אינטגרלים על יריעות - הגדרות בלבד

אנליזה על יריעות - 80416

מרצה: אור הרשקוביץ

מתרגל: או קדר

סוכם ע"י שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ד, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

1 יריעות פרמטריות

הגדרה 1.1. יריעה פרמטרית k-ממדית היא קבוצה $X\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבור $n\geq k$, יחד עם העתקה $\phi:U\to\mathbb{R}^{n}$ מקבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}^{k}$ ל-$\mathbb{R}^{n}$ המקיימת $X=\phi\left(U\right)$[1]; ההעתקה ϕ תיקרא פרמטריזציה של X.

♣ הגדרה זו עדיין אינה מספקת אותנו:

1. כפי שראינו כשעסקנו במסילות, X יכולה שלא להיראות "חלקה" אפילו אם ϕ חלקה.
2. ייתכן ש-ϕ אינה חח"ע ולכן אינה יכולה לשמש אותנו על מנת להגדיר קואורדינטות על X.
3. גרוע מכל אלו הוא ש-X עלולה להיות בעלת ממד נמוך יותר מ-k (מבחינה אינטואיטיבית) - אף אחד אינו מפריע ל-ϕ להיות בעלת משתנה "סרק" (כזה שהיא אינה תלויה בו, לדוגמה: $\phi\left(x,y,z\right):=x+y$).

תהיינה $X\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-ממדית ו-$\phi:U\to\mathbb{R}^{n}$ פרמטריזציה של X.

הגדרה 1.2. תהיינה $V\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה פתוחה ופונקציה $\varphi:V\to\mathbb{R}^{n}$, נאמר ש-$\varphi$ היא רה-פרמטריזציה של X אם קיים דיפאומורפיזם $\psi:V\to U$ כך ש-$\phi=\varphi\circ\psi$.

♣ נרצה כעת להגדיר אינטגרל של פונקציה על יריעה ($f:X\to\mathbb{R}$), הבעיה היא שבניגוד ל-$\mathbb{R}^{n}$ שעבורו היה קל לנו להכליל את ההגדרה של אינטגרל רימן, כעת הדבר בלתי אפשרי[2]. הפתרון הוא כמובן להשתמש בפרמטריזציה כפי שעשינו עם מסילות: נרצה שהאינטגרל של f על X יהיה האינטגרל של $f\circ\phi$ על U. אבל... רגע, לא שכחנו משהו? האינטואיציה של משפט חילוף משתנה דורשת "תיקון" בדמות הערך המוחלט של יעקוביאן בכל נקודה, סיבה נוספת לדרוש זאת היא כדי שהאינטגרל לא יהיה תלוי בפרמטריזציה.
אלא שכעת אנו נתקלים בבעיה קטנה: ייתכן שהדטרמיננטה אינה מוגדרת על הנגזרת של ϕ מפני ש-$n\geq k$; נעזוב לרגע את הבעיה הזו ונניח שפתרנו אותה, כלומר יש לנו פונקציה $V:M_{n\times k}\left(\mathbb{R}\right)\to\mathbb{R}$ המקיימת את הנדרש, א"כ ההגדרה המתבקשת היא:

$$\int\limits_{X}f\ \mathrm{dVol}_{k}=\int\limits_{U}f\left(\phi\left(x\right)\right)\cdot V\left(D\phi_{x}\right)dx$$

♣ הבעיה שראינו בהערה הקודמת מצביעה על כך שהגדרת הדטרמיננטה אינה עונה על כל השאלות המצופות ממנה: יש משמעות לשאלה "עד כמה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}^{n}$ מותחת/מכווצת את המרחב?" גם אם $n\neq k$, אך הדטרמיננטה אינה יכולה לענות עליה.
הרעיון של ההגדרה הבאה הוא כזה: העובדה ש-T מחזירה וקטורים באורך n סימאה את עינינו, קיים תמ"ו $W\subseteq\mathbb{R}^{n}$ כך ש-$\dim W=k$ ו-$\mathrm{Im}T\subseteq W$, א"כ T היא העתקה ליניארית בין מרחבים מממד זהה ולכן ניתן להפעיל עליה את הדטרמיננטה! אלא שכאן עלינו להיזהר, הדטרמיננטה מוגדרת היטב על אופרטורים ליניאריים בין מרחב לעצמו - מייצגים את האופרטור בבסיס **כלשהו**[3] של אותו מרחב ולוקחים את הדטרמיננטה של המטריצה; אבל כאן נזדקק לשני בסיסים כדי לייצג את T במטריצה, ומי ערב לנו שבחירה שונה של בסיס באחד המרחבים לא תיתן תוצאה שונה?

[1] מבחינה פורמלית X לבדה אינה יריעה פרמטרית k-ממדית, אלא הזוג הסדור (X,ϕ) הוא המהווה יריעה כזו.
[2] אי אפשר להשתמש ישירות באינטגרל שהגדרנו באינפי' 3 מפני ש-X k-ממדית ולכן ממידה אפס ב-$\mathbb{R}^{n}$ (אלא אם $n=k$).
[3] הדטרמיננטה של מטריצות דומות זהה ולכן זה לא משנה איזה בסיס נבחר.

♣ כדי לפתור את הבעיה עלינו להבין אותה לעומק, ההבדל בין שני המקרים הוא כזה:

- בהינתן אופרטור $f:V\to V$ מעבר מבסיס $\mathcal{B}$ לבסיס $\mathcal{C}$ מתבצע ע"י $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}=[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\cdot[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\cdot[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, מהכפליות של הדטרמיננטה נובע כי:

$$\begin{aligned}\det\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right)&=\det\left([\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\cdot[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\cdot[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)=\det\left([\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)\cdot\det\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)\cdot\det\left([\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)\\&=\det\left(\left([\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1}\right)\cdot\det\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)\cdot\det\left([\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)\\&=\left(\det\left([\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)\right)^{-1}\cdot\det\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)\cdot\det\left([\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)=\det\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)\end{aligned}$$

- לעומת זאת בהינתן העתקה ליניארית $T:V\to W$, בסיסים $\mathcal{B}_1$ ו-$\mathcal{B}_2$ של V ובסיסים $\mathcal{C}_1$ ו-$\mathcal{C}_2$ של W, המעבר מ-$[T]_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{B}_1}$ ל-$[T]_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{B}_2}$ מתבצע ע"י:

$$[T]_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{B}_2}=[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_1}\cdot[T]_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{B}_1}\cdot[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$$

וכאן הכפליות של הדטרמיננטה אינה עוזרת לנו מפני שאין כל ערובה לכך ש-$\det\left([\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_1}\right)\cdot\det\left([\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\right)=1$.

א"כ עלינו להוסיף דרישה על הבסיסים שבהם אנו מייצגים את T כך שמעבר בסיסים לא ישנה את הדטרמיננטה, וכזו נמצאה לנו בדמות דרישה שהבסיסים יהיו אורתונורמליים, שאז המטריצות המייצגות של מעברי הבסיסים תהיינה מטריצות אורתוגונליות שהדטרמיננטה שלהן היא 1.

הגדרה 1.3. תהא $T:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ העתקה ליניארית כך ש-$n\le k$, ויהיו $u_1,u_2,\ldots,u_{\mathrm{rk}T}\in\mathrm{Im}T$ כך ש-$(u_1,u_2,\ldots,u_{\mathrm{rk}T})$ הוא בסיס אורתונורמלי של $\mathrm{Im}T$, יהי $W\subseteq\mathbb{R}^n$ תמ"ו כך ש-$\mathrm{Im}T\subseteq W$ ו-$\dim W=k$, ויהיו $u_{\mathrm{rk}T+1},u_{\mathrm{rk}T+2},\ldots,u_k\in W$ כך ש-$\mathcal{C}:=(u_1,u_2,\ldots,u_k)$ הוא בסיס אורתונורמלי של W, ויהי $\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^k$. נסמן:

$$V(T):=\det\left([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)$$

ובאותו אופן נסמן $V(A):=V(T_A)$ לכל $A\in M_{n\times k}(\mathbb{R})$.

♣ הסברנו לעיל מדוע V אינה תלויה בבחירת הבסיסים.

♣ א"כ מצאנו העתקה שתחליף את הדטרמיננטה במדידת פקטור המתיחה/כיווץ של העתקה ליניארית.

♣ נשים לב לכך שאם $k=n$ אז V מזדהה עם הדטרמיננטה.

טענה. לכל העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ כך ש-$k\le n$ מתקיים $V\left(T\right)=\sqrt{\det\left(T^{*}\circ T\right)}$[4], וכמו כן לכל מטריצה $A\in M_{n\times k}\left(\mathbb{R}\right)$ מתקיים $V\left(A\right)=\sqrt{\det\left(A^{t}\cdot A\right)}$.

מסקנה. יהי $\psi:V\to U$ דיפאומורפיזם, ותהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$; מתקיים:

$$\int\limits_{U}f\left(\phi\left(x\right)\right)\cdot V\left(D\phi_{x}\right)dx=\int\limits_{V}f\left(\phi\left(\psi\left(y\right)\right)\right)\cdot V\left(D\left(\phi\circ\psi\right)_{y}\right)dy$$

כלומר אם אחד האינטגרלים מוגדר אז גם האחר מוגדר והם שווים.

הגדרה 1.4. תהא $f:X\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, האינטגרל ה-k-ממדי של f על X הוא:

$$\int\limits_{X}f\ \ \mathrm{dVol}_{k}:=\int\limits_{U}f\left(\phi\left(x\right)\right)\cdot V\left(D\phi_{x}\right)dx$$

וכמו כן נגדיר את הנפח ה-k ממדי של X ע"י $\mathrm{Vol}_{k}\left(X\right):=\int_{U}V\left(D\phi_{x}\right)dx$.
ייתכן שהאינטגרל ה-k-ממדי של f על X ו/או הנפח ה-k-ממדי של X אינם מוגדרים משום שהאינטגרלים הנ"ל אינם מוגדרים.

הגדרה 1.5. נאמר ש-(X,ϕ) רגולרית בנקודה $x\in U$ אם $\mathrm{rk}\left(D\phi_{x}\right)=k$, וכמו כן נאמר במקרה כזה ש-x היא נקודה רגולרית של (X,ϕ); בנוסף, אם ϕ חח"ע נאמר גם ש-(X,ϕ) רגולרית בנקודה $p\in X$ אם היא רגולרית ב-$\phi^{-1}\left(p\right)$, וכמו כן נאמר במקרה כזה ש-p היא נקודה רגולרית של (X,ϕ).
(X,ϕ) תיקרא רגולרית אם היא רגולרית בכל U.

♣ כמו בחלק הקודם שעסק במסילות, גם כאן הגדרת הרגולריות באה למנוע מצב שבו ϕ חלקה אבל X אינה כזו (מבחינה אינטואיטיבית), ובקובץ הטענות אנחנו נראה טענה מקבילה לזו שבחלק הקודם האומרת שבסביבת נקודה רגולרית X נראית כמו גרף של פונקציה חלקה ולפיכך ברור שהיא "חלקה" מבחינה אינטואיטיבית; בכך אנו פותרים את הבעיה הראשונה שראינו בהגדרת יריעה k-ממדית.
הגדרת הרגולריות פותרת גם את הבעיה השלישית בהגדרת היריעה ה-k ממדית: לו היה ל-ϕ משתנה "סרק" נגזרתה לא הייתה יכולה להיות מדרגה מלאה מפני שהנגזרת החלקית לפי משתנה זה מתאפסת.
בנוסף, ממשפט הפונקציה ההפוכה נובע ש-ϕ חח"ע בסביבה של כל נקודה רגולרית, כלומר גם הבעיה השנייה נפתרת באופן מקומי.

הגדרה 1.6. נניח ש-(X,ϕ) רגולרית בנקודה $x\in U$, המרחב המשיק ל-(X,ϕ) ב-x מוגדר ע"י $T_{x}\left(X\right):=\mathrm{Im}\left(D\phi_{x}\right)$, וכל וקטור $v\in T_{x}\left(X\right)$ נקרא וקטור משיק; בנוסף אם ϕ חח"ע נגדיר את המרחב המשיק ל-(X,ϕ) ב-$\phi\left(x\right)$ ע"י $T_{\phi(x)}\left(X\right):=T_{x}\left(X\right)$.

♣ למעשה מבחינה גאומטרית המרחב המשיק בנקודה רגולרית $x\in U$ הוא הישריה $\phi\left(x\right)+\mathrm{Im}\left(D\phi_{x}\right)$, אך אנחנו נראה בהמשך שההגדרה הנ"ל תהיה נוחה יותר. על כל פנים זהו המושג היחיד שאינו מכליל את המקביל לו בחלק הקודם שעסק במסילות, ששם הגדרנו את הישר המשיק ממש ע"פ הגאומטריה.

מסקנה 1.7. המרחב המשיק אינו תלוי בפרמטריזציה, שכן ע"פ כלל השרשרת לכל דיפאומורפיזם $\psi:V\to U$ מתקיים:

$$\mathrm{Im}\left(D\phi_{x}\right)=\mathrm{Im}\left(D\phi_{x}\circ D\psi_{\psi^{-1}(x)}\right)=\mathrm{Im}\left(D\left(\phi\circ\psi\right)_{\psi^{-1}(x)}\right)$$

---

[4] T^{*} היא ההעתקה הצמודה של T (הוגדרה בליניארית 2), אין שום עניין לזכור זאת כאן - מי שלא זוכר יכול להסתפק בעובדה ש-T^{*} היא ההעתקה הליניארית המקיימת $\left([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^{t}=[T^{*}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ לכל בחירת בסיסים $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ של $\mathbb{R}^{k}$ ו-$\mathbb{R}^{n}$ בהתאמה.

2 יריעות k-ממדיות ב-$\mathbb{R}^n$

♣ בסוף הפרק הקודם ראינו שהרגולריות של פרמטריזציה פותרת את שלוש הבעיות שמצאנו בהגדרה של יריעה פרמטרית k-ממדית, אולם ישנה בעיה נוספת: ייתכן שהפרמטריזציה אינה העתקה פתוחה ובכך אינה שומרת על המבנה של המרחב.

הגדרה 2.1. יריעה חלקה k-ממדית ב-$\mathbb{R}^n$ $(n \geq k)$ היא קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ המקיימת שלכל נקודה $p \in M$ קיימות:

1. קבוצה פתוחה W ב-M[5] כך ש-$p \in W$ (כלומר W היא סביבה פתוחה של p ב-M)
2. קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^k$
3. העתקה חלקה $\alpha : U \to W$ שהיא חח"ע ועל, פתוחה[6], ובעלת נגזרת מדרגה מלאה בכל U

α כזו תיקרא פרמטריזציה מקומית של M בסביבת p, ו-α^{-1} תיקרא קואורדינטות מקומיות של M בסביבת p.

♣ כפי שכבר הזכרנו בפרק הקודם, הדרישה ש-α תהיה בעלת נגזרת מדרגה מלאה בכל U מחייבת שיהיה $k \in \mathbb{N}$ יחיד שיענה על ההגדרה ולכן זוהי אכן הגדרה.

סימון: לעתים נסמן M^k כדי להדגיש ש-M היא יריעה k-ממדית.

תהא $M \subseteq \mathbb{R}^m$ יריעה חלקה k-ממדית, ותהא $p \in M$.

משפט. תהיינה $\alpha : U_1 \to W_1$ ו-$\beta : U_2 \to W_2$ שתי פרמטריזציות מקומיות של M בסביבת p.
נסמן: $W := W_1 \cap W_2$, $U_1' := \alpha^{-1}(W)$ ו-$U_2' := \beta^{-1}(W)$; א"כ W היא סביבה פתוחה של p ב-M, U_1' ו-U_2' הן קבוצות פתוחות ב-$\mathbb{R}^k$, ו-$\beta^{-1} \circ \alpha$ היא דיפאומורפיזם בין U_1' ל-U_2'. בפרט $\left(W, \beta\mid_{U_2'}\right)$ היא רה-פרמטריזציה של $\left(W, \alpha\mid_{U_1'}\right)$ ולהפך.

מסקנה. תהיינה $\alpha : U_1 \to W_1$ ו-$\beta : U_2 \to W_2$ שתי פרמטריזציות מקומיות של M בסביבת p, ונסמן $x := \alpha^{-1}(p)$ ו-$y := \beta^{-1}(p)$; מתקיים:

$$\mathrm{Im}\left(D\alpha_x\right) = \mathrm{Im}\left(D\beta_y\right)$$

הגדרה 2.2. תהא $\alpha : U \to W$ פרמטריזציה מקומית של M בסביבת p, ונסמן $x := \alpha^{-1}(p)$. המרחב המשיק ל-M בנקודה p הוא:

$$T_p(M) := \mathrm{Im}\left(D\alpha_x\right)$$

תהא גם $N \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה חלקה l-ממדית.

הגדרה 2.3 העתקה $f : M \to N$ תיקרא חלקה בנקודה p אם קיימות סביבה פתוחה V של p ב-$\mathbb{R}^m$ (כאן V פתוחה ב-$\mathbb{R}^m$ ולא ב-M), ופונקציה חלקה $\bar{f} : V \to \mathbb{R}^n$ כך ש-$\bar{f}\mid_{V \cap M} = f$ ($\bar{f}$ כזו תיקרא הרחבה מקומית של f בסביבת p); כמו כן נאמר ש-f חלקה אם היא חלקה בכל נקודה ב-M.

טענה. תהא $f : M \to N$ פונקציה חלקה ב-p, ותהיינה $g : V \to \mathbb{R}^n$ ו-$h : W \to \mathbb{R}^n$ הרחבות מקומיות של f בסביבת p, מתקיים:

$$Dg\mid_{T_p(M)} = Dh\mid_{T_p(M)}$$

ובנוסף הצמצום של Dg ו-Dh ל-$T_p(M)$ הוא העתקה ליניארית מ-$T_p(M)$ ל-$T_{f(p)}(N)$.

---

[5] כלומר W פתוחה במרחב המטרי המושרה על M מ-$\mathbb{R}^n$, או במילים אחרות קיימת קבוצה פתוחה $O \subseteq \mathbb{R}^n$ כך ש-$W = O \cap M$.
[6] גם כאן היותה של α פתוחה אומרת שהיא מעתיקה קבוצה פתוחה ב-U לקבוצה פתוחה ב-M (שאינה בהכרח פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$).

הגדרה 2.4. תהא $f:M\to N$ פונקציה חלקה בנקודה p, ותהא $\bar{f}:V\to\mathbb{R}^{n}$ הרחבה מקומית של f בסביבת p; הדיפרנציאל של f ב-p הוא:

$$Df_{p}:=D\bar{f}\mid_{T_{p}(M)}$$

הגדרה 2.5. תהא $f:M\to N$ פונקציה חלקה, נקודה $p\in M$ תיקרא נקודה רגולרית של f אם $Df_{p}\left(T_{p}\left(M\right)\right)=T_{f(p)}\left(N\right)$ (כלומר הדיפרנציאל של f ב-p הוא על).
נקודה $q\in N$ תיקרא ערך רגולרי של f אם כל נקודה $p\in f^{-1}\left(\{q\}\right)$ היא נקודה רגולרית.

♣ נקודות ב-N שאינן ב-$\text{Im}f$ הן תמיד ערכים רגולריים (התנאי מתקיים באופן ריק).

ניתן היה להגדיר "נקודה $q\in\text{Im}f$ תיקרא ערך רגולרי..." ובכך להימנע מעניין זה (אנחנו נראה בהמשך שהעובדה שלא הגדרנו כך תדרוש מאיתנו להוסיף תנאים כדי שהמשפטים אכן יהיו נכונים).

3 מושגים פיזיקליים

צריך להוסיף כאן את המושגים "מרכז מסה" ו-"מומנט אינרציה" (תרגול 4).