[9], א"כ יהיו B,C,D תתי-מטריצות של A כך שמתקיים:

$$A=\left[\begin{array}{c|c} B & C\\ \hline 0_{m\times k} & D \end{array}\right],\ \ B\in M_{k}\left(\mathbb{F}\right),\ \ C\in M_{k\times m}\left(\mathbb{F}\right),\ \ D\in M_{m}\left(\mathbb{F}\right)$$

נפתח את הדטרמיננטה של A לפי העמודה הראשונה:

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(-1\right)^{i+j}\cdot\left[A\right]_{i1}\cdot\left|A_{i1}\right|\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(\left(-1\right)^{i+j}\cdot\left[B\right]_{i1}\cdot\left|A_{i1}\right|\right)+\sum_{i=k+1}^{n}\left(\left(-1\right)^{i+j}\cdot 0\cdot\left|A_{i1}\right|\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(\left(-1\right)^{i+j}\cdot\left[B\right]_{i1}\cdot\left|A_{i1}\right|\right)$$

לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$A_{i1}=\left[\begin{array}{c|c} B_{i1} & C_{i}\\ \hline 0_{m\times k-1} & D \end{array}\right]$$

כאשר B_{i1} היא המינור המתאים ב-B ו-C_i היא תת-המטריצה C לאחר שהוסרה ממנה השורה ה-i, מכאן שע"פ הנחת האינדוקציה

[7] מכיוון שהדטרמיננטה של המטריצה המשוחלפת זהה לזו של המקורית ההוכחה תהיה תקפה גם עבור מטריצות משולשיות תחתונות, שכן המשוחלפת של משולשית תחתונה היא משולשית עליונה ובכל מטריצה ריבועית הסקלרים שעל האלכסון הראשי שווים לאלו שעל האלכסון הראשי במשוחלפת שלה.
[8] ההערה הקודמת (לגבי מטריצות משולשיות) נכונה באותה מידה גם עבור מטריצות משולשות תחתונות לפי בלוקים אך הפעם יש לדבר על הבלוקים שעל האלכסון הראשי (לפי הבלוקים) ולא על הסקלרים שעל האלכסון הראשי.
[9] אם יש יותר מארבעה אז נאחד אותם כמה מהם כך שיהיו ארבעה בלוקים, כל בלוק על האלכסון הראשי (לפי בלוקים) יישאר מטריצה משולשית לפי בלוקים והנחת האינדוקציה תהיה תקפה לגביו.

מתקיים $|A_{i1}| = |B_{i1}| \cdot |D|$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \det A = \sum_{i=1}^{k}\left((-1)^{i+j} \cdot [B]_{i1} \cdot |B_{i1}| \cdot |D|\right) = \left(\sum_{i=1}^{k}\left((-1)^{i+j} \cdot [B]_{i1} \cdot |B_{i1}|\right)\right) \cdot |D| = |B| \cdot |D|$$

■

2.2 חישוב ע"י פעולות שורה/עמודה אלמנטריות

♣ שתי הלמות הבאות נובעות ישירות ממסקנה 1.16.

למה 2.8. תהא $\varepsilon : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ פעולת שורה אלמנטרית ותהא $E \in M_n(\mathbb{F})$ המטריצה האלמנטרית המתאימה לה, מתקיים:

$$|E| = \left|E^t\right| = \mu(\varepsilon^*)$$

למה 2.9. תהיינה $A, E \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש-E היא מטריצה אלמנטרית, מתקיים:

$$\left|A \cdot E^t\right| = |A| \cdot \left|E^t\right| = |A| \cdot |E|$$

מסקנה 2.10. יהי V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ תהא $D : V^n \to \mathbb{F}$ פונקציית נפח ויהיו $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ בסיסים סדורים של V, מתקיים:

$$D(\mathcal{C}) = D(\mathcal{B}) \cdot \det\left([\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)$$

♣ מכאן שאותה פונקציית נפח יחידה $D_{\mathcal{B}} : V^n \to \mathbb{F}$ המקיימת $D_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ היא הפונקציה המוגדרת ע"י $D_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) := \det\left([\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)$ לכל בסיס $\mathcal{C}$ (ו-0 לכל סדרה שאינה בסיס).

הוכחה. משתי הלמות האחרונות (2.8 ו-2.9) נובע (באינדוקציה) שהדטרמיננטה של $[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ היא בדיוק מכפלת הסקלרים שמופיעה במסקנה 1.8. ■

מסקנה 2.11. לכל מ"ו נ"ס קיימת פונקציית נפח שאינה פונקציית האפס.

מסקנה 2.12. תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ שתי מטריצות, מתקיים $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

הוכחה. אם A ו-B הפיכות אז הטענה נובעת ישירות ממסקנה 1.19 ומשתי הלמות האחרונות (2.8 ו-2.9), אחרת המכפלה שלהן אינה הפיכה ולכן $|A \cdot B| = 0$ וכמו כן אחד הגורמים במכפלה $|A| \cdot |B|$ הוא 0 ולכן גם $|A| \cdot |B| = 0$. ■

מסקנה 2.13. תהא $P \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה, מתקיים $\left|P^{-1}\right| = |P|^{-1}$.

הוכחה. מהמסקנה הקודמת (2.12) נובע כי:

$$1 = |I_n| = \left|P^{-1} \cdot P\right| = \left|P^{-1}\right| \cdot |P|$$

■

מסקנה 2.14. לכל שתי מטריצות דומות $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים $|A| = |B|$.

הוכחה. תהא $P \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה כך ש-$A = P^{-1} \cdot B \cdot P$, משתי המסקנות הקודמות נובע כי:

$$|A| = \left|P^{-1} \cdot B \cdot P\right| = \left|P^{-1}\right| \cdot |B| \cdot |P| = |P|^{-1} \cdot |B| \cdot |P| = |B|$$

■

3 המטריצה המצורפת וחיות אחרות

יהיו $\mathbb{F}$ שדה ו-$n \in \mathbb{N}$.

3.1 כלל קרמר

למה 3.1. תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה, יהי $b \in \mathbb{F}^n$ ונסמן ב-$A^{(i)}$ את המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת העמודה ה-i ב-b (לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$).

אם קיים $x \in \mathbb{F}^n$ כך ש-$A \cdot x = b$ אז עבור אותו x מתקיים (לכל $n \geq k \in \mathbb{N}$):

$$\det A^{(k)} = (\det A) \cdot x_k$$

♣ כדי שנוכל להסביר את האינטואיציה הגאומטרית מאחורי הלמה נשים לב לשלוש נקודות:

- $\det A$ הוא הפקטור שבו A מותחת/מכווצת **כל** צורה בעלת נפח n-ממדי.
- $A^{(k)}$ היא סדרת התמונות של איברי הבסיס הסטנדרטי מלבד העמודה ה-k שמוחלפת ב-b שהוא תמונה של x.
- הנפח של המקבילון הנוצר ע"י וקטורי הבסיס הסטנדרטי כאשר e_k מוחלף ב-x הוא בדיוק x_k.

לפיכך $\det A^{(k)}$ הוא הנפח של המקבילון הנ"ל כשהוא מוכפל בפקטור המתיחה/הכיווץ שהוא $\det A$.

♣ את האינטואיציה הזו למדתי מסרטון של 3blue1brown, אמנם הוא מדבר שם דווקא על מצב שבו A הפיכה אך היא תקפה בכל מצב שבו יש ל-b מקור.

הוכחה. נניח שקיים $x \in \mathbb{F}^n$ כך ש-$A \cdot x = b$ ויהי x כנ"ל.

נסמן ב-c_i את העמודה ה-i של A (לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$), א"כ מתקיים (לכל $n \geq k \in \mathbb{N}$):

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-1} & b & c_{k+1} & \cdots & c_n \\ | & | & & | & | & | & & | \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_{k-1} & x & e_{k+1} & \cdots & e_n \\ | & | & & | & | & | & & | \end{bmatrix}$$

ומתכונות הדטרמיננטה נובע כי (לכל $n \geq k \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} \det A^{(k)} &= \det\left(A \cdot \begin{bmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_{k-1} & x & e_{k+1} & \cdots & e_n \\ | & | & & | & | & | & & | \end{bmatrix}\right) \\ &= (\det A) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_{k-1} & x & e_{k+1} & \cdots & e_n \\ | & | & & | & | & | & & | \end{bmatrix}\right) \\ &= (\det A) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_{k-1} & \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i & e_{k+1} & \cdots & e_n \\ | & | & & | & | & | & & | \end{bmatrix}\right) \\ &= (\det A) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_{k-1} & x_k \cdot e_k & e_{k+1} & \cdots & e_n \\ | & | & & | & | & | & & | \end{bmatrix}\right) \\ &= (\det A) \cdot x_k \cdot \det I_n = (\det A) \cdot x_k \end{aligned}$$

■

מסקנה 3.2. כלל קרמר[10]
תהא $P\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה הפיכה, יהי $b\in\mathbb{F}^{n}$ ונסמן ב-$P^{(i)}$ את המטריצה המתקבלת מ-P ע"י החלפת העמודה ה-i ב-b (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$).
הפתרון היחיד לממ"ל $P\cdot x=b$ הוא:

$$x:=\frac{1}{\det P}\cdot\begin{bmatrix}\det P^{(1)}\\ \det P^{(2)}\\ \vdots\\ \det P^{(n)}\end{bmatrix}$$

כלומר הקואורדינטה ה-i של הפתרון היא $\frac{1}{\det P}\cdot\det P^{(i)}$.

♣ כלל קרמר אינו יעיל במיוחד לחישובים (אפילו לא כדי להשיג קואורדינטה בודדת של הפתרון) וזאת משום שהחישוב הישיר של הדטרמיננטה ארוך ומייגע, ואם אנחנו כבר מדרגים את המטריצה כדי לחשב את הדטרמיננטה נוכל למצוא בקלות את כל הפתרון כפי שעשינו בעבר. כוחו של כלל קרמר הוא ביכולת שלו להראות את קיום הפתרון ע"פ הדטרמיננטה.

3.2 המטריצה המצורפת

תזכורת: המטריצה המצורפת מוגדרת רק עבור $n>1$ ולכן כל הטענות בסעיף זה מניחות ש-$n>1$.

טענה 3.3. תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ ויהי $b\in\mathbb{F}^{n}$, מתקיים:

$$(\text{adj}A)\cdot b=\begin{bmatrix}\det A^{(1)}\\ \det A^{(2)}\\ \vdots\\ \det A^{(n)}\end{bmatrix}$$

כאשר $A^{(i)}$ היא המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת העמודה ה-i ב-b (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$).

♣ ראינו את ההסבר לטענה זו בקובץ ההגדרות.

למה 3.4. תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה, יהי $b\in\mathbb{F}^{n}$ ונסמן ב-$A_{(j)}$ את המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת השורה ה-j ב-b (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$).
אם קיים $x\in\mathbb{F}^{n}$ כך ש-$x^{t}\cdot A=b^{t}$[11] אז עבור אותו x מתקיים (לכל $n\geq j\in\mathbb{N}$):

$$\det A_{(j)}=(\det A)\cdot x_{j}$$

הוכחה. נניח שקיים $x\in\mathbb{F}^{n}$ כך ש-$x^{t}\cdot A=b^{t}$ ויהי x כנ"ל, מהתכונות של המטריצה המשוחלפת נובע כי:

$$A^{t}\cdot x=\left(x^{t}\cdot A\right)^{t}=\left(b^{t}\right)^{t}=b$$

ולכן מלמה 3.1 נקבל שמתקיים (לכל $n\geq j\in\mathbb{N}$):

$$\det A_{(j)}=\det\left(A_{(j)}\right)^{t}=\det\left(A^{t}\right)^{(j)}=\left(\det A^{t}\right)\cdot x_{j}=(\det A)\cdot x_{j}$$

■

[10] ערך בוויקיפדיה: גבריאל קרמר.
[11] אנו משתמשים כאן באיזומורפיזם שבין $\mathbb{F}^{n}$ ל-$M_{n\times1}\left(\mathbb{F}\right)$.

טענה 3.5. תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ ויהי $b\in\mathbb{F}^n$, מתקיים:

$$b^t\cdot\text{adj}A=\begin{bmatrix}\det A_{(1)}\\ \det A_{(2)}\\ \vdots\\ \det A_{(n)}\end{bmatrix}$$

כאשר $A_{(j)}$ היא המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת השורה ה-j ב-b (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$).

הוכחה. מהגדרה, הקואורדינטה ה-j של מטריצת השורה $b^t\cdot\text{adj}A$ היא (לכל $n\geq j\in\mathbb{N}$):

$$\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot[\text{adj}A]_{ij}=\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot(-1)^{i+j}\cdot|A_{ji}|$$

וזהו בדיוק פיתוח הדטרמיננטה של $A_{(j)}$ לפי השורה ה-j (לכל $n\geq j\in\mathbb{N}$). ■

מסקנה 3.6. תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ ויהי $b\in\mathbb{F}^n$,

- אם קיים $x\in\mathbb{F}^n$ כך ש-$A\cdot x=b$ אז עבור אותו x מתקיים $(\text{adj}A)\cdot b=(\det A)\cdot x$.
- אם קיים $x\in\mathbb{F}^n$ כך ש-$x^t\cdot A=b^t$ אז עבור אותו x מתקיים $b^t\cdot\text{adj}A=(\det A)\cdot x^t$.

מסקנה 3.7. המשפט המרכזי של המטריצה המצורפת
לכל מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים:

$$(\text{adj}A)\cdot A=(\det A)\cdot I_n=A\cdot\text{adj}A$$

מסקנה 3.8. לכל מטריצה הפיכה $P\in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים:

$$P^{-1}=\frac{1}{\det P}\cdot\text{adj}P$$
$$\text{adj}P=(\det P)\cdot P^{-1}$$

♣ מסקנה זו מאפשרת לנו לחשב קואורדינטה בודדת במטריצה ההופכית באמצעות המטריצה המצורפת, למרות זאת מסקנה זו אינה מועילה במיוחד לחישובים מפני שהרבה יותר פשוט לדרג את המטריצה מאשר לחשב את הדטרמיננטה של המינור המתאים (פעמים רבות גם חישוב הדטרמיננטה דורש את הדירוג).

מסקנה 3.9. לכל שתי מטריצות הפיכות $P,Q\in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים $\text{adj}(PQ)=\text{adj}Q\cdot\text{adj}P$.

♣ למעשה מסקנה זו נכונה גם עבור מטריצות שאינן הפיכות אך טרם למדנו את הכלים הנדרשים בשביל להוכיח זאת.

מסקנה 3.10. מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ היא הפיכה אם"ם $\text{adj}A$ הפיכה, ובמקרה כזה מתקיים $(\text{adj}A)^{-1}=\text{adj}\left(A^{-1}\right)$.

מסקנה 3.11. לכל מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים:

$$\det(\mathrm{adj}A) = (\det A)^{n-1}$$

הוכחה. מהמשפט המרכזי של המטריצה המצורפת ומהמולטי-ליניאריות של הדטרמיננטה נובע כי:

$$\det A \cdot \det(\mathrm{adj}A) = \det(A \cdot \mathrm{adj}A) = \det((\det A) \cdot I_n) = (\det A)^n \cdot \det I_n = (\det A)^n$$

כעת אם A הפיכה אז $\det A \neq 0$ וממילא $\det(\mathrm{adj}A) = (\det A)^{n-1}$, ואם A אינה הפיכה אז ע"פ מסקנה 3.10 גם $\mathrm{adj}A$ אינה הפיכה וממילא $\det(\mathrm{adj}A) = 0 = (\det A)^{n-1}$. ■

מסקנה 3.12. לכל מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ ולכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\det\left(\underbrace{\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(\ldots(\mathrm{adj}A)))}_{\text{k פעמים}}\right) = (\det A)^{(n-1)^k}$$

טענה 3.13. תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה, מתקיים אחד משלושת הפסוקים הבאים:

1. אם $\mathrm{rk}A = n$ אז $\mathrm{rk}(\mathrm{adj}A) = n$.
2. אם $\mathrm{rk}A = n-1$ אז $\mathrm{rk}(\mathrm{adj}A) = 1$.
3. אם $\mathrm{rk}A < n-1$ אז $\mathrm{rk}(\mathrm{adj}A) = 0$ (כלומר $\mathrm{adj}A = 0_n$).

הוכחה.

1. סעיף זה נובע ישירות ממסקנה 3.10.
2. מהמשפט המרכזי של המטריצה המצורפת נובע שאם A אינה הפיכה אז $T_A \circ T_{\mathrm{adj}A}$ היא העתקת האפס, וממילא $\mathrm{Im}T_{\mathrm{adj}A} \subseteq \ker T_A$; ממשפט הדרגה נקבל שמתקיים:

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(\mathrm{adj}A) &= \mathrm{rk}(T_{\mathrm{adj}A}) = \dim(\mathrm{Im}T_{\mathrm{adj}A}) \leq \dim(\ker T_A) = \dim(\mathbb{F}^n) - \dim(\mathrm{Im}T_A)\\ &= n - \mathrm{rk}T_A = n - \mathrm{rk}A = n-(n-1) = 1\end{aligned}$$

מצד שני כשעסקנו במטריצות ראינו שהדרגה של מטריצה היא הדרגה של תת-המטריצה ההפיכה הגדולה ביותר שלה, במקרה שלנו זה אומר שיש ל-A תת-מטריצה הפיכה מגודל $n-1 \times n-1$ - כלומר יש ל-A **מינור** הפיך וממילא ע"פ הגדרת המטריצה המצורפת אחת הקואורדינטות של $\mathrm{adj}A$ אינה 0 ו-$\mathrm{rk}(\mathrm{adj}A) \geq 1$, א"כ $\mathrm{rk}(\mathrm{adj}A) = 1$.

3. שוב, ראינו שהדרגה של מטריצה היא הדרגה של תת-המטריצה ההפיכה הגדולה ביותר שלה, מכאן שאם $\mathrm{rk}A < n-1$ אז אין ל-A מינור הפיך ולכן $\mathrm{adj}A = 0_n$ ע"פ הגדרה.

■

טענה 3.14. לכל מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים $\mathrm{adj}A^t = (\mathrm{adj}A)^t$.

הוכחה. מהגדרה ומהעובדה שהדטרמיננטה של מטריצה ריבועית שווה לזו של המשוחלפת שלה נובע כי (לכל $n \geq i,j \in \mathbb{N}$):

$$\left[\mathrm{adj}A^t\right]_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \left|\left(A^t\right)_{ji}\right| = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}| = [\mathrm{adj}A]_{ji}$$

■

3.3 מטריצת ונדרמונד

משפט 3.15. תהא $V\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצת ונדרמונד עבור ערכים $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{F}$, כלומר:

$$V:=\begin{bmatrix}1 & x_1 & (x_1)^2 & \ldots & (x_1)^{n-1}\\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \ldots & (x_2)^{n-1}\\ 1 & x_3 & (x_3)^2 & \ldots & (x_3)^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \ldots & (x_n)^{n-1}\end{bmatrix}$$

מתקיים:

$$\det V=\prod_{n\geq i,j\in\mathbb{N}\quad i<j}(x_j-x_i)$$

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה, עבור $n=1$ הטענה טריוויאלית[12] ולכן נעבור ישירות לצעד האינדוקציה, א"כ נניח שהטענה מתקיימת עבור $n-1$.

נוסיף לעמודה ה-n את העמודה ה-$n-1$ כשהיא מוכפלת ב-$-x_1$, לאחר מכן נוסיף את העמודה ה-$n-2$ לעמודה ה-$n-1$ כשהיא מוכפלת ב-$-x_1$ וכן הלאה עד שנוסיף לעמודה השנייה את העמודה הראשונה כשהיא מוכפלת ב-$-x_1$; מהתכונה השנייה של פונקציות נפח נובע שלא שינינו את הדטרמיננטה של המטריצה ולכן:

$$\det V=\begin{vmatrix}1 & x_1 & (x_1)^2 & \ldots & (x_1)^{n-1}\\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \ldots & (x_2)^{n-1}\\ 1 & x_3 & (x_3)^2 & \ldots & (x_3)^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \ldots & (x_n)^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x_1-x_1 & (x_1)^2-x_1\cdot x_1 & \ldots & (x_1)^{n-1}-(x_1)^{n-2}\cdot x_1\\ 1 & x_2-x_1 & (x_2)^2-x_2\cdot x_1 & \ldots & (x_2)^{n-1}-(x_2)^{n-2}\cdot x_1\\ 1 & x_3-x_1 & (x_3)^2-x_3\cdot x_1 & \ldots & (x_3)^{n-1}-(x_3)^{n-2}\cdot x_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n-x_1 & (x_n)^2-x_n\cdot x_1 & \ldots & (x_n)^{n-1}-(x_n)^{n-2}\cdot x_1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 1 & x_2-x_1 & x_2\cdot(x_2-x_1) & \ldots & (x_2)^{n-2}\cdot(x_2-x_1)\\ 1 & x_3-x_1 & x_3\cdot(x_3-x_1) & \ldots & (x_3)^{n-2}\cdot(x_3-x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n-x_1 & x_n\cdot(x_n-x_1) & \ldots & (x_n)^{n-2}\cdot(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

מפיתוח הדטרמיננטה לפי השורה הראשונה נובע שמתקיים:

$$\det V=1\cdot\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_2\cdot(x_2-x_1) & \ldots & (x_2)^{n-2}\cdot(x_2-x_1)\\ x_3-x_1 & x_3\cdot(x_3-x_1) & \ldots & (x_3)^{n-2}\cdot(x_3-x_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_n-x_1 & x_n\cdot(x_n-x_1) & \ldots & (x_n)^{n-2}\cdot(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

ומהעובדה שהדטרמיננטה מולטי-ליניארית לפי שורות נובע כי:

$$\det V=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_2\cdot(x_2-x_1) & \ldots & (x_2)^{n-2}\cdot(x_2-x_1)\\ x_3-x_1 & x_3\cdot(x_3-x_1) & \ldots & (x_3)^{n-2}\cdot(x_3-x_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_n-x_1 & x_n\cdot(x_n-x_1) & \ldots & (x_n)^{n-2}\cdot(x_n-x_1)\end{vmatrix}=\prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\cdot\begin{vmatrix}1 & x_2 & \ldots & (x_2)^{n-2}\\ 1 & x_3 & \ldots & (x_3)^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & \ldots & (x_n)^{n-2}\end{vmatrix}$$

[12] אם $n=1$ אז $V=I_1$ ולכן $\det V=1$, כמו כן אם $n=1$ אז המכפלה הנ"ל ריקה ולכן גם היא שווה ל-1 מהגדרה.

המטריצה שבאגף ימין היא מטריצת ונדרמונד עבור הערכים $x_2, x_3, \dots, x_n$ ולכן ע"פ הנחת האינדוקציה מתקיים:

$$\det V = \prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1) \cdot \prod_{n \geq i,j \in \mathbb{N} \ \ 1<i<j} (x_j - x_i) = \prod_{n \geq i,j \in \mathbb{N} \ \ i<j} (x_j - x_i)$$

■

מסקנה 3.16. מטריצת ונדרמונד $V \in M_n(\mathbb{F})$ עבור ערכים $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{F}$ היא הפיכה אם"ם $x_i \neq x_j$ לכל $n \geq i, j \in \mathbb{N}$ כך ש-$i \neq j$.

♣ אנחנו יודעים ששתי נקודות מגדירות ישר יחיד (כלומר פולינום ממעלה 1) ואילו שלוש נקודות מגדירות פרבולה יחידה (כלומר פולינום ממעלה 2), מה לגבי פולינומים ממעלה גבוהה יותר?

מסקנה 3.17. לכל $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{F}$ כך שלכל $n \geq i, j \in \mathbb{N}$ כך ש-$i \neq j$ ולכל $y_1, y_2 \dots, y_n \in \mathbb{F}$ קיים פולינום יחיד $P \in \mathbb{F}_{\leq n-1}[x]$ כך ש-$y_i = P(x_i)$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.

♣ כלומר $n+1$ נקודות במישור שערכי ה-x שלהן שונים מגדירות פולינום יחיד ממעלה n שעובר בכולן.

הוכחה. יהיו $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{F}$ כך שלכל $n \geq i, j \in \mathbb{N}$ כך ש-$i \neq j$, ויהיו $y_1, y_2 \dots, y_n \in \mathbb{F}$. נסמן:

$$V := \begin{bmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^{n-1} \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \dots & (x_2)^{n-1} \\ 1 & x_3 & (x_3)^2 & \dots & (x_3)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \dots & (x_n)^{n-1} \end{bmatrix}, \ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

ממסקנה 3.16 נובע ש-V הפיכה ומכאן שקיים $a \in \mathbb{F}^n$ יחיד כך ש-$V \cdot a = y$, כלומר קיימים $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$ יחידים המקיימים:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^{n-1} \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \dots & (x_2)^{n-1} \\ 1 & x_3 & (x_3)^2 & \dots & (x_3)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \dots & (x_n)^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

מהגדרת כפל מטריצה בווקטור נקבל שקיימים $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$ יחידים המקיימים:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot (x_1)^2 + \dots + a_{n-1} \cdot (x_1)^{n-1} \\ y_2 &= a_0 + a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot (x_2)^2 + \dots + a_{n-1} \cdot (x_2)^{n-1} \\ y_3 &= a_0 + a_1 \cdot x_3 + a_2 \cdot (x_3)^2 + \dots + a_{n-1} \cdot (x_3)^{n-1} \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 + a_1 \cdot x_n + a_2 \cdot (x_n)^2 + \dots + a_{n-1} \cdot (x_n)^{n-1} \end{aligned}$$

כלומר קיים פולינום יחיד $P \in \mathbb{F}_{\leq n-1}[x]$ כך ש-$y_i = P(x_i)$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$. ■