מרחבים מטריים - הגדרות בלבד

חשבון אינפיניטסימלי (3) - 80415

מרצה: תמר (תמי) ציגלר

מתרגלים: אריה דויטש, קרן דניאל ואור קופרמן

סוכם ע"י שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ד, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 מרחבים מטריים ומרחבים נורמיים

1.1 מרחבים מטריים

הגדרה 1.1. מטריקה

תהא $\mathbb{X}$ קבוצה לא ריקה, פונקציה $d:\mathbb{X}\times\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ תיקרא מטריקה על $\mathbb{X}$ אם היא מקיימת את שלוש התכונות הבאות:

1. חיוביות בהחלט - לכל $x,y\in\mathbb{X}$ מתקיים $d\left(x,y\right)\geq 0$, ובנוסף $d\left(x,y\right)=0$ אם"ם $x=y$.
2. סימטריה - לכל $x,y\in\mathbb{X}$ מתקיים $d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$.
3. אי-שוויון המשולש - לכל $x,y,z\in\mathbb{X}$ מתקיים $d\left(x,y\right)\leq d\left(x,z\right)+d\left(z,y\right)$.

♣ מטריקה כשמה כן היא: דרך למדוד את המרחק (ולמעשה להגדיר אותו) בין שני איברים בקבוצה, דרישת החיוביות בהחלט והסימטריה הן טריוויאליות, ודרישת א"ש המשולש מפרמלת אינטואיציה ברורה: הוספת "תחנה" בדרך יכולה רק להאריך אותה אך לעולם לא תקצר.

הגדרה 1.2. מרחב מטרי

מרחב מטרי (להלן גם מ"מ) הוא זוג סדור $\left(\mathbb{X},d\right)$ כאשר d היא מטריקה על קבוצה לא ריקה $\mathbb{X}$, האיברים של $\mathbb{X}$ ייקראו לעיתים קרובות נקודות.

סימון: לכל מרחב מטרי $\left(\mathbb{X},d\right)$ ולכל תת-קבוצה $Y\subseteq\mathbb{X}$ נסמן ב-d_{Y} את הצמצום של d ל-$Y\times Y$.

הגדרה 1.3. תת-מרחב מטרי

יהי $\left(\mathbb{X},d\right)$ מרחב מטרי ותהא $Y\subseteq\mathbb{X}$, הזוג הסדור $\left(Y,d_{Y}\right)$ נקרא תת-מרחב מטרי של X.

♣ כמובן שהרעיון הוא ש-$\left(Y,d_{Y}\right)$ הוא מרחב מטרי עם אותה מטריקה.

הגדרה 1.4. יהי $\left(\mathbb{X},d\right)$ מרחב מטרי, המרחק של נקודה $x\in\mathbb{X}$ מקבוצה $S\subseteq\mathbb{X}$ הוא $d\left(x,S\right):=\inf\left\{ d\left(x,s\right)\mid s\in S\right\}$.

דוגמאות

♣ אנחנו נראה בהמשך דוגמאות נוספות למטריקות שמוגדרות ע"י נורמות (שהן הדרך למדוד את האורך של וקטור במרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$).

דוגמה 1.5. עבור כל יחידון $\left\{ x\right\}$ הפונקציה d המוגדרת ע"י $d\left(x,x\right):=0$ היא מטריקה על x.

דוגמה 1.6. המטריקה הבדידה (הדיסקרטית)

תהא $\mathbb{X}$ קבוצה לא ריקה ותהא $d:\mathbb{X}\times\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ מטריקה המוגדרת ע"י (לכל $x,y\in\mathbb{X}$):

$$d\left(x,y\right):=\begin{cases}0 & x=y\\1 & x\neq y\end{cases}$$

♣ זוהי הדוגמה הפשטנית והמנוונת ביותר של מטריקה, והיא מייצרת דוגמאות נגדיות רבות לטענות שמתאימות עבור מרבית המטריקות האחרות.

דוגמה 1.7. בהינתן מרחב מטרי $\left(\mathbb{X},d\right)$ ניתן לקבל ממנו מרחב מטרי נוסף ע"י הכפלת d במספר חיובי.

דוגמה 1.8. יהיו $(\mathbb{X}_1, d_1), (\mathbb{X}_2, d_2) \ldots, (\mathbb{X}_k, d_k)$ מרחבים מטריים, ונסמן $\mathbb{X} := \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \ldots \times \mathbb{X}_k$.
לכל $x \in \mathbb{R}$ נסמן $x := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, כלומר x_i היא הקואורדינטה ה-i של x (לכל $k \geq i \in \mathbb{N}$).
הפונקציות $d, \rho : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ המוגדרות ע"י (לכל $x, y \in \mathbb{X}$):

$$d(x,y) := \sum_{i=1}^{k} d_i(x_i, y_i)$$
$$\rho(x,y) := \max\{d_i(x_i, y_i) \mid k \geq i \in \mathbb{N}\}$$

הן מטריקות על $\mathbb{X}$.

♣ כמובן שניתן להגדיר מטריקות נוספות על $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \ldots \times \mathbb{X}_k$, אך כשנכתוב משפטים אודות מרחבי מכפלה כאלה נתייחס למטריקה מהצורה הנ"ל מבלי להגיד זאת במפורש.

♣ מהגדרה מתקיים $d_i(x_i, y_i) \leq \rho(x,y) \leq d(x,y)$ לכל $k \geq i \in \mathbb{N}$ ולכל $x, y \in \mathbb{X}$.

דוגמה 1.9. נתבונן במעגל היחידה:

$$\mathcal{S}^1 := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

תהא $d : \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 \to \mathbb{R}$ מטריקה המוגדרת ע"י (לכל $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$ כך ש-$\theta_2 \geq \theta_1$):

$$d\left(\begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}\right) := \min\{\theta_2 - \theta_1, (\theta_1 + 2\pi) - \theta_2\}$$

כלומר d מחזירה את אורך הקשת הקצרה מבין השתיים שמגדירות שתי הנקודות.

דוגמה 1.10. יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא A קבוצת תווים,[1] מרחק המינג על A^n הוא (לכל $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in A^n$):

$$|\{n \geq i \in \mathbb{N} : a_i \neq b_i\}|$$

כלומר המרחק בין שתי מחרוזות טקסט הוא מספר התווים שבהם הן שונות זו מזו.

צריך להוסיף את המטריקה ה-p-אדית.

1.2 מרחבים נורמיים

הגדרה 1.11. נורמה
יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או $\mathbb{F} = \mathbb{C}$-ש.
פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ תיקרא נורמה על V אם היא מקיימת את שלוש התכונות הבאות:

1. חיוביות בהחלט (אי-שליליות) - לכל $v \in V$ מתקיים $\|v\| \geq 0$, ובנוסף $\|v\| = 0$ אם"ם $x = 0_V$.
2. כפליות (הומוגניות) - לכל $v \in V$ ולכל $c \in \mathbb{F}$ מתקיים $\|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\|$.
3. אי-שוויון המשולש - לכל $v, w \in V$ מתקיים $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

הגדרה 1.12. מרחב נורמי
מרחב נורמי (להלן גם מ"נ) הוא זוג סדור $(V, \|\cdot\|)$ כאשר $\|\cdot\|$ היא נורמה על מ"ו V מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$.

[1] למשל האלף-בית העברי/ האנגלי, הספרות, רק $\{0,1\}$ וכו'.

מסקנה 1.13. יהי $(V,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי, הפונקציה $d:V\times V\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $d(v,w):=\|v-w\|$ (לכל $v,w\in V$) היא מטריקה על V. מטריקה זו תיקרא המטריקה המושרית ע"י הנורמה $\|\cdot\|$.

- ♣ כל אחת מהתכונות של אותה d נובעת מהתכונה המקבילה עבור $\|\cdot\|$ (בסעיף 2 יש להכפיל ב--1).
- ♣ ההפך אינו נכון, לא כל מטריקה נוצרת ע"י נורמה אפילו אם הקבוצה המדוברת היא מ"ו מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$ (כדוגמת המטריקה הבדידה שפוגעת בהומוגניות של הנורמה).

דוגמאות

סימון: נזכיר את הסימון שלנו מקורסי ליניארית, אנחנו מסמנים את הקואורדינטה ה-i של וקטור $x\in\mathbb{F}^n$ ב-x_i ואת הקואורדינטה ה-ij של מטריצה $A\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ ב-$[A]_{ij}$.

- ♣ כל מכפלה פנימית על מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$ משרה נורמה על אותו מרחב ע"י לקיחת השורש הריבועי של המכפלה הפנימית של וקטור עם עצמו, ראינו דוגמאות רבות לכך בליניארית 2.

כל הדוגמאות הבאות עובדות באופן דומה עבור $\mathbb{C}$.

דוגמה 1.14. נורמת ℓ_p

לכל $k\in\mathbb{N}$ ולכל $p\in\mathbb{N}$ נגדיר את הנורמה $\|\cdot\|_p:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}^k$):

$$\|x\|_p:=\|x\|_{\ell_p}:=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{k}|x_i|^p}$$

- ♣ זוהי בעצם סדרה של נורמות, האיבר ה-p בסדרה נקרא "נורמת ℓ_p", והמטריקה המושרית ע"י האיבר ה-p נקראת "מטריקת ℓ_p" ומסומנת ב-d_p או ב-d_{ℓ_p}.
- ♣ העובדה שנורמת ℓ_p חיובית בהחלט והומוגנית היא טריוויאלית. כדי להוכיח שהיא גם מקיימת את אי-שוויון המשולש נשים לב לכמה דברים:
  - אם נצליח להוכיח שלכל $x,y\in\mathbb{R}^k$ המקיימים $\|x\|_p+\|y\|_p=1$ מתקיים $\|x+y\|_p\leq 1$, נקבל מההומוגניות את א"ש המשולש[2].
  - לכל $x\in\mathbb{R}^k$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^p=\frac{1}{\left(\|x\|_p\right)^p}\cdot\sum_{i=1}^{k}|x_i|^p=\frac{1}{\left(\|x\|_p\right)^p}\cdot\left(\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{k}|x_i|^p}\right)^p=\frac{1}{\left(\|x\|_p\right)^p}\cdot\left(\|x\|_p\right)^p=1$$

[2] יהיו $x,y\in\mathbb{R}^k$, אם $x=0$ או $y=0$ אז א"ש המשולש טריוויאלי, אחרת מתקיים $\|x\|_p+\|y\|_p>0$.
נסמן $v:=\frac{x}{\|x\|_p+\|y\|_p}$ ו-$w:=\frac{y}{\|x\|_p+\|y\|_p}$, א"כ מההומוגניות נובע כי:

$$\|v\|_p+\|w\|_p=\frac{\|x\|_p}{\|x\|_p+\|y\|_p}+\frac{\|y\|_p}{\|x\|_p+\|y\|_p}=1$$

ומההנחה נקבל:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p&=\left\|\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)\cdot(v+w)\right\|_p=\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)\cdot\|v+w\|\\&\leq\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)\cdot 1=\|x\|_p+\|y\|_p\end{aligned}$$

- הפונקציה $z\mapsto|z|^{p}$ היא פונקציה קמורה על $[0,\infty)$, כלומר לכל $0\leq a,b\in\mathbb{R}$ ולכל $t\in[0,1]$ מתקיים:

$$|t\cdot a+(1-t)\cdot b|^{p}\leq t\cdot|a|^{p}+(1-t)\cdot|b|^{p}$$

ובפרט לכל $x,y\in\mathbb{R}^{k}$ כך ש-$\|x\|_{p}+\|y\|_{p}=1$ מתקיים (לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}(|x_{i}|+|y_{i}|)^{p} & =\left|\|x\|_{p}\cdot\frac{|x_{i}|}{\|x\|_{p}}+\|y\|_{p}\cdot\frac{|y_{i}|}{\|y\|_{p}}\right|^{p}\\
 & \leq\|x\|_{p}\cdot\left(\frac{|x_{i}|}{\|x\|_{p}}\right)^{p}+\|y\|_{p}\cdot\left(\frac{|y_{i}|}{\|y\|_{p}}\right)^{p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\left(\|x+y\|_{p}\right)^{p} & =\sum_{i=1}^{k}|x_{i}+y_{i}|^{p}\leq\sum_{i=1}^{k}(|x_{i}|+|y_{i}|)^{p}\leq\|x\|_{p}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{|x_{i}|}{\|x\|_{p}}\right)^{p}+\|y\|_{p}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{|y_{i}|}{\|y\|_{p}}\right)^{p}\\
 & =\|x\|_{p}\cdot1+\|y\|_{p}\cdot1=1=1^{p}=\left(\|x\|_{p}+\|y\|_{p}\right)^{p}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\|x+y\|_{p}\leq\|x\|_{p}+\|y\|_{p}$$

♣ עבור $p=1$ נקבל את "מטריקת נהגי המוניות של מנהטן".

♣ עבור $k=p=1$ נקבל את הערך המוחלט ב-$\mathbb{R}$.

♣ לכל $x\in\mathbb{R}^{k}$ מתקיים $\|x\|_{1}\geq\|x\|_{2}\geq\|x\|_{3}\geq\ldots$, ומכאן שלכל $x,y\in\mathbb{R}^{k}$ מתקיים $d_{1}(x,y)\geq d_{2}(x,y)\geq d_{3}(x,y)\geq\ldots$.

הסכמה: הנורמה $\|\cdot\|_{2}$ על $\mathbb{R}^{k}$ נקראת <u>הנורמה האוקלידית</u>, כשאנו עוסקים במרחבים מהצורה $\mathbb{R}^{k}$ נעבוד עם הנורמה האוקלידית ועם המטריקה המושרית על ידה, אלא נאמר אחרת במפורש.

דוגמה 1.15. נורמת ℓ_{∞}

לכל $k\in\mathbb{N}$ נגדיר את הנורמה $\|\cdot\|_{\infty}:\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}$ ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$\|x\|_{\infty}:=\|x\|_{\ell_{\infty}}:=\max_{k\geq i\in\mathbb{N}}|x_{i}|$$

♣ נורמה זו היא בעצם הפונקציה הגבולית של סדרת הנורמות $\left(\|\cdot\|_{p}\right)_{p=1}^{\infty}$, לכל $p\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in\mathbb{R}^{n}$ מתקיים:

$$\|x\|_{\infty}=\sqrt[p]{(\|x\|_{\infty})^{p}}=\sqrt[p]{\left(\max_{k\geq i\in\mathbb{N}}|x_{i}|\right)^{p}}\leq\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{k}|x_{i}|^{p}}=\|x\|_{p}$$

$$\|x\|_{p}=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{k}|x_{i}|^{p}}\leq\sqrt[p]{k\cdot\left(\max_{k\geq i\in\mathbb{N}}|x_{i}|\right)^{p}}=\sqrt[p]{k\cdot(\|x\|_{\infty})^{p}}=\|x\|_{\infty}\cdot\sqrt[p]{k}$$

אבל $\lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{k}=1$ ולכן ממשפט הכריך נובע כי $\lim_{p\to\infty}\|x\|_{p}=\|x\|_{\infty}$.

♣ נורמה זו נקראת "נורמת ℓ_{∞}", והמטריקה המושרית על ידה נקראת "מטריקת ℓ_{∞}" ומסומנת ב-d_{∞} או ב-$d_{\ell_{\infty}}$.

♣ לכל $p\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in\mathbb{R}^{n}$ מתקיים $\|x\|_{p}\geq\|x\|_{\infty}$, ומכאן שגם $d_{p}(x,y)\geq d_{\infty}(x,y)$ (לכל $y\in\mathbb{R}^{n}$).

דוגמה 1.16. המרחב הנורמי $\ell^p\left(\mathbb{R}^\infty\right)$

נסמן $\mathbb{R}^\infty := \mathbb{R}^\mathbb{N}$, כלומר $\mathbb{R}^\infty$ הוא מרחב הסדרות האין-סופיות מעל $\mathbb{R}$, ונסמן:

$$\ell^p\left(\mathbb{R}^\infty\right) := \left\{ \left(x_n\right)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty \;\middle|\; \sum_{n=1}^\infty \left|x_i\right|^p \neq \infty \right\}$$

כלומר $\ell^p\left(\mathbb{R}^\infty\right)$ היא קבוצת הסדרות ב-$\mathbb{R}^\infty$ שעבורן הטור החיובי $\sum_{n=1}^\infty \left|x_i\right|^p$ מתכנס, זהו תמ"ו של $\mathbb{R}^\infty$ וגם עליו נוכל להגדיר נורמת ℓ_p ע"י (לכל $p\in\mathbb{N}$ ולכל $\left(x_n\right)_{n=1}^\infty \in \ell^p\left(\mathbb{R}^\infty\right)$):

$$\left\|\left(x_n\right)_{n=1}^\infty\right\|_p := \left\|\left(x_n\right)_{n=1}^\infty\right\|_{\ell_p} := \sqrt[p]{\sum_{n=1}^\infty \left|x_i\right|^p}$$

סימון: לכל $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$ נסמן ב-$C\left[a,b\right]$ את קבוצת הפונקציות הרציפות שתחום ההגדרה שלהן הוא הקטע הסגור $\left[a,b\right]$.

דוגמה 1.17. נורמת $\mathcal{L}^p$ על מרחב פונקציות

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$, לכל $p\in\mathbb{N}$ נגדיר על $C\left[a,b\right]$ את הנורמה $\left\|\cdot\right\|_p : C\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ ע"י (לכל $f\in C\left[a,b\right]$):

$$\left\|f\right\|_p := \left\|f\right\|_{\mathcal{L}^p} := \sqrt[p]{\int_a^b \left|f\left(x\right)\right|^p dx}$$

♣ זוהי בעצם סדרה של נורמות, האיבר ה-p בסדרה נקרא "נורמת $\mathcal{L}^p$", והמטריקה המושרית ע"י האיבר ה-p נקראת "מטריקת $\mathcal{L}^p$" ומסומנת ב-d_p או ב-$d_{\mathcal{L}^p}$.

♣ גם בדוגמה זו (כמו בדוגמה 1.14) העובדה ש-$\left\|\cdot\right\|_p$ חיובית בהחלט והומוגנית טריוויאלית. ההוכחה של א"ש המשולש זהה לחלוטין:

- אם נצליח להוכיח שלכל $f,g\in C\left[a,b\right]$ המקיימות $\left\|f\right\|_p+\left\|g\right\|_p=1$ מתקיים $\left\|f+g\right\|_p\leq 1$, נקבל מההומוגניות את א"ש המשולש.
- שוב מתקיים:

$$\int_a^b \left(\frac{\left|f\left(x\right)\right|}{\left\|f\right\|_p}\right)^p dx = \frac{1}{\left(\left\|f\right\|_p\right)^p}\cdot\int_a^b \left|f\left(x\right)\right|^p dx = \frac{1}{\left(\left\|f\right\|_p\right)^p}\cdot\left(\sqrt[p]{\int_a^b \left|f\left(x\right)\right|^p dx}\right)^p = \frac{1}{\left(\left\|f\right\|_p\right)^p}\cdot\left(\left\|f\right\|_p\right)^p = 1$$

- ושוב לכל $f,g\in C\left[a,b\right]$ כך ש-$\left\|f\right\|_p+\left\|g\right\|_p=1$ מתקיים (לכל $x\in\left[a,b\right]$):

$$\begin{aligned}\left(\left|f\left(x\right)\right|+\left|g\left(x\right)\right|\right)^p &= \left|\left\|f\right\|_p\cdot\frac{\left|f\left(x\right)\right|}{\left\|f\right\|_p}+\left\|g\right\|_p\cdot\frac{\left|g\left(x\right)\right|}{\left\|g\right\|_p}\right|^p \\ &\leq \left\|f\right\|_p\cdot\left(\frac{\left|f\left(x\right)\right|}{\left\|f\right\|_p}\right)^p+\left\|y\right\|_p\cdot\left(\frac{\left|g\left(x\right)\right|}{\left\|g\right\|_p}\right)^p\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\|f+g\|_p\right)^p = \int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx \le \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p\,dx$$
$$\le \|f\|_p \cdot \int_a^b \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p dx + \|g\|_p \cdot \int_a^b \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_p}\right)^p dx$$
$$= \|f\|_p \cdot 1 + \|g\|_p \cdot 1 = 1 = 1^p = \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right)^p$$

$$\Rightarrow \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

דוגמה 1.18. נורמת ∞ על מרחב פונקציות

לכל $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$ נגדיר על $C[a,b]$ את הנורמה $\|\cdot\|_\infty : C[a,b]\to\mathbb{R}$ ע"י (לכל $f\in C[a,b]$):

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

- ♣ ההרכבה $|f|$ היא פונקציה רציפה, ולכן מעקרון המקסימום והמינימום של ויירשטראס נובע שהיא מקבלת מקסימום בקטע ו-$\|f\|_\infty$ אכן מוגדרת היטב.
- ♣ נורמה זו נקראת "נורמת ∞", והמטריקה המושרית על ידה נקראת "מטריקת ∞" ומסומנת ב-d_∞.

לא ברור מה הקשר בין הדוגמה הזו לדוגמה הקודמת, האם באמת הנורמה $\|\cdot\|_\infty$ על $C[a,b]$ היא הפונקציה הגבולית של סדרת הנורמות $\left(\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}\right)_{p=1}^\infty$???
הבעיה בהוכחה המקבילה מודגשת באדום להלן (הא"ש אינו נכון בהכרח):

<u>ההוכחה המקבילה</u>

לכל $p\in\mathbb{N}$ ולכל $f\in C[a,b]$ מתקיים:

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sqrt[p]{\left(\|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\right)^p} = \sqrt[p]{\left(\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\right)^p} \le \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx} = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx} = \|f\|_p$$

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx} \le \sqrt[p]{(b-a)\cdot\left(\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\right)^p} = \sqrt[p]{(b-a)\cdot\left(\|f\|_\infty\right)^p} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\cdot\sqrt[p]{b-a}$$

אבל $\lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{b-a}=1$ ולכן ממשפט הכריך נובע כי:

$$\lim_{p\to\infty}\|x\|_p = \|x\|_\infty$$

דוגמה 1.19. הנורמה האופרטורית על מרחב ההעתקות הליניאריות

יהיו $\left(V,\left\Vert \cdot\right\Vert _{V}\right)$ ו-$\left(W,\left\Vert \cdot\right\Vert _{W}\right)$ מרחבים נורמיים מעל אותו שדה, לכל $T\in\text{Hom}\left(V,W\right)$ נגדיר את הנורמה האופרטורית של T ע"י:

$$\left\Vert T\right\Vert _{\text{op}}:=\sup\left\{ \frac{\left\Vert T\left(v\right)\right\Vert _{W}}{\left\Vert v\right\Vert _{V}}\mid0_{V}\neq v\in V\right\} =\sup\left\{ \left\Vert T\left(v\right)\right\Vert _{W}\mid v\in V,\ \left\Vert v\right\Vert _{V}=1\right\}$$

כאשר V נוצר סופית החסם העליון הנ"ל מוגדר לכל $T\in\text{Hom}\left(V,W\right)$, אם V אינו נוצר סופית נאלץ להצטמצם לקבוצת הפונקציות שעבורן הנורמה האופרטורית מוגדרת - קבוצה זו היא תמ"ו של $\text{Hom}\left(V,W\right)$.

♣ הדרך הפשוטה ביותר לחשב את הנורמה של העתקה ליניארית על מרחבים מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$ היא כדלהלן: מייצגים את ההעתקה באמצעות מטריצה, כופלים אותה במשוחלפת שלה, מלכסנים את המטריצה הסימטרית שמתקבלת מכפל זה ולוקחים את השורש של הערך העצמי הגדול ביותר בערך מוחלט.

2 קבוצות במרחב מטרי

יהי $\left(\mathbb{X},d\right)$ מרחב מטרי.

♣ שימו לב: כל ההגדרות והטענות שנראה מכאן והלאה תלויות ב-$\mathbb{X}$ וב-d - אם נבחר קבוצה ו/או מטריקה אחרות קבוצה שמקיימת הגדרה או טענה כלשהן עבור $\left(\mathbb{X},d\right)$ לא בהכרח תקיים אותה גם עבור הקבוצה ו/או המטריקה החדשות.

2.1 חסימות

הגדרה 2.1. כדור פתוח וכדור סגור

לכל $x\in\mathbb{X}$ ולכל $0<r\in\mathbb{R}$ נסמן:

$$\begin{aligned}B_{r}\left(x\right) & :=\left\{ y\in\mathbb{X}\mid d\left(x,y\right)<r\right\} \\
\hat{B}_{r}\left(x\right) & :=\left\{ y\in\mathbb{X}\mid d\left(x,y\right)\leq r\right\} \\
S_{r}\left(x\right) & :=\left\{ y\in\mathbb{X}\mid d\left(x,y\right)=r\right\}
\end{aligned}$$

$B_{r}\left(x\right)$ ייקרא כדור פתוח ברדיוס r שמרכזו ב-x (או בפשטות סביבה של x), $\hat{B}_{r}\left(x\right)$ ייקרא כדור סגור ברדיוס r שמרכזו ב-x ו-$S_{r}\left(x\right)$ תיקרא ספירה (סְפֵרָה) ברדיוס r שמרכזה בנקודה x.

♣ מהעובדה שלכל $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ מתקיים $d_{1}\left(x,y\right)\geq d_{2}\left(x,y\right)\geq d_{3}\left(x,y\right)\geq\ldots\geq d_{\infty}\left(x,y\right)$ נובע שמתקיים גם (לכל $x\in\mathbb{R}^{n}$ ולכל $0<r\in\mathbb{R}$):

$$B_{r}^{1}\left(x\right)\subseteq B_{r}^{2}\left(x\right)\subseteq B_{r}^{3}\left(x\right)\subseteq\ldots\subseteq B_{r}^{\infty}\left(x\right)$$

כאשר $B_{r}^{p}\left(x\right):=\left\{ y\in\mathbb{X}\mid d_{p}\left(x,y\right)<r\right\}$ לכל $p\in\mathbb{N}$, ו-$B_{r}^{\infty}\left(x\right):=\left\{ y\in\mathbb{X}\mid d_{\infty}\left(x,y\right)<r\right\}$.

סימון: תהא $Y\subseteq\mathbb{X}$ לכל $y\in Y$ ולכל $0<r\in\mathbb{R}$ נסמן:

$$\begin{aligned}B_{r}^{Y}\left(y\right) & :=\left\{ z\in Y\mid d_{Y}\left(y,z\right)<r\right\} \\
\hat{B_{r}^{Y}}\left(y\right) & :=\left\{ z\in Y\mid d_{Y}\left(y,z\right)\leq r\right\} \\
S_{r}^{Y}\left(y\right) & :=\left\{ z\in Y\mid d_{Y}\left(y,z\right)=r\right\}
\end{aligned}$$

הגדרה 2.2. תת-קבוצה $Y\subseteq\mathbb{X}$ תיקרא חסומה אם קיימים $x\in X$ ו-$0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$Y\subseteq B_{r}\left(x\right)$.

2.2 פתיחות וסגירות

תזכורת: A^c היא הקבוצה המשלימה של A, כלומר $A^c = \mathbb{X} \setminus A$ (כמובן שהסימון תלוי הקשר משום שהוא תלוי בשאלה מיהי $\mathbb{X}$).

חמש ההגדרות הבאות שונות מאלו שראינו בכיתה אך הן שקולות להן, ולדעתי הן מצביעות באופן ברור יותר על המושגים הרצויים. ההגדרות שראינו בכיתה מופיעות בעמוד הבא.

הגדרה 2.3. נקודות פנימיות, נקודות חיצוניות ונקודות קצה

תהא $\mathbb{X} \supseteq A$ תת-קבוצה, ותהא $x \in \mathbb{X}$ נקודה.

- נאמר ש-x היא נקודה פנימית של A אם קיים $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש-$B_r(x) \subseteq A$.
- נאמר ש-x היא נקודה חיצונית ל-A אם קיים $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש-$B_r(x) \subseteq A^c$.
- נאמר ש-x היא נקודת קצה של A אם לכל $0 < r \in \mathbb{R}$ קיימים $x_1, x_2 \in B_r(x)$ כך ש-$x_1 \in A$ ו-$x_2 \notin A$.

הגדרה 2.4. פנים, חוץ ושפה

- קבוצת הנקודות הפנימיות של תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא הפנים של A ותסומן ב-A° או ב-$\text{Int}(A)$.
- קבוצת הנקודות החיצוניות לתת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא החוץ של A ותסומן ב-$\text{Ext}(A)$ - **לא הגדרנו את החוץ בכיתה.**
- קבוצת נקודות הקצה של תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא השפה של A ותסומן ב-∂A.

מסקנה 2.5. לכל $A \subseteq \mathbb{X}$ מתקיים $\mathbb{X} = \text{Int}(A) \uplus \text{Ext}(A) \uplus \partial A$.

הגדרה 2.6. פתיחות וסגירות

- נאמר שתת-קבוצה $U \subseteq \mathbb{X}$ היא קבוצה פתוחה אם כל נקודה $x \in U$ היא נקודה פנימית של U.
- נאמר שתת-קבוצה $C \subseteq \mathbb{X}$ היא קבוצה סגורה אם כל נקודה $x \in \mathbb{X} \setminus C$ היא נקודה חיצונית ל-C.

♣ קבוצה יכולה להיות גם פתוחה וגם סגורה, למשל:

- בכל מרחב מטרי, המרחב כולו והקבוצה הריקה הן גם קבוצות פתוחות וגם קבוצות סגורות.
- במרחב מטרי שהמטריקה שלו היא המטריקה הבדידה, כל תתי-הקבוצות הן גם קבוצות פתוחות וגם קבוצות סגורות.

♣ כמובן שיכולות להיות קבוצות שאינן פתוחות ואינן סגורות.

♣ ב-$\mathbb{R}$ ראינו מקטעים מסוגים שונים, להלן החלוקה שלהם לקבוצות פתוחות, סגורות, לא זה ולא זה או גם זה וגם זה:

- הישר כולו הוא קבוצה פתוחה וגם קבוצה סגורה.
- קרן פתוחה היא קבוצה פתוחה, ובהתאמה קרן סגורה היא קבוצה סגורה.
- קטע פתוח הוא קבוצה פתוחה וקטע סגור הוא קבוצה סגורה.
- קטעים הפתוחים מצד אחד וסגורים מצד השני אינם מהווים קבוצה פתוחה או סגורה.

הגדרה 2.7. קבוצת כל הנקודות החיצוניות לתת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא הסגור של A ותסומן ב-$\overline{A}$ או ב-$\text{Cl}(A)$.

הגדרה 2.8. צפיפות ודלילות

- תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא צפופה אם לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{X}$ מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$.
- תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא דלילה אם לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{X}$ קיימת תת-קבוצה פתוחה $\tilde{U} \subseteq U$ כך ש-$U \cap A = \emptyset$. **לא הגדרנו דלילות בכיתה.**

עד כאן ההגדרות השונות מאלו שראינו בכיתה.

להלן ההגדרות שראינו בכיתה. ההגדרות של נקודה פנימית, נקודה חיצונית ונקודת קצה זהות לאלו שהבאתי לעיל.

הגדרה 2.9. פתיחות וסגירות
תהא $\mathbb{X} \supseteq Y$ תת-קבוצה.

- נאמר ש-Y היא קבוצה פתוחה אם כל נקודה $y \in Y$ היא נקודה פנימית של Y.
- נאמר ש-Y היא קבוצה סגורה אם Y^c היא קבוצה פתוחה.

הגדרה 2.10. פנים וסגור
תהא $\mathbb{X} \supseteq Y$ תת-קבוצה.

- הפנים של Y (מסומן ב-Y°) הוא איחוד כל הקבוצות הפתוחות ב-$\mathbb{X}$ שמוכלות ב-Y.
- הסגור של Y (מסומן ב-$\overline{Y}$) הוא חיתוך כל הקבוצות הסגורות ב-$\mathbb{X}$ שמכילות את Y.
- השפה של Y היא $\partial Y := \bar{Y} \setminus Y^\circ$.
- נאמר ש-Y צפופה ב-$\mathbb{X}$ אם $\overline{Y} = \mathbb{X}$.

♣ הרעיון הוא כמובן לקבל את הקבוצה הפתוחה הכי גדולה שמוכלת ב-Y ואת הקבוצה הסגורה הכי קטנה שמכילה את Y.

עד כאן ההגדרות שראינו בכיתה.

הגדרה 2.11. תהא $A \subseteq \mathbb{X}$ תת-קבוצה, נקודה $x \in \mathbb{X}$ תיקרא נקודת הצטברות של A אם לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש-$a \in B'_\varepsilon(x)$.

- ♣ נשים לב לדרישה ש-a יהיה שייך **לסביבה מנוקבת** של x.
- ♣ נקודת שפה אינה בהכרח נקודת הצטברות - היא יכולה להיות נקודה מבודדת, כמובן שכל נקודה פנימית היא נקודת הצטברות ולכן גם תיתכן נקודת הצטברות שאינה נקודת שפה.

סימון: קבוצת נקודות ההצטברות של קבוצה A תסומן ב-A'.

לא הגדרנו נקודת הצטברות בכיתה.

2.3 קומפקטיות

הגדרה 2.12. יהי $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ נאמר שקבוצה $Y \subseteq \mathbb{X}$ היא ε-רשת אם מתקיים:

$$\mathbb{X} = \bigcup_{y \in Y} B_\varepsilon(y)$$

הגדרה 2.13. מרחב חסום לחלוטין

נאמר ש-$(\mathbb{X}, d)$ חסום לחלוטין אם לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיימת קבוצה סופית $Y \subseteq \mathbb{X}$ המהווה ε-רשת.

מסקנה 2.14. כל מרחב מטרי חסום לחלוטין הוא בפרט חסום.

הגדרה 2.15. כיסוי פתוח של קבוצה $Y \subseteq \mathbb{X}$ הוא אוסף קבוצות פתוחות ב-$\mathbb{X}$ כך ש-Y מוכלת באיחוד שלהן.
תהא $Y \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה ויהי U כיסוי פתוח של Y, קבוצה $\tilde{U} \subseteq U$ תיקרא תת-כיסוי של U (עבור Y), אם Y מוכלת באיחוד של איברי $\tilde{U}$.

הגדרה 2.16. קומפקטיות

קבוצה $K \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא קומפקטית אם לכל כיסוי פתוח שלה יש תת-כיסוי סופי, כמו כן נאמר ש-$(\mathbb{X}, d)$ הוא מרחב קומפקטי אם $\mathbb{X}$ היא קבוצה קומפקטית.

- ♣ מהגדרה אם $K \subseteq \mathbb{X}$ היא קבוצה קומפקטית אז (K, d_K) הוא מרחב קומפקטי.

2.4 קשירות

את שתי ההגדרות הבאות לא ראינו בכיתה.

הגדרה 2.17. קשירות

קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא קשירה אם לא קיימות שתי קבוצות פתוחות $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{X}$ זרות כך שמתקיים:

$$A = (A \cap U_1) \cup (A \cap U_2) \qquad A \cap U_2 \neq \emptyset \qquad A \cap U_1 \neq \emptyset$$

הגדרה 2.18. רכיב קשירות

תהא $A \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה, תת-קבוצה $C \subseteq A$ תיקרא רכיב קשירות של A אם היא קשירה, ובנוסף לכל $x \in C$ ו-$\tilde{C} \subseteq A$ כך ש-$x \in \tilde{C}$ ו-$\tilde{C}$ קשירה מתקיים $\tilde{C} \subseteq C$.

- ♣ כלומר לכל $x \in A$ רכיב הקשירות של A ש-x שייכת אליו, הוא תת-הקבוצה הקשירה הגדולה ביותר של A ש-x שייך אליה.

3 סדרות

כל הסדרות שנדבר עליהן תהיינה סדרות של איברים במרחב המטרי המדובר אלא אם נכתב אחרת.

יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב מטרי.

הגדרה 3.1. נאמר שסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$[3] היא סדרה חסומה אם קבוצת איבריה כזו.

הגדרה 3.2. גבול של סדרה

יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב מטרי, נאמר ש-$x\in\mathbb{X}$ הוא גבול של סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ אם $\lim\limits_{n\to\infty}d\left(x_n,x\right)=0$,
או בשפה שבה דיברנו עד כה: לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים $x_n\in B_\varepsilon\left(x\right)$.
סדרה שיש לה גבול תיקרא מתכנסת ונאמר שהיא מתכנסת אליו; גבול של סדרה מתכנסת הוא יחיד ולכן מוצדק לדבר על הגבול של סדרה מתכנסת $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ולכתוב:

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n,\ \ x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$$

- ♣ כמו שכבר הזכרנו העובדה שטענה מתקיימת עבור מטריקה אחת אינה אומרת שהיא מתקיימת לכל מטריקה, כך למשל כדי שסדרה ב-$\mathbb{R}$ תתכנס לפי המטריקה הבדידה היא צריכה להיות קבועה ממקום מסוים ואילך, למרות שאנחנו יודעים שע"פ המטריקה האוקלידית ישנן סדרות מתכנסות שאינן קבועות ממקום מסוים ואילך.
- ♣ התכנסות של סדרת פונקציות $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ב-$C\left[a,b\right]$ היא מה שקראנו לו באינפי' 2 התכנסות במידה שווה של סדרת פונקציות.

הגדרה 3.3. תהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה; נאמר שסדרה $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ היא תת-סדרה של $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, אם קיימת סדרה $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ עולה ממש שכל איבריה טבעיים (סדרת אינדקסים) כך שלכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $y_k=x_{n_k}$.

הגדרה 3.4. תהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה; נאמר ש-$x\in\mathbb{R}$ הוא גבול חלקי של $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ אם יש ל-$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ תת-סדרה ש-x הוא הגבול שלה,
כלומר קיימת סדרה $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ עולה ממש שכל איבריה טבעיים (סדרת אינדקסים) כך ש-$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x$.

הגדרה 3.5. נאמר שסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי אם לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $d\left(x_n,x_m\right)<\varepsilon$.

הגדרה 3.6. קומפקטיות סדרתית

יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב מטרי, נאמר שקבוצה $K\subseteq\mathbb{X}$ היא קבוצה קומפקטית סדרתית (להלן גם: ק"ס), אם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ שכל איבריה ב-K יש תת-סדרה מתכנסת שגבולה הוא איבר ב-K. כמו כן, נאמר ש-$(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב קומפקטי סדרתית אם $\mathbb{X}$ היא קבוצה קומפקטית סדרתית.

- ♣ מהניסוח "קומפקטיות סדרתית" ניתן ללמוד שיש משמעות למושג "קומפקטיות" סתם, אנחנו נגדיר אותו בהמשך ונראה שבמרחבים מטריים המושגים הללו שקולים.
- ♣ מהגדרה אם $K\subseteq\mathbb{X}$ היא קבוצה קומפקטית סדרתית אז (K,d_K) הוא מרחב קומפקטי סדרתי.

[3] תמי כתבה סדרות בצורה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ אך אני אמשיך לדבוק בסימון שראינו עד כה.

4 פונקציות

יהיו $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ ו-$(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ מרחבים מטריים.

4.1 גבול של פונקציה בנקודה

הגדרה 4.1. סביבה מנוקבת

לכל $x \in \mathbb{X}$ ולכל $0 < r \in \mathbb{R}$ נסמן $B'_r(x) := B_r(x) \setminus \{x\}$ - זוהי הסביבה המנוקבת של x ברדיוס r.

לא הגדרנו בכיתה סביבה מנוקבת.

הגדרה 4.2. גבול של פונקציה בנקודה

תהא $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ פונקציה מוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה $a \in \mathbb{X}$, נאמר ש-$L \in \mathbb{Y}$ הוא גבול של f בנקודה a אם לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיימת $0 < \delta \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{X}$ המקיים $d_{\mathbb{X}}(a, x) < \delta$ מתקיים $d_{\mathbb{Y}}(L, f(x)) < \varepsilon$.

גבול של פונקציה בנקודה הוא יחיד (אם הוא קיים), ולכן מוצדק לדבר על הגבול של f בנקודה a ולסמן:

$$\lim_{x \to a} f(x) := L, \ \ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$$

4.2 חסימות

הגדרה 4.3. תהא $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ פונקציה, נאמר ש-f חסומה אם $\mathrm{Im} f$ חסומה.

הגדרה 4.4. תהא $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ פונקציה ותהא $A \subseteq \mathbb{X}$, נאמר ש-f חסומה ב-A אם הקבוצה $f(A)$ חסומה.

הגדרה 4.5. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה $x \in \mathbb{X}$, נאמר ש-f חסומה מקומית ב-x אם קיימת סביבה מנוקבת U של x כך ש-f חסומה ב-U.

4.3 רציפות

הגדרה 4.6. רציפות של פונקציה בנקודה

תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה $a\in\mathbb{X}$, נאמר ש-f רציפה בנקודה $a\in\mathbb{X}$ אם מתקיים $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$.
כלומר: לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in\mathbb{X}$ המקיים $d_{\mathbb{X}}(a,x)<\delta$ מתקיים $d_{\mathbb{Y}}(f(a),f(x))<\varepsilon$.
כמו כן נאמר ש-f רציפה אם היא רציפה בכל נקודה ב-$\mathbb{X}$.

♣ ניתן להגדיר גם כך: f רציפה ב-x אם לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $z\in B_\delta(x)$ מתקיים $f(z)\in B_\varepsilon(f(x))$, כלומר $f(B_\delta(x))\subseteq B_\varepsilon(f(x))$.

♣ נשים לב: f אינה רציפה בנקודה a אם לא מתקיים $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ מכל סיבה שהיא, כולל מהסיבה ש-$f(a)$ אינו קיים.

♣ את ההערה הקודמת שמעתי מפיו של רז[4] במו אוזניי אולם ניתן גם לומר שנקודה שבה הפונקציה אינה מוגדרת אינה נקודת רציפות וגם אינה נקודת אי-רציפות, היא לא שייכת לעניין בכלל; אם זכרוני אינו מטעני שמענו מיורם[5] אמירה ברוח זו.

הגדרה 4.7. תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה, נקודה $x\in\mathbb{X}$תיקרא נקודת אי-רציפות סליקה של f אם ל-f יש גבול בנקודה זו אך אינו שווה לערך שמקבלת f בנקודה זו (כולל המקרה שבו f אינה מוגדרת בנקודה).

הגדרה 4.8. רציפות במידה שווה

תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה, נאמר ש-f רציפה במידה שווה (להלן גם: רציפה במ"ש) אם לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x_1,x_2\in\mathbb{X}$ כך ש-$d_{\mathbb{X}}(x_1,x_2)<\delta$ מתקיים $d_{\mathbb{Y}}(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$.

מסקנה 4.9. אם פונקציה $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ היא רציפה במידה שווה אז היא בפרט רציפה.

הגדרה 4.10. רציפות ליפשיץ[6]

תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה, נאמר ש-f רציפה ליפשיץ אם קיים $0\leq K\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x_1,x_2\in\mathbb{X}$ מתקיים $d_{\mathbb{Y}}(f(x_1),f(x_2))\leq K\cdot d_{\mathbb{X}}(x_1,x_2)$, במקרה כזה K ייקרא קבוע ליפשיץ של f.[7]

4.4 מסילות

הגדרה 4.11. מסילה היא פונקציה רציפה מהצורה $\gamma:I\to\mathbb{X}$ כאשר $I\subseteq\mathbb{R}$ הוא מקטע, התמונה של מסילה γ מסומנת ב-γ^*.

הגדרה 4.12. מסילה פשוטה ומסילה סגורה

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$ ותהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{X}$ מסילה.

- נאמר ש-γ פשוטה אם היא חח"ע.
- נאמר ש-γ סגורה אם $\gamma(a)=\gamma(b)$.
- נאמר ש-γ פשוטה וסגורה אם γ סגורה ובנוסף לכל $x,y\in(a,b)$ כך ש-$x\neq y$ מתקיים $\gamma(x)\neq\gamma(y)$.

הגדרה 4.13. נאמר שקבוצה $Y\subseteq\mathbb{X}$ היא קשירה מסילתית אם לכל $y_1,y_2\in Y$ קיימת מסילה $\gamma:[0,1]\to Y$ כך ש-$\gamma(0)=x$ ו-$\gamma(1)=y$.

♣ בקובץ הטענות אנחנו נראה שכל קבוצה קשירה מסילתית היא קבוצה קשירה, אך ההפך אינו נכון: קיימות קבוצות קשירות שאינן קשירות מסילתית, ראו כאן דוגמה לכך.

[4] רז קופרמן היה המרצה שלי באינפי' 1.
[5] יורם לסט היה המרצה שלי באינפי' 2.
[6] ערך בוויקיפדיה: רודולף ליפשיץ.
[7] אין זה הקבוע של f בה"א הידיעה אלא יש רבים כאלה, רק אם קיים אחד מינימלי ניתן לייחד אותו בתור הקבוע של f.

5 שקילויות בין מרחבים מטריים

הגדרה 5.1. יהיו $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ ו-$(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ מרחבים מטריים, פונקציה $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ חח"ע ועל (הפיכה) תיקרא:

1. הומיאומורפיזם אם היא וההופכית שלה רציפות[8]; במקרה כזה נאמר ש-$\mathbb{X}$ ו-$\mathbb{Y}$ הומיאומורפיים.
2. שקילות אם קיימים $0 < C, \tilde{C} \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x_1, x_2 \in X$ מתקיים:
$$C \cdot d_{\mathbb{X}}(x_1, x_2) \leq d_{\mathbb{Y}}(f(x_1), f(x_2)) \leq \tilde{C} \cdot d_{\mathbb{X}}(x_1, x_2)$$
במקרה כזה נאמר ש-$\mathbb{X}$ ו-$\mathbb{Y}$ שקולים.
3. איזומטריה אם לכל $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ מתקיים $d_{\mathbb{Y}}(f(x_1), f(x_2)) = d_{\mathbb{X}}(x_1, x_2)$.

♣ אם $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ היא שקילות ו-$0 < C, \tilde{C} \in \mathbb{R}$ הם הקבועים המקיימים (לכל $x_1, x_2 \in X$):
$$C \cdot d_{\mathbb{X}}(x_1, x_2) \leq d_{\mathbb{Y}}(f(x_1), f(x_2)) \leq \tilde{C} \cdot d_{\mathbb{X}}(x_1, x_2)$$
אז לכל $y_1, y_2 \in \mathbb{Y}$ מתקיים:
$$C \cdot d_{\mathbb{X}}\left(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)\right) \leq d_{\mathbb{Y}}(y_1, y_2) \leq \tilde{C} \cdot d_{\mathbb{X}}\left(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)\right)$$
ולכן גם:
$$\frac{1}{\tilde{C}} \cdot d_{\mathbb{Y}}(y_1, y_2) \leq d_{\mathbb{X}}\left(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)\right) \leq \frac{1}{C} \cdot d_{\mathbb{Y}}(y_1, y_2)$$
כמו כן $f : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ היא שקילות בין $\mathbb{X}_1$ ל-$\mathbb{X}_2$ עם קבועים C_1, C_2 ו-$g : \mathbb{X}_2 \to \mathbb{X}_3$ היא שקילות בין $\mathbb{X}_2$ ל-$\mathbb{X}_3$ עם קבועים C_3, C_4 אז (לכל $x, y \in \mathbb{X}_1$):
$$C_3 \cdot C_1 \cdot d_1(x, y) \leq C_3 \cdot d_2(f(x), f(y)) \leq d_3(g(f(x)), g(f(y))) \leq C_4 \cdot d_2(f(x), f(y)) \leq C_4 \cdot C_2 \cdot d_1(x, y)$$
כלומר $g \circ f$ היא שקילות בין $\mathbb{X}_1$ ל-$\mathbb{X}_2$ עם הקבועים $C_3 \cdot C_1$ ו-$C_4 \cdot C_2$.

♣ נשים לב לכך שכל פונקציה מהצורה הנ"ל מגדירה יחס שקילות על מרחבים מטריים:

- כל מרחב מטרי הומיאומורפי/שקול/איזומטרי לעצמו ע"י פונקציית הזהות.
- אם $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ היא הומיאומורפיזם/שקילות/איזומטריה בין $\mathbb{X}$ ל-$\mathbb{Y}$, אז f^{-1} היא הומיאומורפיזם/שקילות/איזומטריה בין $\mathbb{Y}$ ל-$\mathbb{X}$.
- אם $f : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ היא הומיאומורפיזם/שקילות/איזומטריה בין $\mathbb{X}_1$ ל-$\mathbb{X}_2$ ו-$g : \mathbb{X}_2 \to \mathbb{X}_3$ היא הומיאומורפיזם/שקילות/איזומטריה בין $\mathbb{X}_2$ ל-$\mathbb{X}_3$, אז $g \circ f$ היא הומיאומורפיזם/שקילות/איזומטריה בין $\mathbb{X}_1$ ל-$\mathbb{X}_3$.

בפרט אין שום בעיה בכך שההגדרות סימטריות למרות שפורמלית $\mathbb{X}$ הוא התחום של f ו-$\mathbb{Y}$ הוא הטווח שלה (כלומר ההגדרה של f אינה סימטרית).

מסקנה 5.2. כל איזומטריה היא שקילות, וכל שקילות היא הומיאומורפיזם.

[8] ההוכחה שראינו באינפי' 1 בדבר הרציפות של פונקציה הופכית אינה תופסת כאן מפני שהשתמשה בכך שפונקציה הפיכה היא מונוטונית, אך יתרה מזאת ישנן דוגמאות לפונקציות רציפות והפיכות בין מרחבים מטריים שההופכית שלהן אינה רציפה (ראו דוגמה 5.6).

הגדרה 5.3. שקילות בין שתי מטריקות

יהי $\mathbb{X}$ מרחב מטרי עם שתי מטריקות $d_1, d_2 : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, נאמר ש-$d_1$ ו-d_2 שקולות זו לזו אם קיימים $0 < C, \tilde{C} \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x, y \in \mathbb{X}$ מתקיים:

$$C \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \tilde{C} \cdot d_1(x,y)$$

♣ המשמעות של שקילות בין מטריקות היא שכל סדרה המתכנסת לפי האחת מתכנסת גם לפי האחרת וכמו כן לפונקציה יש גבול בנקודה לפי האחת אם"ם גם לפי האחרת יש את אותו הגבול.

הגדרה 5.4. שקילות בין שתי נורמות

יהי V מרחב נורמי עם שתי נורמות $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : V \times V \to \mathbb{R}$, נאמר ש-$\|\cdot\|_1$ ו-$\|\cdot\|_2$ שקולות זו לזו אם קיימים $0 < C, \tilde{C} \in \mathbb{R}$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים:

$$C \cdot \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \tilde{C} \cdot \|v\|_1$$

♣ כפי שראינו לעיל שקילות בין מטריקות ושקילות בין נורמות היא אכן יחס שקילות.

הגדרה 5.5. העתקה פתוחה

תהא $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ פונקציה, נאמר ש-f היא העתקה פתוחה אם לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{X}$ גם $f(U)$ היא קבוצה פתוחה.

נספח: דוגמה לפונקציה רציפה והפיכה שההופכית שלה אינה רציפה

דוגמה 5.6. נתבונן במרחבים המטריים $[0, 2\pi)$[9] ו-$\mathcal{S}^1$[10]. הפונקציה $f : [0, 2\pi) \to \mathcal{S}^1$ המוגדרת ע"י (לכל $\theta \in [0, 2\pi)$):

$$f(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

היא פונקציה רציפה והפיכה, אבל ההופכית שלה אינה רציפה מפני שלכל סביבה של $f(0)$ קיימת נקודה $\pi < \theta \in [0, 2\pi)$ כך ש-$f(\theta)$ נמצא בסביבה של $f(0)$.

[9] עם המטריקה המושרית מהערך המוחלט ב-$\mathbb{R}$.
[10] מעגל היחידה עם המטריקה שמחזירה את אורך הקשת הקצרה ביותר בין שתי נקודות.

6 שלמות

יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב מטרי.

6.1 התחלה

הגדרה 6.1. הקוטר של תת-קבוצה חסומה $Y\subseteq\mathbb{X}$ הוא $\text{diam}\left(Y\right):=\sup\left\{ d\left(x,y\right)\mid x,y\in Y\right\}$.

ההגדרה הבאה שונה מזו שראינו בכיתה (שהיא ההגדרה המקובלת) אך הן שקולות, ולדעתי זו שאציג כעת מצביעה באופן ברור יותר על מה שאנו מחפשים בשלמות.

הגדרה 6.2. נאמר ש-$(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב מטרי שלם, אם לכל סדרת קבוצות סגורות לא ריקות $(C_n)_{n=1}^{\infty}$, כך ש-$C_{n+1}\subseteq C_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ו-$\lim_{n\to\infty}\text{diam}\left(C_n\right)=0$, קיים $c\in\mathbb{X}$ יחיד כך שמתקיים:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n=\left\{ c\right\}$$

הנה ההגדרה שראינו בכיתה (ההגדרה המקובלת):

הגדרה 6.3. נאמר ש-$(\mathbb{X},d)$ הוא שלם אם כל סדרת קושי שבו אכן מתכנסת.

משפט. משפט החיתוך של קנטור

$(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב מטרי שלם אם"ם כל סדרת קושי ב-$(\mathbb{X},d)$ מתכנסת.

♣ כן, זה לא היה מקרי בכלל שהגדרת השלמות הזכירה לנו את הלמה של קנטור.

6.2 משפט ההשלמה

טענה. אם קיימת קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-A צפופה ב-$\mathbb{X}$ ולכל סדרת קושי ב-A[11] יש גבול ב-$\mathbb{X}$ אז $(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב שלם.

הגדרה 6.4. נאמר שמרחב מטרי שלם $\left(\hat{\mathbb{X}},\hat{d}\right)$ הוא השלמה של $(\mathbb{X},d)$ אם קיימת העתקה חח"ע $f:\mathbb{X}\to\hat{\mathbb{X}}$ כך שלכל $x,y\in\mathbb{X}$ מתקיים[12]:

$$\hat{d}\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)=d\left(x,y\right)$$

ובנוסף $\text{Im}f$ צפופה ב-$\hat{\mathbb{X}}$.

אנחנו נראה בקובץ הטענות שלכל מרחב מטרי יש השלמה יחידה עד כדי איזומטריה ולכן במקרה כזה נכון לקרוא ל-$\left(\hat{\mathbb{X}},\hat{d}\right)$ ההשלמה של $(\mathbb{X},d)$.

6.3 משפט ההעתקה המכווצת

הגדרה 6.5. פונקציה $f:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ תיקרא מכווצת אם קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש-$0\leq\lambda<1$ ולכל $x,y\in\mathbb{X}$ מתקיים:

$$d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq\lambda\cdot d\left(x,y\right)$$

---

[11] כלומר סדרת קושי ב-$\mathbb{X}$ שכל איבריה ב-A.

[12] כלומר f היא איזומטריה בין $(\mathbb{X},d)$ ל-$\text{Im}f$ (עם הצמצום של $\hat{d}$ ל-$\text{Im}f\times\text{Im}f$).

הגדרה 6.6. פונקציה $f:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ תיקרא כמעט מכווצת אם לכל $x,y\in\mathbb{X}$ כך ש-$x\neq y$ מתקיים:

$$d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)<d\left(x,y\right)$$