פונקציות - הוכחות נבחרות

חשבון אינפיניטסימלי (1) - 80131

מרצה: רז קופרמן

מתרגלים: אור יער ודניאל רוזנבלט

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

תוכן העניינים

באינפי' 2[1] השלמנו כמה נושאים[2] שלא למדנו בסמסטר שלפניו.
למרות זאת הבאתי אותם כאן מפני שהם שייכים לחומר של אינפי' 1.

* * *

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

[1] שלימד יורם לסט בסמסטר א' תשפ"ג (80132).
[2] הנושאים שהושלמו הם: אסימפטוטות, תנאי קושי לגבולות (במובן הצר ובמובן הרחב) ורציפות במידה שווה.

1 התחלה

♣ במתמטיקה המודרנית פונקציה היא מושג מתורת הקבוצות וככזו ישנם מושגים ומשפטים רבים בנושא שאינם קשורים דווקא למספרים הממשיים (ראו בקובץ "תורת הקבוצות הנאיבית"), בקבצים אלו נעסוק אך ורק בהגדרות ובמשפטים הקשורות למספרים הממשיים.

♣ בכל הסיכומים של קורסי אינפי' נדבר אך ורק על פונקציות שהתחום והטווח שלה הם תתי-קבוצות של $\mathbb{R}$ (אלא אם נאמר אחרת במפורש), כמעט תמיד יהיה מדובר בפונקציה שהתחום שלה הוא מקטע[3] (או איחוד של מקטעים) ועל הקורא תוטל המשימה להבין מן ההקשר מתי מדובר גם בפונקציות שהתחום שלהן אינו בהכרח מקטע.

♣ ישנה הסכמה מקובלת למחצה שאם נתון רק כלל ההתאמה של פונקציה (ללא התחום ו/או הטווח) אז הטווח הוא $\mathbb{R}$ והתחום הוא קבוצת כל הנקודות ב-$\mathbb{R}$ שעבורן כלל ההתאמה מוגדר, מוסכמה זו נקראת "מוסכמת התחום המרבי" ונתקלנו בה כבר בתיכון; למרות הנוחות שבמוסכמה זו אני אשתדל שלא להסתמך עליה ולציין בכל מקום במפורש את התחום והטווח.

1.1 פונקציות זוגיות ואי-זוגיות

תהיינה $f,g:D\to\mathbb{R}$ שתי פונקציות.

טענה 1.1.

- אם f ו-g זוגיות אז גם $f+g$ זוגית.
- אם f ו-g אי-זוגיות אז גם $f+g$ אי-זוגית.

טענה 1.2.

- אם f ו-g זוגיות אז $f\cdot g$ זוגית.
- אם f ו-g אי-זוגיות אז $f\cdot g$ זוגית.
- אם f זוגית ו-g אי-זוגית אז $f\cdot g$ אי-זוגית.

♣ בפרט הכפלה בקבוע אינה משנה את הזוגיות/אי-זוגיות של פונקציה.

למה 1.3. נניח ש-$g\left(x\right)\neq 0$ לכל $x\in D$.

- אם g זוגית אז גם $\frac{1}{g}$ זוגית.
- אם g אי-זוגית אז גם $\frac{1}{g}$ אי-זוגית.

מסקנה 1.4.

- אם f ו-g זוגיות אז $\frac{f}{g}$ זוגית.
- אם f ו-g אי-זוגיות אז $\frac{f}{g}$ זוגית.
- אם f זוגית ו-g אי-זוגית אז $\frac{f}{g}$ אי-זוגית.

[3] תזכורת: מקטע הוא תת-קבוצה $I\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $a,b\in I$ מתקיים $(a,b)\subseteq I$.

טענה 1.5. תהיינה $h_1 : A \to B$ ו-$h_2 : B \to C$ פונקציות.

- נניח h_1 זוגית, אם h_2 זוגית או ש-h_2 אי-זוגית אז $h_2 \circ h_1$ זוגית.
- נניח ש-h_2 זוגית, אם h_1 זוגית או ש-h_1 אי-זוגית אז $h_2 \circ h_1$ זוגית.
- אם h_1 ו-h_2 אי-זוגיות אז גם $h_2 \circ h_1$ אי-זוגית.

טענה 1.6. תהיינה $h_1, h_2 : D \to \mathbb{R}$ שתי פונקציות המוגדרות ע"י (לכל $x \in D$):

$$h_1(x) = f(x) - f(-x)$$
$$h_2(x) = f(x) + f(-x)$$

h_1 אי-זוגית ו-h_2 זוגית.

טענה 1.7. קיים זוג פונקציות יחיד $f_{\text{Odd}}, f_{\text{Even}} : D \to \mathbb{R}$ כך ש-f_{Odd} אי-זוגית ו-f_{Even} זוגית ובנוסף מתקיים $f = f_{\text{Odd}} + f_{\text{Even}}$.
פונקציות אלו הן הפונקציות המוגדרות ע"י (לכל $x \in D$):

$$f_{\text{Odd}}(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$
$$f_{\text{Even}}(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

הוכחה. נניח שקיים זוג פונקציות כנ"ל ותהיינה $f_{\text{Odd}}, f_{\text{Even}} : D \to \mathbb{R}$ כך ש-f_{Odd} אי-זוגית ו-f_{Even} זוגית ובנוסף מתקיים $f = f_{\text{Odd}} + f_{\text{Even}}$.
יהי $x \in D$, מהגדרת f_{Odd} ו-f_{Even} נובע שמתקיים:

$$f(x) = f_{\text{Odd}}(x) + f_{\text{Even}}(x)$$
$$f(-x) = f_{\text{Odd}}(-x) + f_{\text{Even}}(-x) = -f_{\text{Odd}}(x) + f_{\text{Even}}(x)$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = 2 \cdot f_{\text{Even}}(x)$$
$$\Rightarrow f_{\text{Even}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$\Rightarrow f_{\text{Odd}}(x) = f(x) - \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

x הנ"ל היה שרירותי ולכן הנ"ל נכון לכל $x \in D$ ומכאן שאם קיים זוג פונקציות כזה אז הוא מקיים בהכרח את כללי ההתאמה שלעיל ולכן הוא יחיד.
נגדיר את f_{Odd} ו-f_{Even} ע"פ כללי ההתאמה שלעיל[4], האי-זוגיות של f_{Odd} והזוגיות של f_{Even} נובעות ישירות מהטענה הקודמת (1.6), וכמובן שלכל $x \in D$ מתקיים:

$$f_{\text{Odd}}(x) + f_{\text{Even}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{f(x) + f(x)}{2} = f(x)$$

■

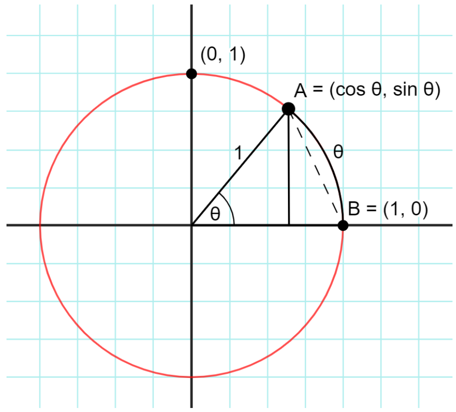
[4] כלומר כעת אנו מוותרים על ההנחה ש-f_{Odd} אי-זוגית ו-f_{Even} זוגית ובנוסף מתקיים $f = f_{\text{Odd}} + f_{\text{Even}}$.

1.2 טענות וזהויות טריגונומטריות

♣ לא נגדיר כאן את הפונקציות הטריגונומטריות ונסתמך על הגדרתן ע"פ מעגל היחידה כפי שלמדנו בתיכון כאשר את הזוויות נמדוד ברדיאנים.

טענה 1.8. לכל $\theta \in \mathbb{R}$ מתקיים $|\sin\theta| \leq 1$ וגם $|\cos\theta| \leq 1$.

טענה 1.9. לכל $\theta \in \mathbb{R}$ מתקיים $|\sin\theta| \leq |\theta|$.



הוכחה. תהא $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, כמובן שמתקיים $|\sin 0| = 0 \leq |0|$ ולכן נוכל להניח ש-$\theta \neq 0$.
בגלל שאנחנו עובדים ברדיאנים אורך הקשת של הזווית θ היא בדיוק $|\theta|$ ואורך זה גדול מאורך המיתר הנשען עליה, המיתר הזה הוא היתר במשולש ישר זווית שאורכי צלעותיו הם $|\sin\theta|$ ו-$1 - |\cos\theta|$ ומכאן שאורכו גדול מ-$|\sin\theta|$ וממילא $|\sin\theta| \leq |\theta|$.
עבור זוויות שערכן המוחלט גדול מ-$\frac{\pi}{2}$ הטענה טריוויאלית משום שלכל $\theta \in \mathbb{R}$ מתקיים $|\sin\theta| \leq 1 < \frac{\pi}{2}$. ■

טענה 1.10. לכל $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$ מתקיימות הזהויות הבאות:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta \qquad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \qquad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

צריך להוסיף הוכחות בקובץ נפרד עם ציורים.

טענה 1.11. sin היא פונקציה אי-זוגית ו-cos היא פונקציה זוגית.

2 גבול של פונקציה בנקודה

משפט 2.1. יחידות הגבול

לפונקציה f יש לכל היותר גבול אחד בנקודה $a\in\mathbb{R}$.

משפט 2.2. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה a, הגבול $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)$ קיים אם"ם הגבול $\lim\limits_{x\to 0}f\left(a+x\right)$ קיים ובמקרה זה מתקיים גם:

$$\lim_{x\to a}f\left(x\right)=\lim_{x\to 0}f\left(a+x\right)$$

2.1 אפיון היינה ותנאי קושי

משפט 2.3. אפיון היינה[5] לגבול של פונקציה בנקודה

תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת U של נקודה $a\in\mathbb{R}$ ויהי $L\in\mathbb{R}$.

מתקיים $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=L$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה ב-U מתקיים $\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=L$.

הוכחה. ■

- $\Leftarrow$

  תהא $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל-a שכל איבריה ב-U ונניח ש-$\lim_{x\to a}f\left(x\right)=L$.

  יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$, מההנחה נובע שקיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in B_{\delta}^{\circ}\left(a\right)$ מתקיים $\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$, תהא δ כנ"ל.

  מהגדרת $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ נובע שקיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים $x_n\in B_{\delta}\left(a\right)$, יהי N כנ"ל.

  כל איברי $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ נמצאים ב-U, בפרט לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $x_n\neq a$, מכאן שלכל $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים $x_n\in B_{\delta}^{\circ}\left(a\right)$, ומהגדרת δ נובע שלכל $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left|f\left(x_n\right)-L\right|<\varepsilon$.

  ε הנ"ל היה שרירותי ולכן לכל ε קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left|f\left(x_n\right)-L\right|<\varepsilon$, כלומר $\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=L$.

- $\Rightarrow$

  נניח שלכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה ב-U מתקיים $\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=L$.

  נניח בשלילה ש-L אינו גבול של f ב-a, כלומר קיים $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ כך שלכל $0<\delta\in\mathbb{R}$ קיים $x\in B_{\delta}^{\circ}\left(a\right)$ המקיים $\left|f\left(x\right)-L\right|\geq\varepsilon$, יהי ε כנ"ל.

  מכאן שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $x_n\in\mathbb{R}$ המקיים $0<\left|x_n-a\right|<\frac{1}{n}$ וגם $\left|f\left(x_n\right)-L\right|\geq\varepsilon$, תהא $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כנ"ל.

  ממשפט הכריך נובע ש-$\lim_{n\to\infty}x_n=a$ ומכאן שעבור n גדול דיו מתקיים $x_n\in U$ שהרי $x_n\neq a$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

  א"כ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שהסדרה $\left(x_n\right)_{n=N+1}^{\infty}$ אינה מקיימת את ההנחה, מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$\lim_{x\to a}f\left(x\right)=L$.

מסקנה 2.4. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת U של נקודה $a\in\mathbb{R}$.

לפונקציה f יש גבול בנקודה $a\in\mathbb{R}$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה ב-U הסדרה $\left(f\left(x_n\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת.

הוכחה. הגרירה מימין לשמאל נובעת ישירות מאפיון היינה לגבול של פונקציה בנקודה, נוכיח את הגרירה בכיוון ההפוך.

נניח שלכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה ב-U הסדרה $\left(f\left(x_n\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת.

תהיינה $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ ו-$\left(b_n\right)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות המתכנסות ל-a שכל איבריהן ב-U, ע"פ ההנחה הגבולות הבאים קיימים:

$$l:=\lim_{n\to\infty}f\left(a_n\right),\ \ m:=\lim_{n\to\infty}f\left(b_n\right)$$

[5] ערך בוויקיפדיה: אדוארד היינה.

תהא $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י (לכל $n\in\mathbb{N}$):

$$c_n:=\begin{cases}a_n & n\in\text{Odd}\\ b_n & n\in\text{Even}\end{cases}$$

א"כ מתקיים $x_n\in U$ לכל $n\in\mathbb{N}$ וגם $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ ומכאן שע"פ ההנחה $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.
הסדרות $(f(c_{2k-1}))_{k=1}^{\infty}=(f(a_{2k-1}))_{k=1}^{\infty}$ ו-$(f(c_{2k}))_{k=1}^{\infty}=(f(b_{2k}))_{k=1}^{\infty}$ הן תתי סדרות של $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ ו-$(f(b_n))_{n=1}^{\infty}$ בהתאמה ומכאן שע"פ משפט הירושה הן מתכנסות ל-l ול-m בהתאמה.
מצד שני הן גם תתי-סדרות של $(f(c_n))_{n=1}^{\infty}$, כלומר l ו-m הם גבולות חלקיים שלה ומכיוון שהיא מתכנסת מתקיים בהכרח $l=m$.
א"כ ראינו שלכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה ב-U מתקיים $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=l$ ומכאן שע"פ אפיון היינה לגבול של פונקציה בנקודה מתקיים $\lim_{x\to a}f(x)=l$ ובפרט יש ל-f גבול ב-a. ∎

משפט 2.5. אפיון היינה לגבול חד-צדדי של פונקציה בנקודה
תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית/שמאלית U של נקודה $a\in\mathbb{R}$ ויהי $L\in\mathbb{R}$.
מתקיים $\lim_{x\to a^{\pm}}f(x)=L$ אם"ם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה ב-U מתקיים $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=L$.

מסקנה 2.6. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית/שמאלית U של נקודה $a\in\mathbb{R}$.
לפונקציה f יש גבול מימין/משמאל בנקודה $a\in A$ אם"ם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה ב- U הסדרה $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת.

משפט 2.7. תנאי קושי לגבול של פונקציה בנקודה
תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $a\in\mathbb{R}$.
תנאי הכרחי ומספיק לקיום הגבול $\lim_{x\to a}f(x)$ הוא שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x_1,x_2\in B_{\delta}^{\circ}(a)$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

הוכחה.

- $\Leftarrow$
נניח שהגבול $\lim_{x\to a}f(x)$ קיים ונסמן $L:=\lim_{x\to a}f(x)$.
יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$.
מהגדרת הגבול נובע שקיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in B_{\delta}^{\circ}(a)$ מתקיים $|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$, תהא δ כנ"ל.
יהיו $x_1,x_2\in B_{\delta}^{\circ}(a)$, מהשורה הקודמת נובע כי $|f(x_1)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$ וגם $|f(y_2)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$.
$$\Rightarrow\varepsilon=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}>|f(x_1)-L|+|f(x_2)-L|=|f(x_1)-L|+|L-f(x_2)|$$
$$\geq|f(x_1)-L+L-f(x_2)|=|f(x_1)-f(x_2)|$$
ε הנ"ל ו-x_1,x_2 היו שרירותיים ולכן לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x_1,x_2\in B_{\delta}^{\circ}(a)$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

- $\Rightarrow$
תהא U סביבה מנוקבת של a כך ש-f מוגדרת ב-U ונניח ש-f מקיימת את תנאי קושי עבור a[6].
יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ ותהא $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x_1,x_2\in B_{\delta}^{\circ}(a)$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.
תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים שונים מ-a המתכנסת ל-a שכל איבריה ב-U ונתבונן בסדרה $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$, מהעובדה $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ נובע שקיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n\in B_{\delta}^{\circ}(a)$, יהי N כנ"ל.
יהיו $N<n,m\in\mathbb{N}$, מכאן שמתקיים $a_n,a_m\in B_{\delta}^{\circ}(a)$ ומהגדרת δ נובע כי $|f(a_n)-f(a_m)|<\varepsilon$.
ε הנ"ל ו-n,m היו שרירותיים ולכן לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $|f(a_n)-f(a_m)|<\varepsilon$, מתנאי קושי להתכנסות של סדרות נובע ש-$(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת.

[6] לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x_1,x_2\in B_{\delta}^{\circ}(a)$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הנ"ל היתה שרירותית ולכן לכל סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a נקבל שהסדרה המתאימה $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, מתנאי היינה לגבול של פונקציה בנקודה נובע של-f יש גבול בנקודה, כלומר $\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיים[7].

■

משפט 2.8. תנאי קושי לגבול חד-צדדי של פונקציה בנקודה

תהא f פונקציה ותהא $a \in \mathbb{R}$ כך ש-f מוגדרת בסביבה ימנית/שמאלית מנוקבת של a.

תנאי הכרחי ומספיק לקיום הגבול $\lim_{x\to a^+} f(x)$ הוא שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיימת $0 < \delta \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x_1, x_2 \in (a, a+\delta)$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

תנאי הכרחי ומספיק לקיום הגבול $\lim_{x\to a^-} f(x)$הוא שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיימת $0 < \delta \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x_1, x_2 \in (a-\delta, a)$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

2.2 משפטים נוספים

משפט 2.9. אריתמטיקה של גבולות

תהיינה f ו-g פונקציות ממשיות המוגדרות בסביבה מנוקבת של $a \in \mathbb{R}$ כך שהגבולות הבאים קיימים:

$$l := \lim_{x\to a} f(x),\ \ m := \lim_{x\to a} g(x)$$

מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = l+m$.
2. $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = l\cdot m$.
3. אם $m \neq 0$ אז $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$.
4. אם $m \neq 0$ אז $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$.

♣ המשפט נובע ישירות מאפיון היינה לגבול של פונקציה בנקודה ומאריתמטיקה של גבולות לסדרות.

משפט 2.10. משפט ההצבה בגבולות לפונקציות לא רציפות

תהיינה $f: A \to B$ ו-$g: B \to C$ שתי פונקציות כך שהגבולות $l := \lim_{x\to a} f(x)$ ו-$m := \lim_{y\to l} g(y)$ קיימים (עבור נקודה $a \in A$ כלשהי), אם נתון בנוסף שקיימת סביבה U של a כך שלכל $x \in U$ מתקיים $f(x) \neq l$ אז מתקיים $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = m$.

הוכחה. יהי $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$.

נניח שקיימת סביבה U של a כך שלכל $x \in U$ מתקיים $f(x) \neq l$.

מהנתון $\lim_{y\to l} g(y) = m$ נובע שקיימת $0 < \eta \in \mathbb{R}$ כך שלכל $y \in B_\eta^\circ(l)$ מתקיים $|g(y) - m| < \varepsilon$, תהא η כנ"ל.

מהנתון $\lim_{x\to a} f(x) = l$ נובע שקיימת $0 < \delta \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in B_\delta^\circ(a)$ מתקיים $|f(x) - l| < \eta$, תהא δ כנ"ל כך ש-$B_\delta^\circ(a) \subseteq U$.

מכאן שע"פ ההנחה לכל $x \in B_\delta^\circ(a)$ מתקיים $0 < |f(x) - l| < \eta$ כלומר $f(x) \in B_\eta^\circ(l)$, ולכן מהשורה השנייה של ההוכחה נובע שלכל $x \in B_\delta^\circ(a)$ מתקיים $|g(f(x)) - m| < \varepsilon$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = m$$

■

[7] ולמען האמת גם שווה ל-$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ אך לא נתבקשנו להוכיח זאת.

3 חסימות וסדר

תהיינה f,g,h פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת U של $a\in\mathbb{R}$.

טענה 3.1. נניח שהגבולות $\lim_{x\to a} f\left(x\right)$ ו-$\lim_{x\to a} g$ קיימים.

1. אם לכל $x\in U$ מתקיים $f\left(x\right)<g\left(x\right)$ אז $l\leq m$.
2. אם $\lim_{x\to a} f\left(x\right)<\lim_{x\to a} g\left(x\right)$ אז קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך ש-$f\left(x\right)<g\left(x\right)$ לכל $x\in B_{\delta}^{\circ}\left(a\right)$.

משפט 3.2. משפט הכריך

אם $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)\leq h\left(x\right)$ לכל $x\in U$ וגם $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=l=\lim_{x\to a} h\left(x\right)$ אז $\lim_{x\to a} g\left(x\right)=l$.

טענה 3.3. אם הגבול $\lim_{x\to a} f\left(x\right)$ קיים אז f חסומה מקומית ב-U.

טענה 3.4. הגבול $\lim_{x\to a} f\left(x\right)$ קיים אם"ם $\lim_{x\to a}\left(f\left(x\right)-l\right)=0$.

משפט 3.5. כלל אפסה וחסומה

אם $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=0$ וגם g חסומה מקומית ב-a אז $\lim_{x\to a}\left(f\cdot g\right)\left(x\right)=0$.

4 רציפות

4.1 משפטי רציפות

משפט 4.1. אפיון היינה לרציפות של פונקציה בנקודה

תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה U של נקודה $a\in\mathbb{R}$.

f רציפה ב-a אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה ב-U מתקיים $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=f\left(a\right)$.

מסקנה 4.2. אפיון היינה לרציפות חד-צדדית של פונקציה בנקודה

תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית/שמאלית U של נקודה $a\in\mathbb{R}$.

f רציפה מימין/משמאל ב-a אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה ב-U מתקיים $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=f\left(a\right)$.

משפט 4.3. אריתמטיקה של רציפות

תהיינה f ו-g פונקציות רציפות בנקודה $a\in\mathbb{R}$, מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. $f+g$ רציפה ב-a.
2. גם $f\cdot g$ רציפה ב-a
3. אם $g\left(a\right)\neq 0$ אז גם $\frac{1}{g}$ רציפה ב-a.
4. אם $g\left(a\right)\neq 0$ אז גם $\frac{f}{g}$ רציפה ב-a.

משפט 4.4. משפט ההצבה בגבולות לפונקציות רציפות

תהיינה $f:B\to C$ ו-$g:A\to B$ שתי פונקציות כך ש-g רציפה בנקודה פנימית $a\in A$ ו-f רציפה ב-$g\left(a\right)$ שהיא נקודה פנימית של B, הפונקציה $f\circ g$ רציפה ב-a.

- ♣ המשפט נובע כמעט באופן ישיר ממשפט ההצבה בגבולות לפונקציות לא רציפות (משפט 2.10).
- ♣ מכאן שאם f רציפה ב-A ו-g רציפה ב-B אז $g\circ f$ רציפה ב-A.

משפט 4.5. תהא f פונקציה רציפה בנקודה $a\in\mathbb{R}$ ויהי $y\in\mathbb{R}$,

- אם $f(a)>y$ אז קיימת סביבה U של a כך ש-$f(x)>y$ לכל $x\in U$.
- אם $f(a)<y$ אז קיימת סביבה U של a כך ש-$f(x)<y$ לכל $x\in U$.

♣ המשפט נכון גם עבור רציפות חד-צדדית וסביבה חד-צדדית מתאימה.

משפט 4.6. משפט ערך הביניים

תהא f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, לכל y בקטע הסגור שבין $f(a)$ ל-$f(b)$[8] קיים $c\in[a,b]$ כך ש-$f(c)=y$.

הוכחה. נניח בהג"כ ש-$f(a)\leq f(b)$ ויהי $y\in[f(a),f(b)]$.
נסמן:

$$c:=\sup\left\{\ x\in[a,b]\ \middle|\ \forall x'\in[a,x]:f(x)\leq y\ \right\}$$

הקבוצה שלעיל חסומה מהגדרתה והיא לא ריקה מפני ש-a שייך אליה, א"כ c מוגדר היטב.
נניח בשלילה ש-$y\neq f(c)$, ממשפט 4.5 נובע כי:

- אם $f(c)>y$ אז קיימת סביבה U של c כך ש-$f(x)>y$ לכל $x\in U$, בפרט קיים $c>x\in U$ כך ש-$f(x)>y$ בסתירה להגדרת c.
- אם $f(c)<y$ אז קיימת סביבה U של c כך ש-$f(x)<y$ לכל $x\in U$, בפרט קיים $c<x\in U$ כך ש-$f(x)<y$ בסתירה להגדרת c.

מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$y=f(c)$. ■

מסקנה 4.7. תהא f פונקציה רציפה המוגדרת על מקטע כלשהו, גם התמונה של f היא מקטע.

משפט 4.8. משפט ויירשטראס הראשון[9]

תהא f פונקציה רציפה בקטע סגור $I\subseteq\mathbb{R}$, f חסומה ב-I.

הוכחה. נניח בהג"כ ש-f אינה חסומה מלעיל ב-I, א"כ לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $x_n\in I$ כך ש-$f(x_n)>n$; תהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כנ"ל, א"כ $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.
מהגדרתה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה ולכן ממשפט בולצאנו-ויירשטראס יש לה תת-סדרה מתכנסת.
תהא $(x_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ תת-סדרה מתכנסת ונסמן $l:=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}$, מכיוון ש-$I$ הוא קטע סגור נוכל לומר בבטחה ש-$l\in I$ ולכן מאפיון היינה לרציפות נובע שמתקיים:

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(l)$$

אבל $(f(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ היא תת-סדרה של $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ ולכן ממשפט הירושה נובע שמתקיים:

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\infty$$

וזוהי סתירה לכך שהגבול הנ"ל קיים במובן הצר.
מכאן שהנחת השליה אינה נכונה ו-f חסומה ב-I. ■

משפט 4.9. עיקרון המקסימום והמינימום של ויירשטראס (משפט ויירשטראס השני)

תהא f פונקציה רציפה בקטע סגור $I\subseteq\mathbb{R}$, f מקבלת מקסימום ומינימום ב-I (ל-$f(I)$ יש מקסימום ומינימום).

---

[8] אם $f(a)=f(b)$ אז מדובר ב"קטע" הסגור $\{f(b)\}=\{f(a)\}=[f(a),f(a)]$.
[9] ערך בוויקיפדיה: קארל ויירשטראס.

הוכחה. מהמשפט הקודם (4.8) נובע שהקבוצה $f\left(I\right)$ חסומה ומכאן שיש לה סופרמום ואינפימום, נסמן אותם ב-M וב-m בהתאמה.
מהאפיון של הסופרמום והאינפימום נובע שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיימים $a_{n},b_{n}\in I$ כך שמתקיים $M-f\left(a_{n}\right)<\frac{1}{n}$ ו-$f\left(b_{n}\right)-m<\frac{1}{n}$, תהיינה $\left(a_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ ו-$\left(b_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרות כנ"ל.

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f\left(a_{n}\right)=M,\ \lim_{n\to\infty}f\left(b_{n}\right)=m$$

מהגדרתן $\left(a_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ ו-$\left(b_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ הן סדרות חסומות ולכן ע"פ משפט בולצאנו-ויירשטראס יש להן תתי-סדרות מתכנסות, נסמן את גבולותיהן ב-L_{1} ו-L_{2} בהתאמה.
היות ש-I הוא קטע סגור נדע ש-$L_{1},L_{2}\in I$ ומאפיון היינה לרציפות נקבל שמתקיים:

$$f\left(L_{1}\right)=M,\ f\left(L_{2}\right)=m$$

■

טענה 4.10. פונקציית הערך המוחלט ($f\left(x\right):=\left|x\right|$) רציפה.

4.2 פולינומים ופונקציות טריגונומטריות

טענה 4.11. פונקציית הזהות ($\text{Id}\left(x\right):=x$) רציפה.

מסקנה 4.12. כל פולינום הוא פונקציה רציפה.

למה 4.13. יהי $p\in\mathbb{R}\left[x\right]$ פולינום מתוקן מדרגה $n:=\deg p\in\mathbb{N}$, כלומר קיימים $a_{0},a_{1},\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$ ($a_{n-1}\neq0$) כך שמתקיים:

$$p\left(x\right)=x^{n}+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_{1}\cdot x+a_{0}$$

יהיו $a_{0},a_{1},\ldots,a_{n-1}$ כנ"ל.
קיים $0<M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $M\leq x\in\mathbb{R}$ מתקיים $p\left(x\right)>0$ ובנוסף:

- אם $n\in\text{Even}$ אז לכל $-M\geq x\in\mathbb{R}$ מתקיים $p\left(x\right)>0$.
- אם $n\in\text{Odd}$ אז לכל $-M\geq x\in\mathbb{R}$ מתקיים $p\left(x\right)<0$.

הוכחה. יהי $1\leq M\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$M>\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_{k}\right|$$

יהי $M\leq x\in\mathbb{R}$, א"כ מתקיים $1\leq x$ וגם:

$$x>\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_{k}\right|$$

$$\Rightarrow x^{n}>x^{n-1}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_{k}\right|\geq\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_{k}\right|\cdot x^{k}=\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_{k}\cdot x^{k}\right|$$

$$\Rightarrow0<x^{n}-\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_{k}\cdot x^{k}\right|\leq x^{n}+\sum_{k=0}^{n-1}a_{k}\cdot x^{k}=p\left(x\right)$$

יהי $-M\geq y\in\mathbb{R}$, א"כ מתקיים $1\leq-y$ וגם:

$$-y>\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_{k}\right|$$

ולכן גם:

$$(-y)^n > \sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k \cdot (-y)^k\right| = \sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k \cdot y^k\right|$$

כעת נחלק למקרים:

- אם $n \in \text{Even}$ אז $(-y)^n = y^n$ ומכאן שמתקיים:

$$0 < y^n - \sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k \cdot y^k\right| \leq y^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot y^k = p(y)$$

- ואם $n \in \text{Odd}$ אז $(-y)^n = -y^n$ ומכאן שמתקיים:

$$0 > y^n + \sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k \cdot y^k\right| \geq y^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot y^k = p(y)$$

■

מסקנה 4.14. יהי $p \in \mathbb{R}[x]$ פולינום מתוקן כך ש-$\deg p \in \text{Odd}$, קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$p(x) = 0$.

הוכחה. מהלמה (4.13) נובע שקיים $a \in \mathbb{R}$ כך ש-$f(a) > 0$ ו-$f(-a) < 0$, יהי a כנ"ל.

$$\Rightarrow 0 \in [f(-a), f(a)]$$

ממשפט ערך הביניים נובע שקיים $x \in [-a, a]$ כך ש-$f(x) = 0$. ■

מסקנה 4.15. יהי $p \in \mathbb{R}[x]$ פולינום מתוקן כך ש-$\deg p \in \text{Odd}$, לכל $y \in \mathbb{R}$ קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$p(x) = y$.

הוכחה. יהי $y \in \mathbb{R}$ יהי $q \in \mathbb{R}[x]$ פולינום המוגדר ע"י $q(x) := p(x) - y$, זהו פולינום מתוקן מדרגה אי-זוגית ולכן קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$p(x) - y = q(x) = 0$ וממילא אותו x מקיים $p(x) = y$. ■

משפט 4.16. יהי $p \in \mathbb{R}[x]$ פולינום מתוקן כך ש-$\deg p \in \text{Even}$, יש ל-p מינימום.

הוכחה. יהי $q \in \mathbb{R}[x]$ פולינום המוגדר ע"י $q(x) := p(x) - p(0)$, מלמה 4.13 נובע שקיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ המקיים $x \geq M$ מתקיים $q(\pm x) > 0$ $p(\pm x) - p(0) =$, יהי M כנ"ל.
מכאן שלכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$x \geq M$ מתקיים $p(\pm x) > p(0)$. מעקרון המקסימום והמינימום של ויירשטראס נובע שקיים $c \in [-M, M]$ כך שלכל $x \in [-M, M]$ מתקיים $p(c) \leq p(x)$, יהי c כנ"ל.
מכאן שלכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$x \notin [-M, M]$ מתקיים $p(x) > p(0) \geq p(c)$, א"כ לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $p(x) \geq p(c)$. ■

משפט 4.17. יהי $p \in \mathbb{R}[x]$ פולינום מתוקן כך ש-$\deg p \in \text{Even}$, קיים $m \in \mathbb{R}$ המקיים:

1. לכל $m \leq y \in \mathbb{R}$ קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$p(x) = y$.
2. לכל $m > y \in \mathbb{R}$ לא קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$p(x) = y$.

הוכחה. תהא $a \in \mathbb{R}$ נקודת מינימום של p, מכאן שלכל $p(a) > y \in \mathbb{R}$ לא קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$p(x) = y$.
יהי $p(a) \leq y \in \mathbb{R}$ ויהי $q \in \mathbb{R}[x]$ פולינום המוגדר ע"י $q(x) := p(x) - y$, מלמה 4.13 נובע שקיים $a < b \in \mathbb{R}$ כך ש-$p(b) - y = q(b) > 0$, כלומר $p(b) > y$.

$$\Rightarrow y \in [p(a), p(b)]$$

מכאן שע"פ משפט ערך הביניים קיים $c \in [a, b]$ כך ש-$f(c) = y$. ■

מסקנה 4.18. יהי $p \in \mathbb{R}[x]$ פולינום מדרגה $n \in \mathbb{N}$ מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

- אם $n \in \mathrm{Odd}$ אז לכל $y \in \mathbb{R}$ קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$y = q(x)$.
- נניח ש$n \in \mathrm{Even}$,
  - אם $b_n > 0$ אז קיים $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $m \le y \in \mathbb{R}$ קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$y = p(x)$ ולכל $m > y \in \mathbb{R}$ לא קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$y = p(x)$, בפרט יש ל-p נקודת מינימום.
  - אם $b_n < 0$ אז קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $M \ge y \in \mathbb{R}$ קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$y = p(x)$ ולכל $M < y \in \mathbb{R}$ לא קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$y\alpha = p(x)$, בפרט יש ל-p נקודת מקסימום.

טענה 4.19. הפונקציות sin ו-cos רציפות.

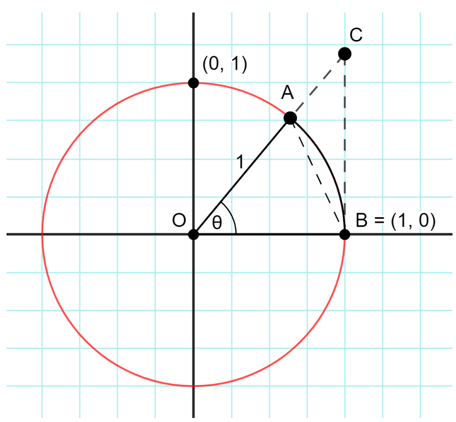
הוכחה. יהי $a \in \mathbb{R}$.
יהי $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ונסמן $\delta := \varepsilon$, מכאן שלכל $x \in B_\delta(a)$ מתקיים:

$$\begin{aligned}|\sin x - \sin a| &= \left|2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\right| = 2\cdot\left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right|\cdot\left|\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\right| \\ &\le 2\cdot\left|\frac{x-a}{2}\right|\cdot 1 = |x-\alpha| < \delta = \varepsilon \\ |\cos x - \cos a| &= \left|-2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\right| = 2\cdot\left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right|\cdot\left|\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\right| \\ &\le 2\cdot\left|\frac{x-a}{2}\right|\cdot 1 = |x-\alpha| < \delta = \varepsilon\end{aligned}$$

■

טענה 4.20. מתקיים:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$



הוכחה. תהא $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ונסמן את הנקודות הבאות במישור (ראו באיור):

$$O := (0,0)$$
$$A := (\cos\theta, \sin\theta)$$
$$B := (1,0)$$
$$C := \left(1, \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

א"כ שטח המשולש ΔAOB הוא:

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\cdot\sin\theta$$

השטח של הגזרה $\angle AOB$[10] הוא:

$$S_{\angle AOB}=\frac{1}{2}\cdot\theta$$

כמו כן, שטח המשולש ΔCOB הוא:

$$S_{\Delta COB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

מהעובדה שהמשולש ΔCOB מכיל את הגזרה $\angle AOB$ שמכילה את המשולש ΔCOB נובע שמתקיים:

$$\frac{1}{2}\cdot\sin\theta\leq\frac{1}{2}\cdot\theta\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow 1\leq\frac{\theta}{\sin\theta}\leq\frac{1}{\cos\theta}$$

מהעובדה ש-sin אי-זוגית ו-sin זוגית נובע שמתקיים:

$$\frac{-\theta}{\sin(-\theta)}=\frac{-\theta}{-\sin\theta}=\frac{\theta}{\sin\theta},\quad\frac{1}{\cos(-\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow 1\leq\frac{-x}{\sin(-x)}\leq\frac{1}{\cos(-x)}$$

θ הנ"ל היתה שרירותית ולכן הנ"ל נכון לכל $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, כלומר לכל $0\neq x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים:

$$1\leq\frac{x}{\sin x}\leq\frac{1}{\cos x}$$

מהרציפות של cos נובע שמתקיים:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

ומכאן שע"פ משפט הכריך מתקיים:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

ולכן מאריתמטיקה של גבולות נובע כי:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

■

[10] החלק בעיגול ("משולש הפיצה") התחום בין הרדיוס העובר ב-A לרדיוס העובר ב-B.

5 גבולות במובן הרחב

♣ כמעט כל המשפטים הבאים הם גרסאות של המשפטים המתאימים לגבול של פוקנציה בנקודה והוכחותיהם דומות מאד לאלו שכבר ראינו.

משפט 5.1. תהא f פונקציה, הגבול $\lim_{x\to\pm\infty} f\left(x\right)$ קיים במובן הרחב אם"ם הגבול $\lim_{x\to\mp\infty} f\left(-x\right)$ קיים במובן הרחב ובמקרה זה מתקיים גם:

$$\lim_{x\to\mp\infty} f\left(-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty} f\left(x\right)$$

משפט 5.2. אפיון היינה לגבולות במובן הרחב
תהא $f:A\to B$ פונקציה ויהי $L\in\mathbb{R}$.

- נניח ש-A מכילה סביבה מנוקבת U של נקודה $a\in\mathbb{R}$, מתקיים $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=\pm\infty$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה שייכים ל-U מתקיים $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\pm\infty$.
- נניח ש-A מכילה סביבה ימנית U של נקודה $a\in\mathbb{R}$, מתקיים $\lim_{x\to a^+} f\left(x\right)=\pm\infty$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה שייכים ל-U מתקיים $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\pm\infty$.
- נניח ש-A מכילה סביבה שמאלית U של נקודה $a\in\mathbb{R}$, מתקיים $\lim_{x\to a^-} f\left(x\right)=\pm\infty$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה שייכים ל-U מתקיים $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\pm\infty$.
- נניח ש-f מוגדרת על קרן ימנית D,
  - מתקיים $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=L$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ השואפת ל-∞ שכל איבריה ב-D מתקיים $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=L$.
  - מתקיים $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=\pm\infty$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$השואפת ל-$\infty$ שכל איבריה שייכים ל-D מתקיים $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\pm\infty$.
- נניח ש-f מוגדרת על קרן שמאלית D,
  - מתקיים $\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=L$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ השואפת ל-∞ שכל איבריה ב-D מתקיים $\lim_{n\to-\infty} f\left(x_n\right)=L$.
  - מתקיים $\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\pm\infty$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$השואפת ל-$-\infty$ שכל איבריה שייכים ל-D מתקיים $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\pm\infty$.

משפט 5.3. תנאי קושי לגבול של פונקציה ב-$\pm\infty$

- תהא f פונקציה המוגדרת בקרן ימנית, תנאי הכרחי ומספיק לקיום הגבול $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)$ הוא שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $M<x_1,x_2\in\mathbb{R}$ מתקיים $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\varepsilon$.
- תהא f פונקציה המוגדרת בקרן שמאלית, תנאי הכרחי ומספיק לקיום הגבול $\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)$ הוא שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $m\in\mathbb{R}$ כך שלכל $m>x_1,x_2\in\mathbb{R}$ מתקיים $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\varepsilon$.

משפט 5.4. אריתמטיקה של גבולות במובן הרחב

תהיינה f ו-g פונקציות ממשיות המוגדרות בקרן מתאימה כך שהגבולות הבאים קיימים:

$$l := \lim_{x\to\pm\infty} f(x),\ \ m := \lim_{x\to\pm\infty} g(x)$$

מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $\lim_{x\to\pm\infty}(f+g)(x) = l+m$.
2. $\lim_{x\to\pm\infty}(f\cdot g)(x) = l\cdot m$.
3. אם $m\neq 0$ אז $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$.
4. אם $m\neq 0$ אז $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$.

משפט 5.5. משפט ההצבה בגבולות במובן הרחב

תהיינה f ו-g פונקציות המוגדרות על כל הישר[11].

- נניח ש-$l := \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ קיים וממשי ($l\in\mathbb{R}$).
  - אם g רציפה ב-l אז מתקיים $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(g\circ f)(x) = g(l)$.
  - אם g אינה רציפה ב-l אך קיימת קרן ימנית/שמאלית כך ש-$f(x)\neq l$ לכל x בקרן והגבול $\lim_{x\to l} g(x)$ קיים במובן הרחב אז

$$\lim_{x\to\pm\infty}(g\circ f)(x) = \lim_{x\to l} g(x)$$

- נניח ש-$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$, אם הגבול $\lim_{x\to\infty} g(x)$ קיים במובן הרחב אז $\lim_{x\to\pm\infty}(g\circ f)(x) = \lim_{x\to\infty} g(x)$.
- נניח ש-$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$, אם הגבול $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ קיים במובן הרחב אז $\lim_{x\to\pm\infty}(g\circ f)(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x)$.

משפט 5.6. משפט הפרוסה

תהיינה f ו-g פונקציות המוגדרות על כל הישר כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)\leq g(x)$.

- אם $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ אז גם $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \infty$.
- כמו כן, אם אם $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = -\infty$ אז גם $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$.

משפט 5.7. כלל אפסה וחסומה לגבולות במובן הרחב

תהיינה f ו-g פונקציות המוגדרות על כל הישר.

- אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ו-g חסומה מלרע בקרן ימנית אז $\lim_{x\to\infty}(f\cdot g)(x) = 0$.
- כמו כן, אם $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ו-g חסומה מלרע בקרן שמאלית אז $\lim_{x\to-\infty}(f\cdot g)(x) = 0$.

משפט 5.8. כלל המכפלה לגבולות במובן הרחב

תהיינה f ו-g פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של נקודה $a\in\mathbb{R}$.

- אם $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ וגם g חסומה מלרע ע"י חסם חיובי אז $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \infty$.
- אם $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ וגם g חסומה מלרע ע"י חסם חיובי אז $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = -\infty$.

[11] ניתן גם להגדיר אותן רק על הקרנות המתאימות, הערה זו תקפה גם בשני המשפטים הבאים.

טענה 5.9. תהא $f:A\to B$ פונקציה.

- נניח ש-A מכילה סביבה מנוקבת U של נקודה $a\in\mathbb{R}$ כך ש-$f(x)\neq0$ לכל $x\in U$.
  - אם $\lim_{x\to a}f(x)=0$ אז $\lim_{x\to a}\frac{1}{|f(x)|}=\infty$.
  - אם $\lim_{x\to a}|f(x)|=\infty$ אז $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$.
- נניח ש-A מכילה קרן שמאלית כך ש-$f(x)\neq0$ לכל x בקרן,
  - אם $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ אז $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{|f(x)|}=\infty$.
  - אם $\lim_{x\to\pm\infty}|f(x)|=\infty$ אז $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{f(x)}=0$.

♣ מה שהטענה אומרת בעצם הוא שלכל פונקציה f מתקיים:

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\infty\iff\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}|f(x)|=\infty\iff\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{f(x)}=0$$

טענה 5.10. תהא $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה, ישר $\{(x,ax+b)\mid x\in\mathbb{R}\}$ הוא אסימפטוטה משופעת של f ב-$\pm\infty$ אם"ם מתקיים (במובן הצר):

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a,\quad\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=b$$

טענה 5.11. יהי $p\in\mathbb{R}[x]$ פולינום מתוקן מדרגה n, מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty}p(x)=\infty$ ובנוסף:

- אם $n\in\text{Even}$ אז $\lim\limits_{x\to-\infty}p(x)=\infty$.
- אם $n\in\text{Odd}$ אז $\lim\limits_{x\to-\infty}p(x)=-\infty$.

הוכחה. יהי $M\in\mathbb{R}$ ויהי $q\in\mathbb{R}[x]$ פולינום המוגדר ע"י $q(x):=p(x)-M$, מלמה 4.13 נובע שקיים $0<K\in\mathbb{R}$ כך שלכל $K<x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$0<q(x)=p(x)-M$$

ומכאן שגם $p(x)>M$.
כמו כן מאותה למה נובע שאותו K מקיים בנוסף:

- שאם $n\in\text{Even}$ אז לכל $-K>x\in\mathbb{R}$ מתקיים גם $p(x)-M=q(x)>0$ כלומר $p(x)>M$.
- שאם $n\in\text{Even}$ אז לכל $-K>x\in\mathbb{R}$ מתקיים גם $p(x)-M=q(x)<0$ כלומר $p(x)<M$.

M הנ"ל היה שרירותי ולכן הדבר נכון לכל M ומהגדרה נקבל את המבוקש. ■

מסקנה 5.12. יהי $p \in \mathbb{R}[x]$ פולינום מדרגה $n \in \mathbb{N}$ ונסמן ב-a_n את המקדם של החזקה ה-n-ית שלו.

- נניח ש-$a_n > 0$,
  - אם $n \in \text{Even}$ אז מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \infty$ וגם $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \infty$.
  - אם $n \in \text{Odd}$ אז מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \infty$ וגם $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = -\infty$.
- נניח ש-$a_n < 0$,
  - אם $n \in \text{Even}$ אז מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = -\infty$ וגם $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = -\infty$.
  - אם $n \in \text{Odd}$ אז מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = -\infty$ וגם $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \infty$.

טענה 5.13. יהיו $p, q \in \mathbb{R}[x]$ ויהיו $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ ($a_n \neq 0$ ו-$b_m \neq 0$) כך שמתקיים:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \\ g(x) &= b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot x + b_0 \end{aligned}$$

- אם $n < m$ אז $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- אם $n = m$ אז $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_n}$.
- נניח ש-$n > m$,
  - אם $\text{sgn}(a_n) = \text{sgn}(b_m)$ אז $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.
  - אם $\text{sgn}(a_n) \neq \text{sgn}(b_m)$ אז $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

הוכחה. אם $n = 0$ ו/או $m = 0$ אז הטענה נובעת מהמשפטים הקודמים, א"כ נוכל להניח שהם שונים מ-0.

- נניח ש-$n \leq m$. מאריתמטיקה של גבולות נובע שמתקיים:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^n} &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^n} \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \right) = \lim_{x\to\infty} \left(a_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \frac{1}{x^{n-i}} \right) \\ &= a_n + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\lim_{x\to\infty} \left(a_i \cdot \frac{1}{x^{n-i}} \right) \right) = a_n + \sum_{i=0}^{n-1} \left(a_i \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{n-i}} \right) \\ &= a_n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i \cdot 0) = a_n \end{aligned}$$

מכאן שמאריתמטיקה של גבולות נובע שמתקיים גם:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x^n} \cdot \frac{x^m}{g(x)} \cdot \frac{x^n}{x^m} \right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^n} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{g(x)} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{m-n}} \end{aligned}$$

כעת, אם $n < m$ אז נקבל:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = a_n \cdot (b_n)^{-1} \cdot 0 = 0$$

ואם $n=m$ אז נקבל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=a_n\cdot\left(b_n\right)^{-1}\cdot1=\frac{a_n}{b_n}$$

- נניח ש-$m>n$נחלק את f ב-g עם שארית: יהיו $q,r\in\mathbb{R}\left[x\right]$ כך ש-$\deg g>\deg r$ ומתקיים $g=q\cdot f+r$, א"כ מתקיים $\deg q=m-n>0$.

  מתכונות של כפל פולינומים נובע שהמקדם של החזקה הגדולה ביותר ב-q הוא $\frac{a_n}{b_n}$ ומכאן שמתקיים:

$$\frac{a_n}{b_n}>0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}q\left(x\right)=\infty$$
$$\frac{a_n}{b_n}<0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}q\left(x\right)=-\infty$$

  מהסעיף הקודם נובע שמתקיים $\lim_{x\to\infty}\frac{r\left(x\right)}{g\left(x\right)}=0$ לכן מאריתמטיקה של גבולות נקבל שמתקיים:

$$\frac{a_n}{b_n}>0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\infty$$
$$\frac{a_n}{b_n}<0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=-\infty$$

■

6 מונוטוניות

טענה 6.1. קיום גבולות חד-צדדיים של פונקציות מונוטוניות וחסומות:

1. תהא f פונקציה מונוטונית **עולה** המוגדרת בסביבה **שמאלית** U של נקודה $a\in\mathbb{R}$ וחסומה **מלעיל** בסביבה זו, הגבול $\lim_{x\to a^-}f\left(x\right)$ קיים ושווה ל-$\sup f\left(U\right)$.
2. תהא f פונקציה מונוטונית **עולה** המוגדרת בסביבה **ימנית** U של נקודה $a\in\mathbb{R}$ וחסומה **מלרע** בסביבה זו, הגבול $\lim_{x\to a^+}f\left(x\right)$ קיים ושווה ל-$\inf f\left(U\right)$.
3. תהא f פונקציה מונוטונית **יורדת** המוגדרת בסביבה **שמאלית** U של נקודה $a\in\mathbb{R}$ וחסומה **מלרע** בסביבה זו, הגבול $\lim_{x\to a^-}f\left(x\right)$ קיים ושווה ל-$\inf f\left(U\right)$.
4. תהא f פונקציה מונוטונית **יורדת** המוגדרת בסביבה **ימנית** U של נקודה $a\in\mathbb{R}$ וחסומה **מלעיל** בסביבה זו, הגבול $\lim_{x\to a^+}f\left(x\right)$ קיים ושווה ל-$\sup f\left(U\right)$.

הוכחה. נוכיח את סעיף 1, ההוכחות של שאר הסעיפים דומות למדי.

יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$, מהאפיון של החסם העליון נובע שקיים $b\in U$ כך ש-$\sup f\left(U\right)-f\left(b\right)<\varepsilon$, יהי x כנ"ל ונסמן $\delta:=a-b>0$. מכיוון ש-U היא סביבה שמאלית של a נדע שלכל $x\in U$ המקיים $\left|x-a\right|<\delta$ מתקיים:

$$a-b=\delta>\left|x-a\right|=a-x$$

ומכאן שגם $x>b$ ולכן מהמונוטוניות של f נובע שלכל $x\in U$ המקיים $\left|x-a\right|<\delta$ מתקיים $\sup f\left(U\right)\geq f\left(x\right)\geq f\left(b\right)$ ולכן גם:

$$\left|f\left(x\right)-\sup f\left(U\right)\right|=\sup f\left(U\right)-f\left(x\right)\leq\sup f\left(U\right)-f\left(b\right)<\varepsilon$$

■

מסקנה 6.2. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה $a \in \mathbb{R}$, אם f מונוטונית אז שני הגבולות החד-צדדיים של a קיימים ובנוסף:

- אם f מונוטונית עולה אז $\lim_{x \to a^-} f(x) \leq \lim_{x \to a^+} f(x)$,
- ואם f מונוטונית יורדת אז $\lim_{x \to a^-} f(x) \geq \lim_{x \to a^+} f(x)$.

מסקנה 6.3. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה של $a \in \mathbb{R}$.

- אם f מונוטונית עולה אז $\lim_{x \to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \to a^+} f(x)$,
- ואם f מונוטונית יורדת אז $\lim_{x \to a^-} f(x) \geq f(a) \geq \lim_{x \to a^+} f(x)$.

טענה 6.4. תהא $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, אם f מונוטונית ב-(a,b) אז f מונוטונית גם ב-$[a,b]$ באותו סוג מונוטוניות.

הוכחה. נוכיח את הטענה עבור פונקציות מונוטוניות עולות ועולות ממש, ההוכחה עבור שני הסוגים האחרים דומה מאד.
יהיו $x, y \in [a,b]$ כך ש-$x < y$, אם $x, y \in (a,b)$ אז מהנתון נובע ש-x ו-y מקיימים את הנדרש ולכן נוכל להניח ש-$x = a$ ו/או $y = b$.

- נניח ש-f מונוטונית עולה ונניח בשלילה ש-$f(x) > f(y)$.
  - אם $x = a$ אז מהמסקנה האחרונה (6.3) נובע שקיימת סביבה ימנית $U \subseteq [a,b]$ של x כך שלכל $c \in U$ מתקיים $f(c) \geq f(x)$, יהי c כנ"ל כך ש-$c < y$.
    מהגדרה $c \in (a,b)$ ולכן מהמונוטוניות של f נובע ש-$f(c) \leq f(y) < f(x)$ בסתירה לכך ש-$f(c) \geq f(x)$.
  - אם $y = b$ אז מהמסקנה האחרונה נובע שקיימת סביבה שמאלית $U \subseteq [a,b]$ של y כך שלכל $c \in U$ מתקיים $f(c) \leq f(y)$, יהי c כנ"ל כך ש-$c > x$.
    מהגדרה $c \in (a,b)$ ולכן מהמונוטוניות של f נובע ש-$f(c) \geq f(x) > f(y)$ בסתירה לכך ש-$f(c) \leq f(y)$.
- נניח ש-f מונוטונית עולה ונניח בשלילה ש-$f(x) \geq f(y)$.
  - אם $x = a$ אז מהמסקנה האחרונה נובע שקיימת סביבה ימנית $U \subseteq [a,b]$ של x כך שלכל $c \in U$ מתקיים $f(c) \geq f(x)$, יהי c כנ"ל כך ש-$c < y$.
    מהגדרה $c \in (a,b)$ ולכן מהמונוטוניות של f נובע ש-$f(c) < f(y) \leq f(x)$ בסתירה לכך ש-$f(c) \geq f(x)$.
  - אם $y = b$ אז מהמסקנה האחרונה נובע שקיימת סביבה שמאלית $U \subseteq [a,b]$ של y כך שלכל $c \in U$ מתקיים $f(c) \leq f(y)$, יהי c כנ"ל כך ש-$c > x$.
    מהגדרה $c \in (a,b)$ ולכן מהמונוטוניות של f נובע ש-$f(c) > f(x) \geq f(y)$ בסתירה לכך ש-$f(c) \leq f(y)$.

מכאן שהנחות השלילה אינן נכונות, כלומר אם f מונוטונית עולה אז $f(x) \leq f(y)$ ואם f עולה ממש אז $f(x) < f(y)$. ■

7 הפיכות

טענה 7.1. תהא f פונקציה מונוטונית וחח"ע, f מונוטונית ממש.

משפט 7.2. תהא $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה וחח"ע המוגדרת על מקטע I, f מונוטונית ממש.

הוכחה. נניח בשלילה ש-f אינה מונוטונית ממש, מכאן שקיימות שלוש נקודות $a,b,c\in I$ כך ש-$a<c<b$ המקיימות $\max\left\{ f\left(a\right),f\left(b\right)\right\} \leq f\left(c\right)$ ו/או ש-$\min\left\{ f\left(a\right),f\left(b\right)\right\} \geq f\left(c\right)$.[12]
תהיינה a,b,c כנ"ל, נזכור ש-f חח"ע ומכאן ש-$\max\left\{ f\left(a\right),f\left(b\right)\right\} <f\left(c\right)$ או ש-$\min\left\{ f\left(a\right),f\left(b\right)\right\} >f\left(c\right)$.
נניח בהג"כ שמתקיים $M:=\max\left\{ f\left(a\right),f\left(b\right)\right\} <f\left(c\right)$.
ממשפט ערך הביניים נובע שקיים $x_{1}\in\left[a,c\right]$ כך ש-$f\left(x_{1}\right)\in\left(M,f\left(c\right)\right)\subseteq\left[f\left(a\right),f\left(c\right)\right]$, יהי x_{1} כנ"ל.
ושוב, ממשפט ערך הביניים נובע שקיים $x_{2}\in\left[c,b\right]$ כך ש-$f\left(x_{2}\right)=f\left(x_{1}\right)\in\left(M,f\left(c\right)\right)\subseteq\left[f\left(b\right),f\left(c\right)\right]$.
מהגדרה $f\left(x_{1}\right)\neq f\left(c\right)$ וגם $f\left(x_{2}\right)\neq f\left(c\right)$ ומכאן ש-$c\neq x_{1}$ וגם $x_{2}\neq c$ וממילא $x_{1}<c<x_{2}$, כלומר $x_{1}\neq x_{2}$; אבל $f\left(x_{1}\right)=f\left(x_{2}\right)$ בסתירה לכך ש-f חח"ע.
מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-f מונוטונית ממש. ■

משפט 7.3. תהא $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ורציפה, מתקיים אחד משני הפסוקים הבאים:

- f עולה ממש ואז $\text{Im}f=\left[f\left(a\right),f\left(b\right)\right]$.
- f יורדת ממש ואז $\text{Im}f=\left[f\left(b\right),f\left(a\right)\right]$.

♣ המשפט נכון גם עבור מקטעים שאינם קטעים סגורים אך בשינוי קל: התמונה של פונקציה רציפה וחח"ע המוגדרת על מקטע היא מקטע בעל אותן תכונות של סגירות/פתיחות, כלומר לכל אחת משלוש הקטגוריות הבאות הפונקציה תעתיק מקטע מקטגוריה כלשהי למקטע מאותה קטגוריה:

1. מקטעים סגורים - קטעים סגורים.
2. מקטעים פתוחים - קטעים פתוחים, קרנות פתוחות והישר כולו.
3. מקטעים חצי סגורים - קטעים חצי סגורים וקרנות סגורות.

הוכחה. ממשפט 7.2 נובע ש-f עולה ממש או יורדת ממש, א"כ הוכחנו כבר חצי מהמשפט.
ממשפט ערך הביניים נובע שהקטע הסגור שבין $f\left(a\right)$ ל-$f\left(b\right)$ מוכל ב-$\text{Im}f$, נראה את ההכלה בכיוון ההפוך.

- אם f עולה ממש אז לכל $x\in\left[a,b\right]$ מתקיים $f\left(a\right)\leq f\left(x\right)\leq f\left(b\right)$, כלומר $f\left(x\right)\in\left[f\left(a\right),f\left(b\right)\right]$ ומכאן ש-$\text{Im}f\subseteq\left[f\left(a\right),f\left(b\right)\right]$.
- אם f יורדת ממש אז לכל $x\in\left[a,b\right]$ מתקיים $f\left(a\right)\geq f\left(x\right)\geq f\left(b\right)$, כלומר $f\left(x\right)\in\left[f\left(b\right),f\left(a\right)\right]$ ומכאן ש-$\text{Im}f\subseteq\left[f\left(b\right),f\left(a\right)\right]$.

■

[12] אחרת לכל שלוש נקודות כאלה מתקיים $\max\left\{ f\left(a\right),f\left(b\right)\right\} <f\left(c\right)<\min\left\{ f\left(a\right),f\left(b\right)\right\}$ ומכאן ש-f מונוטונית ממש (אם $f\left(a\right)<f\left(b\right)$ אז עולה ממש ואם $f\left(a\right)>f\left(b\right)$ אז יורדת ממש).

משפט 7.4. תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה והפיכה, גם f^{-1} רציפה.

♣ האינטואיציה למשפט היא שהגרף של f^{-1} הוא שיקוף הגרף של f ביחס לאלכסון הראשי, כלומר כל ציור של הגרף של f הוא גם ציור הגרף של f^{-1} (נחליף בין הצירים), ולכן אם אפשר "לצייר" את הגרף של f מבלי "להרים את העיפרון מהדף" הרי שבכך "ציירנו" גם את הגרף של f^{-1} מבלי לעשות זאת.

כדאי להוסיף תמונה.

♣ המשפט נכון גם עבור מקטעים שאינם קטעים סגורים: תהא f פונקציה המוגדרת על מקטע I ויהי $y\in\text{Im}f$, אם נצמצם את f לקטע סגור I' כך ש-$f^{-1}(y)\in I'$ נקבל מהמשפט שהפונקציה ההופכית לפונקציה המצומצמת[13] רציפה ב-y ומכיוון שזו האחרונה היא צמצום של f^{-1} נדע שגם f^{-1} היא רציפה ב-y שהרי רציפות היא תכונה מקומית.

הוכחה. ממשפט 7.2 נובע ש-f מונוטונית ממש ב-$[a,b]$, נניח בהג"כ ש-f עולה ממש ומכאן שע"פ משפט 7.3 מתקיים $\text{Im}f=[f(a),f(b)]$ ומהגדרה זהו התחום של f^{-1}.

יהי $y\in[f(a),f(b)]$, יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ ונסמן:

$$x:=f^{-1}(y)$$
$$x_1:=\max\left\{f^{-1}(y)-\varepsilon,a\right\}$$
$$x_2:=\min\left\{f^{-1}(y)+\varepsilon,b\right\}$$

$$\Rightarrow x\in[x_1,x_2]\subseteq[a,b]$$

מהמונוטוניות של f נובע שמתקיים:

$$f(a)\le f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)\le f(b)$$

כלומר:

$$y=f(x)\in[f(x_1),f(x_2)]\subseteq[f(a),f(b)]$$

ומכאן שקיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $y'\in\text{Im}f$ המקיים $|y-y'|<\delta$ מתקיים $y'\in[f(x_1),f(x_2)]$, כלומר הסביבה הדלתאית המתאימה[14] של y מוכלת ב-$[f(x_1),f(x_2)]$, תהא δ כנ"ל.

מהעובדה ש-f עולה ממש נובע שלכל $y'\in[f(a),f(b)]$: אם $f^{-1}(y')<x_1$ אז $y'=f\left(f^{-1}(y')\right)<f(x_1)$ ואם $x_2<f^{-1}(y')$ אז $f(x_2)<f\left(f^{-1}(y')\right)=y'$;

מכאן שלכל $y'\in[f(x_1),f(x_2)]$ מתקיים:

$$f^{-1}(y)-\varepsilon\le x_1\le f^{-1}(y')\le x_2\le f^{-1}(y)+\varepsilon$$

כלומר:

$$\left|f^{-1}(y')-f^{-1}(y)\right|<\varepsilon$$

ובפרט לכל $y'\in\text{Im}f$ המקיימת $|y-y'|<\delta$ מתקיים $\left|f^{-1}(y')-f^{-1}(y)\right|<\varepsilon$. ■

מסקנה 7.5. יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(x):=\sqrt[n]{x}$ לכל $x\in[0,\infty)$, f היא פונקציה רציפה.

---

[13] כוונתי לפונקציה $\left(f\mid_{I'}\right)^{-1}$ שהיא הופכית של f המצומצמת ל-I'.

[14] אם $y=f(x_1)$ אז מדובר בסביבה ימנית ואם $y=f(x_2)$ מדובר בסביבה שמאלית, אחרת מדובר בסביבה מלאה.

משפט 7.6. תהא f פונקציה מונוטונית והפיכה, f^{-1} היא פונקציה מונוטונית בעלת אותו סוג מונוטוניות, כלומר מתקיים אחד משני הפסוקים הבאים:

1. f עולה ממש ואז גם f^{-1} עולה ממש.
2. f עולה ממש ואז גם f^{-1} יורדת ממש.

♣ גם כאן (כמו במשפטים רבים העוסקים בפונקציות הפיכות) עוזרת ההבחנה שהגרף של f^{-1} הוא שיקוף הגרף של f ביחס לאלכסון הראשי.

הוכחה. מטענה 7.1 נובע ש-f מונוטונית ממש, א"כ הוכחנו כבר חצי מהמשפט.
נסמן את תחום ההגדרה של f ב-A ואת הטווח שלה ב-B, א"כ תחום ההגדרה של f^{-1} הוא B והטווח שלה הוא A.
יהיו $y_1, y_2 \in B$ כך ש-$y_1 < y_2$ ונסמן $x_1 := f^{-1}(y_1)$ ו-$x_2 := f^{-1}(y_2)$, מהגדרה $x_1, x_2 \in A$ ומתקיים:

$$f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$$

מכאן שאם f עולה ממש אז בהכרח:

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$$

ואם f יורדת ממש אז בהכרח:

$$f^{-1}(y_1) = x_1 > x_2 = f^{-1}(y_2)$$

■

מסקנה 7.7. יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(x) := \sqrt[n]{x}$ לכל $x \in [0, \infty)$, f היא פונקציה עולה ממש.

מסקנה 7.8. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x} = \infty$ וכמו כן גם $\lim_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = 0$.

8 הפונקציה האקספוננציאלית

8.1 הגדרת הפונקציה האקספוננציאלית

יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ ותהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י $a_n := \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$ (לכל $n \in \mathbb{N}$), נרצה להוכיח שהגבול $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ קיים.

טענה 8.1. קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שהסדרה $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ מונוטונית עולה.

הוכחה. יהי $N \in \mathbb{N}$ כך ש-$|\alpha| \leq N$.
יהי $N \leq n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&\Rightarrow n > |\alpha|\\&\Rightarrow -n < \alpha < n\\&\Rightarrow -1 < \frac{\alpha}{n} < 1\\&\Rightarrow 0 < 1 + \frac{\alpha}{n}\end{aligned}$$

נסמן:

$$\begin{aligned}b_1 := b_2 := \ldots b_n := 1 + \frac{\alpha}{n} > 0\\ b_{n+1} := 1 > 0\end{aligned}$$

מא"ש הממוצעים נובע שמתקיים:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \cdot 1} = \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n+1} b_i} \leq \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} b_n = \frac{n \cdot \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)+1}{n+1}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n} \leq \frac{n+\alpha+1}{n+1} = 1 + \frac{\alpha}{n+1}\\&\Rightarrow a_n = \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{\alpha}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}\end{aligned}$$

n הנ"ל היה שרירותי ומכאן שהנ"ל נכון לכל $N \leq n \in \mathbb{N}$, כלומר $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית עולה. ■

טענה 8.2. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל.

הוכחה. יהי $N \in \mathbb{N}$ כך ש-$|\alpha| \leq N$ ויהי $N \leq n \in \mathbb{N}$.
נסמן:

$$\begin{aligned}b_1 := b_2 := \ldots b_n := 1 + \frac{\alpha}{n} > 0\\ b_{n+1} := b_{n+2} := \ldots b_{n+N+1} := \frac{1}{N+1} > 0\end{aligned}$$

ושוב מא"ש הממוצעים נובע שמתקיים:

$$\begin{aligned}\sqrt[n+N+1]{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{(N+1)^{N+1}}} &= \sqrt[n+N+1]{\prod_{i=1}^{n+N+1} b_i} \leq \frac{1}{n+N+1} \cdot \sum_{i=1}^{n+N+1} b_i\\&= \frac{n \cdot \left(1+\frac{\alpha}{n}\right) + (N+1) \cdot \frac{1}{N+1}}{n+N+1} = \frac{n+\alpha+1}{n+N+1} \leq 1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{(N+1)^{N+1}} \leq 1$$
$$\Rightarrow a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq (N+1)^{N+1}$$

n הנ"ל היה שרירותי ולכן הנ"ל מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$ ומכיוון שהקבוצה $\{a_n \mid n < N\}$ היא קבוצה סופית נדע שהיא חסומה וממילא גם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה. ■

מסקנה 8.3. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

מסקנה 8.4. הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ קיים לכל $x \in \mathbb{R}$.

8.2 תכונות הפונקציה האקספוננציאלית

טענה 8.5. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\exp(x) > 0$.

הוכחה. לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $|x| < n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n > 0$$

ומכאן שגם:

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n > 0$$

■

טענה 8.6. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\exp(x) \geq 1 + x$.

הוכחה. לכל $|x| < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\frac{x}{n} > -1$ ומכאן שע"פ א"ש ברנולי מתקיים גם:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x$$

■

למה 8.7. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n^2}\right)^n = 1$$

הוכחה. יהי $x \in \mathbb{R}$ ותהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ הסדרה המוגדרת ע"י $x_n := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ (לכל $n \in \mathbb{N}$).
לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left(1+\frac{x}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{x}{n^2}\right)^{n^2}} = \sqrt[n]{x_{n^2}}$$

ראינו שהסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$\exp(x)$ שהוא מספר חיובי, א"כ קיימים $0 < m, M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$m \leq x_{n^2} \leq M$$

יהיו m, M כנ"ל ומכאן שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\sqrt[n]{m} \leq \sqrt[n]{x_{n^2}} \leq \sqrt[n]{M}$$

כשעסקנו בסדרות ראינו שלכל $0 < q \in \mathbb{R}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$ ומכאן שע"פ משפט הכריך מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_{n^2}} = 1$$

■

טענה 8.8. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

הוכחה. יהי $x \in \mathbb{R}$, ראינו ש-$\exp(x) > 0$ ולכן הטענה שעלינו להוכיח שקולה לכך ש-$\exp(-x)\cdot\exp(x) = 1$.
מהלמה (8.7) ומאריתמטיקה של גבולות נובע שמתקיים:

$$\begin{aligned}\exp(-x)\cdot\exp(x) &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n = 1\end{aligned}$$

■

טענה 8.9. לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$.

הוכחה. יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ ונחלק למקרים:

- נניח ש-$x, y \geq 0$, מכאן שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$0 < 1+\frac{x+y}{n} \leq 1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2} \leq 1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}+\frac{x+y}{n}\cdot\frac{xy}{n^2}$$

ומכאן שגם:

$$0 < 1+\frac{x+y}{n} \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{y}{n}\right) \leq \left(1+\frac{x+y}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{xy}{n^2}\right)$$

וממילא:

$$\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{xy}{n^2}\right)^n$$

מאריתמטיקה של גבולות נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{xy}{n^2}\right)^n$$

כלומר:

$$\exp(x+y) \leq \exp(x)\cdot\exp(y) \leq \exp(x+y)\cdot 1$$

וממילא $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$.

- נניח שאחד מבין x ו-y שלילי ואילו האחר אי-שלילי, נחלק שוב למקרים ובהג"כ נניח כי $y < 0 \leq x$.
  - אם $x + y \geq 0$ אז מהמקרה הקודם נובע מתקיים:

$$\exp(x) = \exp((x+y)+(-y)) = \exp(x+y)\cdot\exp(-y) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$$

$$\Rightarrow \exp(x)\cdot\exp(y) = \exp(x+y)$$

– אם $x+y\leq0$ אז $(-x)+(-y)\geq0$ ומכיוון שהסימנים של $-x$ ו-$-y$ שונים נקבל מהמקרה הקודם שמתקיים:

$$\exp(-x)\cdot\exp(-y)=\exp(-(x+y))$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\exp(x)\cdot\exp(y)}=\frac{1}{\exp(x+y)}$$
$$\Rightarrow\exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)$$

• נניח כעת ש-$x,y\leq0$, א"כ $-x,-y\geq0$ ולכן מהמקרה הראשון נובע שמתקיים:

$$\exp(-(x+y))=\exp(-x)\cdot\exp(-y)$$

ומאותם נימוקים שבמקרה הקודם נקבל:

$$\exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)$$

■

מסקנה 8.10. לכל $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\exp(x_k)$$

טענה 8.11. לכל $q\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\exp(q)=e^q$.

הוכחה. יהי $q\in\mathbb{Q}$ ויהיו $n\in\mathbb{N}$ ו-$m\in\mathbb{Z}$ כך ש-$q=\frac{m}{n}$.

$$\Rightarrow\exp(m)=\exp\left(\sum_{i=1}^{m}1\right)=\prod_{i=1}^{m}\exp(1)=\prod_{i=1}^{m}e=e^m$$
$$\Rightarrow e=\exp(1)=\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\right)=\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

מיחידות השורש נובע ש-$\exp\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt[n]{e}=e^{\frac{1}{n}}$.

$$\Rightarrow\exp(q)=\exp\left(\frac{m}{n}\right)=\exp\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{n}\right)=\prod_{i=1}^{m}\exp\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$=\prod_{i=1}^{m}e^{\frac{1}{n}}=\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^m=e^{\frac{m}{n}}=e^q$$

■

למה 8.12. לכל $x\in(-1,1)$ מתקיים:

$$1+x\leq\exp(x)\leq\frac{1}{1-x}$$

הוכחה. את אי-השוויון השמאלי כבר הוכחנו ומאותה סיבה מתקיים $\exp(-x) \geq 1 - x$, ולכן:

$$\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x) \geq 1 - x$$

כלומר:

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$$

■

טענה 8.13. exp רציפה ב-0.

הוכחה. מאריתמטיקה של רציפות נובע שמתקיים:

$$\lim_{x\to 0}(1+x) = 1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x} = 1$$

מכאן שע"פ הלמה (8.12) ומשפט הכריך מתקיים גם:

$$\lim_{x\to 0}\exp(x) = 1 = \exp(0)$$

כלומר exp רציפה ב-0. ■

טענה 8.14. exp רציפה בכל $\mathbb{R}$.

הוכחה. יהי $a \in \mathbb{R}$, ראינו שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\exp(a+x) = \exp(a)\cdot\exp(x)$ ולכן מהרציפות של exp ב-0 ומאריתמטיקה של רציפות נובע שמתקיים:

$$\lim_{x\to 0}\exp(a+x) = \exp(a)\cdot\lim_{x\to 0}\exp(x) = \exp(a)\cdot 1 = \exp(a)$$

וממילא:

$$\lim_{x\to a}\exp(x) = \exp(a)$$

כלומר exp רציפה ב-a ומכיוון שהוא היה שרירותי נדע ש-exp רציפה בכל $\mathbb{R}$. ■

טענה 8.15. exp היא פונקציה עולה ממש.

הוכחה. יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ כך ש-$x < y$.

$$\Rightarrow \exp(y) = \exp(x + (y-x)) = \exp(x)\cdot\exp(y-x)$$
$$\geq \exp(x)\cdot(1+y-x) > \exp(x)$$

■

טענה 8.16. מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}\exp(x) = \infty, \quad \lim_{x\to -\infty}\exp(x) = 0$$

הוכחה. ראינו שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\exp(x) \geq 1+x$, והרי $\lim_{x\to\infty}(1+x) = \infty$ ומכאן שע"פ כלל הפרוסה מתקיים $\lim_{x\to\infty}\exp(x) = \infty$.
בנוסף ראינו שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\exp(x)=\lim_{x\to\infty}\exp(-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\exp(x)}=0$$

■

מסקנה 8.17. $\exp$ חח"ע ועל ומכאן שהיא הפיכה.

8.3 הלוגריתם הטבעי

טענה 8.18. ממשפט 7.6 נובע שגם $\ln$ עולה ממש.

טענה 8.19. לכל $0<x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים $\ln(x\cdot y)=\ln(x)+\ln(y)$.

הוכחה. יהיו $0<x,y\in\mathbb{R}$, מתקיים:

$$\exp(\ln(x)+\ln(y))=\exp(\ln(x))\cdot\exp(\ln(y))=x\cdot y$$

$$\Rightarrow \ln(x\cdot y)=\ln(\exp(\ln(x)+\ln(y)))=\ln(x)+\ln(y)$$

■

מסקנה 8.20. לכל $0<x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)$$

למה 8.21. לכל $0<a\in\mathbb{R}$ וכל $q\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\ln(a^q)=q\cdot\ln(a)$.

הוכחה. יהי $0<a\in\mathbb{R}$.
לכל $m\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\ln(a^m)=\ln\left(\prod_{i=1}^{m}a\right)=\sum_{i=1}^{m}\ln(a)=m\cdot\ln(a)$$

ומכיוון שלכל $0>m\in\mathbb{Z}$ מתקיים:

$$0=\ln(1)=\ln\left(a^m\cdot a^{-m}\right)=\ln(a^m)+\ln\left(a^{-m}\right)$$

נדע שמתקיים:

$$\ln(a^m)=-\ln\left(a^{-m}\right)=-(-m\cdot\ln(a))=m\cdot\ln(a)$$

בנוסף מתקיים:

$$\ln\left(a^0\right)=\ln(1)=0=0\cdot\ln(a)$$

ולסיכום נוכל לומר שלכל $m\in\mathbb{Z}$ מתקיים $\ln(a^m)=m\cdot\ln(a)$.
מהנ"ל נובע שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\ln(a)=\ln\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)=n\cdot\ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right)$$

ומכאן שגם:

$$\ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\cdot\ln(a)$$

כעת יהי $q \in \mathbb{Q}$ ויהיו $m \in \mathbb{Z}$ ו-$n \in \mathbb{N}$ כך ש-$q = \frac{m}{n}$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \ln\left(a^q\right) &= \ln\left(a^{\frac{m}{n}}\right) = \ln\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right) = m \cdot \ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= m \cdot \frac{1}{n} \cdot \ln(a) = \frac{m}{n} \cdot \ln(a) = q \cdot \ln(a)\end{aligned}$$

■

מסקנה 8.22. לכל $0 < a \in \mathbb{R}$ ולכל $q \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\exp(q \cdot \ln(a)) = a^q$.

8.4 חזקה ממשית ולוגריתמים בבסיסים שונים מ-e

משפט 8.23. חוקי חזקות כשהמעריך ממשי

יהיו $0 < a, b \in \mathbb{R}$, לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
2. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
3. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
4. אם $0 < a < b$ ו-$0 < x$ אז $a^x < b^x$, כמו כן אם $0 < a < b$ ו-$x < 0$ אז $a^x > b^x$.
5. אם $1 < a$ ו-$x < y$ אז $a^x < a^y$.
6. אם $0 < a < 1$ ו-$x < y$ אז $a^x > a^y$.

הוכחה. יהיו $x, y \in \mathbb{R}$.

1.

$$\begin{aligned}a^{x+y} &= \exp((x+y) \cdot \ln(a)) = \exp(x \cdot \ln(a) + y \cdot \ln(a)) \\ &= \exp(\ln(a^x) + \ln(a^y)) = \exp(\ln(a^x)) \cdot \exp(\ln(a^y)) = a^x \cdot a^y\end{aligned}$$

2.

$$(a^x)^y = \exp(y \cdot \ln(a^x)) = \exp(x \cdot y \cdot \ln(a)) = a^{x \cdot y}$$

3.

$$\begin{aligned}(a \cdot b)^x &= \exp(x \cdot \ln(a \cdot b)) = \exp(x \cdot (\ln(a) + \ln(b))) \\ &= \exp(x \cdot \ln(a) + x \cdot \ln(b)) \\ &= \exp(x \cdot \ln(a)) \cdot \exp(x \cdot \ln(b)) = a^x \cdot b^x\end{aligned}$$

4. נניח ש-$0 < a < b$ ומכאן ש-$\ln(a) < \ln(b)$.

- אם $0 < x$ אז $x \cdot \ln(a) < x \cdot \ln(b)$ ולכן גם $\exp(x \cdot \ln(a)) < \exp(x \cdot \ln(b))$, כלומר $a^x < b^x$.
- אם $0 > x$ אז $x \cdot \ln(a) > x \cdot \ln(b)$ ולכן גם $\exp(x \cdot \ln(a)) > \exp(x \cdot \ln(b))$, כלומר $a^x > b^x$.

5. נניח ש-$1 < a$ ו-$x < y$, א"כ $0 = \ln(1) < \ln(a)$ ולכן $x \cdot \ln(a) < y \cdot \ln(a)$ וממילא $\exp(x \cdot \ln(a)) < \exp(y \cdot \ln(a))$, כלומר $a^x < a^y$.
6. נניח ש-$0 < a < 1$ ו-$x < y$, א"כ $0 = \ln(1) > \ln(a)$ ולכן $x \cdot \ln(a) > y \cdot \ln(a)$ וממילא $\exp(x \cdot \ln(a)) > \exp(y \cdot \ln(a))$, כלומר $a^x > a^y$.

■

מסקנה 8.24. יהי $0 < a \in \mathbb{R}$ ונגדיר את הפונקציה $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ע"י $f(x) = a^x$ (לכל $x \in \mathbb{R}$);

- אם $1 < a$ אז f עולה ממש.
- אם $a < 1$ אז f יורדת ממש.
- אם $a = 1$ אז f פונקציה קבועה ($f(x) = 1$ לכל $x \in \mathbb{R}$).

מכאן נסיק שאם $a \neq 1$ אז f חח"ע ועל וממילא הפיכה.

מסקנה 8.25. יהי $0 < a \in \mathbb{R}$ שונה מ-1, אם $1 < a$ אז $\log_a$ עולה ממש ואם $a < 1$ אז $\log_a$ יורדת ממש.

מסקנה 8.26. יהי $0 < a \in \mathbb{R}$ שונה מ-1.

- אם $1 < a$ אז $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ ו-$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, וכמו כן $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = \infty$ ו-$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$.
- אם $a < 1$ אז $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ ו-$\lim_{x\to-\infty} a^x = -\infty$, וכמו כן $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = -\infty$ ו-$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \infty$.

טענה 8.27. לכל $0 < a \in \mathbb{R}$ השונה מ-1 ולכל $0 < x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

הוכחה. יהי $0 < a \in \mathbb{R}$ שונה מ-1 ותהא $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(x) = a^x$ (לכל $x \in \mathbb{R}$), א"כ f הפיכה ו-$\log_a$ היא ההופכית שלה.
לכל $0 < x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$f\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = \exp\left(\frac{\ln x}{\ln a} \cdot \ln(a)\right) = \exp(\ln(x)) = x$$

ומכאן שגם:

$$\log_a(x) = \log_a\left(f\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)\right) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

■

משפט 8.28. חוקי לוגריתמים
יהיו $0 < a, b, c, d \in \mathbb{R}$ כך ש-a ו-b שונים מ-1, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $\log_b(c) = \frac{\log_a(c)}{\log_a(b)}$.
2. $\log_a(c \cdot d) = \log_a(c) + \log_a(d)$[15].
3. $\log_a\left(\frac{c}{d}\right) = \log_a(c) - \log_a(d)$.
4. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\log_a(c^x) = x \cdot \log_a(c)$.

הוכחה.

1.
$$\frac{\log_a(c)}{\log_a(b)} = \left(\frac{\ln c}{\ln a}\right) \cdot \left(\frac{\ln b}{\ln a}\right)^{-1} = \frac{\ln c}{\ln b} = \log_b(c)$$

2.
$$\log_a(c) + \log_a(d) = \frac{\ln c + \ln d}{\ln a} = \frac{\ln(c \cdot d)}{\ln(a)} = \log_a(c \cdot d)$$

3.
$$\begin{aligned}\log_a(c) - \log_a(d) &= \log_a(c) + (-1) \cdot \log_a(d) \\ &= \frac{\ln c - \ln d}{\ln a} = \frac{\ln c + \ln\left(d^{-1}\right)}{\ln a} \\ &= \frac{\ln\left(c \cdot d^{-1}\right)}{\ln a} = \frac{\ln\left(\frac{c}{d}\right)}{\ln a} = \log_a\left(\frac{c}{d}\right)\end{aligned}$$

4. יהי $x \in \mathbb{R}$,
$$\Rightarrow x \cdot \log_a(c) = x \cdot \frac{\ln c}{\ln a} = \frac{x \cdot \ln c}{\ln a} = \frac{\ln(c^x)}{\ln a} = \log_a(c^x)$$

■

9 רציפות במידה שווה

צריך להוסיף הוכחות בפרק זה.

תהא f פונקציה המוגדרת על מקטע $I \subseteq \mathbb{R}$.

טענה 9.1. אם f רציפה במידה שווה על I אז f רציפה במידה שווה על כל מקטע $J \subseteq I$.

משפט 9.2. אם f רציפה במידה שווה על I אז f גם רציפה ב-I.

[15] ניתן להסיק מכאן (באינדוקציה) גם ליותר משני מוכפלים.

משפט 9.3. אם f רציפה במידה שווה על I אז לכל סדרה מתכנסת $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ שכל איבריה ב-I גם הסדרה $\left(f\left(a_n\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת.

♣ שימו לב: העובדה ש-$\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ושכל איבריה ב-I אינה אומרת שגם $\lim_{n\to\infty} a_n$ נמצא ב-I, מסיבה זו המשפט אינו נכון לכל פונקציה רציפה.
לדוגמה: הפונקציה $\frac{1}{x}$ רציפה בקטע $(0,1]$ ו-$\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת שכל איבריה ב-$(0,1]$ אך $\lim_{n\to\infty} f\left(a_n\right)=\infty$.

משפט 9.4. "אפיון היינה" לרציפות במידה שווה של פונקציה

f רציפה במידה שווה על I אם"ם לכל שתי סדרות $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ ו-$\left(y_n\right)_{n=1}^{\infty}$ שכל איבריהן ב-I המקיימות $\lim_{n\to\infty}\left|x_n-y_n\right|=0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left|f\left(x_n\right)-f\left(y_n\right)\right|=0$.

משפט 9.5. אריתמטיקה של רציפות במידה שווה

נניח ש-f רציפה במידה שווה על I ותהא g גם היא פונקציה רציפה במידה שווה על I (ובפרט מוגדרת בו).

1. $f+g$ רציפה במידה שווה על I.
2. אם f ו-g חסומות ב-I אז $f\cdot g$ רציפה במידה שווה על I.
3. אם קיים $0<c\in\mathbb{R}$ כך ש-$|g(x)|\geq c$ לכל $x\in I$ אז $\frac{1}{g}$ רציפה במידה שווה על I.
4. אם f חסומה ב-I וגם קיים $0<c\in\mathbb{R}$ כך ש-$|g(x)|\geq c$ לכל $x\in I$ אז $\frac{f}{g}$ רציפה במידה שווה על I.

משפט 9.6. נניח ש-f רציפה במידה שווה על I ותהא $g:\operatorname{Im}f\to\mathbb{R}$ גם היא פונקציה רציפה במידה שווה על $\operatorname{Im}f$[16], גם הפונקציה $g\circ f$ רציפה במידה שווה על I.

משפט 9.7. נניח ש-I הוא קטע פתוח ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$I=(a,b)$, אם f רציפה במידה שווה על I אז הגבולות $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ו-$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ קיימים.

מסקנה 9.8. "משפט ויירשטראס" לרציפות במידה שווה

נניח ש-I הוא קטע פתוח, אם f רציפה במידה שווה על I אז f חסומה ב-I.

מסקנה 9.9. נניח ש-f רציפה במידה שווה על I,

- אם $I=(a,\infty)$ (עבור $a\in\mathbb{R}$ כלשהו) אז הגבול $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ קיים
- אם $I=(-\infty,a)$ (עבור $a\in\mathbb{R}$ כלשהו) אז הגבול $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ קיים.

משפט 9.10. תהא $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, אם ל-g יש אסימפטוטות משופעות ב-$\pm\infty$ אז g רציפה במידה שווה על כל $\mathbb{R}$.

מסקנה 9.11. נניח ש-f רציפה ב-I,

- אם I היא קרן ימנית ול-f יש אסימפטוטה משופעת ב-∞ אז f רציפה במידה שווה על I.
- אם I היא קרן שמאלית ול-f יש אסימפטוטה משופעת ב-$-\infty$ אז f רציפה במידה שווה על I.

משפט 9.12. משפט קנטור

נניח ש-I הוא קטע סגור, אם f רציפה ב-I אז f רציפה במידה שווה על I.

---

[16] מהעובדה ש-I הוא מקטע ו-f רציפה (משפט 9.2) נובע שגם $\operatorname{Im}f$ הוא מקטע.

הוכחה. נניח ש-f רציפה ב-I ונניח בשלילה ש-f אינה רציפה במ"ש על I, א"כ קיים $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ וקיימות שתי סדרות $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(y_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ וגם $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ לכל $n \in \mathbb{N}$; יהי ε ושתי סדרות $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(y_n)_{n=1}^{\infty}$ כנ"ל.
ע"פ משפט בולצאנו-ויירשטראס יש ל-$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ תת-סדרה $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת[17], תהא $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת אינדקסים עולה ממש כך ש-$(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ונסמן את גבולה ב-x_0.
מהעובדה שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ נובע שגם הסדרה $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-x_0.
בנוסף, מהעובדה שכל איברי $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ נמצאים בקטע **הסגור** I נובע שגם $x_0 \in I$.[18]
מרציפות של f ומאפיון היינה לרציפות נובע כי:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(x_0)$$

ולכן מאריתמטיקה של גבולות נובע שמתקיים:

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0$$

וזאת בסתירה לכך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ ובפרט לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$.
מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-f רציפה במ"ש על I. ■

טענה 9.13. יהיו $I_1, I_2, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ מקטעים, נסמן $A := I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ ותהא g פונקציה המוגדרת ב-A, אם לכל $n \geq k \in \mathbb{N}$ הפונקציה g רציפה במידה שווה על I_k אז g רציפה במידה שווה על A.[19]

מסקנה 9.14. תהא $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה, אם g מחזורית ורציפה אז g רציפה במידה שווה על כל $\mathbb{R}$.

משפט 9.15. תנאי ליפשיץ[20]
אם קיים $K \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x_1, x_2 \in I$ שונים זה מזה ($x_1 \neq x_2$) מתקיים $\left|\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leq K$ אז f רציפה במידה שווה על I.

♣ תנאי ליפשיץ הוא תנאי מספיק לרציפות במידה שווה אך אינו תנאי הכרחי, לדוגמה הפונקציה המעתיקה את x ל-$\sqrt{x}$ בקטע $[0,1]$ היא פונקציה רציפה במידה שווה מפני שהיא פונקציה רציפה על קטע סגור[21] אך לכל $0 < K \in \mathbb{R}$ קיים $x \in [0,1]$ כך שמתקיים:

$$\left|\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0}\right| = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} > K$$

הוכחה. יהי K כנ"ל (אם אין K כזה אז המשפט מתקיים באופן ריק), מהגדרה $K \geq 0$.
יהי $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ונבחר $\delta := \frac{\varepsilon}{K}$, א"כ $K \cdot \delta = \varepsilon$.
יהיו $x_1, x_2 \in I$ כך ש-$|x_1 - x_2| < \delta$, אם $x_1 = x_2$ אז ודאי שמתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| = 0 < \varepsilon$ ולכן נוכל לעסוק רק במקרה שבו $x_1 \neq x_2$.

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq K \cdot |x_1 - x_2| < K \cdot \delta = \varepsilon$$

■

מסקנה 9.16. אם f גזירה ב-I[22] ו-f' חסומה ב-I אז f רציפה במידה שווה על I.

[17] הסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מכיוון שכל איבריה בקטע I.
[18] הטענה הזו אינה נכונה לו היה מדובר בקטע פתוח או חצי פתוח.
[19] לשם כך נגדיר רציפות במידה שווה על איחוד מקטעים בצורה הבאה: g תיקרא רציפה במידה שווה על A אם לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיימת $0 < \delta \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x_1, x_2 \in A$ המקיימים $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.
שימו לב לכך שאם A היא מקטע בעצמה (בנוסף לכך שהיא איחוד מקטעים) אז ההגדרה מתלכדת עם ההגדרה הרגילה.
[20] ערך בוויקיפדיה: רודולף ליפשיץ, ראו גם תנאי ליפשיץ.
[21] ראו את משפט קנטור להלן.
[22] אם I סגור באחד הקצוות אז מדובר בגזירות חד-צדדית בקצה כזה.