תנאי קושי כללי לקיום גבול

חשבון אינפיניטסימלי (1) - 80131

מרצה: רז קופרמן

מתרגלים: אור יער ודניאל רוזנבלט

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

-

חשבון אינפיניטסימלי (2) - 80132

מרצה: יורם לסט

מתרגלים: דניאל אופנר ומתן בן-אשר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

-

נכתב ע"י: שריה אנסבכר

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 בפתח הדברים

בשני הקורסים הראשונים של חשבון אינפיניטסימלי ראינו גבולות רבים ושונים ולכל אחד מהם הוצמד תנאי קושי המתאים לו, בכל פעם שהגדרנו גבול חדש הוכחנו מחדש שקיום תנאי קושי שקול לקיום הגבול. סיכום זה מנסה לשים לדבר סוף: לתת הגדרה כללית של הגבול ותנאי קושי כללי, להוכיח שהם שקולים, ולפיכך בכל פעם שניתקל בגבול חדש כל שנצטרך להראות הוא שגבול זה עונה על הגדרת הגבול הכללית ושתנאי קושי המתאים לו עונה על ההגדרה הכללית של תנאי קושי. תודתי נתונה למשה רוזנשטיין ולדניאל אופנר על ליבון הסוגיה והבאתה לכלל פתרון.

2 ההגדרות הכלליות

הבהרה: הגדרת הגבול הכללית אינה מתיימרת להחליף את ההגדרות של הגבולות אלא לשמש מעין "תבנית" שלהם ולאפשר לנסח תנאי קושי כללי, בנוסף איני מתיימר לומר שהגדרה זו כוללת את כל הגבולות האפשריים אלא את אלו שראיתי עד כה שבהם הגבול הוא מספר ממשי[1].

תהיינה $f:A\to\mathbb{R}$ ו-$g:A\to\mathbb{R}$, כאשר A היא קבוצה המקיימת שלכל $0<\delta\in\mathbb{R}$ קיים $a\in A$ כך שמתקיים $0<g(a)<\delta$.

הגדרה. הגדרת גבול כללית

נאמר של-f <u>יש גבול</u> (או ש-f <u>מתכנסת</u>) ביחס ל-g אם קיים $L\in\mathbb{R}$ כך שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $a\in A$ המקיים $0<g(a)<\delta$ מתקיים $|f(a)-L|<\varepsilon$, ובמקרה כזה נאמר ש-L הוא גבול של f ביחס ל-g.

♣ שימושים נוספים להגדרת הגבול הכללית יכולים להיות הוכחת משפטים כלליים על גבולות כגון אריתמטיקה של גבולות.

הגדרה. תנאי קושי כללי

נאמר ש-f <u>מקיימת את תנאי קושי</u> עבור g אם לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $a_1,a_2\in A$ המקיימים $g(a_1),g(a_2)\in(0,\delta)$ מתקיים $|f(a_1)-f(a_2)|<\varepsilon$.

טענה. ל-f יש גבול ביחס ל-g אם"ם f מקיימת את תנאי קושי עבור g.

הוכחה.

- $\Leftarrow$

  נניח של-f יש גבול ביחס ל-g ויהי $L\in\mathbb{R}$ גבול של f ביחס ל-g.

  יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$, מההנחה נובע שקיים $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $a_1,a_2\in A$ המקיימים $g(a_1),g(a_2)\in(0,\delta)$ מתקיים $|f(a_1)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$ וגם $|f(a_2)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$ (יהי δ כנ"ל).

  מא"ש המשולש נובע שמתקיים $|f(a_1)-f(a_2)|<\varepsilon$.

  ε הנ"ל היה שרירותי ולכן לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $a_1,a_2\in A$ המקיימים $g(a_1),g(a_2)\in(0,\delta)$ מתקיים $|f(a_1)-f(a_2)|<\varepsilon$, כלומר f מקיימת את תנאי קושי עבור g.

[1] להוציא את הפונקציה הגבולית של סדרת פונקציות, ואם יורשה לי אז אנחש שניתן להכליל את ההגדרה הזו גם למקרה זה ולמרחבים מטריים באופן כללי.

- $\Rightarrow$

נניח ש-f מקיימת את תנאי קושי עבור g, א"כ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $a',a\in A$ המקיימים $g\left(a'\right),g\left(a\right)\in\left(0,\delta\right)$ מתקיים $\left|f\left(a'\right)-f\left(a\right)\right|<1$ (יהיו δ ו-a' כנ"ל[2]).

מכאן שלכל $a\in A$ המקיים $0<g\left(a\right)<\delta$ מתקיים $\left|f\left(a'\right)-f\left(a\right)\right|<1$ ולכן גם $f\left(a'\right)-1<f\left(a\right)<f\left(a'\right)+1$.

- תהא $\left(\varepsilon_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת חיוביים מונוטונית יורדת המתכנסת ל-0.
- תהא $\left(\delta_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת חיוביים קטנים מ-δ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $a_{1},a_{2}\in A$ המקיימים $g\left(a_{1}\right),g\left(a_{2}\right)\in\left(0,\delta_{n}\right)$ מתקיים $\left|f\left(a_{1}\right)-f\left(a_{2}\right)\right|<\varepsilon_{n}$.
- תהא $\left(a_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת איברים ב-A כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $0<g\left(a_{n}\right)<\delta_{n}<\delta$.[3]

מהשלב הקודם נובע שהסדרה $\left(f\left(a_{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ חסומה ולכן (ע"פ משפט בולצאנו-ויירשטראס) יש לה תת-סדרה מתכנסת.

תהא $\left(n_{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ סדרת אינדקסים עולה ממש כך ש-$\left(f\left(a_{n_{k}}\right)\right)_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ונסמן את גבולה ב-L.

יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$, מהגדרת $\left(\varepsilon_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\varepsilon_{n}<\frac{\varepsilon}{2}$ (יהי N כנ"ל).

יהי $k\in\mathbb{N}$ כך ש-$N<n_{k}$, מכאן ש-$\left|f\left(a_{n_{k}}\right)-L\right|<\varepsilon_{n_{k}}<\frac{\varepsilon}{2}$.

מההנחה נובע שלכל $a\in A$ המקיים $0<g\left(a\right)<\delta_{n_{k}}$ מתקיים $\left|f\left(a\right)-f\left(a_{n_{k}}\right)\right|<\varepsilon_{n_{k}}<\frac{\varepsilon}{2}$ ומא"ש המשולש נקבל שמתקיים $\left|f\left(a\right)-L\right|<\varepsilon$.

ε הנ"ל היה שרירותי ולכן לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $a\in A$ המקיים $g\left(a\right)\in\left(0,\delta\right)$ מתקיים $\left|f\left(a\right)-L\right|<\varepsilon$, כלומר ל-$f$ יש גבול ביחס ל-g.

$\blacksquare$

[2] כאן השתמשנו בהנחה שלכל $0<\delta\in\mathbb{R}$ קיים $a\in A$ כך ש-$0<g\left(a\right)<\delta$.
[3] גם כאן השתמשנו בהנחה הנ"ל.

3 עניית הגבולות ותנאי קושי על ההגדרות הכלליות

בניגוד לחלק הקודם חלק זה לא יהיה פורמלי מפני שכל ייעודו להמחיש את גמישות הגדרת הגבול הכללית ולהראות שהגבולות שנלמדו עד כה בשני הקורסים נכנסים תחת כנפיו.

3.1 אינטגרביליות רימן

למרות שלכאורה היה ראוי להתחיל מהגבול הפשוט ביותר, הלא הוא גבול של סדרה ממשית, ראיתי לנכון להתחיל דווקא מאינטגרביליות רימן מכיוון שגבול זה מבהיר מדוע היינו זקוקים לרכיבים רבים מצד אחד[4] ולמעט רכיבים מצד שני[5].

תהא $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ הפונקציה שעבורה אנחנו רוצים לחשב את האינטגרל על $[a,b]$ (או להוכיח את קיומו או אי-קיומו).

עבור אינטגרביליות רימן של h על $[a,b]$ נגדיר את A להיות קבוצת הזוגות הסדורים שהאיבר הראשון בהם הוא חלוקה של $[a,b]$ והשני הוא בחירת נקודות המתאימה לה.

f תהיה הפונקציה המחזירה את סכום רימן המתאים ו-g תהיה הפונקציה המחזירה את פרמטר החלוקה.

כעת יגלול הקורא את המסמך לתחילתו ויראה שאכן עבור A, f ו-g הנ"ל מתקבלת הגדרת אינטגרביליות רימן ותנאי קושי המתאים לה.

♣ ניתן גם להכניס את h ו-$[a,b]$ לסדרות ב-A אך אז בניגוד לחלוקה ולבחירת הנקודות h ו-$[a,b]$ יהיו קבועים, כלומר כל סדרה ב-A תיראה כך: $(h,[a,b],P,P^*)$, כאשר בכל הסדרות מופיעים אותם h ו-$[a,b]$ ואילו P יכולה להיות כל חלוקה של $[a,b]$ ו-P^* יכולה להיות כל בחירת נקודות המתאימה ל-P.

3.2 סדרות

לכאורה אנחנו בבעיה, גבול של סדרה עובד עם N טבעי ו-n-ים שהולכים וגדלים ואילו בהגדרה השתמשנו ב-δ ממשית במקום ב-N טבעי וזו (בנוסף לכך שאינה עונה על ההגדרה) מקרבת אותנו דווקא ל-0, להלן הפתרון.

A היא פשוט $\mathbb{N}$.

f היא הסדרה שאת גבולה אנו רוצים להגדיר ו-g היא הפונקציה המחזירה את ההופכי של מספר טבעי (לכן ככל ש-δ קטנה יותר n דווקא גדול יותר).

השימוש דווקא ב-N טבעי אינו מהותי להגדרת הגבול של סדרה, ניתן היה להגדיר גם כך: "...קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $M<n\in\mathbb{N}$ מתקיים...", שהרי אם קיים N טבעי בפרט קיים M ממשי ואם קיים M ממשי אז גם $\max\{\lceil M\rceil,1\}$ (שהוא טבעי כמובן) מקיים את המבוקש.

♣ מכיוון שהתכנסות טורים והתכנסות סדרת פונקציות בנקודה הם מקרים פרטיים של התכנסות סדרה לא ראיתי צורך לייחד עליהם את הדיבור.

3.3 גבול של פונקציה בנקודה

תהא $h:D\to\mathbb{R}$ כאשר $D\subseteq\mathbb{R}$ וקיימת נקודה $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_\delta^\circ(x_0)\subseteq D$ (עבור $0<\delta\in\mathbb{R}$ כלשהי) שבה אנו רוצים לחשב את הגבול של h (או להוכיח את קיומו או אי-קיומו).

נגדיר $A:=\{(x_0,x):x\in D\}$.

לכל $(x_0,x)\in A$ הפונקציה f תחזיר את $h(x)$ ואילו g תחזיר את $|x-x_0|$.

[4] בהגדרה הכללית מופיעות שתי פונקציות בניגוד לגבולות שלמדנו שבהם מופיעה רק פונקציה אחת.

[5] תחום ההגדרה של f ו-g זהה ולכאורה שתיהן מקבלות את אותו קלט (בהגדרה f ו-g מקבלות את אותו a בכל פעם).

3.4 גבול של פונקציה ב-$\pm\infty$

כבר פתרנו את הבעיה של גבול ממשי ב-∞ עבור סדרות, הפתרון עבור פונקציות יהיה דומה מאד.
תהא $h:D\to\mathbb{R}$ כאשר $D\subseteq\mathbb{R}$ וקיים $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש-$(x_0,\infty)\subseteq D$ (עבור גבול ב-∞) או $(-\infty,x_0)\subseteq D$ (עבור גבול ב-$-\infty$).
A תהיה פשוט D ו-f תהיה h.
g תלויה בשאלה אם אנו עוסקים בגבול ב-∞ או ב-$-\infty$.
אם מדובר ב-∞ אז g תוגדר ע"י (לכל $a\in A$)[6]:

$$g\left(a\right)=\begin{cases}\frac{1}{a} & a\neq0\\ 0 & a=0\end{cases}$$

ואם מדובר בגבול ב-$-\infty$ אז g תוגדר ע"י (לכל $a\in A$):

$$g\left(a\right)=\begin{cases}-\frac{1}{a} & a\neq0\\ 0 & a=0\end{cases}$$

3.5 אינטגרביליות לא אמיתית מסוג ראשון

תהא $h:[x_0,\infty)\to\mathbb{R}$ עבור $x_0\in\mathbb{R}$ כלשהו (כאן כבר אניח שהקורא יבין כיצד להכליל עבור אינטגרל לא אמיתי על הקרן $(-\infty,x_0]$).
נגדיר $A:=[x_0,\infty)$.
תהא f הפונקציה הצוברת של h, כלומר f מוגדרת ע"י (לכל $a\in A$):

$$f\left(a\right)=\int\limits_{x_0}^{a}h\left(x\right)\ dx$$

ואילו g תוגדר כמקודם (לכל $a\in A$):

$$g\left(a\right)=\begin{cases}\frac{1}{a} & a\neq0\\ 0 & a=0\end{cases}$$

3.6 אינטגרביליות לא אמיתית מסוג שני

תהא $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה לא חסומה כאשר a היא נקודה מיוחדת, כלומר h אינה חסומה בכל סביבה של a.
A תהיה קבוצת הסדרות המכילות את הרכיבים הבאים (לפי הסדר): $x_0\in(a,b]$, P חלוקה של של $[x_0,b]$ ו-P^* בחירת נקודות המתאימה ל-P.
f תהיה הפונקציה המחזירה את סכום רימן המתאים ואילו g תחזיר את $|x_0-a|$.

[6] עבור $a=0$ ניתן היה להגדיר את $g\left(a\right)$ להיות כל מספר (כמובן, ייתכן גם ש-$0\notin A$).