מטריצות ומרחבי קואורדינטות - הוכחות נבחרות

אלגברה ליניארית (1) - 80134

מרצה: ערן נבו

מתרגלים: איתמר ישראלי ושני שלומי

סוכם ע״י: שריה אנסבכר

סמסטר ב׳ תשפ״ב, האונ׳ העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $m,n\in\mathbb{N}$.

1.1 מרחב המטריצות

אין טענות בסעיף זה.

1.2 כפל מטריצה בווקטור

טענה 1.1. לכל $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ מתקיים $A\cdot\vec{0}=\vec{0}$.

טענה 1.2. תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ויהי $v\in\mathbb{F}^{n}$, אם השורה ה-i של A היא שורת אפסים אז $A\cdot v$ הוא וקטור שבקואורדינטה ה-i שלו יופיע 0 (עבור $m\geq i\in\mathbb{N}$).

טענה 1.3. לכל $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ העמודה ה-j של A היא $A\cdot e_{j}$ (עבור $n\geq j\in\mathbb{N}$).

♣ כלומר אנחנו יודעים בדיוק לאן מעתיקה T_{A} כל אחד מהווקטורים בבסיס הסטנדרטי, תכף נראה מדוע זה חשוב.

מסקנה 1.4. תהיינה $A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$, מתקיים $A=B$ אס"ם לכל $v\in\mathbb{F}^{n}$ מתקיים $T_{A}\left(v\right)=A\cdot v=B\cdot v=T_{B}\left(v\right)$ (כלומר אס"ם $T_{A}=T_{B}$).

משפט 1.5. תכונות של כפל מטריצה בווקטור

יהיו $A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$, $x,y\in\mathbb{F}^{n}$ ו-$c\in\mathbb{F}$; מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

- פילוג (דיסטריבוטיביות) ביחס לחיבור וקטורי - $T_{A}\left(x+y\right)=A\cdot\left(x+y\right)=A\cdot x+A\cdot y=T_{A}\left(x\right)+T_{A}\left(y\right)$.
- פילוג (דיסטריבוטיביות) ביחס לחיבור מטריצות - $T_{A+B}\left(x\right)=\left(A+B\right)\cdot x=A\cdot x+B\cdot x=T_{A}\left(x\right)+T_{B}\left(x\right)$.
- קיבוץ וחילוף ביחס לכפל בסקלר[1] - $T_{A}\left(c\cdot x\right)=A\cdot\left(c\cdot x\right)=\left(c\cdot A\right)\cdot x=c\cdot\left(A\cdot x\right)=c\cdot T_{A}\left(x\right)$.

♣ שתי התכונות הללו אומרות שכפל מטריצה בווקטור **שומר על המבנה** של $\mathbb{F}^{n}$ כמרחב קואורדינטות עם פעולות החיבור הווקטורי והכפל בסקלר, מכאן שכפל מטריצה בווקטור מעתיק תתי-מרחבים של $\mathbb{F}^{n}$ לתתי-מרחבים של $\mathbb{F}^{m}$.

♣ בגלל התכונה השנייה לא נטרח לכתוב סוגריים בביטויים כגון $c\cdot A\cdot x$ או $A\cdot c\cdot x$.

הוכחה. ראינו בקובץ ההגדרות שלכל $x\in\mathbb{F}^{n}$ הקואורדינטה ה-i של הווקטור $A\cdot x$ היא (לכל $m\geq i\in\mathbb{N}$):

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot x_{j}$$

- מנוסחה זו נובע שהקואורדינטה ה-i של הווקטור $A\cdot\left(x+y\right)$ היא (לכל $m\geq i\in\mathbb{N}$):

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot\left(x_{j}+y_{j}\right)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot x_{j}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot y_{j}$$

נשים לב לכך שע"פ הנוסחה הנ"ל האגף הימני הוא הקואורדינטה ה-i של הווקטור $A\cdot x+A\cdot y$ ולכן מתקיים $A\cdot\left(x+y\right)=A\cdot x+A\cdot y$.

[1] לא כתבנו את הביטוי $\left(A\cdot c\right)\cdot x$ מפני שהכפל בסקלר מוגדר משמאל בלבד.

- מנוסחה זו נובע שהקואורדינטה ה-i של הווקטור $(A+B)\cdot x$ היא (לכל $m\geq i\in\mathbb{N}$):
$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})\cdot x_j=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot x_j+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\cdot x_j$$
נשים לב לכך שע״פ הנוסחה הנ״ל האגף הימני הוא הקואורדינטה ה-i של הווקטור $A\cdot x+B\cdot x$ ולכן מתקיים $(A+B)\cdot x=A\cdot x+B\cdot x$.

- מנוסחה זו נובע שהקואורדינטה ה-i של הווקטור $A\cdot(c\cdot x)$ היא (לכל $m\geq i\in\mathbb{N}$):
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot(c\cdot x_j)=\sum_{j=1}^{n}(c\cdot a_{ij})\cdot x_j=c\cdot\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot x_j$$
נשים לב לכך שע״פ הנוסחה הנ״ל האגף האמצעי הוא הקואורדינטה ה-i של הווקטור $(c\cdot A)\cdot x$ והאגף הימני הוא הקואורדינטה ה-i של הווקטור $c\cdot(A\cdot x)$ ולכן מתקיים $A\cdot(c\cdot x)=(c\cdot A)\cdot x=c\cdot(A\cdot x)$.

■

מסקנה 1.6. תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, לכל $v_1,v_2,\ldots,v_r\in\mathbb{F}^n$ ולכל $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ מתקיים:
$$T_A\left(\sum_{i=1}^{r}a_i\cdot v_i\right)=A\cdot\left(\sum_{i=1}^{r}a_i\cdot v_i\right)=\sum_{i=1}^{r}a_i\cdot A\cdot v_i=\sum_{i=1}^{r}a_i\cdot T_A(v_i)$$

♣ בפרט לכל $x\in\mathbb{F}^n$ מתקיים:
$$T_A(x)=T_A\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\right)=T_A\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot T_A(e_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot c_i$$
כאשר c_i היא העמודה ה-i של A. כלומר אם אנחנו יודעים כיצד T_A פועלת על איברי הבסיס הסטנדרטי (וכפי שראינו אנחנו אכן יודעים זאת עבור A נתונה) אז אנחנו יודעים בדיוק כיצד פועלת הפונקציה T_A על מרחב הקואורדינטות $\mathbb{F}^n$.

1.3 כפל מטריצות

יהי $l\in\mathbb{N}$.

טענה 1.7. תהיינה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו-$B\in M_{l\times m}(\mathbb{F})$, מתקיים:

- אם העמודה ה-j של מטריצה A היא עמודת אפסים אז העמודה ה-j של $B\cdot A$ היא עמודת אפסים (לכל $n\geq j\in\mathbb{N}$).
- אם השורה ה-i של מטריצה B היא שורת אפסים אז השורה ה-i של $B\cdot A$ היא שורת אפסים (לכל $l\geq i\in\mathbb{N}$).

משפט 1.8. תהיינה $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ו-$B\in M_{l\times m}\left(\mathbb{F}\right)$, לכל $x\in\mathbb{F}^{n}$ מתקיים $T_{B}\left(T_{A}\left(x\right)\right)=B\cdot\left(A\cdot x\right)=\left(B\cdot A\right)\cdot x=T_{B\cdot A}\left(x\right)$.

♣ כלומר כפל מטריצות שקול להרכבת ההעתקות המוגדרות על ידן - מתקיים $T_{B}\circ T_{A}=T_{B\cdot A}$.

הוכחה. יהי $x\in\mathbb{F}^{n}$, הקואורדינטה ה-k של $A\cdot x$ היא (לכל $m\geq k\in\mathbb{N}$):

$$\sum_{j=1}^{n}\left[A\right]_{kj}\cdot x_{j}$$

ומכאן שהקואורדינטה ה-i של $B\cdot\left(A\cdot x\right)$ היא (לכל $l\geq i\in\mathbb{N}$):

$$\sum_{k=1}^{m}\left[B\right]_{ik}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\left[A\right]_{kj}\cdot x_{j}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\left[B\right]_{ik}\cdot\left[A\right]_{kj}\cdot x_{j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\left[B\right]_{ik}\cdot\left[A\right]_{kj}\cdot x_{j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\left[B\right]_{ik}\cdot\left[A\right]_{kj}\right)\cdot x_{j}$$

בקובץ ההגדרות ראינו שמתקיים (לכל $l\geq i\in\mathbb{N}$ ולכל $n\geq j\in\mathbb{N}$):

$$\left[B\cdot A\right]_{ij}=\sum_{k=1}^{m}\left[B\right]_{ik}\cdot\left[A\right]_{kj}$$

ומכאן שמתקיים (לכל $l\geq i\in\mathbb{N}$):

$$\sum_{k=1}^{m}\left[B\right]_{ik}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\left[A\right]_{kj}\cdot x_{j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left[B\cdot A\right]_{ij}\cdot x_{j}$$

כלומר הקואורדינטה ה-i של $B\cdot\left(A\cdot x\right)$ היא בדיוק הקואורדינטה ה-i של $\left(B\cdot A\right)\cdot x$ (לכל $l\geq i\in\mathbb{N}$) ולכן מתקיים $B\cdot\left(A\cdot x\right)=\left(B\cdot A\right)\cdot x$. ■

משפט 1.9. תכונות של כפל מטריצות

תהיינה $A,A_{0}\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$, $B,B_{0}\in M_{l\times m}\left(\mathbb{F}\right)$ ו-$C\in M_{k\times l}\left(\mathbb{F}\right)$ ו-$x\in\mathbb{F}$, מתקיים:

- קיבוץ (אסוציאטיביות) - $\left(C\cdot B\right)\cdot A=C\cdot\left(B\cdot A\right)$.
- פילוג (דיסטריבוטיביות) ביחס לחיבור מטריצות - $B\cdot\left(A+A_{0}\right)=B\cdot A+B\cdot A_{0}$ ו-$\left(B+B_{0}\right)\cdot A=B\cdot A+B_{0}\cdot A$.
- קיבוץ וחילוף ביחס לכפל בסקלר - $B\cdot\left(x\cdot A\right)=\left(x\cdot B\right)\cdot A=x\cdot\left(B\cdot A\right)$.

♣ בגלל התכונה הראשונה לא נטרח לכתוב סוגריים בביטוי כגון $C\cdot B\cdot A$.

♣ מכיוון שראינו את השקילות בין חיבור/כפל מטריצות לחיבור/הרכבת הפונקציות המוגדרות על ידן נוכל לנסח את המשפט בשפה של פונקציות:

- קיבוץ (אסוציאטיביות) - בתכונה זו הכיוון הוא הפוך: אנחנו יודעים שכפל מטריצות מקיים חוק הקיבוץ מפני שהוא שקול להרכבת פונקציות וכל הרכבת פונקציות מקיימת קיבוץ.
- פילוג (דיסטריבוטיביות) ביחס לחיבור פונקציות - $T_{A}\circ\left(T_{B}+T_{C}\right)=T_{A}\circ T_{B}+T_{A}\circ T_{C}$.
- קיבוץ וחילוף ביחס לכפל בסקלר - $T_{A}\circ\left(x\cdot T_{B}\right)=\left(x\cdot T_{A}\right)\circ T_{B}=x\cdot\left(T_{A}\circ T_{B}\right)$.

♣ כפל מטריצות אינו מקיים חילוף, לדוגמה:

$$\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 17\\ 2 & -2\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 8 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

הוכחה.

- מהמשפט הקודם (1.8) נובע שמתקיים:

$$T_{(C\cdot B)\cdot A}=T_{C\cdot B}\circ T_A=(T_C\circ T_B)\circ T_A=T_C\circ(T_B\circ T_A)=T_C\circ T_{B\cdot A}=T_{C\cdot(B\cdot A)}$$

ולכן ממסקנה 1.4 נובע ש-$(C\cdot B)\cdot A=C\cdot(B\cdot A)$.

- לכל $\mathbb{N}\ni i\leq l$ ולכל $\mathbb{N}\ni j\leq n$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
[B\cdot(A+A_0)]_{ij}&=\sum_{k=1}^{m}[B]_{ik}\cdot[A+A_0]_{kj}=\sum_{k=1}^{m}[B]_{ik}\cdot\Big([A]_{kj}+[A_0]_{kj}\Big)\\
&=\sum_{k=1}^{m}[B]_{ik}\cdot[A]_{kj}+\sum_{k=1}^{m}[B]_{ik}\cdot[A_0]_{kj}\\
&=[B\cdot A]_{ij}+[B\cdot A_0]_{ij}=[B\cdot A+B_0\cdot A]_{ij}\\
[(B+B_0)\cdot A]_{ij}&=\sum_{k=1}^{m}[B+B_0]_{ik}\cdot[A]_{kj}=\sum_{k=1}^{m}([B]_{ik}+[B_0]_{ik})\cdot[A]_{kj}\\
&=\sum_{k=1}^{m}[B]_{ik}\cdot[A]_{kj}+\sum_{k=1}^{m}[B_0]_{ik}\cdot[A]_{kj}\\
&=[B\cdot A]_{ij}+[B_0\cdot A]_{ij}=[B\cdot A+B_0\cdot A]_{ij}
\end{aligned}$$

ומכאן שגם $B\cdot(A+A_0)=B\cdot A+B\cdot A_0$ ו-$(B+B_0)\cdot A=B\cdot A+B_0\cdot A$.

- לכל $\mathbb{N}\ni i\leq l$ ולכל $\mathbb{N}\ni j\leq n$ מתקיים:

$$[B\cdot(x\cdot A)]_{ij}=\sum_{k=1}^{m}[B]_{ik}\cdot[x\cdot A]_{kj}=\sum_{k=1}^{m}[B]_{ik}\cdot x\cdot[A]_{kj}$$

ולכן גם:

$$\begin{aligned}
[B\cdot(x\cdot A)]_{ij}&=\sum_{k=1}^{m}[x\cdot B]_{ik}\cdot[A]_{kj}=[(x\cdot B)\cdot A]_{ij}\\
[B\cdot(x\cdot A)]_{ij}&=x\cdot\sum_{k=1}^{m}[B]_{ik}\cdot[A]_{kj}=x\cdot[B\cdot A]_{ij}=[x\cdot(B\cdot A)]_{ij}
\end{aligned}$$

ומכאן ש-$B\cdot(x\cdot A)=(x\cdot B)\cdot A=x\cdot(B\cdot A)$.

■

2 מטריצת היחידה ומטריצות הפיכות

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהא $n\in\mathbb{N}$.

טענה 2.1. אם למטריצה יש שורת אפסים או עמודת אפסים אז היא אינה הפיכה.

טענה 2.2. לכל $A\in M_{m\times n}$ מתקיים $I_m\cdot A=A=A\cdot I_n$.

הוכחה. לכל $m \geq i \in \mathbb{N}$ ולכל $n \geq j \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
[I_m \cdot A]_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} [I_m]_{ik} \cdot [A]_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} \cdot [A]_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot [A]_{kj} + 1 \cdot [A]_{kj} + \sum_{k=i+1}^{m} 0 \cdot [A]_{kj} = [A]_{kj} \\
[A \cdot I_n]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} \cdot [I_n]_{kj} = \sum_{k=1}^{m} [A]_{ik} \cdot \delta_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} [A]_{ik} \cdot 0 + [A]_{ik} \cdot 1 + \sum_{k=j+1}^{n} [A]_{ik} \cdot 0 = [A]_{ij}
\end{aligned}$$

ומכאן ש-$I_m \cdot A = A = A \cdot I_n$. ■

מסקנה 2.3. לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $T_{I_n}(v) = I_n \cdot v = v = \mathrm{Id}(v)$.

♣ מסקנה זו היא הסיבה לכך שמטריצת היחידה נקראת גם מטריצת הזהות.

טענה 2.4. תהא $P \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה, גם T_P הפיכה.

הוכחה. תהא $Q \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש-$P \cdot Q = I_n = Q \cdot P$, ממשפט 1.8 ומהמסקנה האחרונה (2.3) נובע שמתקיים:

$$T_P \circ T_Q = T_{P \cdot Q} = T_{I_n} = \mathrm{Id} = T_{I_n} = T_{Q \cdot P} = T_Q \circ T_P$$

כלומר T_Q היא ההופכית של T_P ובפרט T_P הפיכה. ■

מסקנה 2.5. תהא $P \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה, קיימת $Q \in M_n(\mathbb{F})$ יחידה כך ש-$P \cdot Q = I_n = Q \cdot P$.

הוכחה. בהוכחת הטענה הקודמת (2.4) ראינו שלכל מטריצה $Q \in M_n(\mathbb{F})$ שהיא הופכית של P ההעתקה T_Q היא הופכית של T_P, אך מכיוון שהפונקציה ההופכית היא תמיד יחידה נובע מזה וממסקנה 1.4 שקיימת רק מטריצה אחת שההעתקה המוגדרת על ידה היא ההופכית של T_P ומכאן היחידות של Q כנ"ל (הקיום נובע מהגדרת P כמטריצה הפיכה). ■

מסקנה 2.6. תהא $P \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה מתקיים $(T_P)^{-1} = T_{P^{-1}}$.

מסקנה 2.7. לכל $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים $A \cdot B = I_n$ אם"ם $B \cdot A = I_n$.

מסקנה 2.8. תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$, אם קיימת $B \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש-$A \cdot B = I_n$ **ו/או** $B \cdot A = I_n$ אז A הפיכה ו-$A^{-1} = B$ (כלומר $A \cdot B = I_n$ **וגם** $B \cdot A = I_n$).

טענה 2.9. תהיינה $P, Q \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצות הפיכות, $P \cdot Q$ היא מטריצה הפיכה וההופכית שלה היא $Q^{-1} \cdot P^{-1}$.

♣ ניתן להסיק מכאן שכל מכפלה של מטריצות הפיכות היא מטריצה הפיכה וההופכית שלה היא מכפלת המטריצות ההופכיות בסדר הפוך.

הוכחה. מתקיים:

$$\left(Q^{-1} \cdot P^{-1}\right) \cdot (P \cdot Q) = Q^{-1} \cdot P^{-1} \cdot P \cdot Q = Q^{-1} \cdot I_n \cdot Q = Q^{-1} \cdot Q = I_n$$

ולכן מהמסקנה הקודמת (2.8) נובע כי $(P \cdot Q)^{-1} = Q^{-1} \cdot P^{-1}$. ■

3 פתרון מערכות משוואות ליניאריות

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $m,n\in\mathbb{N}$.

3.1 התחלה

טענה 3.1. תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצת המערכת של ממ"ל כלשהי[2] ויהי $b\in\mathbb{F}^{m}$ וקטור המקדמים החופשיים של אותה מערכת, אוסף הפתרונות של הממ"ל הוא:

$$\left\{ x\in\mathbb{F}^{n}\mid A\cdot x=b\right\}$$

♣ כלומר אוסף הפתרונות הוא קבוצת הווקטורים ב-$\mathbb{F}^{n}$ ש-T_{A} מעתיקה אל b, כלומר זהו המקור של b - $\left(T_{A}\right)^{-1}\left(\left\{ b\right\} \right)$.

מסקנה 3.2. מטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ היא מטריצה הפיכה אס"ם לכל $b\in\mathbb{F}^{n}$ קיים פתרון יחיד לממ"ל $A\cdot x=b$ והוא $x=A^{-1}\cdot b$.

3.2 מטריצה מדורגת-מצומצמת

אין טענות בסעיף זה.

3.3 פעולות שורה אלמנטריות

טענה 3.3. כל פעולת שורה אלמנטרית היא פונקציה הפיכה וההופכית שלה גם היא פעולת שורה אלמנטרית מאותה צורה.

משפט 3.4. תהא $A\in M_{m\times n+1}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצת מערכת **מורחבת** של ממ"ל כלשהי ותהא $\varepsilon:M_{m\times n+1}\left(\mathbb{F}\right)\rightarrow M_{m\times n+1}\left(\mathbb{F}\right)$ פש"א, אוסף הפתרונות של הממ"ל המתאימה ל-$\varepsilon\left(A\right)$ זהה לאוסף הפתרונות של הממ"ל המתאימה ל-A.

♣ שימו לב שאנו מבצעים את פעולות השורה אלמנטריות גם על עמודת המקדמים החופשיים.

הוכחה. מהגדרת פעולות השורה האלמנטריות כל פתרון של הממ"ל המתאימה ל-A הוא פתרון של הממ"ל המתאימה ל-$\varepsilon\left(A\right)$, כלומר אוסף הפתרונות של הממ"ל המתאימה ל-A **מוכל** באוסף הפתרונות של הממ"ל המתאימה ל-$\varepsilon\left(A\right)$. מצד שני מאותן סיבות אוסף הפתרונות של הממ"ל המתאימה ל-$\varepsilon\left(A\right)$ מוכל באוסף הפתרונות של הממ"ל המתאימה ל-$\varepsilon^{-1}\left(\varepsilon\left(A\right)\right)=A$[3] ולכן מתקיים שוויון בין אוספי הפתרונות. ∎

מסקנה 3.5. שתי מערכות משוואות ליניאריות שמטריצות המערכת המורחבת שלהן שקולות שורה הן בעלות אותו אוסף פתרונות.

---

[2] מהגדרה זוהי מערכת של m משוואות ב-n נעלמים.

[3] כאן אנו משתמשים בקיום של ε^{-1} שהוכח בטענה האחרונה (3.3).

3.4 אלגוריתם הדירוג - אלימינציית גאוס

אלגוריתם 1 אלגוריתם הדירוג - אלימינציית גאוס

תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, נרצה למצוא מטריצה $B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ כך ש-$A \sim B$ ו-B מדורגת-מצומצמת.
נסמן $B := A$, $i := 1$ ו-$j := 1$.
כל עוד $i \le m$ וגם $j \le n$:

- אם קיים $m \ge k \in \mathbb{N}$ כך ש-$k \ge i$ ו-$[B]_{kj} \ne 0$:
  1. נבחר k כנ״ל ונחליף את השורה ה-i עם השורה ה-k, כעת מתקיים $[B]_{ij} \ne 0$.
  2. נכפול את השורה ה-i ב-$(b_{ij})^{-1}$, כעת מתקיים $[B]_{ij} = 1$.
  3. לכל $m \ge l \in \mathbb{N}$ כך ש-$i \ne l$:
     – נחסר מהשורה ה-l את השורה ה-i כשהיא מוכפלת ב-$[B]_{lj}$, כעת מתקיים $[B]_{lj} = 0$.
  4. כעת מתקיים $[B]_{lj} = 0$ לכל $m \ge l \in \mathbb{N}$ כך ש-$i \ne l$,
     נסמן $i := i + 1$ ו-$j := j + 1$ ונעבור לשלב הבא בלולאה.
- אחרת, נסמן $j := j + 1$ ונעבור לשלב הבא הלולאה.

כעת B היא מטריצה מדורגת-מצומצמת ומהגדרה היא שקולת שורה ל-A.

♣ סעיף 1 הוא השלב היחיד באלגוריתם שבו אנו יכולים לבחור כיצד לפעול - זהו המקום היחיד באלגוריתם הדירוג שבו ניתן להפעיל את השכל על מנת לקצר את התהליך.

♣ סעיף 2 הוא היחיד שדורש עבודה מעל שדה, זוהי אותה נקודה שהזכרנו בתחילת קובץ ההגדרות שאינה נכונה עבור מטריצות מעל חוגים; מסיבה זו אלגוריתם הדירוג אינו עבוד מעל חוגים.

♣ אם בתהליך הדירוג הפכה אחת השורות לשורת אפסים פירושו של דבר הוא שניתן לבטא אותה כצר״ל של שאר השורות ולכן היא מיותרת במערכת המשוואות, את כל מה שיש לה לומר על אוסף הפתרונות כבר אמרו האחרות.

מסקנה 3.6. לכל מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ קיימת מטריצה מדורגת-מצומצמת $R \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ כך ש-$A \sim R$.

♣ מיד נראה כיצד אלגוריתם הדירוג מאפשר לנו לפתור מערכות משוואות ליניאריות בקלות, ובהמשך נראה שיש לו שימושים נוספים.

בוויקיספר נכתב שמטריצה המדורגת-מצומצמת גם יחידה, למה זה נכון?

3.5 הפתרון

כעת נוכל למצוא את אוסף הפתרונות של כל ממ"ל מעל שדה, נפעיל את אלגוריתם הדירוג על מטריצת המערכת המורחבת של הממ"ל ונקבל מטריצה מדורגת-מצומצמת שאוסף הפתרונות של הממ"ל המתאימה לה זהה לזה של הממ"ל המקורית, כעת ניתן לראות שישנם שלושה סוגים של פתרונות (תרשים זרימה מסכם יופיע בסוף הסעיף)[4]:

1. אם **קיים איבר מוביל בעמודת המקדמים החופשיים** אז **אין לממ"ל פתרונות** (שהרי השורה שבה נמצא אותו איבר מוביל אומרת ש-$0 = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot x_i \neq 0$[5]), במקרה כזה אוסף הפתרונות הוא **הקבוצה הריקה**.
2. אם **אין איבר מוביל בעמודת המקדמים החופשיים** וגם **בכל עמודה אחרת יש איבר מוביל** אז **יש לממ"ל פתרון יחיד** והוא הווקטור המורכב מ-n הקואורדינטות הראשונות של וקטור המקדמים החופשיים (לאחר הדירוג)[6], במקרה כזה אוסף הפתרונות הוא **היחידון המכיל הווקטור הזה**.
3. אם **אין איבר מוביל בעמודת המקדמים החופשיים** וגם **קיימת עמודה אחרת שאין בה איבר מוביל** אז **לממ"ל יש אינסוף פתרונות**[7].
   כדי למצוא את אוסף הפתרונות במקרה כזה, נפעל לפי השלבים הבאים:
   - נכתוב את הממ"ל של המטריצה המדורגת-מצומצמת.
   - נבטא את המשתנים התלויים באמצעות החופשיים.
   - נכתוב וקטור כללי שבו האיברים יהיו המשתנים (לפי הסדר שלהם), כאשר המשתנים התלויים יבוטאו באמצעות המשתנים החופשיים; אוסף הפתרונות יהיה קבוצת כל הווקטורים מהצורה הכללית הנ"ל.

דוגמה 3.7. נדגים את שלושת המקרים.

1. לממ"ל המיוצגת ע"י המטריצה:
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
אין פתרון.

2. לממ"ל המיוצגת ע"י המטריצה[8]:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
יש פתרון יחיד והוא הווקטור $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

[4] אנו עובדים כעת עם מטריצה מדורגת-מצומצמת שהיא המטריצה המורחבת של המערכת החדשה, זוהי מטריצה בעלת m שורות ו-n עמודות - ללא עמודת המקדמים החופשיים (כלומר יש בה בעצם $n+1$ עמודות).

[5] האפס שבאגף ימין מציין את האיבר המוביל בעמודת המקדמים החופשיים שאינו 0, האגף האמצעי הוא השורה המתאימה במערכת המשוואות הליניאריות והאפס שבאגף ימין הוא הערך שהיא אמורה לקבל כדי שיהיה פתרון.

[6] אם $m < n$, כלומר מספר השורות במטריצה קטן ממספר העמודות אז לא ייתכן שבכל עמודה יש איבר מוביל.

[7] או, אם השדה המדובר סופי, מספר הפתרונות שווה למספר האיברים בשדה בחזקת מספר המשתנים החופשיים.

[8] הדרך היחידה שבה מתקיים המקרה השני היא ש-n השורות הראשונות הן מטריצה היחידה כשמימינה עמודת המקדמים החופשיים שבה יכול להופיע כל איבר בשדה בשורות אלה, ומתחת לכל זה יש אך ורק שורות אפסים (כולל בעמודת המקדמים החופשיים).

3. בשביל המקרה השלישי נביא את המטריצה הבאה (זו שהבאנו כבר בקובץ ההגדרות):

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- הממ״ל המתאימה לה היא:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 - x_5 = 3 \\ x_4 + 2x_5 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- מכאן שמתקיים:

$$\begin{cases} x_2 = 2x_3 + x_5 + 3 \\ x_4 = -2x_5 - 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- ולכן אוסף הפתרונות הוא:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_3 + x_5 + 3 \\ x_3 \\ -2x_5 - 1 \\ x_5 \end{bmatrix} \,\middle|\, x_1, x_3, x_5 \in \mathbb{F} \right\}$$

- ואז נוכל (ופעמים רבות נידרש לכך) להמיר את ההצגה הקודמת ל<u>הצגה פרמטרית</u>:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_3 + x_5 + 3 \\ x_3 \\ -2x_5 - 1 \\ x_5 \end{bmatrix} \,\middle|\, x_1, x_3, x_5 \in \mathbb{F} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, x_1, x_3, x_5 \in \mathbb{F} \right\}$$

המעבר מההצגה הקודמת להצגה הפרמטרית נעשה ע״י פירוק הווקטור הכללי למספר וקטורים (כמספר המשתנים החופשיים ועוד 1), כאשר בווקטור הראשון שמנו את כל המספרים שאינם מוכפלים במשתנה חופשי, בשני את כל אלו שמוכפלים ב-x_1, בשלישי את כל אלו שמוכפלים ב-x_3 וכן הלאה. באופן כללי ההצגה הפרמטרית תיראה כך:

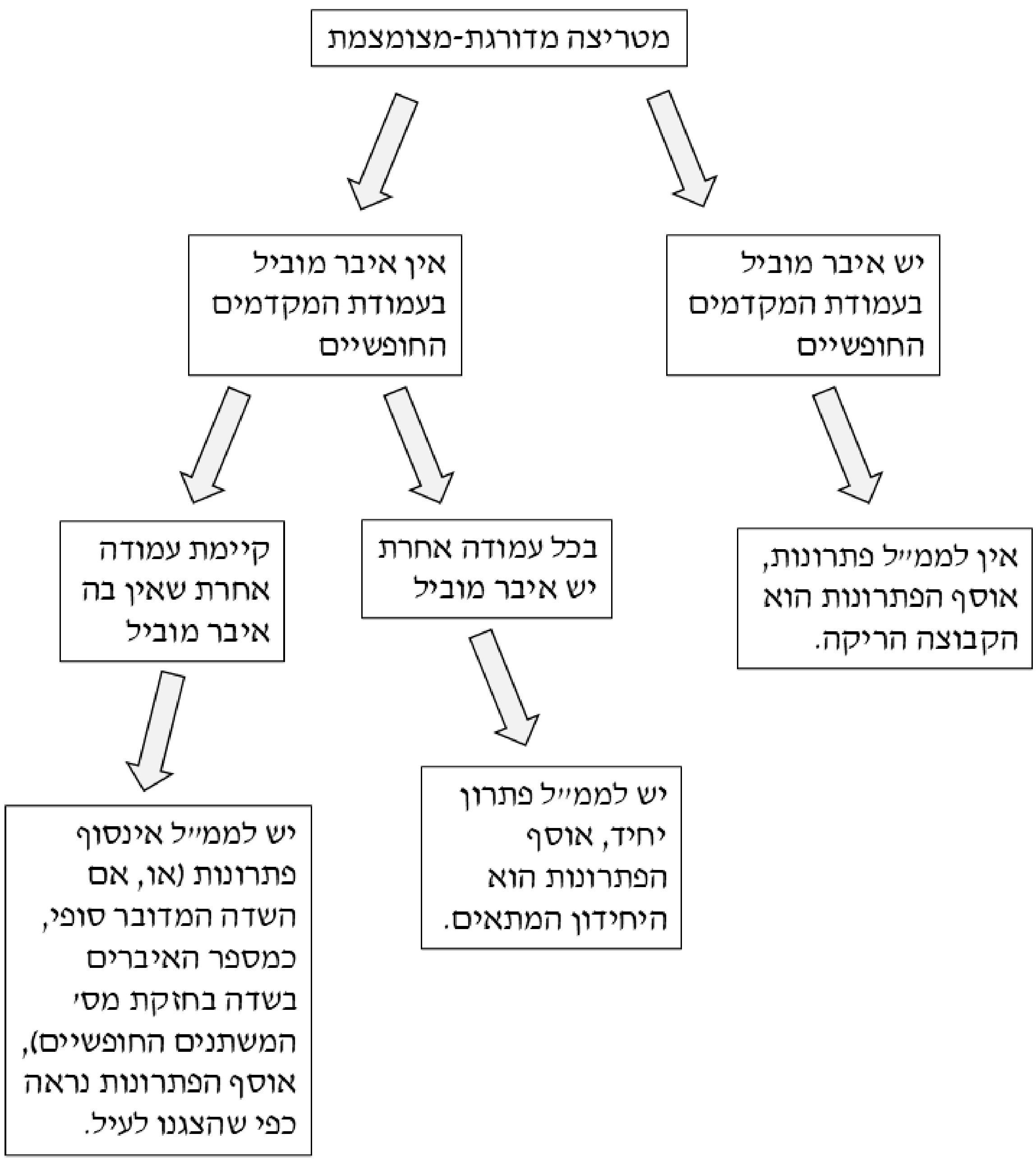
$$\left\{ u_0 + t_1 \cdot u_1 + t_2 \cdot u_2 + ... + t_m \cdot u_m \,\middle|\, \forall m \geq i \in \mathbb{N} : t_i \in \mathbb{F},\ \forall m \geq i \in \mathbb{N}_0 : u_i \in \mathbb{F}^n \right\}$$

כאשר $m + 1 \leq n$.

♣ שימו לב: ההצגה הפרמטרית אינה יחידה, כפי שהזכרנו כבר בקובץ ההגדרות אוסף הפתרונות של ממ״ל הוא ישריה (אם אינו ריק) - הווקטור הראשון בהצגה הפרמטרית הוא הווקטור שעל פיו אנו מזיזים את מרחב הכיוונים והשאר הם בסיס[9] של מרחב הכיוונים וכבר ראינו שלתמ״ו יכולים להיות בסיסים רבים וכל וקטור בישרייה מתאים בתור הווקטור הקובע כיצד להזיז את מרחב הכיוונים.

[9] מהגדרה הם פורשים את מרחב הכיוונים והם בת״ל מפני שלכל אחד מהם יש קואורדינטה אחת שבה מופיע 1 כשלכל האחרים מופיע 0 באותה קואורדינטה (זו גם ההגדרה של הצגה פרמטרית למי שמתעקש לקבל הגדרה פורמלית).

תרשים זרימה מסכם



3.6 מטריצות אלמנטריות

טענה 3.8. כל מטריצה אלמנטרית היא הפיכה וההופכית שלה היא מטריצה אלמנטרית.

מסקנה 3.9. אם מטריצה מהווה מכפלה של מטריצות אלמנטריות אז היא הפיכה.

טענה 3.10. תהא $\varepsilon : M_{m\times n}(\mathbb{F}) \to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ פש"א ותהא $E \in M_m(\mathbb{F})$ המטריצה האלמנטרית המתאימה לה, מתקיים $\varepsilon(A) = E\cdot A$ לכל $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

הוכחה. בקובץ ההגדרות ראינו שלכל $m \geq i \in \mathbb{N}$, השורה ה-i של $E\cdot A$ היא $\sum_{k=1}^{m}[E]_{ik}\cdot R_k$ כאשר R_k היא השורה ה-k של A והחיבור מתבצע רכיב רכיב.
לאחר ההבנה הזו קל מאד לראות שהטענה אכן מתקיימת, למרות זאת הבאתי כאן הוכחה פורמלית אך מכיוון שהיא מלאה באלגברה אני ממליץ למי שכבר הבין למה הטענה נכונה - לא לבזבז זמן על ההוכחה הפורמלית, ולמי שעוד לא הבין - לנסות שוב להבין מדוע השורה הקודמת מספיקה.

1. אם ε היא החלפת שורות $n \geq s,t \in \mathbb{N}$ ($s<t$) אז מתקיים (לכל $m \geq i,k \in \mathbb{N}$):

$$[E]_{ik} = \begin{cases} 1 & (i,k)=(s,t) \vee (i,k)=(t,s) \\ 0 & (i,k)=(s,s) \vee (i,k)=(t,t) \\ \delta_{ik} & \text{אחרת} \end{cases}$$

ומכאן שהשורה ה-s של $E\cdot A$ היא:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}[E]_{sk}\cdot R_k &= \sum_{k=1}^{s-1}[E]_{sk}\cdot R_k + [E]_{ss}\cdot R_s + \sum_{k=s+1}^{t-1}[E]_{sk}\cdot R_k + [E]_{st}\cdot R_t + \sum_{k=t+1}^{m}[E]_{sk}\cdot R_k \\ &= \sum_{k=1}^{s-1}0\cdot R_k + 0\cdot R_s + \sum_{k=s+1}^{t-1}0\cdot R_k + 1\cdot R_t + \sum_{k=t+1}^{m}0\cdot R_k = R_t\end{aligned}$$

והשורה ה-t של $E\cdot A$ היא:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}[E]_{tk}\cdot R_k &= \sum_{k=1}^{s-1}[E]_{tk}\cdot R_k + [E]_{ts}\cdot R_s + \sum_{k=s+1}^{t-1}[E]_{tk}\cdot R_k + [E]_{tt}\cdot R_t + \sum_{k=t+1}^{m}[E]_{tk}\cdot R_k \\ &= \sum_{k=1}^{s-1}0\cdot R_k + 1\cdot R_s + \sum_{k=s+1}^{t-1}0\cdot R_k + 0\cdot R_t + \sum_{k=t+1}^{m}0\cdot R_k = R_s\end{aligned}$$

ולכל $m \geq i \in \mathbb{N}$ כך ש-$i \neq s,t$ השורה ה-i של $E\cdot A$ היא:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}[E]_{ik}\cdot R_k &= \sum_{k=1}^{i-1}[E]_{ik}\cdot R_k + [E]_{ii}\cdot R_i + \sum_{k=i+1}^{m}[E]_{ik}\cdot R_k \\ &= \sum_{k=1}^{i-1}0\cdot R_k + 1\cdot R_i + \sum_{k=i+1}^{m}0\cdot R_k = R_i\end{aligned}$$

ולכן $E\cdot A = \varepsilon(A)$.

2. אם ε היא הכפלת השורה ה-s ($m \geq s \in \mathbb{N}$) בסקלר $0 \neq c \in \mathbb{F}$ אז מתקיים (לכל $m \geq i,k \in \mathbb{N}$):

$$[E]_{ik} = \begin{cases} c & (i,k)=(s,s) \\ \delta_{ik} & \text{אחרת} \end{cases}$$

ומכאן שהשורה ה-s של $E \cdot A$ היא:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}[E]_{sk}\cdot R_k &= \sum_{k=1}^{s-1}[E]_{sk}\cdot R_k + [E]_{ss}\cdot R_s + \sum_{k=s+1}^{m}[E]_{sk}\cdot R_k\\ &= \sum_{k=1}^{s-1}0\cdot R_k + c\cdot R_s + \sum_{k=s+1}^{m}0\cdot R_k = c\cdot R_s\end{aligned}$$

ולכל $m \geq i \in \mathbb{N}$ כך ש-$s \neq i$ השורה ה-i של $E \cdot A$ היא:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}[E]_{ik}\cdot R_k &= \sum_{k=1}^{i-1}[E]_{ik}\cdot R_k + [E]_{ii}\cdot R_i + \sum_{k=i+1}^{m}[E]_{ik}\cdot R_k\\ &= \sum_{k=1}^{i-1}0\cdot R_k + 1\cdot R_i + \sum_{k=i+1}^{m}0\cdot R_k = R_i\end{aligned}$$

ולכן $E \cdot A = \varepsilon(A)$.

3. אם ε היא הוספת כפולה של שורה s (בסקלר $c \in \mathbb{F}$) לשורה t ($s, t \in \mathbb{F} \geq m$ ו-$t \neq s$) אז:

$$[E]_{ik} = \begin{cases} c & (i,k) = (t,s) \\ \delta_{ik} & \text{אחרת} \end{cases}$$

ומכאן שהשורה ה-t של $E \cdot A$ היא:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}[E]_{tk}\cdot R_k &= \sum_{k=1}^{s-1}[E]_{tk}\cdot R_k + [E]_{ts}\cdot R_s + \sum_{k=s+1}^{t-1}[E]_{tk}\cdot R_k + [E]_{tt}\cdot R_t + \sum_{k=t+1}^{m}[E]_{tk}\cdot R_k\\ &= \sum_{k=1}^{s-1}0\cdot R_k + c\cdot R_s + \sum_{k=s+1}^{t-1}0\cdot R_k + 1\cdot R_t + \sum_{k=t+1}^{m}0\cdot R_k = R_t + c\cdot R_s\end{aligned}$$

ולכל $m \geq i \in \mathbb{N}$ כך ש-$t \neq i$ השורה ה-i של $E \cdot A$ היא:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}[E]_{ik}\cdot R_k &= \sum_{k=1}^{i-1}[E]_{ik}\cdot R_k + [E]_{ii}\cdot R_i + \sum_{k=i+1}^{m}[E]_{ik}\cdot R_k\\ &= \sum_{k=1}^{i-1}0\cdot R_k + 1\cdot R_i + \sum_{k=i+1}^{m}0\cdot R_k = R_i\end{aligned}$$

ולכן $E \cdot A = \varepsilon(A)$.

■

מסקנה 3.11. תהיינה $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ שתי מטריצות כך ש-$A \sim B$, קיימת מטריצה $P \in M_m(\mathbb{F})$ המהווה מכפלת מטריצות אלמנטריות המקיימת $P \cdot A = B$.

מסקנה 3.12. מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ היא הפיכה אם"ם $A \sim I_n$.

משפט 3.13. תהא $P \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה ותהיינה $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ פעולות שורה אלמנטריות המובילות מ-P ל-I_n, כלומר $\varepsilon_r(\varepsilon_{r-1}(\ldots\varepsilon_2(\varepsilon_1(P)))) = I_n$.
תהיינה $E_1, E_2, \ldots, E_r \in M_n(\mathbb{F})$ המטריצות האלמנטריות המתאימות ל-$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ (בהתאמה), א"כ מתקיים $E_r \cdot E_{r-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot P = I_n$,
ולכן $P^{-1} = E_r \cdot E_{r-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1$ ומכאן שגם $P = (E_1)^{-1} \cdot (E_2)^{-1} \cdot \ldots \cdot (E_r)^{-1}$.

♣ בצורה זו אלגוריתם הדירוג נותן לנו דרך למצוא את המטריצה ההופכית של מטריצה נתונה.

מסקנה 3.14. מטריצה ריבועית היא מטריצה הפיכה אס"ם היא ניתנת להצגה כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

טענה 3.15. תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$, אם לממ"ל $A \cdot x = \vec{0}$ יש פתרון יחיד אז A הפיכה.

הוכחה. נניח שלממ"ל $A \cdot x = \vec{0}$ יש פתרון יחיד, ותהא $R \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה מדורגת מצומצמת כך ש-$A \sim R$.
אם ל-R יש פחות מ-n איברים מובילים אז יש בממ"ל משתנה חופשי, ולכן קיים $\vec{0} \neq v \in \mathbb{F}^n$ כך ש-$A \cdot v = \vec{0}$[10], ומכאן שלממ"ל $A \cdot x = \vec{0}$ יש יותר מפתרון אחד (גם $\vec{0}$ הוא פתרון).
א"כ ל-R יש n איברים מובילים, כלומר $R = I_n$ וע"פ המסקנה האחרונה (3.12) A הפיכה. ■

מסקנה 3.16. תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$, ארבעת הפסוקים הבאים שקולים זה לזה.

1. A הפיכה.
2. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ יש לממ"ל $A \cdot x = b$ פתרון יחיד.
3. לממ"ל $A \cdot x = \vec{0}$ יש פתרון יחיד.
4. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ יש לממ"ל $A \cdot x = b$ פתרון.

הוכחה. כבר ראינו את השקילות בין שלושת הסעיפים הראשונים וסעיף 4 נובע מסעיף 2; א"כ נותר לנו להוכיח שסעיף 2 גורר את סעיף 1, נעשה זאת בשתי דרכים.
נניח שלכל $b \in \mathbb{F}^n$ יש לממ"ל $A \cdot x = b$ פתרון.

- דרך ראשונה
  יהיו $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{F}^n$ כך ש-$A \cdot v_i = e_i$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ (ע"פ ההנחה אכן קיימים וקטורים כאלה), ותהא $B \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש-v_i היא העמודה ה-i של B (לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$).
  מהגדרת כפל מטריצות נובע שמתקיים $A \cdot B = I_n$ ולכן ע"פ מסקנה 2.8 A הפיכה ו-$A^{-1} = B$.

- דרך שנייה
  תהא $R \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה מדורגת מצומצמת כך ש-$A \sim R$ ותהא $P \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה כך ש-$P \cdot A = R$.
  אם A אינה הפיכה אז יש ב-R שורת אפסים ולכן קיים $y \in \mathbb{F}^n$ כך שלא קיים פתרון לממ"ל $R \cdot x = y$, ומכאן שלא קיים פתרון לממ"ל $A \cdot x = P^{-1} \cdot y$ בסתירה להנחה[11], לכן נובע מההנחה ש-A הפיכה.

■

[10] נגדיר את הקואורדינטה המתאימה למשתנה החופשי בתור סקלר שונה מ-0 (נוכל לעשות זאת כי מדובר במשתנה חופשי) ועדיין יהיו סקלרים המתאימים לקואורדינטות האחרות.

[11] לכל $x \in \mathbb{F}^n$ כך ש-$A \cdot x = P^{-1} \cdot y$ מתקיים $R \cdot x = P \cdot A \cdot x = P \cdot P^{-1} \cdot y = I_n \cdot y = y$.

4 המטריצה המשוחלפת, מטריצות משולשיות ומטריצות אלכסוניות

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $m,n\in\mathbb{N}$.

4.1 המטריצה המשוחלפת

טענה 4.1. יהי $l\in\mathbb{N}$ ותהיינה $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ו-$B\in M_{l\times m}\left(\mathbb{F}\right)$, מתקיים $\left(B\cdot A\right)^{t}=A^{t}\cdot B^{t}$.

לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ ולכל $l\geq j\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\left[A^{t}\cdot B^{t}\right]_{ij} & =\sum_{k=1}^{m}\left[A^{t}\right]_{ik}\cdot\left[B^{t}\right]_{kj}=\sum_{k=1}^{m}\left[A\right]_{ki}\cdot\left[B\right]_{jk}\\ & =\sum_{k=1}^{m}\left[B\right]_{jk}\cdot\left[A\right]_{ki}=\left[B\cdot A\right]_{ji}=\left[\left(B\cdot A\right)^{t}\right]_{ij}\end{aligned}$$

ולכן $\left(B\cdot A\right)^{t}=A^{t}\cdot B^{t}$.

טענה 4.2. תהא $P\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה הפיכה, P^{t} הפיכה גם היא ומתקיים $\left(P^{t}\right)^{-1}=\left(P^{-1}\right)^{t}$.

הוכחה. מהטענה הקודמת (4.1) נובע כי $P^{t}\cdot\left(P^{-1}\right)^{t}=\left(P^{-1}\cdot P\right)^{t}=\left(I_{n}\right)^{t}=I_{n}$ ומכאן שלפי מסקנה 2.8 P^{t} הפיכה ו-$\left(P^{t}\right)^{-1}=\left(P^{-1}\right)^{t}$. ■

מסקנה 4.3. תהא $P\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה הפיכה, אם P סימטרית אז גם P^{-1} סימטרית ואם P אנטי-סימטרית אז גם P^{-1} אנטי-סימטרית.

טענה 4.4. ניתן להציג כל מטריצה ריבועית כסכום של מטריצה סימטרית ומטריצה אנטי-סימטרית.

הוכחה. תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה ריבועית, כדי שמטריצות $B,C\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ כך ש-B סימטרית ו-C אנטי-סימטרית יקיימו את המבוקש צריכים להתקיים השוויונות הבאים (לכל $n\geq i,j\in\mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}\left[A\right]_{ij} & =\left[B+C\right]_{ij}=\left[B\right]_{ij}+\left[C\right]_{ij}\\ \left[A\right]_{ji} & =\left[B+C\right]_{ji}=\left[B\right]_{ji}+\left[C\right]_{ji}=\left[B\right]_{ij}-\left[C\right]_{ij}\end{aligned}$$

ומכאן שגם:

$$\begin{aligned}\left[A\right]_{ij}+\left[A\right]_{ji} & =2\cdot\left[B\right]_{ij}\\ \left[A\right]_{ij}-\left[A\right]_{ji} & =2\cdot\left[C\right]_{ij}\end{aligned}$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\left[B\right]_{ij} & =\frac{\left[A\right]_{ij}+\left[A\right]_{ji}}{2}\\ \left[C\right]_{ij} & =\frac{\left[A\right]_{ij}-\left[A\right]_{ji}}{2}\end{aligned}$$

כל הגרירות הללו עובדות גם בכיוון ההפוך (אלו שקילויות) ולכן בכך סיימנו להוכיח את הטענה. ■

4.2 מטריצות משולשיות ומטריצות אלכסוניות

טענה 4.5. מטריצה משולשית היא הפיכה אס"ם כל האיברים על האלכסון הראשי שלה שונים מאפס.

טענה 4.6. המכפלה של מטריצות משולשיות עליונות היא מטריצה משולשית תחתונה, וכמו כן המכפלה של מטריצות משולשיות תחתונות היא משולשית תחתונה.

הוכחה. תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{F})$.

- נניח ש-A ו-B הן מטריצות משולשיות עליונות, מכאן שלכל $n\geq i,j\in\mathbb{N}$ כך ש-$i>j$ מתקיים:

$$[A\cdot B]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}\cdot[B]_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}[A]_{ik}\cdot[B]_{kj}+\sum_{k=i}^{n}[A]_{ik}\cdot[B]_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}0\cdot[B]_{kj}+\sum_{k=i}^{n}[A]_{ik}\cdot 0=0$$

ולכן $A\cdot B$ משולשית עליונה ע"פ ההגדרה.

- נניח ש-A ו-B הן מטריצות משולשיות תחתונות, מכאן ש-A^t ו-B^t הן מטריצות משולשיות עליונות ולכן מהסעיף הקודם נובע ש-$B^t\cdot A^t$ היא מטריצה משולשית עליונה וממילא $\left(B^t\cdot A^t\right)^t$ היא מטריצה משולשית תחתונה, כעת נשים לב לכך שע"פ טענה 4.1 מתקיים $A\cdot B=\left(B^t\right)^t\cdot\left(A^t\right)^t=\left(B^t\cdot A^t\right)^t$ ולפיכך $A\cdot B$ היא מטריצה משולשית תחתונה.

■

5 מרחב הקואורדינטות והדרגה של מטריצה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $m,n\in\mathbb{N}$.

5.1 מרחב הקואורדינטות

טענה 5.1. יהיו $v_1,v_2,...,v_n\in\mathbb{F}^m$ ותהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ כך שהעמודה ה-j שלה היא v_j (לכל $n\geq j\in\mathbb{N}$), מתקיים:

$$\text{span}\left(\{v_1,...,v_n\}\right)=\{A\cdot x\mid x\in\mathbb{F}^n\}=\{b\in\mathbb{F}^m\mid\exists x\in\mathbb{F}^n:A\cdot x=b\}$$

♣ כלומר $A\cdot x$ הוא צר"ל של עמודות A ולכן ניתן להציג את פרוש העמודות של A כקבוצת כל הווקטורים מהצורה $A\cdot x$.

מסקנה 5.2. יהיו $v_1,v_2,...,v_n\in\mathbb{F}^n$ ותהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ כך שהעמודה ה-j של A היא v_j (לכל $n\geq j\in\mathbb{N}$), הסדרה $(v_1,v_2,...,v_n)$ היא בסיס אס"ם A הפיכה.

משפט 5.3. תכונות של וקטור הקואורדינטות

יהי V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ כך ש-$\dim V=n$.

- לכל $v\in\mathbb{F}^n$ מתקיים $[v]_E=v$ (E הוא הבסיס הסטנדרטי).
- לכל בסיס $\mathcal{B}:=(v_1,...,v_n)$ של V מתקיים $[v_j]_{\mathcal{B}}=e_j$ (לכל $n\geq j\in\mathbb{N}$).
- יהיו $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ בסיסים סדורים של V, אם $\mathcal{C}$ מתקבל מ-$\mathcal{B}$ ע"י שינוי סדר הווקטורים אז לכל $v\in V$ $[v]_{\mathcal{C}}$ מתקבל מ-$[v]_{\mathcal{B}}$ ע"י שינוי סדר הקואורדינטות המתאים.

טענה 5.4. יהא $\mathcal{B}:=(v_1,...,v_n)$ בסיס של $\mathbb{F}^n$, תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ כך שהעמודה ה-j שלה היא v_j לכל $n\geq j\in\mathbb{N}$; $[b]_{\mathcal{B}}$ הוא הפתרון היחיד של הממ"ל $A\cdot x=b$ (לכל $b\in\mathbb{F}^n$).

טענה 5.5. יהיו $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $b \in \mathbb{F}^m$ ו-$v \in \mathbb{F}^n$ כך ש-$A\cdot v = b$ ויהי $U := \left\{x \in \mathbb{F}^n \mid A\cdot x = \overrightarrow{0}\right\}$; מתקיים:
$$\{v\} + U = \{x \in \mathbb{F}^n \mid A\cdot x = b\}$$

הוכחה. לכל $x \in \mathbb{F}^n$ מתקיים:
$$x \in \{v\} + U \iff x - v \in U \iff A\cdot(x-v) = \vec{0} \iff A\cdot x - A\cdot v = \vec{0} \iff A\cdot x - b = \vec{0} \iff A\cdot x = b$$

כלומר $\{v\} + U \subseteq \{x \in \mathbb{F}^n \mid A\cdot x = b\}$ ו-$\{v\} + U \supseteq \{x \in \mathbb{F}^n \mid A\cdot x = b\}$ וממילא $\{v\} + U \subseteq \{x \in \mathbb{F}^n \mid A\cdot x = b\}$. ■

מסקנה 5.6. אוסף הפתרונות של ממ״ל ב-n נעלמים מעל $\mathbb{F}$ הוא ישרייה ב-$\mathbb{F}^n$ (אם אינו ריק), ואם הוא מכיל את וקטור האפס אז הוא גם תמ״ו של $\mathbb{F}^n$.

מסקנה 5.7. אוסף הפתרונות של ממ״ל הוא תמ״ו אס״ם היא הומוגנית.

טענה 5.8. תהיינה $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ שקולות שורה, פרוש השורות של A שווה לפרוש השורות של B.

הוכחה. נוכיח את הטענה בכך שנראה שפש״א אינן משנות את פרוש השורות של מטריצה, א״כ תהא $\varepsilon : M_{m\times n}(\mathbb{F}) \to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ פעולת שורה אלמנטרית.

אם ε היא החלפת שורות או ש-ε היא כפל שורה בסקלר שונה מ-0 הטענה טריוויאלית, ואם ε היא הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת אז ודאי שפרוש השורות של $\varepsilon(A)$ מוכל בפרוש השורות של A אך מאותה סיבה פרוש השורות של A מוכל בפרוש השורות של $\varepsilon(A)$ (מפני ש-$A = \varepsilon^{-1}(\varepsilon(A))$ ו-ε^{-1} גם היא הוספת כפולה של שורה אחת לאחרת) ולכן הם שווים. ■

טענה 5.9. תהא $R \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה מדורגת-מצומצמת, סדרת השורות של R שבהן איבר מוביל היא בסיס של פרוש השורות של R.

♣ בהינתן קבוצת וקטורים $S \subseteq \mathbb{F}^n$ נוכל למצוא בסיס **נוח** ל-$\text{span}S$ ע״י שימת הווקטורים בשורות מטריצה ודירוג המטריצה, השורות שבהן יש איבר מוביל במטריצה המדורגת-מצומצמת הן בסיס של $\text{span}S$. בסיס זה נוח מאד לעבודה משום שלכל וקטור בו יש קואורדינטה אחת שבה ניצב 1 כשביתר הווקטורים מופיע 0 באותה קואורדינטה (זו גם הסיבה לכך שקבוצה זו היא אכן בסיס).

טענה 5.10. תהיינה $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ שקולות שורה, ויהיו $v_1, v_2, \ldots, v_n, w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{F}^m$ כך ש-v_j ו-w_j מהווים את העמודה ה-j של A ו-B בהתאמה (לכל $n \geq j \in \mathbb{N}$).

- תהא $S \subseteq \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ תת-קבוצה הפורשת את פרוש העמודות של A ונסמן $T := \{w_j \mid v_j \in S,\ n \geq j \in \mathbb{N}\}$, T פורשת את פרוש העמודות של B.
- תהא $S' \subseteq \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ תת-קבוצה בת״ל ונסמן $T' := \{w_j \mid v_j \in S',\ n \geq j \in \mathbb{N}\}$, גם T' בת״ל.

♣ מכאן שעבור תת-קבוצה של עמודות A המהווה בסיס של פרוש העמודות שלה, הקבוצה המקבילה בעמודות B היא בסיס של פרוש העמודות של B.

הוכחה. תהא $P \in M_m(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה כך ש-$P \cdot A = B$.

- יהי $v \in V$ וקטור בפרוש העמודות של B, לכל $x \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $B \cdot x = v \iff A \cdot x = P^{-1} \cdot v$; א״כ יהי $x \in \mathbb{F}^n$ כך ש-$A \cdot x = P^{-1}$ ו-$x_j = 0$ לכל $n \geq j \in \mathbb{N}$ כך ש-$v_j \notin S$ (אכן קיים x כזה מפני ש-S פורשת את פרוש העמודות של A) ומכאן ש-$B \cdot x = v$, כלומר קיים צר״ל של T השווה ל-v שהרי $x_j = 0$ לכל $n \geq j \in \mathbb{N}$ כך ש-$w_j \notin T$.
- לכל $x \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $B \cdot x = \vec{0} \iff A \cdot x = P^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0}$, מכאן שלכל $x \in \mathbb{F}^n$ כך ש-$x_j = 0$ לכל $n \geq j \in \mathbb{N}$ כך ש-$w_j \notin T'$ מתקיים גם $x_j = 0$ לכל $n \geq j \in \mathbb{N}$ כך ש-$v_j \in S'$ (כלומר לכל $n \geq j \in \mathbb{N}$ כך ש-$w_j \in T'$), משום שאחרת נקבל צר״ל מתאפס לא טריוויאלי של S'.

■

טענה 5.11. תהא $R \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ מטריצה מדורגת מצומצמת, סדרת העמודות של R שבהן איבר מוביל היא בסיס של פרוש העמודות של R.

♣ בהינתן קבוצת וקטורים $S \subseteq \mathbb{F}^m$ נוכל למצוא תת-קבוצה $\mathcal{B} \subseteq S$ המהווה בסיס של $\text{span}S$ ע״י שימת הווקטורים בעמודות מטריצה[12], דירוג והגדרת $\mathcal{B}$ להיות קבוצת הווקטורים ב-S הנמצאים באינדקסים שבהם יש איבר מוביל במטריצה המדורגת-מצומצמת.

5.2 ארגז כלים

♣ נשים לב לכך שתמ״ו יכול להינתן באחת מארבע הדרכים הבאות:

- פרוש של קבוצת וקטורים (או של סדרה כזו).
- אוסף הפתרונות של ממ״ל הומוגנית.
- חיתוך של תתי-מרחבים נתונים.
- סכום של תתי-מרחבים נתונים.

♣ לפני שנתחיל לפרט את הכלים העומדים לרשותנו נעבור על הבעיות שאותן הם נועדו לפתור, אנו עשויים להידרש לאחת מארבע הפעולות הבאות:

1. המרת הצגה של תמ״ו הנתון כפרוש של קבוצת וקטורים להצגה כאוסף הפתרונות של ממ״ל הומוגנית.
2. מציאת בסיס של תמ״ו הנתון באחת משתי הדרכים הנ״ל[13].
3. מציאת בסיס של חיתוך מרחבים וקטוריים.
4. מציאת בסיס של סכום מרחבים וקטוריים.

כעת נראה כיצד מבצעים כל אחת מארבע הפעולות הללו תוך שימוש במשפטים שלמדנו.

1. יהי $W \subseteq \mathbb{F}^n$ תמ״ו, נרצה למצוא בסיס ל-W.

(א) אם W נתון כאוסף הפתרונות של ממ״ל הומוגנית אז הווקטורים בהצגה פרמטרית של אוסף הפתרונות הם בסיס של W.

[12] בכך סידרנו את איברי S בסדרה.

[13] ובכלל זה המרת הצגה של תמ״ו הנתון כאוסף הפתרונות של ממ״ל הומוגנית להצגה כפרוש של קבוצת וקטורים.

(ב) אם W נתון כפרוש של קבוצת וקטורים$\mathbb{F}^n$ נוכל למצוא בסיס של W בשתי דרכים:

- אם אנחנו מחפשים בסיס **נוח לחישובים**:

נשים את הווקטורים בשורות מטריצה, נדרג אותה וניקח את **השורות במטריצה המדורגת-מצומצמת** שבהן יש איבר מוביל (טענות 5.8 ו-5.9).

- אם אנחנו מחפשים בסיס שהוא **תת-קבוצה של הקבוצה הנתונה**:

נשים את הווקטורים בעמודות מטריצה, נדרג אותה וניקח את **העמודות במטריצה המקורית** שעבורן קיים איבר מוביל באותו אינדקס במטריצה המדורגת-מצומצמת (טענות 5.10 ו-5.11).

♣ כשפותרים שאלה בתרגיל/מבחן כדאי לקרוא את הסעיפים הבאים בשאלה כדי לבחור את הדרך הטובה ביותר להמשך השאלה.

2. יהי $W\subseteq\mathbb{F}^n$ תמ״ו, נרצה למצוא מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ כך ש-W הוא אוסף הפתרונות של הממ״ל ההומוגנית $A\cdot x=\vec{0}$.
נמצא בסיס נוח לחישובים ע״פ סעיף 1ב, בסיס כזה ״מייצר״ הצגה פרמטרית של W, מההצגה הפרמטרית נפעל כפי שפעלנו בפתרון ממ״ל רק בכיוון ההפוך.

3. יהיו $W,U\subseteq\mathbb{F}^n$ תתי-מרחבים, נרצה למצוא בסיס ל-$W\cap U$.

(א) אם W ו-U נתונים שניהם כאוספי פתרונות של מערכות משוואות ליניאריות אז נאחד את שתי המערכות למערכת אחת[14] ונמשיך ע״פ סעיף 1א.

(ב) אם W נתון כפרוש של קבוצת וקטורים ($W=\text{span}\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$) ואילו U נתון ע״י ממ״ל הומוגנית ($U=\left\{x\in\mathbb{F}^n\mid A\cdot x=\vec{0}\right\}$) נוכל למצוא בסיס לחיתוך בשתי דרכים:

- נמצא מטריצה $B\in M_{l\times n}(\mathbb{F})$ כך ש-W הוא אוסף הפתרונות של הממ״ל ההומוגנית $B\cdot x=\vec{0}$ (ע״פ סעיף 2) ונפעל ע״פ הסעיף הקודם (3א).
- נגדיר מטריצה $B\in M_{n\times k}(\mathbb{F})$ שהעמודה ה-j שלה היא v_j (לכל $k\geq j\in\mathbb{N}$), הביטוי $B\cdot t$ ($t\in\mathbb{F}^k$) הוא צר״ל כלשהו של $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ ולכן ניתן להסיק מאוסף הפתרונות של הממ״ל $A\cdot B\cdot t=\vec{0}$ את קבוצת הצר״ל של $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ ששייכים ל-U כלומר את $U\cap W$; לאחר שנסיק זאת תהיה בידינו קבוצת וקטורים הפורשת את $W\cap U$, כעת ניתן למצוא בסיס לפרוש זה ע״י סעיף 1ב.

(ג) אם U ו-W נתונים שניהם כפרוש של קבוצת וקטורים אז נציג אחד מהם כאוסף הפתרונות של ממ״ל הומוגנית ונפעל כבסעיף הקודם[15] (3ב).

4. יהיו $W,U\subseteq\mathbb{F}^n$ תתי-מרחבים, נרצה למצוא בסיס ל-$W+U$.

(א) אם U ו-W נתונים שניהם כפרוש של קבוצת וקטורים אז נאחד את הקבוצות ונמצא בסיס לפרוש של האיחוד ע״פ סעיף 1ב.

(ב) אם U ו/או W נתונים כאוסף פתרונות של ממ״ל הומוגנית אז נמצא לכל אחד מהם קבוצה פורשת ע״י סעיף 1א ואז נפעל כבסעיף הקודם (4א).

[14] במטריצות זה אומר שנבנה מטריצה חדשה ששורותיה הן כל השורות של שתי המטריצות המקוריות (לא משנה באיזה סדר).
[15] כמובן, אחת האפשרויות בסעיף הקודם אומרת להציג גם את התמ״ו השני כאוסף פתרונות של ממ״ל הומוגנית.
וכאן אני נזכר בבדיחה המתמטית המוכרת אודות הרדוקציה המתמטית:
מתמטיקאי ופיזיקאי נשאלו שניהם ״כיצד ניתן להכין תה בחדר שיש בו כוס, קומקום חשמלי מחובר לשקע, תיון וברז?״ ענו שניהם ״יש למלא את הקומקום במים מן הברז, להרתיח אותם, לשים את התיון בתוך הכוס ולמזוג אליה את המים החמים.״
לאחר מכן ניתנה להם אותה הבעיה בשינוי קל - הקומקום כבר מלא במים, ענה הפיזיקאי ״יש להרתיח את המים בקומקום, לשים את התיון בתוך הכוס ולמזוג אליה את המים החמים.״ ואילו המתמטיקאי ענה ״יש לשפוך את המים מן הקומקום, כעת חזרנו לבעיה הקודמת ואותה אנחנו כבר יודעים לפתור...״

5.3 דרגה של מטריצה

טענה 5.12. דרגת השורות שווה לדרגת העמודות בכל מטריצה.

הוכחה. תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה ותהא $R\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה מדורגת מצומצמת כך ש-$A\sim R$.
ראינו שהשורות שבהן יש איבר מוביל ב-R הן בסיס של פרוש השורות של A (טענות 5.8 ו-5.9), וכמו כן ראינו שמספר העמודות שבהן יש איבר מוביל ב-R הוא מספר העמודות ב-A המהוות בסיס של פרוש העמודות של A; אבל מספר השורות שבהן יש איבר מוביל ב-R שווה למספר העמודות שבהן יש איבר מוביל ב-R ולכן הממד של פרוש השורות של A שווה לזה של פרוש העמודות של A, כלומר דרגת השורות של A שווה לדרגת העמודות שלה. ■

טענה 5.13. תהיינה $A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצות שקולות שורה, מתקיים $\text{rk}A=\text{rk}B$.

♣ טענה זו מאפשרת לנו למצוא את הדרגה של מטריצה נתונה ע״י דירוג המטריצה וספירת האיברים המובילים במטריצה המדורגת-מצומצמת.

מסקנה 5.14. תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה ריבועית, A הפיכה אס״ם $\text{rk}A=n$.

מסקנה 5.15. תהא $P\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה הפיכה, סדרת העמודות של P היא בסיס של $\mathbb{F}^{n}$ וכמוה גם סדרת השורות של P היא בסיס של $\mathbb{F}^{n}$.

טענה 5.16. יהי $l\in\mathbb{N}$ ותהיינה $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ו-$B\in M_{l\times m}\left(\mathbb{F}\right)$, מתקיים $\text{rk}\left(B\cdot A\right)\leq\min\left\{ \text{rk}A,\text{rk}B\right\}$.

הוכחה. מהגדרת כפל מטריצות כל העמודות של $B\cdot A$ הן צר״ל של סדרת העמודות של B, וכל השורות של $B\cdot A$ הן צר״ל של סדרת השורות של A; מכאן שפרוש העמודות של $B\cdot A$ מוכל בפרוש העמודות של B ולכן $\text{rk}\left(B\cdot A\right)\leq\text{rk}B$, וכמו כן פרוש השורות של $B\cdot A$ מוכל בפרוש השורות של A ולכן $\text{rk}\left(B\cdot A\right)\leq\text{rk}A$. ■

מסקנה 5.17. תהיינה $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ו-$B\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right)$, אם $n>m$ אז $B\cdot A\neq I_{n}$.

מסקנה 5.18. תהיינה $A,B\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$, אם A אינה הפיכה אז גם $A\cdot B$ ו-$B\cdot A$ אינן הפיכות.

משפט 5.19. תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה ותהיינה $P\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ ו-$Q\in M_{m}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצות הפיכות, מתקיים:

$$\text{rk}\left(A\cdot P\right)=\text{rk}A=\text{rk}\left(Q\cdot A\right)$$

כלומר כפל במטריצה הפיכה אינו משנה את דרגת המטריצה.

הוכחה. מהמסקנה הקודמת (5.17) נובע כי $\text{rk}\left(A\cdot P\right)\leq\text{rk}A$ וגם $\text{rk}\left(A\cdot P\right)\geq\text{rk}\left(A\cdot P\cdot P^{-1}\right)=\text{rk}\left(A\cdot I_{n}\right)=(A)$, וממילא $\text{rk}A=\text{rk}\left(P\cdot A\right)$; באותה צורה ניתן להוכיח ש-$\text{rk}A=\text{rk}\left(Q\cdot A\right)$. ■

משפט 5.20. הדרגה של מטריצה שווה לסדר הגדול ביותר של תת-מטריצה הפיכה שלה.

הוכחה. תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ונסמן ב-k את הסדר הגדול ביותר של תת-מטריצה הפיכה של A
תהא $P\in M_{k}\left(\mathbb{F}\right)$ תת-מטריצה של A כך ש-P הפיכה, תהא $B\in M_{k\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ תת-מטריצה של A כך ש-P היא תת-מטריצה של B, כלומר B היא P לאחר שהוספנו לה את העמודות החסרות לה מ-A מבלי להוסיף את השורות החסרות. הוספת קואורדינטות אינה יכולה ליצור תלות ליניארית שלא הייתה כבר במקור ומכיוון ש-P הפיכה גם השורות של B בת״ל; כלומר לקבוצת השורות של A יש תת-קבוצה בת״ל בגודל של P ולכן $\text{rk}A\geq k$.
מצד שני קיימת תת-מטריצה הפיכה בגודל של דרגת המטריצה: תהא $C\in M_{l\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ תת-מטריצה של A כאשר $l:=\text{rk}A$ והשורות של C הן בסיס של פרוש השורות של A;
תהא $Q\in M_{l}\left(\mathbb{F}\right)$ תת-מטריצה של C כך שעמודות Q הן בסיס של פרוש השורות של C (נמצא את Q ע״י דירוג C וטענות 5.10 ו-5.11); Q היא מטריצה הפיכה מהגדרתה וכמו כן מהגדרתה היא תת-מטריצה של A, א״כ יש ל-A תת-מטריצה בגודל של דרגתה ולכן ע״פ הגדרת P מתקיים $\text{rk}A=l\leq k$ וממילא $\text{rk}A=k$. ■