נגזרות - הוכחות נבחרות

חשבון אינפיניטסימלי (1) - 80131

מרצה: רז קופרמן

מתרגלים: אור יער ודניאל רוזנבלט

סוכם ע״י: שריה אנסבכר

סמסטר ב׳ תשפ״ב, האונ׳ העברית

תוכן העניינים

באינפי' 2[1] השלמנו כמה טענות ומשפטים שלא למדנו בסמסטר שלפניו.
למרות זאת הבאתי אותם כאן מפני שהם שייכים לחומר של אינפי' 1.

* * *

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

[1] שלימד יורם לסט בסמסטר א' תשפ"ג (80132).

1 הנגזרת

משפט 1.1. גזירות גוררת רציפות

תהא f פונקציה גזירה בנקודה $a \in \mathbb{R}$, f גם רציפה ב-a.

הוכחה. תהא $U \subseteq \mathbb{R}$ סביבה מנוקבת של a כך ש-f מוגדרת ב-U, א"כ לכל $t \in U$ מתקיים:

$$f\left(t\right)=f\left(a\right)+\frac{f\left(t\right)-f\left(a\right)}{t-a}\cdot\left(t-a\right)=f\left(a\right)+\Delta_{f,a}\left(t\right)\cdot\left(t-a\right)$$

מאריתמטיקה של גבולות נובע שמתקיים:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to a}f\left(t\right) &= \lim_{t\to a}\left(f\left(a\right)+\Delta_{f,a}\left(t\right)\cdot\left(t-a\right)\right)\\ &= \lim_{t\to a}\left(f\left(a\right)+f'\left(a\right)\cdot 0\right)=f\left(a\right)\end{aligned}$$

ומכאן שע"פ הגדרה f רציפה ב-a. ■

משפט 1.2. [2] תהא f פונקציה רציפה בנקודה $a \in \mathbb{R}$.

f גזירה ב-a אם"ם קיימים $m.d \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-\left(mx+d\right)}{x-a}=0$$

ובמקרה כזה מתקיים $m=f'\left(a\right)$ ו-$d=f\left(a\right)-f'\left(a\right)\cdot a$.

♣ הישר $mx+b$ הוא בעצם המשיק לגרף הפונקציה.

הוכחה. נניח ש-f גזירה ב-a.

- $\Leftarrow$

  נבחר $m:=f'\left(a\right)$ ו-$d:=f\left(a\right)-f'\left(a\right)\cdot a$.

  א"כ לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $mx+d=f'\left(a\right)\cdot x+f\left(a\right)-f'\left(a\right)\cdot a=f\left(a\right)+f'\left(a\right)\cdot\left(x-a\right)$.

  מאריתמטיקה של גבולות נובע כי:

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}-f'\left(a\right)\right)\\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-a}-\frac{f'\left(a\right)\left(x-a\right)}{x-a}\right)\\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}-\frac{f'\left(a\right)\left(x-a\right)}{x-a}\right)\\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f\left(x\right)-\left(f'\left(a\right)\left(x-a\right)+f\left(a\right)\right)}{x-a}\right)\\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f\left(x\right)-\left(f'\left(a\right)\left(x-a\right)+f\left(a\right)\right)}{x-a}\right)\\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f\left(x\right)-\left(mx+d\right)}{x-a}\right)\end{aligned}$$

[2] משפט זה נלמד אצל יורם.

- $\Rightarrow$

נניח שקיימים $m,d\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-\left(mx+d\right)}{x-a}=0$$

משאיפת המכנה ל-0 כאשר x שואף ל-a נובע שגם המונה שואף ל-0 כאשר x שואף ל-a.
מרציפות של f ב-a ומרציפות של כל פונקציה ליניארית נובע ש-$f\left(a\right)=m\cdot a+d$.

$$\Rightarrow 0=\lim_{x\to a}\left(\frac{f\left(x\right)-\left(mx+d\right)}{x-a}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)-\left(mx+d\right)+f\left(a\right)}{x-a}\right)$$
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}-\frac{mx+d-f\left(a\right)}{x-a}\right)$$
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}-\frac{\left(mx+d\right)-\left(m\cdot a+d\right)}{x-a}\right)$$

מגזירת כל פונקציה ליניארית אנחנו יודעים שמתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{\left(mx+d\right)-\left(m\cdot a+d\right)}{x-a}=a$$

ולכן, ע"פ אריתמטיקה של גבולות:

$$f'\left(a\right)=\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}=m$$

■

מסקנה 1.3. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה $a\in\mathbb{R}$. f גזירה ב-a אם"ם קיים $m\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(a+h\right)-\left(m\cdot h+f\left(a\right)\right)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-\left(m\cdot\left(x-a\right)+f\left(a\right)\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-\left(mx+f\left(a\right)-m\cdot a\right)}{x-a}=0$$

ובמקרה כזה מתקיים $m=f'\left(a\right)$.

טענה 1.4. תהא $f:\left(-1,1\right)\to\mathbb{R}$ פונקציה, אם קיים $0<c\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in\left(-1,1\right)$ מתקיים $\left|f\left(x\right)\right|\le c\cdot x^{2}$ אז f גזירה ב-0 ומתקיים $f'\left(0\right)=0$.

הוכחה. יהי c כנ"ל, מכאן ש-$\left|f\left(0\right)\right|\le c\cdot 0^{2}=0$ ולכן $f\left(0\right)=0$ ובנוסף לכל $0\ne x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\left|\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}\right|=\frac{\left|f\left(x\right)\right|}{\left|x\right|}\le\frac{c\cdot\left|x\right|^{2}}{\left|x\right|}=c\cdot\left|x\right|$$

ולכן גם:

$$-c\cdot\left|x\right|\le\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}\le c\cdot\left|x\right|$$

וממשפט הכריך נקבל שמתקיים:

$$f'\left(0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=0$$

■

טענה 1.5. יהי $0<a\in\mathbb{R}$ ותהא $f:(-a,a)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

- אם f זוגית אז f' אי-זוגית.
- אם f אי-זוגית אז f' זוגית.

הוכחה. יהי $x_0\in(-a,a)$, מהגזירות של f ב-x_0 נובע שהגבולות הבאים קיימים:

$$\lim_{x\to -x_0}\frac{f(x)-f(-x_0)}{x-(-x_0)},\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- אם f זוגית אז לכל $x_0\neq x\in(-a,a)$ מתקיים:

$$\frac{f(-x)-f(-x_0)}{-x-(-x_0)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{-(x-x_0)}=-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'(-x_0)&=\lim_{x\to -x_0}\frac{f(x)-f(-x_0)}{x-(-x_0)}\\&=\lim_{-x\to -x_0}\frac{f(-x)-f(-x_0)}{(-x)-(-x_0)}\\&=-\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-f'(x_0)\end{aligned}$$

- אם f אי-זוגית אז לכל $x_0\neq x\in(-a,a)$ מתקיים:

$$\frac{f(-x)-f(-x_0)}{-x-(-x_0)}=\frac{-f(x)+f(x_0)}{-(x-x_0)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'(-x_0)&=\lim_{x\to -x_0}\frac{f(x)-f(-x_0)}{x-(-x_0)}\\&=\lim_{-x\to -x_0}\frac{f(-x)-f(-x_0)}{(-x)-(-x_0)}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\end{aligned}$$

■

2 כללי גזירה

טענה 2.1. תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה קבועה[3]; פונקציית הנגזרת $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא פונקציית האפס, כלומר לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f'(x)=0$.

טענה 2.2. לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathrm{Id}'(x)=1$.

2.1 אריתמטיקה של גזירות

משפט 2.3. גזירת סכום של פונקציות

תהיינה f ו-g פונקציות גזירות בנקודה $a\in\mathbb{R}$, הנגזרת של $f+g$ ב-a היא:

$$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$$

הוכחה. נובע ישירות מאריתמטיקה של גבולות. ■

טענה 2.4. תהא f פונקציה גזירה בנקודה $a\in\mathbb{R}$, הנגזרת של $c\cdot f$ ב-a (לכל $c\in\mathbb{R}$) היא:

$$(c\cdot f)'(a)=c\cdot f'(a)$$

הוכחה. נובע ישירות מאריתמטיקה של גבולות. ■

מסקנה 2.5. גזירה היא פעולה ליניארית

לכל שתי פונקציות f ו-g גזירות בנקודה $x\in\mathbb{R}$ ולכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$(\alpha\cdot f+\beta\cdot g)'(x)=\alpha\cdot f'(x)+\beta\cdot g'(x)$$

משפט 2.6. כלל לייבניץ - גזירת מכפלה של פונקציות

תהיינה f ו-g פונקציות גזירות בנקודה $a\in\mathbb{R}$, הנגזרת של $f\cdot g$ ב-a היא:

$$(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$$

♣ בניגוד לשני כללי הגזירה הקודמים שהיו אינטואיטיביים מאד (חישבו עליהם בצורה ויזואלית), כלל לייבניץ נראה מוזר מאד במבט ראשון, למה שזה יהיה נכון בכלל?
בתחילה חשבתי להביא כאן איור שלי שמנסה להסביר את העניין, למזלי 3blue1brown כבר עשה את העבודה ואני יכול להסתפק במתן קישור לסרטון המתאים.

[3] קיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש-$f(x)=c$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הוכחה. מאריתמטיקה של גבולות ומרציפות של g ב-a נובע כי:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to a}\frac{f(t)\cdot g(t)-f(a)\cdot g(a)}{t-a}&=\lim_{t\to a}\frac{f(t)\cdot g(t)-f(a)\cdot g(t)+f(a)\cdot g(t)-f(a)\cdot g(a)}{t-a}\\&=\lim_{t\to a}\frac{(f(t)-f(a))\cdot g(t)+f(a)\cdot(g(t)-g(a))}{t-a}\\&=\lim_{t\to a}\left(\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\cdot g(t)\cdot\right)+f(a)\cdot\lim_{t\to a}\frac{g(t)-g(a)}{t-a}\\&=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)\end{aligned}$$

■

משפט 2.7. תהא g פונקציה גזירה בנקודה $a\in\mathbb{R}$, אם $g(a)\neq 0$ אז הנגזרת של $\frac{1}{g}$ ב-a היא:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=-\frac{g'(a)}{g^2(a)}$$

הוכחה. מאריתמטיקה של גבולות ומרציפות של g נובע כי:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to a}\frac{\frac{1}{g(t)}-\frac{1}{g(a)}}{t-a}&=\lim_{t\to a}\left(\frac{1}{t-a}\cdot\frac{g(a)-g(t)}{g(t)\cdot g(a)}\right)\\&=\lim_{t\to a}\left(-\frac{g(t)-g(a)}{t-a}\right)\cdot\lim_{t\to a}\left(\frac{1}{g(t)\cdot g(a)}\right)\\&=-\frac{g'(a)}{g^2(a)}\end{aligned}$$

■

מסקנה 2.8. גזירת מנה של פונקציות

תהיינה f ו-g פונקציות גזירות בנקודה $a\in\mathbb{R}$, אם $g(a)\neq 0$ אז הנגזרת של $\frac{f}{g}$ ב-a היא:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

2.2 כלל השרשרת וגזירה של פונקציה הופכית

משפט 2.9. כלל השרשרת - גזירת הרכבה של פונקציות

תהיינה f ו-g פונקציות כך ש-f גזירה בנקודה $a \in \mathbb{R}$ ו-g גזירה ב-$f(a)$, הנגזרת של $g \circ f$ ב-a היא:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

♣ לכאורה לא ברור מניין הגיעה הנוסחה הנ"ל, ננסה לתת מעט אינטואיציה.
כל פונקציה ליניארית $ax+b$ מעוותת את הישר הממשי בצורה הבאה: היא מותחת/מכווצת אותו פי a ומזיזה אותו ב-b יחידות ימינה, ההזזה ב-b אינה משנה דבר לנגזרת אבל ברור שאם ניקח גרף של פונקציה גזירה ונכווץ אותו פי a (שזה שקול להרכבה על פונקציה ליניארית כנ"ל) נקבל פונקציה דומה מאד שהשיפועים בין כל שתי נקודות בה גדולים/קטנים פי a מאלה של הפונקציה המקורית ולכן גם השיפועים של המשיקים לה בנקודות שונות יהיו גדולים/קטנים פי a. פונקציות שאינן ליניאריות מעוותות גם הן את הישר הממשי ע"פ כלל ההתאמה שלהן אך מכיוון שקרוב מספיק לנקודה גזירה x הן מתנהגות "כמעט" כמו פונקציות ליניאריות ולכן שוב עלינו למתוח/לכווץ את הנגזרת פי $f'(x)$.
המחשה של העניין ניתן למצוא באותו סרטון של 3blue1brown שהבאתי עבור כלל לייבניץ.

הוכחה. נסמן ב-A וב-B את תחומי ההגדרה של f ו-g בהתאמה.
תהא $\psi : B \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x \in U$):

$$\psi(x) := \begin{cases} \frac{g(x)-g(f(a))}{x-f(a)} & x \neq f(a) \\ g'(f(a)) & x = f(a) \end{cases}$$

מכאן שלכל $a \neq t \in A$ מתקיים:

$$\frac{g(f(t)) - g(f(a))}{t-a} = \psi(f(t)) \cdot \frac{f(t) - f(a)}{t-a}$$

שהרי אם $f(t) = f(a)$ שני האגפים מתאפסים.
מאריתמטיקה של גבולות, מרציפות של ψ ב-$f(a)$ וממשפט ההצבה בגבולות נובע שמתקיים:

$$\lim_{t\to a} \frac{g(f(t)) - g(f(a))}{t-a} = \lim_{t\to a} \psi(f(t)) \cdot \lim_{t\to a} \frac{f(t) - f(a)}{t-a} = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

■

למה 2.10. תהא f פונקציה הפיכה, אם f גזירה בנקודה $a \in \mathbb{R}$ וגם f^{-1} גזירה ב-$b := f(a)$ אז מכלל השרשרת נובע ש-$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) \cdot f'(a) = \text{Id}'(a) = 1$ ולכן:

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} = \frac{1}{f'(a)}$$

מסקנה 2.11. תהא f פונקציה הפיכה, אם f גזירה בנקודה $a \in \mathbb{R}$ ו-$f'(a) = 0$ אז f^{-1} אינה גזירה ב-$f(a)$.

משפט 2.12. גזירת פונקציה הופכית

תהא $f:A\to B$ פונקציה הפיכה, לכל $b\in B$ כך ש-f גזירה ב-$f^{-1}\left(b\right)$ וגם $f'\left(f^{-1}\left(b\right)\right)\neq0$ מתקיים:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(b\right)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(b\right)\right)}$$

♣ האינטואיציה למשפט היא שהגרף של f^{-1} הוא שיקוף הגרף של f ביחס לאלכסון הראשי, כלומר כדי לקבל את הגרף של f^{-1} מהגרף של f כל שעלינו לעשות הוא להחליף בין השמות של הצירים; מסיבה זו השיפועים בין כל שתי נקודות (שהם תוצאת החלקה של הפרש ה-y-ים בהפרש ה-x-ים) הופכיים זה לזה וממילא גם שיפועי המשיקים.

הוכחה. יהי $b\in B$ כך ש-f גזירה ב-$f^{-1}\left(b\right)$ וגם $f'\left(f^{-1}\left(b\right)\right)\neq0$, ותהא $\psi:A\to B$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x\in A$):

$$\psi\left(x\right):=\begin{cases}\frac{f\left(x\right)-f\left(f^{-1}\left(b\right)\right)}{x-f^{-1}\left(b\right)} & x\neq f^{-1}\left(b\right)\\ f'\left(f^{-1}\left(b\right)\right) & x=f^{-1}\left(b\right)\end{cases}$$

לכל $b\neq t\in B$ מתקיים[4]:

$$\frac{f^{-1}\left(t\right)-f^{-1}\left(b\right)}{t-b}=\frac{f^{-1}\left(t\right)-f^{-1}\left(b\right)}{f\left(f^{-1}\left(t\right)\right)-f\left(f^{-1}\left(b\right)\right)}=\frac{1}{\psi\left(f^{-1}\left(t\right)\right)}$$

f גזירה ב-$f^{-1}\left(b\right)$ ולכן גם רציפה בנקודה זו, מכאן שגם f^{-1} רציפה ב-b. מרציפות של ψ ב-$f^{-1}\left(b\right)$, ממשפט ההצבה בגבולות ומאריתמטיקה של רציפות נובע כי:

$$\lim_{t\to b}\frac{f^{-1}\left(t\right)-f^{-1}\left(b\right)}{t-b}=\frac{1}{\psi\left(f^{-1}\left(b\right)\right)}=\frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(b\right)\right)}$$

■

2.3 הסתכלות אחרת על נגזרות

♣ נשים לב שאם פונקציה f גזירה בנקודה $a\in\mathbb{R}$ אז לפונקציה $\Delta_{f,a}$ יש נקודת אי-רציפות סליקה ב-a, תובנה זו הובילה את המתמטיקאי קונסטנטין קרתיאודורי להסיק ש-f רציפה ב-a אם"ם קיים $l\in\mathbb{R}$ כך שהפונקציה $\mathcal{S}_{f,a}:A\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $t\in A$):

$$\mathcal{S}_{f,a}\left(t\right)=\begin{cases}\Delta_{f,a}\left(t\right) & t\neq a\\ l & t=a\end{cases}$$

רציפה ובמקרה כזה מתקיים $f'\left(a\right)=\mathcal{S}_{f,a}\left(a\right)=l$.

משפט 2.13. אפיון לגזירות של פונקציה בנקודה

פונקציה f גזירה בנקודה $a\in\mathbb{R}$ אם"ם קיימת פונקציה $\mathcal{S}_{f,a}$ רציפה ב-a כך שמתקיים $f\left(t\right)=f\left(a\right)+\mathcal{S}_{f,a}\left(t\right)\cdot\left(t-a\right)$ לכל t בסביבה כלשהי של a, ואז מתקיים גם:

$$f'\left(a\right)=\mathcal{S}_{f,a}\left(a\right)$$

[4] $t\neq b$ ולכן $f\left(f^{-1}\left(t\right)\right)-f\left(a\right)=t-b\neq0$.

הוכחה. תהא $f:A\to B$ ותהא $a\in A$ נקודה.

- $\Leftarrow$

נניח ש-f גזירה ב-a ותהא $\mathcal{S}_{f,a}:A\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $t\in A$):

$$\mathcal{S}_{f,a}\left(t\right):=\begin{cases} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} & t\neq a\\ f'\left(a\right) & t=a \end{cases}$$

מהגדרה, לכל $t\in A$ מתקיים:

$$f\left(t\right)=f\left(a\right)+\mathcal{S}_{f,a}\left(t\right)\cdot\left(t-a\right)$$

ומהגדרת הנגזרת $\mathcal{S}_{f,a}$ רציפה ב-a.

- $\Rightarrow$

נניח שקיימת פונקציה $\mathcal{S}_{f,a}$ רציפה ב-a כך שמתקיים $f\left(t\right)=f\left(a\right)+\mathcal{S}_{f,a}\left(t\right)\cdot\left(t-a\right)$ לכל t בסביבה U של a, לכל $a\neq t\in U$ מתקיים:

$$\mathcal{S}_{f,a}\left(t\right)=\frac{f\left(t\right)-f\left(a\right)}{t-a}$$

ולכן מהרציפות של $\mathcal{S}_{f,a}$ ב-a נובע שמתקיים:

$$\mathcal{S}_{f,a}\left(a\right)=\lim_{t\to a}\mathcal{S}_{f,a}\left(t\right)=\lim_{t\to a}\frac{f\left(t\right)-f\left(a\right)}{t-a}$$

מכאן שע"פ הגדרת הנגזרת f גזירה ב-a ומתקיים $f'\left(a\right)=\mathcal{S}_{f,a}\left(a\right)$.

$\blacksquare$

♣ המשפט האחרון מקל עלינו בהוכחת כללי גזירה, להלן הוכחות חלופיות לכללי גזירה המסתמכות על המשפט הנ"ל.

תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שתי פונקציות ותהא $a\in\mathbb{R}$ נקודה.

הוכחה. <u>גזירת סכום של פונקציות</u>

נניח ש-f ו-g גזירות ב-a ותהיינה $\mathcal{S}_{f,a}$ ו-$\mathcal{S}_{g,a}$ שתי פונקציות רציפות ב-a המקיימות (לכל $t\in\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} f\left(t\right) & =f\left(a\right)+\mathcal{S}_{f,a}\left(t\right)\cdot\left(t-a\right)\\ g\left(t\right) & =g\left(a\right)+\mathcal{S}_{g,a}\left(t\right)\cdot\left(t-a\right) \end{aligned}$$

לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned} \left(f+g\right)\left(t\right)=f\left(t\right)+g\left(t\right) & =\left(f\left(a\right)+\mathcal{S}_{f,a}\left(t\right)\cdot\left(t-a\right)\right)+\left(g\left(a\right)+\mathcal{S}_{g,a}\left(t\right)\cdot\left(t-a\right)\right)\\ & =f\left(a\right)+g\left(a\right)+\left(\mathcal{S}_{f,a}\left(t\right)+\mathcal{S}_{g,a}\left(t\right)\right)\cdot\left(t-a\right) \end{aligned}$$

א"כ תהא $\mathcal{S}_{f+g,a}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $t\in\mathbb{R}$):

$$\mathcal{S}_{f+g,a}\left(t\right):=\mathcal{S}_{f,a}\left(t\right)+\mathcal{S}_{g,a}\left(t\right)$$

מאריתמטיקה של רציפות זוהי פונקציה רציפה ולכן מהמשפט נובע כי:

$$\mathcal{S}_{f+g,a}\left(a\right)=\left(f+g\right)'\left(a\right)$$

ואכן:

$$\mathcal{S}_{f+g,a}\left(a\right)=\mathcal{S}_{f,a}\left(a\right)+\mathcal{S}_{g,a}\left(a\right)=f'\left(a\right)+g'\left(a\right)$$

$\blacksquare$

הוכחה. <u>כלל לייבניץ - גזירת מכפלה של פונקציות</u>
נניח ש-f ו-g גזירות ב-a ותהיינה $\mathcal{S}_{f,a}$ ו-$\mathcal{S}_{g,a}$ שתי פונקציות רציפות ב-a המקיימות (לכל $t\in\mathbb{R}$):

$$f(t)=f(a)+\mathcal{S}_{f,a}(t)\cdot(t-a)$$
$$g(t)=g(a)+\mathcal{S}_{g,a}(t)\cdot(t-a)$$

לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(t)&=f(t)\cdot g(t)\\&=(f(a)+\mathcal{S}_{f,a}(t)\cdot(t-a))\cdot(g(a)+\mathcal{S}_{g,a}(t)\cdot(t-a))\\&=f(a)\cdot g(a)+(\mathcal{S}_{f,a}(t)\cdot g(a)+f(a)\cdot\mathcal{S}_{g,a}(t)+\mathcal{S}_{f,a}(t)\cdot\mathcal{S}_{g,a}(t)\cdot(t-a))\cdot(t-a)\end{aligned}$$

א"כ תהא $\mathcal{S}_{f\cdot g,a}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $t\in\mathbb{R}$):

$$\mathcal{S}_{f\cdot g,a}(t):=\mathcal{S}_{f,a}(t)\cdot g(a)+f(a)\cdot\mathcal{S}_{g,a}(t)+\mathcal{S}_{f,a}(t)\cdot\mathcal{S}_{g,a}(t)\cdot(t-a)$$

מאריתמטיקה של רציפות זוהי פונקציה רציפה ולכן מהמשפט נובע כי:

$$\mathcal{S}_{f\cdot g,a}(a)=(f\cdot g)'(a)$$

ואכן:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{f\cdot g,a}(a)&=\mathcal{S}_{f,a}(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot\mathcal{S}_{g,a}(a)+\mathcal{S}_{f,a}(a)\cdot\mathcal{S}_{g,a}(a)\cdot(a-a)\\&=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)\end{aligned}$$

■

הוכחה. <u>כלל השרשרת - גזירת הרכבה של פוקנציות</u>
נניח ש-f גזירה ב-a ו-g גזירה ב-$f(a)$, ותהיינה $\mathcal{S}_{f,a}$ ו-$\mathcal{S}_{g,f(a)}$ שתי פונקציות רציפות ב-a וב-$f(a)$ בהתאמה כך שמתקיים (לכל $t\in\mathbb{R}$):

$$f(t)=f(a)+\mathcal{S}_{f,a}(t)\cdot(t-a)$$
$$g(t)=g(f(a))+\mathcal{S}_{g,f(a)}(t)\cdot(t-f(a))$$

לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(t)&=g(f(a))+\mathcal{S}_{g,f(a)}(f(t))\cdot(f(t)-f(a))\\&=g(f(a))+\mathcal{S}_{g,f(a)}(f(t))\cdot(f(a)+\mathcal{S}_{f,a}(t)\cdot(t-a)-f(a))\\&=g(f(a))+\left(\mathcal{S}_{g,f(a)}(f(t))\cdot\mathcal{S}_{f,a}(t)\right)\cdot(t-a)\end{aligned}$$

א"כ תהא $\mathcal{S}_{g\circ f,a}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $t\in\mathbb{R}$):

$$\mathcal{S}_{g\circ f,a}(t):=\mathcal{S}_{g,f(a)}(f(t))\cdot\mathcal{S}_{f,a}(t)$$

מאריתמטיקה של רציפות וממשפט ההצבה בגבולות זוהי פונקציה רציפה ולכן מהמשפט נובע כי:

$$\mathcal{S}_{g\circ f,a}(a)=(g\circ f)'(a)$$

ואכן:

$$\mathcal{S}_{g\circ f,a}(a)=\mathcal{S}_{g,f(a)}(f(a))\cdot\mathcal{S}_{f,a}(a)=g'(f(a))\cdot f'(a)$$

■

הוכחה. גזירת מנה של פונקציות

תהא $h:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $h\left(x\right):=\frac{1}{x}$ (לכל $0\neq x\in\mathbb{R}$) ותהא $0\neq b\in\mathbb{R}$ נקודה.

תהא $\mathcal{S}_{h,b}:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $0\neq t\in\mathbb{R}$):

$$\mathcal{S}_{h,b}\left(t\right):=\begin{cases}\frac{h(t)-h(b)}{t-b} & t\neq b\\ -\frac{1}{b^{2}} & t=b\end{cases}=\begin{cases}\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{b}}{t-b} & t\neq b\\ -\frac{1}{b^{2}} & t=b\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{t-b}\cdot\frac{b-t}{t\cdot b} & t\neq b\\ -\frac{1}{b^{2}} & t=b\end{cases}=\begin{cases}-\frac{1}{t\cdot b} & t\neq b\\ -\frac{1}{b^{2}} & t=b\end{cases}$$

מאריתמטיקה של גבולות נקבל:

$$\lim_{t\to b}\mathcal{S}_{h,b}\left(t\right)=\lim_{t\to a}\left(-\frac{1}{t\cdot b}\right)=-\frac{1}{b^{2}}=\mathcal{S}_{h,b}\left(b\right)$$

ולכן $\mathcal{S}_{h,b}$ רציפה ב-b. מהגדרה, לכל $0\neq t\in\mathbb{R}$ מתקיים $h\left(t\right)=h\left(b\right)+\mathcal{S}_{h,b}\left(t\right)\cdot\left(t-b\right)$ ומכאן שע"פ המשפט מתקיים:

$$\mathcal{S}_{h,b}\left(b\right)=h'\left(b\right)$$

b הנ"ל הייתה שרירותית ולכן הנ"ל נכון לכל $0\neq b\in\mathbb{R}$.

נניח ש-g גזירה ב-a וגם $g\left(a\right)\neq0$, ותהא $\mathcal{S}_{g,a}$ שתי פונקציה רציפה ב-a המקיימת (לכל $t\in\mathbb{R}$):

$$g\left(t\right)=g\left(a\right)+\mathcal{S}_{g,a}\left(t\right)\cdot\left(t-a\right)$$

ממה שהוכחנו לעיל ומהכלל השרשרת נובע שמתקיים:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'\left(a\right)=\left(h\circ g\right)'\left(a\right)=h'\left(g\left(a\right)\right)\cdot g'\left(a\right)=-\frac{g'\left(a\right)}{g^{2}\left(a\right)}$$

ולכן מכלל לייבניץ נובע שאם f גזירה ב-a אז:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'\left(a\right)=\frac{f'\left(a\right)\cdot g\left(a\right)-f\left(a\right)\cdot g'\left(a\right)}{g^{2}\left(a\right)}$$

■

3 נגזרות של פונקציות אלמנטריות

3.1 נגזרות של פולינומים (נגזרות במעריך טבעי)

טענה 3.1. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ותהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f\left(x\right):=ax+b$ לכל $x\in\mathbb{R}$ (פונקציה ליניארית), מתקיים $f'\left(x\right)=a$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

טענה 3.2. יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f\left(x\right):=x^{n}$ לכל $x\in\mathbb{R}$, מתקיים $f'\left(x\right)=n\cdot x^{n-1}$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הוכחה. הוכחה 1 - באמצעות נוסחת הכפל המקוצר

לכל $x\neq t\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\frac{t^{n}-x^{n}}{t-x}=\frac{1}{t-x}\cdot\left(t-x\right)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}t^{k}\cdot x^{n-1-k}=\sum_{k=0}^{n-1}t^{k}\cdot x^{n-1-k}$$

מרציפות של כל פולינום נובע שמתקיים:

$$f'\left(x\right)=\lim_{t\to x}\frac{t^{n}-x^{n}}{t-x}=\lim_{t\to x}\sum_{k=0}^{n-1}t^{k}\cdot x^{n-1-k}=\sum_{k=0}^{n-1}x^{k}\cdot x^{n-1-k}=\sum_{k=0}^{n-1}x^{n-1}=n\cdot x^{n-1}$$

$\blacksquare$

הוכחה. הוכחה 2 - באמצעות כלל לייבניץ ואינדוקציה

בסיס האינדוקציה (עבור $n=1$) הוכח כבר בטענה הקודמת (3.1) ולכן נעבור ישירות לצעד האינדוקציה.

נניח שהטענה אכן מתקיימת עבור $n-1$, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f\left(x\right)=x^{n-1}\cdot x$ ולכן מכלל לייבניץ ומבסיס האינדוקציה נובע שגם:

$$f'\left(x\right)=\left(n-1\right)\cdot x^{n-2}\cdot x+1\cdot x^{n-1}=n\cdot x^{n-1}$$

$\blacksquare$

מסקנה 3.3. לכל פולינום $p\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}a_{k}\cdot x^{k}\in\mathbb{R}\left[x\right]$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$p'\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{k}\cdot k\cdot x^{k-1}$$

♣ כדי שהטענה והמסקנה האחרונות תהיינה נכונה עבור $x=0$ ו-$n=1$ עלינו להגדיר $0^{0}:=1$ (למרות שניתן גם להגדיר $0^{0}:=0$ מבלי לקבל סתירה לאקסיומות השדה), הדבר תלוי במוסכמה ובהקשר.

3.2 נגזרות במעריך רציונלי

טענה 3.4. יהי $m\in\mathbb{Z}$ ותהא $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(x):=x^{m}$ לכל $0\neq x\in\mathbb{R}$, מתקיים $f'(x)=m\cdot x^{m-1}$ לכל $0\neq x\in\mathbb{R}$.

הוכחה. אם $0<m$ אז $m\in\mathbb{N}$ וכבר הוכחנו את הטענה עבור שלמים הטבעיים (טענה 3.2), אם $m=0$ אז מדובר במקרה פרטי של טענה 3.1, א"כ נשארו לנו המקרה שבו $m<0$.

נניח ש-$m<0$ ותהא $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $g(x):=x^{-m}$ לכל $x\in\mathbb{R}$, מהטענה הקודמת (3.2) נובע שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $g'(x)=-m\cdot x^{-m-1}$.

מכלל הגזירה למנה (או ממשפט 2.7) נובע כי לכל $0\neq x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=-\frac{g'(x)}{g^{2}(x)}=-\frac{-m\cdot x^{-m-1}}{x^{-2m}}=m\cdot x^{m-1}$$

■

טענה 3.5. יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(x):=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ לכל $x\in(0,\infty)$, מתקיים (לכל $0<x\in\mathbb{R}$):

$$f'(x)=\frac{1}{n}\cdot x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}=\frac{1}{n}\cdot x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)}$$

הוכחה. תהא $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $g(x):=x^{n}$, ראינו בטענה 3.2 שלכל $x\in(0,\infty)$ מתקיים $g'(x)=n\cdot x^{n-1}\neq 0$.

נשים לב לכך שלכל $x\in(0,\infty)$ מתקיים $g(f(x))=f(g(x))=x$, כלומר f ו-g הופכיות זו לזו, מכאן שע"פ כלל הגזירה לפונקציה הופכית לכל $x\in(0,\infty)$ מתקיים:

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}=\frac{1}{n\cdot\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}=\frac{1}{n\cdot x^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n}\cdot x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)}=\frac{1}{n}\cdot x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}$$

■

מסקנה 3.6. יהי $q\in\mathbb{Q}$ ותהא $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(x):=x^{q}$ לכל $x\in(0,\infty)$, מתקיים (לכל $0<x\in\mathbb{R}$):

$$f'(x)=q\cdot x^{q-1}$$

הוכחה. יהיו $n\in\mathbb{N}$ ו-$m\in\mathbb{Z}$ כך ש-$q=\frac{m}{n}$, א"כ לכל $0<x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)=x^{\frac{m}{n}}=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m}$ ולכן מכלל השרשרת נובע שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$f'(x)=m\cdot\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)}=\frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m-1}{n}}\cdot x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)}=\frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m-n}{n}}=q\cdot x^{q-1}$$

■

3.3 נגזרות במעריך ממשי, של פונקציות מעריכיות ושל לוגריתמים

למה 3.7. לכל $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ מתקיים $1+x-2x^2\leq\exp\left(x\right)\leq1+x+2x^2$.

הוכחה. מהבינום של ניוטון נובע שלכל $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{x^k}{n^k}=1+x+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{x^k}{n^k}\leq1+x+\sum_{k=2}^{n}\frac{x^2}{k!}\\&\leq1+x+\sum_{k=2}^{n}\frac{x^2}{2^k}=1+x+x^2\cdot\left(\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\leq1+x+2x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{x^k}{n^k}=1+x+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{x^k}{n^k}\geq1+x-\left|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{x^k}{n^k}\right|\\&\geq1+x-\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{\left|x\right|^k}{n^k}\geq1+x-\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{x^2}{k!}\\&\geq1+x-\sum_{k=2}^{n}\frac{x^2}{2^k}=1+x-x^2\cdot\left(\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\geq1+x-2x^2\end{aligned}$$

מכאן שמתקיים:

$$1+x-2x^2\leq\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leq1+x+2x^2$$

כלומר:

$$1+x-2x^2\leq\exp\left(x\right)\leq1+x+2x^2$$

■

טענה 3.8. $\exp$ גזירה ב-0 ומתקיים $\exp'\left(0\right)=1$.

הוכחה. לכל $0\neq x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\frac{\exp\left(x\right)-\exp\left(0\right)}{x-0}=\frac{\exp\left(x\right)-1}{x}$$

ולכן לכל $0\neq x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ מתקיים:

$$1\mp2x=\frac{1+x\mp2x^2-1}{x}\leq\frac{\exp\left(x\right)-\exp\left(0\right)}{x-0}\leq\frac{1+x\pm2x^2-1}{x}=1\pm2x$$

וממשפט הכריך נובע כי:

$$\exp'\left(0\right)=\lim_{x\to0}\frac{\exp\left(x\right)-\exp\left(0\right)}{x-0}=1$$

■

טענה 3.9. $\exp$ גזירה בכל מקום ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\exp'\left(x\right)=\exp\left(x\right)$.

הוכחה. יהי $x\in\mathbb{R}$, לכל $x\neq t\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\frac{\exp\left(t\right)-\exp\left(x\right)}{t-x}=\exp\left(x\right)\cdot\frac{\exp\left(t-x\right)-1}{t-x}$$

מאריתמטיקה של גבולות נובע כי:

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= \lim_{t\to x}\frac{\exp(t)-\exp(x)}{t-x} = \exp(x)\cdot\lim_{t\to x}\frac{\exp(t-x)-1}{t-x}\\ &= \exp(x)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\exp(t)-1}{t} = \exp(x)\cdot 1 = \exp(x)\end{aligned}$$

■

מסקנה 3.10. יהי $0 < a \in \mathbb{R}$ ותהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(x) := a^x$, מתקיים (לכל $x \in \mathbb{R}$):

$$f'(x) = \ln(a)\cdot a^x$$

טענה 3.11. לכל $0 < x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

הוכחה. מכלל כגזירה לפונקציה הופכית נובע כי לכל $0 < x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

■

מסקנה 3.12. לכל $0 < a \in \mathbb{R}$ השונה מ-1 ולכל $0 < x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x\cdot\ln(a)}$$

הוכחה. יהי $0 < a \in \mathbb{R}$ השונה מ-1.
ראינו שלכל $0 < x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

מכאן שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\log_a'(x) = \frac{\ln'(x)}{\ln(a)} = \frac{1}{x\cdot\ln(a)}$$

■

מסקנה 3.13. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ ותהא $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(x) := x^\alpha$ לכל $0 < x \in \mathbb{R}$, מתקיים (לכל $0 < x \in \mathbb{R}$):

$$f'(x) = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

הוכחה. אם $\alpha = 1$ אז הטענה טריוויאלית, על כן נעסוק במקרה שבו $\alpha \neq 1$.
מהגדרה, לכל $0 < x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$f(x) = \exp(\alpha\cdot\ln(x))$$

ומכאן שע"פ כלל השרשרת לכל $0 < x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \exp'(\alpha\cdot\ln(x))\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x} = \alpha\cdot\frac{1}{x}\cdot\exp(\alpha\cdot\ln(x))\\ &= \alpha\cdot\frac{1}{x}\cdot x^\alpha = \alpha\cdot x^{\alpha-1}\end{aligned}$$

■

3.4 הנגזרות של הפונקציות הטריגונומטריות

טענה 3.14. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\sin'(x) = \cos(x)$.

הוכחה. יהי $x \in \mathbb{R}$, לכל $x \neq t \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\frac{\sin(t) - \sin(x)}{t - x} = \frac{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t+x}{2}\right)}{2 \cdot \left(\frac{t-x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t+x}{2}\right)}{\frac{t-x}{2}}$$

וכמו כן גם:

$$\lim_{t \to x} \frac{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\frac{t-x}{2}} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

ולכן מרציפות של cos, ממשפט ההצבה בגבולות ומאריתמטיקה של גבולות נובע כי:

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{t \to x} \frac{\sin(t) - \sin(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t+x}{2}\right)}{\frac{t-x}{2}} \\ &= \lim_{t \to x} \frac{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\frac{t-x}{2}} \cdot \lim_{t \to x} \cos\left(\frac{t+x}{2}\right) = 1 \cdot \cos\left(\frac{x+x}{2}\right) = \cos(x)\end{aligned}$$

■

מסקנה 3.15. לכל $x \in (-1, 1)$ מתקיים:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

טענה 3.16. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\cos'(x) = -\sin(x)$.

הוכחה. יהי $x \in \mathbb{R}$, לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\frac{\cos(t) - \cos(x)}{t - x} = \frac{-2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{t+x}{2}\right)}{2 \cdot \left(\frac{t-x}{2}\right)} = -\frac{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{t+x}{2}\right)}{\frac{t-x}{2}}$$

ושוב מרציפות של sin, ממשפט ההצבה בגבולות ומאריתמטיקה של גבולות נובע כי:

$$\begin{aligned}\cos'(x) &= \lim_{t \to x} \frac{\cos(t) - \cos(x)}{t - x} = -\lim_{t \to x} \frac{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\frac{t-x}{2}} \cdot \lim_{t \to x} \sin\left(\frac{t+x}{2}\right) \\ &= -1 \cdot \sin\left(\frac{x+x}{2}\right) = -\sin(x)\end{aligned}$$

■

מסקנה 3.17. לכל $x \in (-1, 1)$ מתקיים:

$$\arccos'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

מסקנה 3.18. לכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$\cos(x) \neq 0$ מתקיים:

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) - (-\sin(x)) \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

מסקנה 3.19. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\arctan'(x) &= \left(\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}\right)^{-1} = \cos^2(\arctan(x)) \\ &= \left(\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan x)}}\right)^2 = \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

3.5 טבלה מסכמת

פונקציה	נגזרת	מקרים פרטיים והערות
$ax+b$	a	הנגזרת של קבועה היא 0 ושל הזהות היא 1.
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	ניתן להסיק את הנגזרת של כל פולינום.
a^x[5]	$\ln(a) \cdot a^x$	$\exp'(x) = \exp(x)$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$	$\ln'(x) = \frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	הטענות עבור שלוש הפונקציות
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	הללו מופיעות בקובץ[6]
$\operatorname{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	"הפונקציות ההיפרבוליות".

[5] $a \neq 1$, אחרת הנגזרת היא פונקציית האפס.

[6] הקובץ נמצא בתיקייה של אינפי' 2 מפני שהוא כולל מעט עיסוק בטורים ומפני שאכן למדנו על הפונקציות ההיפרבוליות רק באינפי' 2.

4 יחסי הגומלין בין פונקציה לנגזרתה

4.1 התחלה: משפט פרמה ומשפט רול

טענה 4.1. תהא f פונקציה, אם $x\in\mathbb{R}$ היא נקודת קיצון של f ו-f גזירה ב-x אז $f'(x)=0$.

הוכחה. נניח בהג"כ ש-x היא נקודת מינימום של f וש-f גזירה ב-x, א"כ f מוגדרת בסביבה U של x.
מהגדרה, לכל $x>t\in U$ מתקיים:

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\leq 0$$

$$\Rightarrow\lim_{t\to x^{-}}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\leq 0$$

כמו כן, לכל $x<t\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\geq 0$$

$$\Rightarrow\lim_{t\to x^{+}}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\geq 0$$

ולכן בהכרח:

$$0\leq\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\leq 0$$

כלומר:

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=0$$

■

מסקנה 4.2. משפט פרמה
אם $a\in\mathbb{R}$ היא נקודת קיצון (מקסימום/מינימום) מקומית של פונקציה f ו-f גזירה ב-a אז $f'(a)=0$.

♣ ממשפט פרמה נובע שכל נקודת קיצון היא נקודה קריטית, זו כמובן הסיבה להגדרה של נקודות קריטיות ככאלה שבהן הנגזרת מתאפסת.

♣ משפט פרמה נכון גם עבור נגזרות חד-צדדיות.

משפט 4.3. משפט רול[7]
תהא f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), אם $f(a)=f(b)$ אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש-$f'(c)=0$.

הוכחה. מעקרון המקסימום והמינימום של ויירשטראס נובע שיש ל-f נקודת מקסימום ונקודת מינימום ב-$[a,b]$, אם אחת מהן נמצאת גם ב-(a,b) אז סיימנו, אחרת לפחות אחת משתי נקודות הקצה (a ו-b) היא נקודת מינימום ולפחות אחת מהן היא נקודת מקסימום ולכן אם נניח ש-$f(a)=f(b)$ נקבל שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים:

$$f(x)\leq f(a)=f(b)$$
$$f(x)\geq f(a)=f(b)$$

כלומר $f(x)=f(a)=f(b)$ ומכאן שלכל $c\in(a,b)$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)\geq f(a)=f(c)$ ועל כן c היא נקודת מקסימום מקומית של f ב-$[a,b]$ וממשפט פרמה נובע ש-$f'(c)=0$. ■

[7] ערך בוויקיפדיה: מישל רול.

מסקנה 4.4. יהי $p\in\mathbb{R}[x]$ פולינום מדרגה $n\in\mathbb{N}$, ל-p יש לכל היותר n שורשים שונים, כלומר $|\{x\in\mathbb{R}\mid p(x)=0\}|\le n$.

הוכחה. נוכיח את המסקנה באינדוקציה.
<u>בסיס האינדוקציה</u>
לכל פולינום $q\in\mathbb{R}[x]$ מדרגה 1 קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$q(x)=ax+b$ ו-$a\neq 0$ ומכאן שלכל $x\in\mathbb{R}$ המקיים $q(x)=ax+b=0$ מתקיים $x=-\frac{b}{a}$, כלומר אם קיים x כזה אז הוא יחיד.
<u>צעד האינדוקציה</u>
יהי $n\in\mathbb{N}$ ונניח שלכל פולינום מדרגה n יש לכל היותר n שורשים.
יהי $q\in\mathbb{R}[x]$ פולינום מדרגה $n+1$, נניח בשלילה שיש ל-q לפחות $n+2$ שורשים שונים ויהיו $x_1,x_2,\ldots,x_{n+2}\in\mathbb{R}$ השורשים הללו כך ש-$x_1<x_2<\ldots<x_{n+2}$.
ממשפט רול נובע שלכל $n+1\ge k\in\mathbb{N}$ קיים $c_k\in(x_k,x_{k+1})$ כך ש-$q'(c_k)=0$, יהיו $c_1,c_2,\ldots,c_{n+1}\in\mathbb{R}$ כנ"ל.
מהגדרה, לכל $j,k\in\mathbb{N}\ge n+1$ כך ש-$j<k$ מתקיים $c_j<x_{j+1}\le x_k<c_k$ ובפרט $c_j\neq c_k$, כלומר $|\{c_1,c_2,\ldots,c_{n+1}\}|=n+1$.
הקבוצה הנ"ל היא קבוצה של שורשים של פולינום הנגזרת q' אך כפי שראינו בפרק הקודם פולינום הנגזרת הוא פולינום שדרגתו שווה לדרגת הפולינום המקורי פחות 1, כלומר $\deg q'=n$, וזאת בסתירה להנחת האינדוקציה האומרת של-q' יש לכל היותר n שורשים שונים.
מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ול-q יש לכל היותר $n+1$ שורשים שונים. ■

4.2 משפט הערך הממוצע של לגראנז'

משפט 4.5. משפט הערך הממוצע של לגראנז'[8]
תהא f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), קיימת נקודה $c\in(a,b)$ המקיימת:
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

הוכחה. תהא $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x\in[a,b]$):
$$g(x):=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$$
מאריתמטיקה של גזירות ורציפות נובע ש-g רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b) וכמו כן מתקיים גם:
$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(a-a)=f(a)$$
$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(b-a)=f(a)$$
ולכן ממשפט רול נובע שקיימת נקודה $c\in(a,b)$ המקיימת:
$$0=g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot 1$$
ומכאן שעבור אותה c מתקיים:
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
■

מסקנה 4.6. תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה, אם $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$ אז f היא פונקציה קבועה.

[8] ערך בוויקיפדיה: ז'וזף-לואי לגראנז'.

מסקנה 4.7. תהיינה f ו-g פונקציות המוגדרות על קטע פתוח[9] I וגזירות ב-I, אם $f'(x)=g'(x)$ לכל x בקטע אז קיים $C\in\mathbb{R}$ כך ש-$f=g+C$.

מסקנה 4.8. תהא $f:A\to B$ פונקציה גזירה, אם f' היא פונקציה קבועה אז קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$f(x)=ax+b$ לכל $x\in A$, כלומר f היא פונקציה ליניארית.

מסקנה 4.9. תהא f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ וגזירה ב-(a,b).

- אם $f'(x)\geq0$ לכל $x\in(a,b)$ אז f מונוטונית עולה ב-(a,b).
- אם $f'(x)\leq0$ לכל $x\in(a,b)$ אז f מונוטונית יורדת ב-(a,b).
- אם $f'(x)>0$ לכל $x\in(a,b)$ אז f עולה ממש ב-(a,b).
- אם $f'(x)<0$ לכל $x\in(a,b)$ אז f יורדת ממש ב-(a,b).

מסקנה 4.10. תהא f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ וגזירה ב-(a,b).

- אם $f'(x)\geq0$ לכל $x\in(a,b)$ אז f מונוטונית עולה ב-$[a,b]$.
- אם $f'(x)\geq0$ לכל $x\in(a,b)$ אז f מונוטונית יורדת ב-$[a,b]$.
- אם $f'(x)>0$ לכל $x\in(a,b)$ אז f עולה ממש ב-$[a,b]$.
- אם $f'(x)<0$ לכל $x\in(a,b)$ אז f יורדת ממש ב-$[a,b]$.

למה 4.11. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה של $a\in\mathbb{R}$.

- אם קיימת סביבה שמאלית של a שבה f יורדת וקיימת סביבה ימנית של a שבה f עולה אז a היא נקודת מינימום מקומית של f.
- אם קיימת סביבה שמאלית של a שבה f עולה וקיימת סביבה ימנית של a שבה f יורדת אז a היא נקודת מקסימום מקומית של f.

טענה 4.12. תהא f פונקציה גזירה פעמיים בנקודה $a\in\mathbb{R}$ כך ש-a היא נקודה קריטית של f.

- אם $f''(a)>0$ אז a היא נקודת מינימום מקומית של f.
- אם $f''(a)<0$ אז a היא נקודת מקסימום מקומית של f.

הוכחה. נוכיח רק את הסעיף הראשון, ההוכחה עבור השני דורשת רק את החלפת כיווני האי-שוויונות.
מהנתון ש-a היא נקודה קריטית של f נובע ש-$f'(a)=0$.
נניח ש-$f''(a)>0$, כלומר:

$$\lim_{t\to a}\frac{f'(t)-f'(a)}{t-a}>0$$

ומכאן שקיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $t\in B_{\delta}^{\circ}(a)$ מתקיים:

$$\frac{f'(t)}{t-a}=\frac{f'(t)-f'(a)}{t-a}>0$$

תהא δ כנ"ל ומכאן שלכל $t\in(a,a+\delta)$ מתקיים $f'(t)>0$ ולכל $t\in(a-\delta,a)$ מתקיים $f'(t)<0$, ולכן ממסקנה 4.9 נובע ש-f עולה ממש ב-$(a,a+\delta)$ ויורדת ממש ב-$(a-\delta,a)$ וממילא ע"פ הלמה (4.11) a היא נקודת מינימום של f. ■

[9] או על קרן פתוחה/כל הישר.

טענה 4.13. תהא f פונקציה גזירה פעמיים בנקודה $a\in\mathbb{R}$.

- אם $a\in\mathbb{R}$ היא נקודת מינימום מקומית של f אז $f''(a)\geq 0$.
- אם $a\in\mathbb{R}$ היא נקודת מקסימום מקומית של f אז $f''(a)\leq 0$.

הוכחה. נוכיח רק את הסעיף הראשון, ההוכחה עבור הסעיף השני דומה מאד.
נניח ש-a היא נקודת מינימום מקומית של f ונניח בשלילה שמתקיים $f''(a)<0$.
a היא נקודת מינימום של f וככזו היא נקודה קריטית ולכן ע"פ הטענה הקודמת a היא גם נקודת מקסימום מקומית של f.
מכאן שקיימת סביבה U של a שבה f קבועה ולכן הנגזרת שלה בסביבה זו היא פונקציית האפס ומכאן ש-$f''(a)=0$ בסתירה להנחת השלילה.
מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$f''(a)\geq 0$. ■

טענה 4.14. [10] תהא f פונקציה גזירה על קטע פתוח[11] I.

- אם f' מונוטונית עולה ב-I אז f קמורה ב-I.
- אם f' מונוטונית יורדת ב-I אז f קעורה ב-I.

הוכחה. נוכיח רק את הסעיף הראשון, ההוכחה של הסעיף השני דומה למדי.
נניח שלכל $x\in I$ מתקיים $f''(x)\geq 0$ ונניח בשלילה ש-f אינה קמורה ב-I, כלומר קיימים $a,b\in I$ וקיים $t\in[0,1]$ כך שמתקיים:

$$f(t\cdot a+(1-t)\cdot b)>t\cdot f(a)+(1-t)\cdot f(b)$$

יהיו a, b ו-t כנ"ל, מהגדרה לא ייתכן ש-$a=b$ שכן אז נקבל שוויון במקום האי-שוויון שלעיל, א"כ נניח בהג"כ ש-$a<b$.
נסמן $x:=t\cdot a+(1-t)\cdot b$, לא ייתכן ש-$x=a$ או ש-$x=b$ משום שאז $t=1$ או ש-$t=0$ ואז נקבל שוב שוויון במקום האי-שוויון שלעיל.
מהגדרה מתקיים $x-a=(1-t)\cdot(b-a)$ וגם $b-x=t\cdot(b-a)$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &> \frac{t\cdot f(a)+(1-t)\cdot f(b)-f(a)}{(1-t)\cdot(b-a)}\\
&= \frac{-t\cdot(f(b)-f(a))+f(b)-f(a)}{(1-t)\cdot(b-a)}\\
&= \frac{(1-t)\cdot(f(b)-f(a))}{(1-t)\cdot(b-a)}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\\
\Rightarrow \frac{f(b)-f(x)}{b-x} &< \frac{f(b)-t\cdot f(a)-(1-t)\cdot f(b)}{t\cdot(b-a)}\\
&= \frac{f(b)+t\cdot(f(b)-f(a))-f(b)}{t\cdot(b-a)}\\
&= \frac{t\cdot(f(b)-f(a))}{t\cdot(b-a)}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}
\end{aligned}$$

ממשפט הערך הממוצע נובע שקיימים $c_1\in(a,x)$ ו-$c_2\in(x,b)$ כך שמתקיים:

$$f'(c_1)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(b)-f(x)}{b-x}=f'(c_2)$$

וזאת בסתירה לכך ש-f' מונוטונית יורדת ב-I וממילא גם ב-(a,b). ■

[10] טענה זו והמסקנה שאחריה נלמדו אצל יורם.
[11] או על קרן פתוחה/כל הישר.

מסקנה 4.15. תהא f פונקציה גזירה פעמיים על קטע פתוח[12] I.

- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f''(x)\geq 0$ אז f קמורה ב-I.
- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f''(x)\leq 0$ אז f קעורה ב-I.

♣ מכאן שאם x_0 היא נקודת פיתול של f אז f'' מחליפה סימן ב-x_0.

משפט 4.16. תהא f פונקציה רציפה בנקודה $a\in\mathbb{R}$, אם הגבול $\lim\limits_{x\to a}f'(a)$ קיים אז f גזירה ב-a ומתקיים:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}f'(a)$$

כלומר לפונקציית הנגזרת אין ולו נקודת אי-רציפות סליקה אחת (כשמגדירים אותה על התחום המרבי).

♣ אצל יורם הוכחנו באמצעות משפט דארבו (בהמשך), שלפונקציית הנגזרת אין גם נקודות אי-רציפות מסדר ראשון ומכאן שנקודות אי-רציפות של נגזרת (אם הן קיימות) הן מסדר שני.

הוכחה. נניח שהגבול $L:=\lim_{x\to a}f'(a)$ קיים, מהעובדה שגבול זה קיים נובע ש-f' מוגדרת בסביבה מנוקבת של a, ומכאן שקיימת $0<\delta_0\in\mathbb{R}$ כך ש-f' מוגדרת ב-$[a-\delta_0,a+\delta_0]\setminus\{a\}$, וממילא f רציפה ב-$[a-\delta_0,a+\delta_0]$, תהא δ_0 כנ"ל.
יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$, מהגדרת הגבול נובע שקיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $c\in B_\delta^\circ(a)$ מתקיים $|f'(c)-L|<\varepsilon$, תהא δ כנ"ל כך ש-$\delta\leq\delta_0$.
יהי $x\in B_\delta^\circ(a)$, ממה שראינו לעיל f רציפה בקטע הסגור שבין x ל-a וגזירה בקטע הפתוח המתאים, מכאן שע"פ משפט הערך הממוצע קיים c בקטע פתוח זה כך שמתקיים:

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

אותו c מקיים בהכרח $c\in B_\delta^\circ(a)$ ולכן מתקיים גם:

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-L\right|=|f'(c)-L|<\varepsilon$$

ε הנ"ל ו-x הנ"ל היו שרירותיים ולכן לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in B_\delta^\circ(a)$ מתקיים:

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-L\right|<\varepsilon$$

מהגדרת הגבול נובע כי:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}f'(a)$$

■

[12] או על קרן פתוחה/כל הישר.

4.3 משפט הערך הממוצע של קושי ומשפט דארבו

משפט 4.17. משפט הערך הממוצע של קושי

תהיינה f ו-g פונקציות רציפות בקטע סגור $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ וגזירות בקטע הפתוח (a,b), קיים $c\in(a,b)$ המקיים:

$$\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)\cdot g'\left(c\right)=\left(g\left(b\right)-g\left(a\right)\right)\cdot f'\left(c\right)$$

♣ אצל יורם למדנו גרסה קצת אחרת: תהיינה f ו-g פונקציות רציפות בקטע סגור $[a,b]$ וגזירות בקטע הפתוח (a,b), אם לכל $x\in(a,b)$ מתקיים $g'\left(x\right)\neq 0$ אזי $g\left(a\right)\neq g\left(b\right)$ וגם קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך שמתקיים:

$$\frac{f'\left(c\right)}{g'\left(c\right)}=\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{g\left(b\right)-g\left(a\right)}$$

נשים לב שבניסוח זה רואים בבירור שהמשפט של קושי הוא הכללה של משפט הערך הממוצע של לגראנז': נציב $g=\mathrm{Id}$.

הוכחה. תהא $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x\in[a,b]$):

$$h\left(x\right):=\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)\cdot g\left(x\right)-\left(g\left(b\right)-g\left(a\right)\right)\cdot f\left(x\right)$$

נשים לב לכך שמתקיים:

$$h\left(a\right):=\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)\cdot g\left(a\right)-\left(g\left(b\right)-g\left(a\right)\right)\cdot f\left(a\right)=f\left(b\right)\cdot g\left(a\right)-f\left(a\right)\cdot g\left(b\right)$$
$$h\left(b\right):=\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)\cdot g\left(b\right)-\left(g\left(b\right)-g\left(a\right)\right)\cdot f\left(b\right)=-f\left(a\right)\cdot g\left(b\right)+f\left(b\right)\cdot g\left(a\right)$$

כלומר $h\left(a\right)=h\left(b\right)$.

מאריתמטיקה של רציפות וגזירות נובע ש-h רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b) ולכן ע"פ משפט רול קיים $c\in(a,b)$ כך שמתקיים:

$$0=h'\left(c\right)=\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)\cdot g'\left(c\right)-\left(g\left(b\right)-g\left(a\right)\right)\cdot f'\left(c\right)$$

ומכאן שאותו c מקיים:

$$\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)\cdot g'\left(c\right)=\left(g\left(b\right)-g\left(a\right)\right)\cdot f'\left(c\right)$$

■

משפט 4.18. משפט דארבו[13]

תהא f פונקציה גזירה בקטע פתוח (a,b) כך שבנוסף $f'\left(a^{+}\right)$ ו-$f'\left(b^{-}\right)$ קיימים (f גזירה ב-a מימין וב-b משמאל), לכל t השייך לקטע הפתוח שבין $f'\left(a^{+}\right)$ ו-$f'\left(b^{-}\right)$[14] קיים $x\in(a,b)$ כך ש-$f'(x)=t$.

♣ משפט דארבו הוא כמין משפט "ערך ביניים" לנגזרות והוא מגביל מאד את קבוצת הפונקציות שהן נגזרות של פונקציות אחרות, לא כל פונקציה יכולה להיות נגזרת!

הוכחה. יהי t בקטע הפתוח שבין $f'\left(a^{+}\right)$ ו-$f'\left(b^{-}\right)$ ותהא $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x\in[a,b]$):

$$g(x):=f(x)-t\cdot x$$

מכאן שע"פ כללי גזירה מתקיים $g'(x)=f'(x)-t$ לכל $x\in(a,b)$, וכמו כן מתקיים $g'\left(a^{+}\right)=f'\left(a^{+}\right)-t\neq 0$ ו-$g'\left(b^{-}\right)=f'\left(b^{-}\right)-t\neq 0$.

מאריתמטיקה של רציפות נובע ש-g רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ ולכן מעקרון המקסימום והמינימום של ויירשטראס נובע שיש ל-g נקודת קיצון בקטע, א"כ תהא $c\in[a,b]$ נקודה כזו.

ממשפט פרמה נובע ש-$g'\left(c^{\pm}\right)=0$ אך ראינו לעיל ש-$g'\left(a^{+}\right)\neq 0$ ו-$g'\left(b^{-}\right)\neq 0$ ולכן $c\neq a$ ו-$c\neq b$, א"כ $c\in(a,b)$ ומתקיים $g'(c)=0$, כלומר $f'(c)-t=0$ וממילא $f'(c)=t$. ■

מסקנה 4.19. [15] תהא f פונקציה גזירה בקטע פתוח (a,b), ל-f' אין נקודות אי-רציפות סליקות או נקודות אי-רציפות מסדר ראשון.

4.4 משוואות דיפרנציאליות על קצה המזלג

טענה 4.20. תהא $f:A\to B$ פונקציה גזירה כך שקיים $k\in\mathbb{R}$ המקיים $f'(x)=k\cdot f(x)$ לכל $x\in A$[16], קיים $c\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in A$ מתקיים $f(x)=c\cdot e^{kx}$.

הוכחה. יהי k כנ"ל ותהא $g:A\to B$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x\in A$):

$$g(x):=\frac{f(x)}{\exp(kx)}$$

מכלל הגזירה למנה נובע שלכל $x\in A$ מתקיים:

$$g'(x)=\frac{f'(x)\cdot\exp(kx)-f(x)\cdot k\cdot\exp'(kx)}{\exp^{2}(kx)}=\frac{k\cdot f(x)\cdot\exp(kx)-f(x)\cdot k\cdot\exp(kx)}{\exp^{2}(kx)}=0$$

ממסקנה 4.6 נובע ש-g היא פונקציה קבועה, כלומר קיים $c\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in A$ מתקיים $g(x)=c$ וממילא גם:

$$f(x)=g(x)\cdot\exp(kx)=c\cdot\exp(kx)$$

■

טענה 4.21. תהא $f:A\to B$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x)=f(x)$ לכל $x\in A$, קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים (לכל $x\in A$):

$$f(x)=a\cdot e^{x}+b\cdot e^{-x}$$

---

[13] ערך בוויקיפדיה: ז'אן גסטון דארבו.

[14] אם $f'\left(a^{-}\right)=f'\left(b^{+}\right)$ אז המשפט מתקיים באופן ריק ומבחינה אינטואיטיבית ניתן לומר שהוא מתקיים תמיד עבור הנגזרות החד-צדדיות בקצוות משום שהן עצמן מקבלות את הערך הדרוש.

[15] מסקנה זו נלמדה אצל יורם.

[16] מהגדרה k כזה יחיד אלא אם f היא פונקציית האפס.

הוכחה. תהיינה $g,h:A\to B$ שתי פונקציות המוגדרות ע"י (לכל $x\in A$):

$$\begin{aligned}g(x)&:=e^{x}\cdot\left(f(x)+f'(x)\right)\\ h(x)&:=e^{x}\cdot\left(f(x)-f'(x)\right)\end{aligned}$$

מכאן שע"פ כלל לייבניץ לכל $x\in A$ מתקיים:

$$\begin{aligned}g'(x)&=e^{x}\cdot\left(f(x)+f'(x)\right)+e^{x}\cdot\left(f'(x)+f''(x)\right)\\ &=g(x)+e^{x}\cdot\left(f'(x)+f(x)\right)=2\cdot g(x)\\ h'(x)&=e^{x}\cdot\left(f(x)-f'(x)\right)+e^{x}\cdot\left(f'(x)-f''(x)\right)\\ &=h(x)+e^{x}\cdot\left(f'(x)-f(x)\right)=h(x)-h(x)=0\end{aligned}$$

מכאן שע"פ הטענה הקודמת (4.20) קיים $a\in\mathbb{R}$ כך ש-$g(x)=2a\cdot\exp(2x)$ וע"פ מסקנה 4.6 קיים $b\in\mathbb{R}$ כך ש-$h(x)=2b$ לכל $x\in A$, יהיו a ו-b כנ"ל.
א"כ לכל $x\in A$ מתקיים:

$$\begin{aligned}2a\cdot e^{2x}&=e^{x}\cdot\left(f(x)+f'(x)\right)\\ 2b&=e^{x}\cdot\left(f(x)-f'(x)\right)\end{aligned}$$

ולכן גם:

$$\begin{aligned}2a\cdot e^{x}&=f(x)+f'(x)\\ 2b\cdot e^{-x}&=f(x)-f'(x)\end{aligned}$$

וממילא:

$$f(x)=\frac{2\cdot f(x)}{2}=\frac{\left(f(x)+f'(x)\right)+\left(f(x)-f'(x)\right)}{2}=\frac{2a\cdot e^{x}+2b\cdot e^{-x}}{2}=a\cdot e^{x}+b\cdot e^{-x}$$

■

טענה 4.22. תהא $f:A\to B$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x)=-f(x)$ לכל $x\in A$, קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים (לכל $x\in A$):

$$f(x)=a\cdot\sin(x)+b\cdot\cos(x)$$

הוכחה. יהי $\alpha\in A$ ותהא $g:A\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x\in A$):

$$g(x):=f(x)-f'(\alpha)\cdot\sin(x-\alpha)-f(\alpha)\cdot\cos(x-\alpha)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow g(\alpha)&=f(\alpha)-f'(\alpha)\cdot\sin(0)-f(\alpha)\cdot\cos(0)\\ &=f(\alpha)-f'(\alpha)\cdot 0-f(\alpha)\cdot 1=0\end{aligned}$$

מכללי גזירה, לכל $x\in A$ מתקיים:

$$g'(x)=f'(x)-f'(\alpha)\cdot\cos(x-\alpha)+f(\alpha)\cdot\sin(x-\alpha)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow g'(\alpha) &= f'(\alpha) - f'(\alpha)\cdot\cos(0) + f(\alpha)\cdot\sin(0)\\ &= f'(\alpha) - f'(\alpha)\cdot 1 + f(\alpha)\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

כמו כן, לכל $x \in A$ מתקיים:

$$\begin{aligned}g''(x) &= f''(x) + f'(\alpha)\cdot\sin(x-\alpha) + f(\alpha)\cdot\cos(x-\alpha)\\ &= -f(x) + f'(\alpha)\cdot\sin(x-\alpha) + f(\alpha)\cdot\cos(x-\alpha) = -g(x)\end{aligned}$$

תהא $h : A \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x \in A$):

$$h(x) := g^2(x) + g'^2(x)$$

מכללי גזירה נובע שלכל $x \in A$ מתקיים:

$$\begin{aligned}h'(x) &= 2\cdot g(x)\cdot g'(x) + 2\cdot g'(x)\cdot g''(x)\\ &= 2\cdot g(x)\cdot g'(x) - 2\cdot g'(x)\cdot g(x) = 0\end{aligned}$$

ומכאן שלפי מסקנה 4.6 h היא פונקציה קבועה. נשים לב לכך שמתקיים:

$$h(\alpha) = g^2(\alpha) + g'^2(\alpha) = 0$$

ולכן $h(x) = 0$ לכל $x \in A$.
כעת נשים לב לכך שמכיוון ש-h היא סכום של שני ריבועים הרי שכל אחד מהם בנפרד הוא 0, כלומר לכל $x \in A$ מתקיים $g(x) = g'(x) = 0$ ומכאן שגם:

$$f(x) - f'(\alpha)\cdot\sin(x-\alpha) - f(\alpha)\cdot\cos(x-\alpha) = g(x) = 0$$

וממילא מתקיים (לכל $x \in A$):

$$\begin{aligned}f(x) &= f'(\alpha)\cdot\sin(x-\alpha) + f(\alpha)\cdot\cos(x-\alpha)\\ &= f'(\alpha)\cdot(\sin(x)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cdot\cos(x)) + f(\alpha)\cdot(\cos(x)\cdot\cos(\alpha) + \sin(x)\cdot\sin(\alpha))\\ &= (f'(\alpha)\cdot\cos(\alpha) + f(\alpha)\cdot\sin(\alpha))\cdot\sin(x) + (-f'(\alpha)\cdot\sin(\alpha) + f(\alpha)\cdot\cos(\alpha))\cdot\cos(x)\end{aligned}$$

ולכן אם נגדיר:

$$\begin{aligned}a &:= f'(\alpha)\cdot\cos(\alpha) + f(\alpha)\cdot\sin(\alpha)\\ b &:= -f'(\alpha)\cdot\sin(\alpha) + f(\alpha)\cdot\cos(\alpha)\end{aligned}$$

נקבל (לכל $x \in A$):

$$f(x) = a\cdot\sin(x) + b\cdot\cos(x)$$

■

מסקנה 4.23. תהא $f:A\to B$ פונקציה גזירה פעמיים כך שקיים $k\in\mathbb{R}$ המקיים $f''(x)=k\cdot f(x)$ [17] ונסמן $\omega:=\sqrt{|k|}$.

- אם $k>0$ אז קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים (לכל $x\in A$):

$$f(x)=a\cdot e^{\omega x}+b\cdot e^{-\omega x}$$

- אם $k<0$ אז קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים (לכל $x\in A$):

$$f(x)=a\cdot\sin(\omega x)+b\cdot\cos(\omega x)$$

- אם $k=0$ אז קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$f(x)=ax+b$ לכל $x\in A$.

הוכחה. נסמן $C:=\omega\cdot A$, מהגדרה לכל $x\in A$ קיים $z\in C$ יחיד כך ש-$x=\frac{z}{\omega}$ ולכל $z\in C$ קיים $x\in A$ יחיד כך ש-$z=\omega x$.
תהא $g:C\to B$ פונקציה המוגדרת ע"י $g(z):=f\left(\frac{z}{\omega}\right)$ (לכל $z\in C$).
מכללי גזירה נובע שלכל $z\in C$ מתקיים:

$$g'(z)=\frac{1}{\omega}\cdot f'\left(\frac{z}{\omega}\right)$$

ולכן גם:

$$g''(z)=\frac{1}{\omega^2}\cdot f''\left(\frac{z}{\omega}\right)=\frac{k}{\omega^2}\cdot f\left(\frac{z}{\omega}\right)=\frac{k}{|k|}\cdot f\left(\frac{z}{\omega}\right)=(k)\cdot g(z)$$

כעת נחלק למקרים:

- אם $k>0$ אז $(k)=1$ ולפי טענה 4.21 קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים (לכל $z\in C$):

$$g(z)=a\cdot e^{z}+b\cdot e^{-z}$$

יהיו a ו-b כנ"ל ומכאן שלכל $x\in A$ מתקיים:

$$f(x)=f\left(\frac{\omega x}{\omega}\right)=g(\omega x)=a\cdot e^{\omega x}+b\cdot e^{-\omega x}$$

- אם $k<0$ אז $(k)=-1$ ולפי טענה 4.22 קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים (לכל $z\in C$):

$$g(z)=a\cdot\sin(z)+b\cdot\cos(z)$$

יהיו a ו-b כנ"ל ומכאן שלכל $x\in A$ מתקיים:

$$f(x)=f\left(\frac{\omega x}{\omega}\right)=g(\omega x)=a\cdot\sin(\omega x)+b\cdot\cos(\omega x)$$

- אם $k=0$ אז $f''(x)=0$ לכל $x\in A$ ולכן ממסקנה 4.6 f' היא פונקציה קבועה, ולכן ממסקנה 4.8 נובע שקיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$f(x)=ax+b$ לכל $x\in A$.

■

[17] ושוב, מהגדרה k כזה יחיד אלא אם f היא פונקציית האפס.

5 כלל לופיטל

♣ תהיינה f ו-g פונקציות כך שהגבול (במובן הרחב) של f ב-a הוא l וזה של g הוא m[18], כלומר:

$$l := \lim_{x\to a} f(x),\ \ m := \lim_{x\to a} g(x)$$

ראינו שמתקיים:

מס'	תנאים	"צורת הגבול"	$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$	נימוקים
1	$l, m\in\mathbb{R}$ ו-$m\neq 0$	$\frac{l}{m}$ $(\frac{0}{m})$	$\frac{l}{m}$	אריתמטיקה של גבולות
2	$l=\pm\infty$ ו-$0<m\in\mathbb{R}$[19]	$\frac{\pm\infty}{m}$	$\pm\infty$	מקרה 6
3	$0<l\in\mathbb{R}$, $m=0$ ו-g חיובית[20]	$\frac{l}{0}$	∞	מקרה 7
4	$l=\pm\infty$, $m=0$ ו-g חיובית[21]	$\frac{\pm\infty}{0}$	$\pm\infty$	מקרה 7
5	$l\in\mathbb{R}$ ו-$m=\pm\infty$	$\frac{l}{\pm\infty}$ $(\frac{0}{\pm\infty})$	0	מקרה 8
6	$l=\pm\infty$ ו-g חסומה מלרע ע"י חסם חיובי[22]	$\frac{\pm\infty}{M}$	$\pm\infty$	כלל המכפלה
7	f חסומה מלרע ע"י חסם חיובי, $m=0$ ו-g חיובית[23]	$\frac{M}{0}$	∞	כלל המכפלה[24]
8	f חסומה ו-$m=\pm\infty$	$\frac{M}{\pm\infty}$	0	כלל אפסה וחסומה[25]

אבל מה קורה בגבולות מהצורה $\frac{0}{0}$ או $\frac{\infty}{\infty}$[26]? כאן בא לעזרתנו כלל לופיטל[27].

משפט 5.1. כלל לופיטל לגבול של פונקציה בנקודה

תהיינה $f,g:A\to B$ שתי פונקציות כך ש-A מכילה סביבה מנוקבת של נקודה $a\in\mathbb{R}$ ובנוסף f ו-g גזירות בסביבה זו.

- אם $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ וגם הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים (במובן הרחב) אז מתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- אם $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ וגם הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים (במובן הרחב[28]) אז מתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

♣ כלל לופיטל לגבול של פונקציה בנקודה נכון גם עבור גבולות חד-צדדיים (ואז ניתן להסתפק בסביבה חד-צדדית של a שבה f ו-g גזירות).

---

[18] מדובר בגבולות במובן הרחב: ייתכן ש-a, l או m הם סימון ל-$\pm\infty$.
[19] ראה הערה במקרה 6 מה קורה כאשר $m<0$.
[20] ראה הערה במקרה 7 מה קורה כאשר $l<0$ או ש-g שלילית.
[21] ראה הערה במקרה 7 מה קורה כאשר g שלילית.
[22] אם g חסומה מלעיל ע"י חסם שלילי אז הגבול הוא $\mp\infty$.
[23] אם f חסומה מלעיל ע"י חסם שלילי או ש-g שלילית אז הגבול הוא $-\infty$, אך אם שניהם מתקיימים הגבול נשאר ∞.
[24] הגבול של $\frac{1}{g}$ הוא ∞.
[25] הגבול של $\frac{1}{g}$ הוא 0.
[26] גבולות מהצורה $\frac{-\infty}{\infty}$ או מהצורה $\frac{\infty}{-\infty}$ שקולים לגבולות מהצורה $-\frac{\infty}{\infty}$, וגבולות מהצורה $\frac{-\infty}{-\infty}$ שקולים לגבולות מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$.
[27] ערך בוויקיפדיה: המרקיז דה לופיטל, למעשה מי שגילה את כלל לופיטל היה יוהאן ברנולי שהיה המורה של לופיטל, הכלל נקרא על שמו של לופיטל מפני שקנה מברנולי את הבלעדיות על תגליותיו וכך הכלל התפרסם לראשונה בספר שכתב לופיטל (ראו בוויקיפדיה בערכים הנ"ל ובערך כלל לופיטל.
[28] לא ייתכן שהגבול של מנת הנגזרות הוא $-\infty$, הוכחה לכך נמצאת בקובץ ההוכחות (בהוכחה של סעיף זה).

הוכחה. נניח שהגבול $L:=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים במובן הרחב, מכאן נובע שקיימת סביבה מנוקבת של a שבה g' אינה מתאפסת ולכן ע"פ משפט רול גם g אינה מתאפסת בסביבה זו.

נעסוק תחילה במקרה שבו $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$.

נשים לב שניתן להניח כי f ו-g מוגדרות ב-a ורציפות בה (כלומר $f(a)=g(a)=0$), תהיינה $F,G:A\cup\{a\}\to B\cup\{0\}$ שתי פונקציות המוגדרות ע"י (לכל $x\in A\cup\{a\}$):

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x) & x\neq a\\ 0 & x=a\end{cases},\ \tilde{g}(x)=\begin{cases}g(x) & x\neq a\\ 0 & x=a\end{cases}$$

ונניח שהצלחנו להוכיח כי:

$$\lim_{x\to a}\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\tilde{f}'(x)}{\tilde{g}'(x)}$$

ובפרט קיימת סביבה מנוקבת של a שבה G ו-G' אינן מתאפסות, נשים לב שלכל $a\neq x\in A$ מתקיים:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)},\ \frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\tilde{f}'(x)}{\tilde{g}'(x)}$$

ולכן גם:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\tilde{f}'(x)}{\tilde{g}'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

שכן הגבול אינו מושפע כלל מערך הפונקציה בנקודה. א"כ נניח כי f ו-g רציפות ב-a, כלומר f ו-g מוגדרות ב-a ומתקיים $f(a)=g(a)=0$.

- נניח ש-$L\in\mathbb{R}$ ויהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$.

  מהגדרת הגבול קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in B_{\delta}^{\circ}(a)$ מתקיים:

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\varepsilon$$

  תהא δ כנ"ל. ממשפט הערך הממוצע של קושי נובע שלכל $x\in B_{\delta}^{\circ}(a)$ קיימת נקודה $c_x\in B_{\delta}^{\circ}(a)$[29] כך שמתקיים:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

  ומכאן שלכל $x\in B_{\delta}^{\circ}(a)$ מתקיים:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- נניח ש-$L=\infty$, כפי שראינו לעיל נובע מזה שלכל $M\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in B_{\delta}^{\circ}(a)$ קיים $c_x\in B_{\delta}^{\circ}(a)$ המקיים:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}>M$$

  ולכן מתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

[29] ליתר דיוק המשפט קובע ש-c_x שייך לאותה סביבה חד-צדדית של a שאליה שייך x ולכן כלל לופיטל עובד גם עבור גבולות חד-צדדיים.

• ההוכחה עבור $L=-\infty$ זהה עד כדי החלפת כיווני האי-שוויון שלעיל.

כעת נעבור לעסוק במקרה שבו $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=\lim_{x\to a}g\left(x\right)=\pm\infty$.[30]

• נניח כי $L\in\mathbb{R}$ ויהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$.
מהגדרת הגבול קיימת $0<\eta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in B_{\eta}^{\circ}\left(a\right)$ מתקיים:

$$\left|\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

תהא η כנ"ל ומכאן שע"פ משפט הערך הממוצע של קושי לכל $x\in B_{\eta}^{\circ}\left(a\right)$ קיימת נקודה $c_{x}\in B_{\eta}^{\circ}\left(a\right)$[31] כך שמתקיים:

$$\frac{f\left(x\right)-f\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)}=\frac{f'\left(c_{x}\right)}{g'\left(c_{x}\right)}$$

ולכן לכל $x\in B_{\eta}^{\circ}\left(a\right)$ מתקיים:

$$\left|\frac{f\left(x\right)-f\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)}-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

ובנוסף:

$$\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-f\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)}=L$$

כעת נשים לב לכך שלכל $x\in B_{\eta}^{\circ}\left(a\right)$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\frac{f\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)}-\frac{g\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)}\cdot\frac{f\left(x\right)-f\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)} & =\frac{f\left(a+\eta\right)\cdot\left(g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)\right)-g\left(a+\eta\right)\left(f\left(x\right)-f\left(a+\eta\right)\right)}{g\left(x\right)\cdot\left(g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)\right)}\\
 & =\frac{f\left(a+\eta\right)\cdot g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)f\left(x\right)}{g\left(x\right)\cdot\left(g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)\right)}\\
 & =\frac{f\left(a+\eta\right)\cdot g\left(x\right)-f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)+f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)\cdot f\left(x\right)}{g\left(x\right)\cdot\left(g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)\right)}\\
 & =\frac{\left(f\left(a+\eta\right)-f\left(x\right)\right)\cdot g\left(x\right)+f\left(x\right)\cdot\left(g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)\right)}{g\left(x\right)\cdot\left(g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)\right)}\\
 & =\frac{f\left(a+\eta\right)-f\left(x\right)}{g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)}+\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\\
 & =\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}-\frac{f\left(x\right)-f\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)}
\end{aligned}$$

מהעובדה ש-$\lim_{x\to a}g\left(x\right)=\pm\infty$ נובע שמתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to a}\frac{g\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)}=0$$

ולכן מאריתמטיקה של גבולות נובע כי:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}-\frac{f\left(x\right)-f\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)}-\frac{g\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)}\cdot\frac{f\left(x\right)-f\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)}\right)=0-0\cdot L=0$$

ומכאן שקיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך ש-$\delta\leq\eta$ ולכל $x\in B_{\delta}^{\circ}\left(a\right)$ מתקיים:

$$\left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}-\frac{f\left(x\right)-f\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

[30] הוכחה זו נלמדה אצל יורם.
[31] ושוב: המשפט קובע ש-c_{x} שייך לאותה סביבה חד-צדדית של a שאליה שייך x ולכן כלל לופיטל עובד גם עבור גבולות חד-צדדיים.

תהא δ כנ"ל ומכאן שלכל $x\in B_{\delta}^{\circ}\left(a\right)$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\varepsilon & >\left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}-\frac{f\left(x\right)-f\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)}\right|+\left|\frac{f\left(x\right)-f\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)}-L\right|\\
 & \geq\left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}-\frac{f\left(x\right)-f\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)}+\frac{f\left(x\right)-f\left(a+\eta\right)}{g\left(x\right)-g\left(a+\eta\right)}-L\right|\\
 & =\left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}-L\right|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=L=\lim_{x\to a}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$$

- נניח ש-$L=\pm\infty$, בפרט קיימת סביבה של a שבה f' אינה מתאפסת ומכאן שמתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{g'\left(x\right)}{f'\left(x\right)}=0$$

ולפי המקרה הקודם נובע מכאן שמתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{g\left(x\right)}{f\left(x\right)}=0$$

ולכן גם:

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right|=\infty$$

כעת נזכור ש-$\lim_{x\to a}f\left(x\right)=\lim_{x\to a}g\left(x\right)=\pm\infty$ ולכן קיימת סביבה מנוקבת של a שבה f ו-g שוות סימן, מכאן שבאותה סביבה מתקיים:

$$\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right|$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\infty$$

- רגע רגע, מה קורה פה? התחלנו עם ההנחה שהגבול של מנת הנגזרות הוא $\pm\infty$ וקיבלנו שהגבול של מנת הפונקציות הוא ∞, זה לא כל כך מסתדר עם מה שראינו עד עכשיו...

התשובה היא שכאשר שתי הפונקציות שואפות ל-$\pm\infty$ הגבול של מנת הנגזרות אינו יכול להיות $-\infty$, להלן הנימוק לכך: נניח בשלילה שהגבול של מנת הנגזרות הוא $-\infty$, א"כ קיימת סביבה מנוקבת של a שבה סימני הנגזרות מנוגדים בכל נקודה; מצד שני לא ייתכן שקיימת סביבה חד-צדדית[32] שמאלית[33] של a שבה אחת מהנגזרות שומרת על סימן קבוע משום שאז גם האחרת תשמור על סימן קבוע מנוגד ומזה נובע שאחת מן הפונקציות תהיה יורדת ממש והאחרת תהיה עולה ממש בסביבה זו, ובמקרה כזה הפונקציה היורדת אינה יכולה לשאוף ל-∞ משמאל ל-a ואילו העולה אינה יכולה לשאוף ל-$-\infty$ משמאל ל-a בסתירה לנתון. א"כ שתי הנגזרות מקבלות ערכים חיוביים ושליליים בכל סביבה שמאלית של a ולכן ממשפט דארבו נובע שבכל סביבה שמאלית של a קיימת נקודה שבה g' מתאפסת בסתירה לכך שהגבול של מנת הנגזרות קיים.

■

[32] לא נוכל להשתמש כאן בסביבה מנוקבת דו-צדדית משום שהשלב האחרון של ההוכחה ישתמש במשפט דארבו והלא f ו-g אינן מוגדרות ב-a.
[33] ניתן היה לדבר גם על סביבה ימנית אלא שהדיבור על שמאלית מפשט את הדיבור כפי שתיווכחו להלן.

משפט 5.2. כלל לופיטל לגבול של פונקציה ב-$\pm\infty$
תהיינה $f,g:A\to B$ שתי פונקציות.

- נניח ש-A מכילה קרן ימנית כך ש-f ו-g גזירות בכל נקודה בקרן זו.
  - אם $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}g\left(x\right)=0$ וגם הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$ קיים (במובן הרחב) אז מתקיים:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$$
  - אם $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}g\left(x\right)=\pm\infty$ וגם הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$ קיים (במובן הרחב) אז מתקיים:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$$
- נניח ש-A מכילה קרן שמאלית כך ש-f ו-g גזירות בכל נקודה בקרן זו.
  - אם $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}g\left(x\right)=0$ וגם הגבול $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$ קיים (במובן הרחב) אז מתקיים:
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$$
  - אם $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}g\left(x\right)=\pm\infty$ וגם הגבול $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$ קיים (במובן הרחב) אז מתקיים:
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$$

הוכחה. נניח שמתקיימת אחת מהאפשרויות הבאות:

- $\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}g\left(x\right)=0$
- $\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}g\left(x\right)=\infty$
- $\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}g\left(x\right)=-\infty$

וגם הגבול $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים במובן הרחב[34].
נסמן $X:=\left\{0\neq x\in\mathbb{R}\mid\frac{1}{x}\in A\right\}$ ותהיינה $F,G:C\to B$ שתי פונקציות המוגדרות ע"י (לכל $x\in X$):
$$F\left(x\right):=f\left(\frac{1}{x}\right),\ G:=g\left(\frac{1}{x}\right)$$
מהעובדה ש-A מכילה קרן ימנית/שמאלית נובע ש-X מכילה סביבה ימנית/שמאלית של 0 וממשפט ההצבה בגבולות במובן הרחב נובע שמתקיים (מדובר בשוויון פורמלי בלבד, עוד לא הוכחנו שהגבולות קיימים):
$$\lim_{x\to0^{\pm}}\frac{F\left(x\right)}{G\left(x\right)}=\lim_{x\to0^{\pm}}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$$
מכלל השרשרת נובע שלכל $x\in X$ מתקיים:
$$F'\left(x\right)=-\frac{1}{x^{2}}\cdot f'\left(\frac{1}{x}\right),\ G'\left(x\right)=-\frac{1}{x^{2}}\cdot g'\left(\frac{1}{x}\right)$$

[34] כמו שראינו לעיל נובע מזה (ע"פ משפט רול) שקיימת קרן/ימנית שמאלית שבה g אינה מתאפסת.

ומכאן שע"פ משפט ההצבה גבולות גם[35]:

$$\lim_{x\to0^{\pm}}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0^{\pm}}\frac{g'\left(\frac{1}{x}\right)}{f'\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

מכלל לופיטל לגבול (חד-צדדי) של פונקציה בנקודה נובע שמתקיים:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0^{\pm}}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0^{\pm}}\frac{F(x)}{G(x)}$$

וכפי שהזכרנו לעיל זה אומר שמתקיים:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0^{\pm}}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

■

- ♣ הרעיון מאחורי כלל לופיטל הוא שבמקרים כאלה אנו בעצם שואלים מי מבין הפונקציות "מנצחת", מי שואפת מהר יותר ל-0 או ל-$\pm\infty$, כלומר מה שקובע הוא **קצב השינוי** של הפונקציות הלא הוא הנגזרת!

- ♣ ישנם מקרים נוספים (מלבד מנת פונקציות) שבהם יש לנו שתי פונקציות ה"מתחרות" ביניהן כשהן "מושכות" את הגבול לכיוונים מנוגדים, לדוגמה:

  - $\lim_{x\to a}f(x)=0$ ו-$\lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$ כשהגבול המבוקש הוא $\lim_{x\to a}f(x)\cdot g(x)$ ("צורת הגבול" היא $0\cdot\pm\infty$).
  - $\lim_{x\to a}f(x)=1$ ו-$\lim_{x\to a}g(a)=\pm\infty$ כשהגבול המבוקש הוא $\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}$ ("צורת הגבול" היא $1^{\pm\infty}$).

  את המקרה הראשון קל להמיר ללופיטל:

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

  ובשביל המקרה השני יש להשתמש בשיטה הבאה[36]:

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}\exp\left(\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)\right)=\lim_{x\to a}\exp\left(g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)\right)=\exp\left(\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(f(x)\right)}{\frac{1}{g(x)}}\right)$$

משפט 5.3. תהיינה f ו-g פונקציות גזירות בנקודה $a\in\mathbb{R}$ כך ש-$f(a)=g(a)=0$ ו-$g'(a)\neq0$, מתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

- ♣ נשים לב להבדלים בין משפט זה לכלל לופיטל: כאן דרשנו ש-f ו-g תהיינה מוגדרות בסביבה מלאה של a (ולא רק בסביבה מנוקבת), בנוסף דרשנו שיתקיים $g'(a)\neq0$ (ולא שגבול מנת הנגזרות קיים) וההבדל האחרון הוא שקיבלנו שהגבול שווה למנת הנגזרות (ולא שהוא שווה ל**גבול** של מנת הנגזרות).

- ♣ גם משפט זה נכון עבור גבולות חד-צדדיים (עם נגזרות חד-צדדיות).

הוכחה. מהעובדה ש-$g'(a)\neq0$ נובע שקיימת סביבה מנוקבת של a שבה $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\neq0$ ובפרט $g(x)=g(x)-g(a)\neq0$, מכאן שקיימת סביבה מנוקבת שבה לכל x מתקיים:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{\frac{f(x)-f(x)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

---

[35] קיימת קרן ימנית/שמאלית שבה g' אינה מתאפסת ולכן קיימת סביבה ימנית/שמאלית של 0 שבה $g'\left(\frac{1}{x}\right)$ אינה מתאפסת וממילא גם G'.

[36] נכונות השיטה נובעת ממשפט ההצבה בגבולות.

ולכן מאריתמטיקה של גבולות נובע כי:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(x)}{x-a}\cdot\left(\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)^{-1}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

■

מסקנה 5.4. [37] תהיינה f ו-g פונקציות גזירות n פעמים בנקודה $a\in\mathbb{R}$ ומקיימות:

$$g(a)=g'(a)=g''(a)=g^{(3)}(a)=\ldots=g^{(n-1)}(a)=0,\ \ g^{(n)}(a)\neq 0$$

$$f(a)=f'(a)=f''(a)=f^{(3)}(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$$

קיימים הגבול והשוויון:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

5.1 קצב הגידול של פולינומים, פונקציית האקספוננט והלוגריתם הטבעי

משפט 5.5. יהיו $p,q\in\mathbb{R}[x]$ שני פולינומים ויהיו $a_0,a_1,\ldots,a_n,b_0,b_1,\ldots,b_m\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$p(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0$$
$$q(x)=b_m\cdot x^m+b_{m-1}\cdot x^{m-1}+\ldots+b_1\cdot x+b_0$$

נסמן $j:=\min\{n\geq i\in\mathbb{N}_0\mid a_i\neq 0\}$ ו-$k:=\min\{m\geq i\in\mathbb{N}_0\mid b_i\neq 0\}$, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

- אם $k<j$ אז $\lim\limits_{x\to 0}\frac{p(x)}{q(x)}=0$.
- אם $k=j$ אז $\lim\limits_{x\to 0}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_k}{b_k}$.
- נניח ש-$j<k$,
  - אם $(a_k)=(b_j)$ אז $\lim\limits_{x\to 0}\frac{p(x)}{q(x)}=\infty$.
  - אם $(a_k)\neq(b_j)$ אז $\lim\limits_{x\to 0}\frac{p(x)}{q(x)}=-\infty$.

הוכחה. כדי להוכיח את שני הסעיפים הראשונים יש לגזור את שני הפולינומים k פעמים ואז מהמסקנה האחרונה (**??**) או מהפעלת כלל לופיטל k פעמים נקבל את המבוקש.
כדי להוכיח את הסעיף השלישי יש לגזור את שני הפולינומים j פעמים ולהשתמש בכלל לופיטל בכל גזירה. ■

משפט 5.6. יהיו $0<\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^{\alpha}(x)}{x^{\beta}}=0$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{\exp^{\beta}(x)}=0$$
$$\lim_{x\to 0^+}x^{\beta}\cdot\ln^{\alpha}(x)=0$$

[37] מסקנה זו נלמדה אצל יורם.

הוכחה. מכלל לופיטל נובע שמתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

יהי $0<c\in\mathbb{R}$, ממשפט ההצבה בגבולות נובע שמתקיים:

$$0=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^c)}{x^c}=\lim_{x\to\infty}\frac{c\cdot\ln(x)}{x^c}$$

מאריתמטיקה של גבולות נובע שאם הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^c}$ לא קיים או שונה מ-0 אז גם הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{c\cdot\ln(x)}{x^c}$ לא קיים או שונה מאפס בסתירה למה שהוכח לעיל.

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^c}=0$$

c הנ"ל היה שרירותי ולכן לכל $0<c\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^c}=0$$

יהיו $0<a,\beta\in\mathbb{R}$, מתקיים $\frac{\beta}{\alpha}>0$ ולכן גם (לכל $0<x\in\mathbb{R}$):

$$\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}^{\alpha}=\frac{\ln^{\alpha}(x)}{x^{\beta}}$$

ממשפט ההצבה בגבולות נובע שמתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^{\alpha}(x)}{x^{\beta}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^{\alpha}=\lim_{x\to0}x^{\alpha}=0$$

מכאן שע"פ משפט ההצבה בגבולות מתקיים גם:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{\exp^{\beta}(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^{\alpha}(e^x)}{(e^x)^{\beta}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^{\alpha}(x)}{x^{\beta}}=0$$

כדי להוכיח את הפסוק האחרון נשים לב לכך שע"פ כלל לופיטל מתקיים:

$$\lim_{x\to0^+}x\cdot\ln(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}=\lim_{x\to0^+}-x=0$$

מכאן שע"פ משפט ההצבה בגבולות מתקיים:

$$0=\lim_{x\to0^+}x\cdot\ln(x)=\lim_{x\to0^+}x^{\alpha}\cdot\ln(x^{\alpha})=\alpha\cdot\lim_{x\to0^+}x^{\alpha}\cdot\ln(x)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0^+}x^{\alpha}\cdot\ln(x)=0$$

ושוב ממשפט ההצבה בגבולות נקבל:

$$\lim_{x\to0^+}x^{\beta}\cdot\ln^{\alpha}(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\cdot\ln(x)\right)^{\alpha}=\lim_{x\to0^+}x^{\alpha}=0$$

■

מסקנה 5.7. לכל פולינום $p\in\mathbb{R}[x]$ מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{e^x}$$

6 פולינומי טיילור

למה 6.1. תהא f פונקציה גזירה n פעמים בנקודה $a\in\mathbb{R}$, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $P'_{n,f,a}(x)=P_{n-1,f',a}(x)$.

הוכחה. מהגדרה ומכללי גזירה נובע שמתקיים לכל $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}P'_{n,f,a}(x)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot k\cdot(x-a)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}\cdot(x-a)^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{f'^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}\cdot(x-a)^{k-1}=P_{n-1,f',a}(x)\end{aligned}$$

■

משפט 6.2. תהא f פונקציה גזירה n פעמים בנקודה $a\in\mathbb{R}$, הפולינום $P_{n,f,a}$ שקול ל-f ב-a עד כדי סדר n-י, כלומר:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n,f,a}(x)}{(x-a)^{n}}=0$$

♣ בתרגול האחרון של אופנר[38] ראינו שהמשפט הזה מאפשר חישוב גבולות באופן יעיל יחסית: נניח שיש לנו חישוב גבול "מגעיל" למדי, נציג כל פונקציה "מגעילה" f שנמצאת בגבול כ-$P_{n,f,a}+R_{n,f,a}$ ואז יתכן שיקל עלינו לחשב את הגבול מפני ש-$P_{n,f,a}$ הוא פולינום וככזה הוא פונקציה "יפה" ועל $R_{n,f,a}$ אנחנו יודעים את המשפט הנ"ל. אין פה ממש אלגוריתם אלא רק רעיון ולכן לא יכולתי לכתוב יותר מזה.

הוכחה. נוכיח את המשפט באינדוקציה.

<u>בסיס האינדוקציה</u>

ראינו במשפט 1.2 שאם פונקציה g גזירה בנקודה a אז מתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-(g'(a)\cdot x+g(a)-g'(a)\cdot a)}{x-a}=0$$

אך לכל פונקציה g כך ש-g גזירה בנקודה $a\in\mathbb{R}$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$P_{1,g,a}(x)=g(a)+g'(a)\cdot(x-a)=g'(a)\cdot x+g(a)-g'(a)\cdot a$$

ולכן כבר שם הוכחנו את הנדרש עבור $n=1$.

<u>צעד האינדוקציה</u>

יהי $n\in\mathbb{N}$ ונניח שלכל פונקציה g כך ש-g גזירה n פעמים בנקודה $a\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-P_{n,g,a}(x)}{(x-a)^{n}}=0$$

תהא g פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בנקודה $a\in\mathbb{R}$, מהנחת האינדוקציה נובע שמתקיים[39]:

$$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)-P_{n,g',a}(x)}{(x-a)^{n}}=0$$

ולכן ע"פ הלמה (6.1) מתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)-P'_{n,g,a}(x)}{(x-a)^{n}}=0$$

[38] דניאל אופנר היה המתרגל באינפי' 2 (סמסטר א' תשפ"ג).
[39] g גזירה $n+1$ פעמים ב-a ולכן g' מוגדרת בסביבה של a.

ומכאן שע"פ כלל לופיטל מתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-P_{n,g,a}(x)}{(x-a)^{n+1}}=0$$

■

למה 6.3. תהיינה f ו-g שתי פונקציות שוות עד כדי סדר n בנקודה $a\in\mathbb{R}$, לכל $n\geq k\in\mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^{k}}=0$$

הוכחה. מאריתמטיקה של גבולות נובע שלכל $n\geq k\in\mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^{k}}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^{n}}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)^{n-k}=0\cdot 0=0$$

■

סימון: נסמן ב-$\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ את קבוצת הפולינומים מעל $\mathbb{R}$ שהחזקה הגדולה ביותר שלהן קטנה או שווה ל-n.

טענה 6.4. יהי $n\in\mathbb{N}_0$ ויהיו $P,Q\in\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ פולינומים השווים זה לזה עד כדי סדר n בנקודה $a\in\mathbb{R}$, מתקיים $P=Q$.

הוכחה. יהיו $a_0,a_1,\ldots,a_n,b_0,b_1,\ldots,b_n\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים[40]:

$$P(x)=a_n(x-a)^n+a_{n-1}(x-a)^{n-1}+\ldots+a_1(x-a)+a_0$$
$$Q(x)=b_n(x-a)^n+b_{n-1}(x-a)^{n-1}+\ldots+b_1(x-a)+b_0$$

כעת נוכיח באינדוקציה שלכל $n\geq k\in\mathbb{N}_0$ מתקיים $a_k=b_k$.

<u>בסיס האינדוקציה</u>

נתון כי:

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)-Q(x)}{(x-a)^{n}}=0$$

ומכאן שמתקיים:

$$\lim_{x\to a}(P(x)-Q(x))=0$$

כלומר (ע"פ אריתמטיקה של גבולות):

$$0=\lim_{x\to a}\left(\sum_{j=0}^{n}(a_j-b_j)(x-a)^j\right)=\sum_{j=0}^{n}(a_j-b_j)\left(\lim_{x\to a}(x-a)^j\right)$$
$$=(a_0-b_0)\cdot 1+\sum_{j=1}^{n}(a_j-b_j)\cdot 0=a_0-b_0$$

$$\Rightarrow a_0=b_0$$

[40] a_n הוא המקדם של החזקה ה-n-ית ב-P (יכול להיות שזהו 0), כדי למצוא את a_{n-1} עלינו לחשב מהו המקדם של החזקה ה-$n-1$ בביטוי $a_n(x-a)^n$ ואז להגדיר את a_{n-1} כך שהסכום שלהם יהיה שווה למקדם המקורי, וכן הלאה: כדי למצוא את a_{n-2} יש לחשב את המקדם של החזקה ה-$n-2$ בביטוי $a_n(x-a)^n+a_{n-1}(x-a)^{n-1}$ ולהגדיר את a_{n-2} בהתאמה...

צעד האינדוקציה

יהי $n \geq k \in \mathbb{N}$ ונניח כי לכל $k > j \in \mathbb{N}_0$ מתקיים $a_j = b_j$, מכאן שע"פ הלמה (6.3) ואריתמטיקה של גבולות מתקיים:

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{P(x) - Q(x)}{(x-a)^k} = \lim_{x \to a} \frac{\sum_{j=k}^{n} (a_j - b_j)(x-a)^j}{(x-a)^k} = \lim_{x \to a} \left(\sum_{j=k}^{n} (a_j - b_j)(x-a)^{j-k} \right)$$
$$= \sum_{j=k}^{n} (a_j - b_j) \left(\lim_{x \to a} (x-a)^{j-k} \right) = (a_k - b_k) \cdot 1 + \sum_{j=k+1}^{n} (a_j - b_j) \cdot 0 = a_k - b_k$$

$$\Rightarrow a_k = b_k$$

■

מסקנה 6.5. תהא f פונקציה גזירה n פעמים בנקודה $a \in \mathbb{R}$ ויהי $Q \in \mathbb{R}_{\leq n}[x]$ כך ש-Q שווה ל-$P_{f,n,a}$ עד כדי סדר n ב-a, מתקיים $Q = P_{n,f,a}$; בפרט, לכל פולינום $g \in \mathbb{R}[x]$ מדרגה $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים $g = P_{n,g,a}$ לכל $a \in \mathbb{R}$.

♣ "אם זה נראה כמו פולינום טיילור, הולך כמו פולינום טיילור ומגעגע כמו פולינום טיילור אז זה פולינום טיילור." (רז קופרמן).

משפט 6.6. תהיינה f, g פונקציות גזירות n פעמים בנקודה $a \in \mathbb{R}$, מכאן ש-$P_{n.f+g,a} = P_{n,f,a} + P_{n,g,a}$.

הוכחה. המשפט נובע ישירות מהגדרת פולינום טיילור ומכלל הגזירה לסכום של שתי פונקציות:

$$P_{n.f+g,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f+g)^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a) + g^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k = P_{n,f,a}(x) + P_{n,g,a}(x)$$

■

סימון: תהא $a \in \mathbb{R}$ נקודה, לכל פולינום $P \in \mathbb{R}[x]$ מדרגה $N \in \mathbb{N}_0$ הנתון ע"י[41]:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k (x-a)^k$$

ולכל $n \in \mathbb{N}_0$, נסמן ב-$[P]_{n,a}$ את ה"קיטוע" של P ב-a המוגדר ע"י:

$$[P]_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{\min\{n,N\}} a_k (x-a)^k$$

למה 6.7. תהא f פונקציה גזירה n פעמים בנקודה $a \in \mathbb{R}$, יהי $N \in \mathbb{N}$ ויהי $Q \in \mathbb{R}_{\leq N}[x]$, אם f שווה ל-Q עד כדי סדר n ב-a אז $[Q]_{n,a} = P_{n,f,a}$.

הוכחה. יהיו $a_0, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ כך ש-$Q(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot (x-a)^k$, נשים לב לכך שמתקיים[42]:

$$\lim_{x \to a} \frac{Q(x) - [Q]_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{\sum_{k=n+1}^{N} a_k \cdot (x-a)^k}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \left(\sum_{k=n+1}^{N} a_k \cdot (x-a)^{k-n} \right) = 0$$

כלומר Q ו-$[Q]_{n,a}$ שווים זה לזה עד כדי כדי סדר n בנקודה a ולכן מהטרנזיטיביות של השוויון עד כדי סדר n בנקודה נובע ש-$[Q]_{n,a}$ שווה ל-f עד כדי סדר n בנקודה a.
מכאן שע"פ מסקנה 6.5 מתקיים $[Q]_{n,a} = P_{n,f,a}$. ■

[41] ראינו לעיל שניתן להציג כל פולינום בצורה כזו.
[42] ייתכן שמדובר בסכום ריק (אם $N < n+1$) אך אין זה משנה לענייננו.

משפט 6.8. תהיינה f ו-g פונקציות גזירות n פעמים בנקודה $a \in \mathbb{R}$, מתקיים: $P_{n.f\cdot g,a} = \left[P_{n,f,a} \cdot P_{n,g,a}\right]_{n,a}$.

הוכחה. לכל $a \neq x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\frac{(f\cdot g)(x) - (P_{n,f,a}\cdot P_{n,g,a})(x)}{(x-a)^n} &= \frac{f(x)\cdot g(x) - P_{n,f,a}(x)\cdot P_{n,g,a}(x)}{(x-a)^n}\\ &= \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot P_{n,g,a}(x) + f(x)\cdot P_{n,g,a}(x) - P_{n,f,a}(x)\cdot P_{n,g,a}(x)}{(x-a)^n}\\ &= f(x)\cdot\frac{g(x)-P_{n,g,a}(x)}{(x-a)^n} + P_{n,g,a}(x)\cdot\frac{f(x)-P_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n}\end{aligned}$$

מכאן שע"פ אריתמטיקה של גבולות מתקיים:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{(f\cdot g)(x) - (P_{n,f,a}\cdot P_{n,g,a})(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x)-P_{n,g,a}(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a}P_{n,g,a}(x)\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n}\\ &= f(a)\cdot 0 + g(a)\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

כלומר $P_{n,f,a}\cdot P_{n,g,a}$ שווה ל-$f\cdot g$ עד כדי סדר n בנקודה a ולכן מהלמה (6.7) נובע שמתקיים $P_{n.f\cdot g,a} = \left[P_{n,f,a} \cdot P_{n,g,a}\right]_{n,a}$. ■

משפט 6.9. [43] תהא f פונקציה גזירה n פעמים בנקודה a כך שקיימת סביבה מנוקבת U של a כך ש-$f(x) \neq f(a)$ לכל $x \in U$, ותהא g פונקציה הגזירה n פעמים ב-$f(a)$; מתקיים:

$$P_{n,g\circ f,a} = \left[P_{n,g,f(a)} \circ P_{n,f,a}\right]_{n,a}$$

הוכחה. יהיו $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$P_{n,g,f(a)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\cdot(x-f(a))^k$$

ונסמן $F := P_{n,f,a}$ ו-$G := P_{n,g,f(a)}$. לכל $x \in U$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\frac{g(f(x)) - G(F(x))}{(x-a)^n} &= \frac{g(f(x)) - G(f(x)) + G(f(x)) - G(F(x))}{(x-a)^n}\\ &= \frac{g(f(x)) - G(f(x))}{(x-a)^n} + \frac{G(f(x)) - G(F(x))}{(x-a)^n}\end{aligned}$$

נטפל בכל אחד מן המחוברים בנפרד.

- לכל $x \in U$ מתקיים[44]:

$$\begin{aligned}\frac{g(f(x)) - G(f(x))}{(x-a)^n} &= \frac{g(f(x)) - G(f(x))}{(f(x)-f(a))^n}\cdot\frac{(f(x)-f(a))^n}{(x-a)^n}\\ &= \frac{g(f(x)) - G(f(x))}{(f(x)-f(a))^n}\cdot\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)^n\end{aligned}$$

ממשפט 6.2 וממשפט ההצבה בגבולות[45] נובע שמתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x)) - G(f(x))}{(f(x)-f(a))^n} = \lim_{y\to f(a)}\frac{g(y)-G(y)}{(y-f(a))^n} = 0$$

וכמו כן מהגדרת הנגזרת וממשפט ההצבה בגבולות נובע שמתקיים:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)^n = (f'(a))^n$$

---

[43] משפט זה נלמד אצל יורם.

[44] כאן אנו משתמשים בעובדה ש-$f(x) \neq f(a)$ לכל $x \in U$.

[45] אנו משתמשים כאן במשפט ההצבה בגבולות עבור פונקציות שאינן רציפות ולשם כך דרשנו ש-$f(x) \neq f(a)$ בסביבה מנוקבת של a.

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{g\left(f\left(x\right)\right)-G\left(f\left(x\right)\right)}{\left(x-a\right)^{n}}=\lim_{x\to a}\frac{g\left(f\left(x\right)\right)-G\left(f\left(x\right)\right)}{\left(f\left(x\right)-f\left(a\right)\right)^{n}}\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}\right)^{n}=0\cdot\left(f'\left(a\right)\right)^{n}=0$$

- לכל $x\in U$ מתקיים:

$$\begin{aligned}G\left(f\left(x\right)\right)-G\left(F\left(x\right)\right)&=\sum_{k=0}^{n}a_{k}\cdot\left[\left(f\left(x\right)-f\left(a\right)\right)^{k}-\left(F\left(x\right)-f\left(a\right)\right)^{k}\right]\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(a_{k}\cdot\left[\left(f\left(x\right)-f\left(a\right)\right)-\left(F\left(x\right)-f\left(a\right)\right)\right]\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\left[\left(f\left(x\right)-f\left(a\right)\right)^{j}\cdot\left(F\left(x\right)-f\left(a\right)\right)^{k-1-j}\right]\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(a_{k}\cdot\left(f\left(x\right)-F\left(x\right)\right)\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\left(f\left(x\right)-f\left(a\right)\right)^{j}\cdot\left(F\left(x\right)-f\left(a\right)\right)^{k-1-j}\right)\\&=\left(f\left(x\right)-F\left(x\right)\right)\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(a_{k}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\left(f\left(x\right)-f\left(a\right)\right)^{j}\cdot\left(F\left(x\right)-f\left(a\right)\right)^{k-1-j}\right)\end{aligned}$$

מכאן שלכל $x\in U$ מתקיים גם:

$$\frac{G\left(f\left(x\right)\right)-G\left(F\left(x\right)\right)}{\left(x-a\right)^{n}}=\frac{f\left(x\right)-F\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n}}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(a_{k}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\left(f\left(x\right)-f\left(a\right)\right)^{j}\cdot\left(F\left(x\right)-f\left(a\right)\right)^{k-1-j}\right)$$

ממשפט 6.2 נובע שמתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-F\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n}}=0$$

ומאריתמטיקה של רציפות נובע נובע שמתקיים:

$$\lim_{x\to a}\sum_{k=0}^{n}\left(a_{k}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\left(f\left(x\right)-f\left(a\right)\right)^{j}\cdot\left(F\left(x\right)-f\left(a\right)\right)^{k-1-j}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{G\left(f\left(x\right)\right)-G\left(F\left(x\right)\right)}{\left(x-a\right)^{n}}=\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-F\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n}}\cdot\lim_{x\to a}\sum_{k=0}^{n}\left(a_{k}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\left(f\left(x\right)-f\left(a\right)\right)^{j}\cdot\left(F\left(x\right)-f\left(a\right)\right)^{k-1-j}\right)=0\cdot 0=0$$

לפיכך ניתן לומר כעת שמתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{g\left(f\left(x\right)\right)-P_{n,g,a}\left(P_{n,f,a}\left(x\right)\right)}{\left(x-a\right)^{n}}=\lim_{x\to a}\frac{g\left(f\left(x\right)\right)-G\left(f\left(x\right)\right)}{\left(x-a\right)^{n}}+\lim_{x\to a}\frac{G\left(f\left(x\right)\right)-G\left(F\left(x\right)\right)}{\left(x-a\right)^{n}}=0+0=0$$

כלומר $g\circ f$ שווה ל-$P_{n,g,a}\circ P_{n,f,a}$ עד כדי סדר n בנקודה a ולכן מלמה 6.7 נובע שמתקיים $P_{n,g\circ f,a}=\left[P_{n,g,f(a)}\circ P_{n,f,a}\right]_{n,a}$. ■

משפט 6.10. פולינומי טיילור של פונקציות אלמנטריות

לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכל $n\in\mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$P_{n,\exp,0}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k}}{k!}\qquad P_{n,\sin,a}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\left(-1\right)^{k}\cdot\frac{x^{2k+1}}{\left(2k+1\right)!}$$

$$P_{n,\ln,1}\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k-1}\cdot\frac{\left(x-1\right)^{k}}{k}\qquad P_{n,\cos,0}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\left(-1\right)^{k}\cdot\frac{x^{2k}}{\left(2k\right)!}$$

הוכחה.

1. מהגדרה לכל $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$P_{n,\exp,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

2. מכללי גזירה לכל $n \in \mathbb{N}_0$ ולכל $0 < x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\ln^{(n)}(x) = \begin{cases} \ln(x) & n = 0 \\ (n-1)! \cdot x^{-n} & n \in \text{Odd} \\ -(n-1)! \cdot x^{-n} & n \in \text{Even} \end{cases}$$

מכאן שב-$x = 1$ מתקיים:

$$\ln^{(n)}(x) = \begin{cases} \ln(1) & n = 0 \\ (n-1)! \cdot 1^{-n} & n \in \text{Odd} \\ -(n-1)! \cdot 1^{-n} & n \in \text{Even} \end{cases} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ (n-1)! & n \in \text{Odd} \\ -(n-1)! & n \in \text{Even} \end{cases}$$

ולכן פולינום טיילור של ln מסדר n ב-1 הוא:

$$P_{n,\ln,1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{k!} \cdot (x-1)^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{(x-1)^k}{k}$$

3. לכל $n \in \mathbb{N}_0$ ולכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\sin^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & n \equiv 0 \mod 4 \\ \cos x & n \equiv 1 \mod 4 \\ -\sin x & n \equiv 2 \mod 4 \\ -\cos x & n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

מכאן שב-$x = 0$ מתקיים:

$$\sin^{(n)}(0) = \begin{cases} \sin 0 & n \equiv 0 \mod 4 \\ \cos 0 & n \equiv 1 \mod 4 \\ -\sin 0 & n \equiv 2 \mod 4 \\ -\cos 0 & n \equiv 3 \mod 4 \end{cases} = \begin{cases} 0 & n \equiv 0 \mod 4 \\ 1 & n \equiv 1 \mod 4 \\ 0 & n \equiv 2 \mod 4 \\ -1 & n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

ולכן פולינום טיילור של sin מסדר n ב-0 הוא:

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

4. לכל $n\in\mathbb{N}_0$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\cos^{(n)}(x)=\begin{cases}\cos x & n\equiv 0\mod 4\\ -\sin x & n\equiv 1\mod 4\\ -\cos x & n\equiv 2\mod 4\\ \sin x & n\equiv 3\mod 4\end{cases}$$

מכאן שב-$x=0$ מתקיים:

$$\cos^{(n)}(0)=\begin{cases}\cos 0 & n\equiv 0\mod 4\\ -\sin 0 & n\equiv 1\mod 4\\ -\cos 0 & n\equiv 2\mod 4\\ \sin 0 & n\equiv 3\mod 4\end{cases}=\begin{cases}1 & n\equiv 0\mod 4\\ 0 & n\equiv 1\mod 4\\ -1 & n\equiv 2\mod 4\\ 0 & n\equiv 3\mod 4\end{cases}$$

ולכן פולינום טיילור של cos מסדר n ב-0 הוא:

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot x^{2k}$$

■

משפט 6.11. משפט טיילור[46]

יהי $a\in\mathbb{R}$ ותהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבה מלאה U[47] של a[48], יהי $a\neq x\in U$; קיימת נקודה ξ בקטע הפתוח שבין a ל-x כך שניתן להציג את $R_{n,f,a}(x)$ בשתי הצורות הבאות:

- צורת לגראנז'-

$$R_{n,f,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$$

- צורת קושי-

$$R_{n,f,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot(x-\xi)^n\cdot(x-a)$$

♣ נשים לב: העובדה שקיים ξ בקטע הפתוח שבין x ל-a המקיים את הנ"ל אינה עוזרת לנו הרבה אם אנחנו לא מסוגלים לחסום את הנגזרת ה-$n+1$ של f ב-ξ אך ורק על בסיס הידיעה אודות מיקומו, במילים אחרות ξ תלוי ב-x ולכן מה שקורה כאן הוא שהחלפנו משתנה אחד במשתנה אחר התלוי בו; הדוגמה הקלאסית עבור פונקציה שעבורה צורות השארית הנ"ל אינן עוזרות במאומה היא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

אם נפתח את פולינום טיילור של f סביב 0 נקבל את פולינום האפס והשארית תשאף ל-1 ככל שנתרחק מ-0.

[46] ערך בוויקיפדיה: ברוק טיילור.
[47] זו יכולה להיות גם סביבה מלאה חד-צדדית ואז הנגזרות ב-a הן חד-צדדיות.
[48] יש צורך בנגזרת ה-$n+1$ רק עבור סביבה מנוקבת של a.

♣ את מי מעניין משפט טיילור?
ובכן... את כל מי שמשתמש במחשבון! שאלתם את עצמכם כיצד המחשבון יודע כמה שווה $\sin(1)$? הרי לא ייתכן שהוא מחזיק את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור כל נקודה, אז איך המחשבון עושה זאת? התשובה היא שישנן פונקציות עבורן ניתן לחסום את השארית של פולינום טיילור[49] בגודל קטן כרצוננו בכל נקודה ובכך לתת את הערך של הפונקציה עד כדי הגודל החוסם את השארית[50]. בעמוד הבא מופיע חישוב של $\sin(1)$ בדיוק של אלפית (דוגמה 6.13).

הוכחה. העובדה ש-f גזירה $n+1$ פעמים ב-U אומרת שניתן לפתח את פולינום טיילור מסדר n של f סביב כל נקודה $z\in U$ וש-$f^{(n)}$ גזירה ורציפה ב-U.
נסמן ב-I_c את הקטע הסגור שבין x ל-a וב-I_o את הקטע הפתוח המתאים.
תהא $\phi : I_c \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $z\in I$)[51]:

$$\phi(z) := R_{n,f,z}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \cdot (x-z)^k$$

מכאן שע"פ כלל לייבניץ לכל $z \in I_c$ מתקיים[52]:

$$\begin{aligned}
\phi'(z) &= -f'(z) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(z)}{k!} \cdot (x-z)^k - \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \cdot k \cdot (x-z)^{k-1} \right) \\
&= -f'(z) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(z)}{(k-1)!} \cdot (x-z)^{k-1} - \frac{f^{(k+1)}(z)}{k!} \cdot (x-z)^k \right) \\
&= -f'(z) + \frac{f^{(1)}(z)}{(1-1)!} \cdot (x-z)^{1-1} - \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} \cdot (x-z)^n \\
&= 0 - \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} \cdot (x-z)^n = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} \cdot (x-z)^n
\end{aligned}$$

תהא $\psi : I_c \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה על I_c וגזירה ב-I_o כך שנגזרתה אינה מתאפסת בקטע הפתוח, נשים לב שגם ϕ רציפה על I_c וגזירה ב-I_o ולכן ממשפט הערך הממוצע של קושי קיים $\xi \in I_o$ כך שמתקיים:

$$\frac{\phi(a) - \phi(x)}{\psi(a) - \psi(x)} = \frac{\phi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

כעת נשים לב לכך שמהגדרה מתקיים:

$$\begin{aligned}
\phi(a) &= R_{n,f,a}(x) \\
\phi(x) &= R_{n,f,x}(x) = 0
\end{aligned}$$

ולכן עבור אותו ξ מתקיים:

$$\frac{R_{n,f,a}(x) - 0}{\psi(a) - \psi(x)} = \frac{\phi(a) - \phi(x)}{\psi(a) - \psi(x)} = \frac{\phi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-\xi)^n \cdot \frac{1}{\psi'(\xi)}$$

$$\Rightarrow R_{n,f,a}(x) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-\xi)^n \cdot \frac{\psi(a) - \psi(x)}{\psi'(\xi)}$$

$$\Rightarrow R_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-\xi)^n \cdot \frac{\psi(x) - \psi(a)}{\psi'(\xi)}$$

[49] כשהוא מפותח סביב נקודה שבה קל לחשב את הנגזרות.
[50] יתכן כמובן שישנן דרכים טובות יותר שלא הכרנו בקורס זה, אך עבורנו דרך זו מספיקה בהחלט עבור כל הפונקציות האלמנטריות.
[51] שימו לב שכאן x קבוע (זהו ה-x הנזכר לעיל) ו-z הוא המשתנה.
[52] השוויון האחרון נובע מהעובדה שמדובר ב"סכום טלסקופי".

כל זה נכון לכל פונקציה $\psi : I_c \to \mathbb{R}$ כך ש-ψ רציפה על I_c, גזירה ב-I_o ושנגזרתה אינה מתאפסת בקטע הפתוח; בפרט כל זה נכון עבור פונקציות מהצורה $\psi(z) = (x-z)^p$ עבור $p \in \mathbb{Z}$[53] כלשהו, א"כ לכל $p \in \mathbb{Z}$ מתקיים:

$$\begin{aligned} R_{n,f,a}(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-\xi)^n \cdot \frac{(x-x)^p - (x-a)^p}{-p \cdot (x-\xi)^{p-1}} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p \cdot n!} \cdot (x-\xi)^{n+1-p} \cdot (x-a)^p \end{aligned}$$

אם נציב $p = n+1$ נקבל את השארית בצורת לגראנז':

$$\begin{aligned} R_{n,f,a}(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1) \cdot n!} \cdot (x-\xi)^{n+1-n+1} \cdot (x-a)^{n+1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

ואם נציב $p = 1$ נקבל את השארית בצורת קושי:

$$\begin{aligned} R_{n,f,a}(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{1 \cdot n!} \cdot (x-\xi)^{n+1-1} \cdot (x-a)^1 \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-\xi)^n \cdot (x-a) \end{aligned}$$

■

טענה 6.12. e אינו רציונלי.

הוכחה. נניח בשלילה ש-e רציונלי ויהיו $p, q \in \mathbb{N}$ כך ש-$e = \frac{p}{q}$.
נסמן $n := \max\{3, q\}$, מהגדרת השארית מתקיים:

$$\frac{p}{q} = e = \exp(1) = P_{n,\exp,0}(1) + R_{n,\exp,0}(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_{n,\exp,0}(1)$$

$$\Rightarrow \frac{n! \cdot p}{q} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + n! \cdot R_{n,\exp,0}(1)$$

כעת נזכור ש-$q \geq n$ ולכן $\frac{n! \cdot p}{q} \in \mathbb{N}$, מאותה סיבה גם $\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \in \mathbb{N}$ ומכאן ש-$n! \cdot R_{n,\exp,0}(1) \in \mathbb{Z}$.
ממשפט טיילור (בצורת לגראנז') נובע שקיים $\xi \in (0,1)$ כך שמתקיים:

$$R_{n,\exp,0}(1) = \frac{\exp^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}$$

אבל לכל $\xi \in (0,1)$ מתקיים:

$$0 < \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} < \frac{\exp(1)}{(n+1)!} = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

ולכן:

$$0 < n! \cdot R_{n,\exp,0}(1) < \frac{n! \cdot 3}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{3+1} < 1$$

בסתירה לכך ש-$n! \cdot R_{n,\exp,0}(1) \in \mathbb{Z}$.
מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-e אי-רציונלי. ■

[53]ברגע שנעבור לחזקה רציונלית או ממשית נצטרך לדאוג ש-$z - x$ יהיה אי-שלילי.

דוגמה 6.13. חישוב של $\sin(1)$ **עד כדי דיוק של אלפית**

פולינום טיילור של sin מסדר n סביב 0 הוא:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}$$

אנחנו יודעים שלכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\left|\sin^{(n)}(x)\right|\leq 1$ ולכן לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים (עבור ξ כלשהו בקטע הפתוח המתאים):

$$|R_{n,\sin,0}(x)|=\left|\frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-0)^{n+1}\right|\leq\frac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!}=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

לכן אם נרצה לחשב את הערך שמקבלת sin ב-x עד כדי 10^{-m} עלינו למצוא $n\in\mathbb{N}$ שעבורו מתקיים:

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\leq 10^{-m}$$

לדוגמה, נרצה לחשב את $\sin(1)$ (זה מזכיר לכם משהו?) עד כדי 10^{-3}, אנחנו יודעים שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $|1|^{n+1}=1$.
נשים לב שמתקיים $7!=5,040$ וא"כ נקבל:

$$\frac{|1|^7}{7!}\leq\frac{1}{5,040}<10^{-3}$$

ולכן יספיק לנו $n=6$.

$$\Rightarrow\left|\sin(1)-\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right|=\left|\sin(1)-\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{6+1}{2}\rfloor}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot(1)^{2k+1}\right|<10^{-3}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\sin(1)&\approx\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}=\frac{(-1)^0}{(2\cdot0+1)!}+\frac{(-1)^1}{(2\cdot1+1)!}+\frac{(-1)^2}{(2\cdot2+1)!}+\frac{(-1)^3}{(2\cdot3+1)!}\\&=\frac{1}{1!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}=\frac{7!-4\cdot5\cdot6\cdot7+6\cdot7-1}{7!}\\&=\frac{5,040-840+42-1}{5,040}=\frac{4,200+41}{5,040}=\frac{4,241}{5,040}\end{aligned}$$