סדרות - הגדרות בלבד

חשבון אינפיניטסימלי (1) - 80131

מרצה: רז קופרמן

מתרגלים: אור יער ודניאל רוזנבלט

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 גבול של סדרה

הגדרה 1.1. תהא $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פסוקים לוגיים.

- נאמר ש-P_n מתקיימת באופן שכיח אם לכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $N < n \in \mathbb{N}$ כך ש-$P_n = \text{True}$.
- נאמר ש-P_nמתקיימת ממקום מסוים ואילך/ עבור n גדול דיו/ כמעט תמיד אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $P_n = \text{True}$.

מכאן ואילך כל הסדרות שנדבר עליהן הן סדרות אינסופיות של מספרים ממשיים אלא אם נכתב אחרת.

תזכורת: הגדרנו את הכדור הפתוח שרדיוסו $r \in \mathbb{R}$ מסביב לנקודה $\alpha \in \mathbb{R}$ ע"י $B_r(\alpha) := (\alpha - r, \alpha + r)$.

הגדרה 1.2. גבול של סדרה

- נאמר ש-$L \in \mathbb{R}$ הוא גבול של סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ועבור n גדול דיו מתקיים $a_n \in B_\varepsilon(L)$, כלומר לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.
- בקובץ הטענות נראה שגבול של סדרה הוא יחיד, כלומר אם $\alpha \in \mathbb{R}$ וגם $\beta \in \mathbb{R}$ הם גבולות[1] של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אז $\alpha = \beta$; לכן מוצדק לדבר על הגבול של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ולכתוב:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L,\ \ a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$$

- סדרה תקרא מתכנסת אם יש לה גבול, אחרת תקרא מתבדרת.
  כלומר:
  - סדרה תקרא מתכנסת אם קיים $L \in \mathbb{R}$ כך שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$, במקרה כזה נאמר שהסדרה מתכנסת ל-L.
  - סדרה תקרא מתבדרת אם לכל $L \in \mathbb{R}$ קיים $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ כך שלכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $N < n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $|a_n - L| \geq \varepsilon$.

הסכמה: נסכים שבכל מקום שבו נכתב ביטוי מהצורה $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ או $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ הכוונה היא שהגבול קיים ומתקיים השוויון.

[1] המשפט אינו נכון מבחינה לשונית משום שמדובר במספר אחד ולכן לא שייך לדבר עליו ברבים, אך הכוונה ברורה ולפני שהמשכנו ואמרנו שהם שווים לא ידענו שבהכרח מדובר באותו מספר (לא יכולתי להתאפק...).

2 חסימות וסדר

הגדרה 2.1. סדרות חסומות מלעיל/מלרע

- סדרה תקרא חסומה/חסומה מלעיל/חסומה מלרע אם קבוצת איבריה כזו.
- מספר ממשי ייקרא חסם מלעיל/מלרע של סדרה אם הוא חסם מלעיל/מלרע של קבוצת איבריה.
- מספר ממשי ייקרא חסם עליון/תחתון של סדרה אם הוא חסם מלעיל/מלרע של קבוצת איבריה.

הגדרה 2.2. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תקרא סדרה חיובית/שלילית/אי-שלילית/אי-חיובית אם כל איבריה חיוביים/שליליים/אי-שליליים/אי-חיוביים.

3 אריתמטיקה של גבולות

הגדרה 3.1. סדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ תקרא סדרה חשבונית אם קיים $d \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים $a_{n+1} = a_n + d$, d יקרא הפרש הסדרה.

הגדרה 3.2. סדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$תקרא סדרה הנדסית אם קיים $q \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים $a_{n+1} = a_n \cdot q$, q יקרא מנת הסדרה.

4 גבולות במובן הרחב

הגדרה 4.1. שאיפה ל-$\pm\infty$

- סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תקרא שואפת לאין-סוף אם לכל $M \in \mathbb{R}$ ועבור n גדול דיו מתקיים $a_n > M$,
  כלומר קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n > M$.
  נסמן:
  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$
- סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תקרא שואפת למינוס אין-סוף אם לכל $m \in \mathbb{R}$ ועבור n גדול דיו מתקיים $a_n < m$,
  כלומר קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n < m$.
  נסמן:
  $$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$
- אם סדרה שואפת ל-$\pm\infty$ נאמר שהיא מתכנסת במובן הרחב וש-$\pm\infty$ הוא גבול שלה במובן הרחב.

♣ חשוב לשים לב: סדרות השואפות לאין-סוף / למינוס אין-סוף הן סדרות מתבדרות.

5 מונוטוניות

הגדרה 5.1. סדרות מונוטוניות

- סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תקרא מונוטונית עולה אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$.
- סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תקרא עולה ממש[2] אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} > a_n$.
- סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תקרא מונוטונית יורדת אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \leq a_n$.
- סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תקרא יורדת ממש אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} < a_n$.

6 תתי-סדרות וגבולות חלקיים

הגדרה 6.1. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר שסדרה $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ היא תת-סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, אם קיימת סדרה $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ עולה ממש שכל איבריה טבעיים (סדרת אינדקסים) כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $b_k = a_{n_k}$.

הגדרה 6.2. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

- נאמר ש-$\alpha \in \mathbb{R}$ הוא גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם יש ל-$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תת-סדרה ש-α הוא גבול שלה,
  כלומר קיימת סדרה $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ עולה ממש שכל איבריה טבעיים (סדרת אינדקסים) כך ש-$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$.
- כמו כן נאמר ש-$\pm\infty$ הוא גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם יש ל-$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תת-סדרה השואפת ל-$\pm\infty$,
  כלומר קיימת סדרה $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ עולה ממש שכל איבריה טבעיים (סדרת אינדקסים) כך ש-$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \pm\infty$.

הגדרה 6.3. לכל סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, אינדקס $n \in \mathbb{N}$ יקרא אינדקס שיא אם לכל $n < k \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_k \leq a_n$.

7 גבול עליון וגבול תחתון

הגדרה 7.1. [3] תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה ותהא A קבוצת הגבולות החלקיים של סדרה זו[4], $\sup A$ ייקרא הגבול התחתון של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$\inf A$ ייקרא הגבול התחתון של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
נסמן:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \limsup_{n\to\infty} a_n := \sup A$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \liminf_{n\to\infty} a_n := \inf A$$

מסקנה 7.2. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם"ם $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

[2] יש אומרים מונוטונית עולה ממש וכן לגבי מונוטונית יורדת ממש.
[3] נושא זה נלמד באינפי' 2 (יורם לסט, סמסטר א' תשפ"ג).
[4] ממשפט בולצאנו-ויירשטראס נובע ש-A אינה ריקה ומכאן שיש לה סופרמום ואינפימום.

הגדרה 7.3. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

1. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אינה חסומה מלעיל נגדיר:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \limsup_{n\to\infty} a_n := \infty$$

2. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ נגדיר[5]:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \liminf_{n\to\infty} a_n := \infty$$

3. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אינה חסומה מלרע נגדיר:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \liminf_{n\to\infty} a_n := -\infty$$

4. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ נגדיר:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \limsup_{n\to\infty} a_n := -\infty$$

♣ כעת לכל סדרה יש גבול עליון וגבול תחתון.

♣ באופן כללי אין אריתמטיקה של גבולות עבור גבול עליון/תחתון, שהרי מדובר בגבול חלקי של הסדרה, כלומר גבול של תת-סדרה והאינדקסים של זו לא מוכרחים להסתדר עם האינדקסים המתאימים בסדרה האחרת; בנוסף ייתכן שתתי-סדרות אחרות הן שתהפוכנה לאלו שהגבול שלהן הוא הגבול העליון/תחתון לאחר הפעולה האריתמטית. בקובץ הטענות נראה פירוט ודוגמאות בנושא זה.

8 תנאי קושי

הגדרה 8.1. נאמר שסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא <u>סדרת קושי</u> אם לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

[5] אחרת יש לקבוצת הגבולות החלקיים חסם תחתון והוא הגבול התחתון או שהיא אינה חסומה מלרע ואז (כפי שנראה בסעיף הבא) הגבול התחתון הוא $-\infty$.