פונקציות - טענות בלבד

חשבון אינפיניטסימלי (1) - 80131

מרצה: רז קופרמן

מתרגלים: אור יער ודניאל רוזנבלט

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

תוכן העניינים

באינפי' 2[1] השלמנו כמה נושאים[2] שלא למדנו בסמסטר שלפניו.
למרות זאת הבאתי אותם כאן מפני שהם שייכים לחומר של אינפי' 1.

* * *

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

[1] שלימד יורם לסט בסמסטר א' תשפ"ג (80132).
[2] הנושאים שהושלמו הם: אסימפטוטות, תנאי קושי לגבולות (במובן הצר ובמובן הרחב) ורציפות במידה שווה.

1 התחלה

♣ במתמטיקה המודרנית פונקציה היא מושג מתורת הקבוצות וככזו ישנם מושגים ומשפטים רבים בנושא שאינם קשורים דווקא למספרים הממשיים (ראו בקובץ "תורת הקבוצות הנאיבית"), בקבצים אלו נעסוק אך ורק בהגדרות ובמשפטים הקשורות למספרים הממשיים.

♣ בכל הסיכומים של קורסי אינפי' נדבר אך ורק על פונקציות שהתחום והטווח שלה הם תתי-קבוצות של $\mathbb{R}$ (אלא אם נאמר אחרת במפורש), כמעט תמיד יהיה מדובר בפונקציה שהתחום שלה הוא מקטע[3] (או איחוד של מקטעים) ועל הקורא תוטל המשימה להבין מן ההקשר מתי מדובר גם בפונקציות שהתחום שלהן אינו בהכרח מקטע.

♣ ישנה הסכמה מקובלת למחצה שאם נתון רק כלל ההתאמה של פונקציה (ללא התחום ו/או הטווח) אז הטווח הוא $\mathbb{R}$ והתחום הוא קבוצת כל הנקודות ב-$\mathbb{R}$ שעבורן כלל ההתאמה מוגדר, מוסכמה זו נקראת "מוסכמת התחום המרבי" ונתקלנו בה כבר בתיכון; למרות הנוחות שבמוסכמה זו אני אשתדל שלא להסתמך עליה ולציין בכל מקום במפורש את התחום והטווח.

1.1 פונקציות זוגיות ואי-זוגיות

תהיינה $f,g:D\to\mathbb{R}$ שתי פונקציות.

טענה 1.1.

- אם f ו-g זוגיות אז גם $f+g$ זוגית.
- אם f ו-g אי-זוגיות אז גם $f+g$ אי-זוגית.

טענה 1.2.

- אם f ו-g זוגיות אז $f\cdot g$ זוגית.
- אם f ו-g אי-זוגיות אז $f\cdot g$ זוגית.
- אם f זוגית ו-g אי-זוגית אז $f\cdot g$ אי-זוגית.

♣ בפרט הכפלה בקבוע אינה משנה את הזוגיות/אי-זוגיות של פונקציה.

למה 1.3. נניח ש-$g(x)\neq 0$ לכל $x\in D$.

- אם g זוגית אז גם $\frac{1}{g}$ זוגית.
- אם g אי-זוגית אז גם $\frac{1}{g}$ אי-זוגית.

מסקנה 1.4.

- אם f ו-g זוגיות אז $\frac{f}{g}$ זוגית.
- אם f ו-g אי-זוגיות אז $\frac{f}{g}$ זוגית.
- אם f זוגית ו-g אי-זוגית אז $\frac{f}{g}$ אי-זוגית.

[3] תזכורת: מקטע הוא תת-קבוצה $I\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $a,b\in I$ מתקיים $(a,b)\subseteq I$.

טענה 1.5. תהיינה $h_1 : A \to B$ ו-$h_2 : B \to C$ פונקציות.

- נניח h_1 זוגית, אם h_2 זוגית או ש-h_2 אי-זוגית אז $h_2 \circ h_1$ זוגית.
- נניח ש-h_2 זוגית, אם h_1 זוגית או ש-h_1 אי-זוגית אז $h_2 \circ h_1$ זוגית.
- אם h_1 ו-h_2 אי-זוגיות אז גם $h_2 \circ h_1$ אי-זוגית.

טענה 1.6. תהיינה $h_1, h_2 : D \to \mathbb{R}$ שתי פונקציות המוגדרות ע"י (לכל $x \in D$):

$$h_1(x) = f(x) - f(-x)$$
$$h_2(x) = f(x) + f(-x)$$

h_1 אי-זוגית ו-h_2 זוגית.

טענה 1.7. קיים זוג פונקציות יחיד $f_{\text{Odd}}, f_{\text{Even}} : D \to \mathbb{R}$ כך ש- f_{Odd} אי-זוגית ו-f_{Even} זוגית ובנוסף מתקיים $f = f_{\text{Odd}} + f_{\text{Even}}$.
פונקציות אלו הן הפונקציות המוגדרות ע"י (לכל $x \in D$):

$$f_{\text{Odd}}(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$
$$f_{\text{Even}}(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

1.2 טענות וזהויות טריגונומטריות

♣ לא נגדיר כאן את הפונקציות הטריגונומטריות ונסתמך על הגדרתן ע"פ מעגל היחידה כפי שלמדנו בתיכון כאשר את הזוויות נמדוד ברדיאנים.

טענה 1.8. לכל $\theta \in \mathbb{R}$ מתקיים $|\sin\theta| \le 1$ וגם $|\cos\theta| \le 1$.

טענה 1.9. לכל $\theta \in \mathbb{R}$ מתקיים $|\sin\theta| \le |\theta|$.

טענה 1.10. לכל $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$ מתקיימות הזהויות הבאות:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta \qquad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \qquad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

טענה 1.11. sin היא פונקציה אי-זוגית ו-cos היא פונקציה זוגית.

2 גבול של פונקציה בנקודה

משפט 2.1. יחידות הגבול

לפונקציה f יש לכל היותר גבול אחד בנקודה $a \in \mathbb{R}$.

משפט 2.2. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה a, הגבול $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right)$ קיים אם"ם הגבול $\lim\limits_{x \to 0} f\left(a+x\right)$ קיים ובמקרה זה מתקיים גם:

$$\lim_{x \to a} f\left(x\right) = \lim_{x \to 0} f\left(a+x\right)$$

2.1 אפיון היינה ותנאי קושי

משפט 2.3. אפיון היינה[4] לגבול של פונקציה בנקודה

תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת U של נקודה $a \in \mathbb{R}$ ויהי $L \in \mathbb{R}$.

מתקיים $\lim_{x \to a} f\left(x\right) = L$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה ב-U מתקיים $\lim_{n \to \infty} f\left(x_n\right) = L$.

מסקנה 2.4. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת U של נקודה $a \in \mathbb{R}$.

לפונקציה f יש גבול בנקודה $a \in \mathbb{R}$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה ב-U הסדרה $\left(f\left(x_n\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת.

משפט 2.5. אפיון היינה לגבול חד-צדדי של פונקציה בנקודה

תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית/שמאלית U של נקודה $a \in \mathbb{R}$ ויהי $L \in \mathbb{R}$.

מתקיים $\lim_{x \to a^{\pm}} f\left(x\right) = L$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה ב-U מתקיים $\lim_{n \to \infty} f\left(x_n\right) = L$.

מסקנה 2.6. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית/שמאלית U של נקודה $a \in \mathbb{R}$.

לפונקציה f יש גבול מימין/משמאל בנקודה $a \in A$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה ב- U הסדרה $\left(f\left(x_n\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת.

משפט 2.7. תנאי קושי לגבול של פונקציה בנקודה

תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $a \in \mathbb{R}$.

תנאי הכרחי ומספיק לקיום הגבול $\lim_{x \to a} f\left(x\right)$ הוא שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיימת $0 < \delta \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x_1, x_2 \in B_{\delta}^{\circ}\left(a\right)$ מתקיים $\left|f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right)\right| < \varepsilon$.

משפט 2.8. תנאי קושי לגבול חד-צדדי של פונקציה בנקודה

תהא f פונקציה ותהא $a \in \mathbb{R}$ כך ש-f מוגדרת בסביבה ימנית/שמאלית מנוקבת של a.

תנאי הכרחי ומספיק לקיום הגבול $\lim_{x \to a^+} f\left(x\right)$ הוא שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיימת $0 < \delta \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x_1, x_2 \in \left(a, a+\delta\right)$ מתקיים $\left|f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right)\right| < \varepsilon$.

תנאי הכרחי ומספיק לקיום הגבול $\lim_{x \to a^-} f\left(x\right)$הוא שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיימת $0 < \delta \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x_1, x_2 \in \left(a-\delta, a\right)$ מתקיים $\left|f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right)\right| < \varepsilon$.

[4] ערך בוויקיפדיה: אדוארד היינה.

2.2 משפטים נוספים

משפט 2.9. אריתמטיקה של גבולות

תהיינה f ו-g פונקציות ממשיות המוגדרות בסביבה מנוקבת של $a\in\mathbb{R}$ כך שהגבולות הבאים קיימים:

$$l:=\lim_{x\to a}f\left(x\right),\ \ m:=\lim_{x\to a}g\left(x\right)$$

מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $\lim_{x\to a}\left(f+g\right)\left(x\right)=l+m$.
2. $\lim_{x\to a}\left(f\cdot g\right)\left(x\right)=l\cdot m$.
3. אם $m\neq0$ אז $\lim_{x\to a}\frac{1}{g\left(x\right)}=\frac{1}{m}$.
4. אם $m\neq0$ אז $\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\frac{l}{m}$.

♣ המשפט נובע ישירות מאפיון היינה לגבול של פונקציה בנקודה ומאריתמטיקה של גבולות לסדרות.

משפט 2.10. משפט ההצבה בגבולות לפונקציות לא רציפות

תהיינה $f:A\to B$ ו-$g:B\to C$ שתי פונקציות כך שהגבולות $l:=\lim_{x\to a}f\left(x\right)$ ו-$m:=\lim_{y\to l}g\left(y\right)$ קיימים (עבור נקודה $a\in A$ כלשהי), אם נתון בנוסף שקיימת סביבה U של a כך שלכל $x\in U$ מתקיים $f\left(x\right)\neq l$ אז מתקיים $\lim_{x\to a}\left(g\circ f\right)\left(x\right)=m$.

3 חסימות וסדר

תהיינה f,g,h פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת U של $a\in\mathbb{R}$.

טענה 3.1. נניח שהגבולות $\lim_{x\to a}f\left(x\right)$ ו-$\lim_{x\to a}g$ קיימים.

1. אם לכל $x\in U$ מתקיים $f\left(x\right)<g\left(x\right)$ אז $l\leq m$.
2. אם $\lim_{x\to a}f\left(x\right)<\lim_{x\to a}g\left(x\right)$ אז קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך ש-$f\left(x\right)<g\left(x\right)$ לכל $x\in B_{\delta}^{\circ}\left(a\right)$.

משפט 3.2. משפט הכריך

אם $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)\leq h\left(x\right)$ לכל $x\in U$ וגם $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=l=\lim_{x\to a}h\left(x\right)$ אז $\lim_{x\to a}g\left(x\right)=l$.

טענה 3.3. אם הגבול $\lim_{x\to a}f\left(x\right)$ קיים אז f חסומה מקומית ב-U.

טענה 3.4. הגבול $\lim_{x\to a}f\left(x\right)$ קיים אם"ם $\lim_{x\to a}\left(f\left(x\right)-l\right)=0$.

משפט 3.5. כלל אפסה וחסומה

אם $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=0$ וגם g חסומה מקומית ב-a אז $\lim_{x\to a}\left(f\cdot g\right)\left(x\right)=0$.

4 רציפות

4.1 משפטי רציפות

משפט 4.1. אפיון היינה לרציפות של פונקציה בנקודה

תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה U של נקודה $a\in\mathbb{R}$.

f רציפה ב-a אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה ב-U מתקיים $\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=f\left(a\right)$.

מסקנה 4.2. אפיון היינה לרציפות חד-צדדית של פונקציה בנקודה

תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית/שמאלית U של נקודה $a\in\mathbb{R}$.

f רציפה מימין/משמאל ב-a אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה ב-U מתקיים $\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=f\left(a\right)$.

משפט 4.3. אריתמטיקה של רציפות

תהיינה f ו-g פונקציות רציפות בנקודה $a\in\mathbb{R}$, מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. $f+g$ רציפה ב-a.
2. גם $f\cdot g$ רציפה ב-a
3. אם $g\left(a\right)\neq 0$ אז גם $\frac{1}{g}$ רציפה ב-a.
4. אם $g\left(a\right)\neq 0$ אז גם $\frac{f}{g}$ רציפה ב-a.

משפט 4.4. משפט ההצבה בגבולות לפונקציות רציפות

תהיינה $f:B\to C$ ו-$g:A\to B$ שתי פונקציות כך ש-g רציפה בנקודה פנימית $a\in A$ ו-f רציפה ב-$g\left(a\right)$ שהיא נקודה פנימית של B, הפונקציה $f\circ g$ רציפה ב-a.

♣ המשפט נובע כמעט באופן ישיר ממשפט ההצבה בגבולות לפונקציות לא רציפות (משפט 2.10).

♣ מכאן שאם f רציפה ב-A ו-g רציפה ב-B אז $g\circ f$ רציפה ב-A.

משפט 4.5. תהא f פונקציה רציפה בנקודה $a\in\mathbb{R}$ ויהי $y\in\mathbb{R}$,

- אם $f\left(a\right)>y$ אז קיימת סביבה U של a כך ש-$f\left(x\right)>y$ לכל $x\in U$.
- אם $f\left(a\right)<y$ אז קיימת סביבה U של a כך ש-$f\left(x\right)<y$ לכל $x\in U$.

♣ המשפט נכון גם עבור רציפות חד-צדדית וסביבה חד-צדדית מתאימה.

משפט 4.6. משפט ערך הביניים

תהא f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, לכל y בקטע הסגור שבין $f\left(a\right)$ ל-$f\left(b\right)$[5] קיים $c\in[a,b]$ כך ש-$f\left(c\right)=y$.

מסקנה 4.7. תהא f פונקציה רציפה המוגדרת על מקטע כלשהו, גם התמונה של f היא מקטע.

משפט 4.8. משפט ויירשטראס הראשון[6]

תהא f פונקציה רציפה בקטע סגור $I\subseteq\mathbb{R}$, f חסומה ב-I.

משפט 4.9. עיקרון המקסימום והמינימום של ויירשטראס (משפט ויירשטראס השני)

תהא f פונקציה רציפה בקטע סגור $I\subseteq\mathbb{R}$, f מקבלת מקסימום ומינימום ב-I (ל-$f\left(I\right)$ יש מקסימום ומינימום).

טענה 4.10. פונקציית הערך המוחלט ($f\left(x\right):=|x|$) רציפה.

---

[5] אם $f\left(a\right)=f\left(b\right)$ אז מדובר ב"קטע" הסגור $\left\{f\left(b\right)\right\}=\left\{f\left(a\right)\right\}=\left[f\left(a\right),f\left(a\right)\right]$.

[6] ערך בוויקיפדיה: קארל ויירשטראס.

4.2 פולינומים ופונקציות טריגונומטריות

טענה 4.11. פונקציית הזהות ($\mathrm{Id}(x) := x$) רציפה.

מסקנה 4.12. כל פולינום הוא פונקציה רציפה.

למה 4.13. יהי $p \in \mathbb{R}[x]$ פולינום מתוקן מדרגה $n := \deg p \in \mathbb{N}$, כלומר קיימים $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ ($a_{n-1} \neq 0$) כך שמתקיים:

$$p(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

יהיו $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ כנ"ל.
קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $M \leq x \in \mathbb{R}$ מתקיים $p(x) > 0$ ובנוסף:

- אם $n \in \mathrm{Even}$ אז לכל $-M \geq x \in \mathbb{R}$ מתקיים $p(x) > 0$.
- אם $n \in \mathrm{Odd}$ אז לכל $-M \geq x \in \mathbb{R}$ מתקיים $p(x) < 0$.

מסקנה 4.14. יהי $p \in \mathbb{R}[x]$ פולינום מתוקן כך ש-$\deg p \in \mathrm{Odd}$, קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$p(x) = 0$.

מסקנה 4.15. יהי $p \in \mathbb{R}[x]$ פולינום מתוקן כך ש-$\deg p \in \mathrm{Odd}$, לכל $y \in \mathbb{R}$ קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$p(x) = y$.

משפט 4.16. יהי $p \in \mathbb{R}[x]$ פולינום מתוקן כך ש-$\deg p \in \mathrm{Even}$, יש ל-p מינימום.

משפט 4.17. יהי $p \in \mathbb{R}[x]$ פולינום מתוקן כך ש-$\deg p \in \mathrm{Even}$, קיים $m \in \mathbb{R}$ המקיים:

1. לכל $m \leq y \in \mathbb{R}$ קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$p(x) = y$.
2. לכל $m > y \in \mathbb{R}$ לא קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$p(x) = y$.

מסקנה 4.18. יהי $p \in \mathbb{R}[x]$ פולינום מדרגה $n \in \mathbb{N}$ מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

- אם $n \in \mathrm{Odd}$ אז לכל $y \in \mathbb{R}$ קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$q(x) = y$.
- נניח ש$n \in \mathrm{Even}$,
  - אם $b_n > 0$ אז קיים $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $m \leq y \in \mathbb{R}$ קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$p(x) = y$ ולכל $m > y \in \mathbb{R}$ לא קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$p(x) = y$, בפרט יש ל-p נקודת מינימום.
  - אם $b_n < 0$ אז קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $M \geq y \in \mathbb{R}$ קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$p(x) = y$ ולכל $M < y \in \mathbb{R}$ לא קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$p(x) = y\alpha$, בפרט יש ל-p נקודת מקסימום.

טענה 4.19. הפונקציות $\sin$ ו-$\cos$ רציפות.

טענה 4.20. מתקיים:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

5 גבולות במובן הרחב

♣ כמעט כל המשפטים הבאים הם גרסאות של המשפטים המתאימים לגבול של פוקנציה בנקודה והוכחותיהם דומות מאד לאלו שכבר ראינו.

משפט 5.1. תהא f פונקציה, הגבול $\lim_{x\to\pm\infty} f\left(x\right)$ קיים במובן הרחב אם"ם הגבול $\lim_{x\to\mp\infty} f\left(-x\right)$ קיים במובן הרחב ובמקרה זה מתקיים גם:

$$\lim_{x\to\mp\infty} f\left(-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty} f\left(x\right)$$

משפט 5.2. אפיון היינה לגבולות במובן הרחב
תהא $f:A\to B$ פונקציה ויהי $L\in\mathbb{R}$.

- נניח ש-A מכילה סביבה מנוקבת U של נקודה $a\in\mathbb{R}$, מתקיים $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=\pm\infty$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה שייכים ל-U מתקיים $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\pm\infty$.
- נניח ש-A מכילה סביבה ימנית U של נקודה $a\in\mathbb{R}$, מתקיים $\lim_{x\to a^+} f\left(x\right)=\pm\infty$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה שייכים ל-U מתקיים $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\pm\infty$.
- נניח ש-A מכילה סביבה שמאלית U של נקודה $a\in\mathbb{R}$, מתקיים $\lim_{x\to a^-} f\left(x\right)=\pm\infty$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a שכל איבריה שייכים ל-U מתקיים $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\pm\infty$.
- נניח ש-f מוגדרת על קרן ימנית D,
  - מתקיים $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=L$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ השואפת ל-∞ שכל איבריה ב-D מתקיים $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=L$.
  - מתקיים $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=\pm\infty$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$השואפת ל-$\infty$ שכל איבריה שייכים ל-D מתקיים $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\pm\infty$.
- נניח ש-f מוגדרת על קרן שמאלית D,
  - מתקיים $\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=L$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ השואפת ל-∞ שכל איבריה ב-D מתקיים $\lim_{n\to-\infty} f\left(x_n\right)=L$.
  - מתקיים $\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\pm\infty$ אם"ם לכל סדרה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$השואפת ל-$-\infty$ שכל איבריה שייכים ל-D מתקיים $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\pm\infty$.

משפט 5.3. תנאי קושי לגבול של פונקציה ב-$\pm\infty$

- תהא f פונקציה המוגדרת בקרן ימנית, תנאי הכרחי ומספיק לקיום הגבול $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)$ הוא שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $M<x_1,x_2\in\mathbb{R}$ מתקיים $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\varepsilon$.
- תהא f פונקציה המוגדרת בקרן שמאלית, תנאי הכרחי ומספיק לקיום הגבול $\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)$ הוא שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $m\in\mathbb{R}$ כך שלכל $m>x_1,x_2\in\mathbb{R}$ מתקיים $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\varepsilon$.

משפט 5.4. אריתמטיקה של גבולות במובן הרחב
תהיינה f ו-g פונקציות ממשיות המוגדרות בקרן מתאימה כך שהגבולות הבאים קיימים:

$$l:=\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right),\ m:=\lim_{x\to\pm\infty}g\left(x\right)$$

מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(f+g\right)\left(x\right)=l+m$.
2. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(f\cdot g\right)\left(x\right)=l\cdot m$.
3. אם $m\neq0$ אז $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{m}$.
4. אם $m\neq0$ אז $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{m}$.

משפט 5.5. משפט ההצבה בגבולות במובן הרחב
תהיינה f ו-g פונקציות המוגדרות על כל הישר[7].

- נניח ש-$l:=\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)$ קיים וממשי ($l\in\mathbb{R}$).
  - אם g רציפה ב-l אז מתקיים $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(g\circ f\right)\left(x\right)=g\left(l\right)$.
  - אם g אינה רציפה ב-l אך קיימת קרן ימנית/שמאלית כך ש-$f\left(x\right)\neq l$ לכל x בקרן והגבול $\lim_{x\to l}g\left(x\right)$ קיים במובן הרחב אז

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(g\circ f\right)\left(x\right)=\lim_{x\to l}g\left(x\right)$$

- נניח ש-$\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=\infty$, אם הגבול $\lim_{x\to\infty}g\left(x\right)$ קיים במובן הרחב אז $\lim_{x\to\pm\infty}\left(g\circ f\right)\left(x\right)=\lim_{x\to\infty}g\left(x\right)$.
- נניח ש-$\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=-\infty$, אם הגבול $\lim_{x\to-\infty}g\left(x\right)$ קיים במובן הרחב אז $\lim_{x\to\pm\infty}\left(g\circ f\right)\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}g\left(x\right)$.

משפט 5.6. משפט הפרוסה
תהיינה f ו-g פונקציות המוגדרות על כל הישר כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$.

- אם $\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=\infty$ אז גם $\lim_{x\to\pm\infty}g\left(x\right)=\infty$.
- כמו כן, אם אם $\lim_{x\to\pm\infty}g\left(x\right)=-\infty$ אז גם $\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=-\infty$.

משפט 5.7. כלל אפסה וחסומה לגבולות במובן הרחב
תהיינה f ו-g פונקציות המוגדרות על כל הישר.

- אם $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=0$ ו-g חסומה מלרע בקרן ימנית אז $\lim_{x\to\infty}\left(f\cdot g\right)\left(x\right)=0$.
- כמו כן, אם $\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=0$ ו-g חסומה מלרע בקרן שמאלית אז $\lim_{x\to-\infty}\left(f\cdot g\right)\left(x\right)=0$.

משפט 5.8. כלל המכפלה לגבולות במובן הרחב
תהיינה f ו-g פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של נקודה $a\in\mathbb{R}$.

- אם $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=\infty$ וגם g חסומה מלרע ע"י חסם חיובי אז $\lim_{x\to a}\left(f\cdot g\right)\left(x\right)=\infty$.
- אם $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=-\infty$ וגם g חסומה מלרע ע"י חסם חיובי אז $\lim_{x\to a}\left(f\cdot g\right)\left(x\right)=-\infty$.

[7] ניתן גם להגדיר אותן רק על הקרנות המתאימות, הערה זו תקפה גם בשני המשפטים הבאים.

טענה 5.9. תהא $f:A\to B$ פונקציה.

- נניח ש-A מכילה סביבה מנוקבת U של נקודה $a\in\mathbb{R}$ כך ש-$f(x)\neq 0$ לכל $x\in U$.
  - אם $\lim_{x\to a}f(x)=0$ אז $\lim_{x\to a}\frac{1}{|f(x)|}=\infty$.
  - אם $\lim_{x\to a}|f(x)|=\infty$ אז $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$.
- נניח ש-A מכילה קרן שמאלית כך ש-$f(x)\neq 0$ לכל x בקרן,
  - אם $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ אז $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{|f(x)|}=\infty$.
  - אם $\lim_{x\to\pm\infty}|f(x)|=\infty$ אז $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{f(x)}=0$.

♣ מה שהטענה אומרת בעצם הוא שלכל פונקציה f מתקיים:

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\infty\Longleftrightarrow\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}|f(x)|=\infty\Longleftrightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{f(x)}=0$$

טענה 5.10. תהא $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה, ישר $\{(x,ax+b)\mid x\in\mathbb{R}\}$ הוא אסימפטוטה משופעת של f ב-$\pm\infty$ אם"ם מתקיים (במובן הצר):

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a,\ \ \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=b$$

טענה 5.11. יהי $p\in\mathbb{R}[x]$ פולינום מתוקן מדרגה n, מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty}p(x)=\infty$ ובנוסף:

- אם $n\in\text{Even}$ אז$\lim\limits_{x\to-\infty}p(x)=\infty$.
- אם $n\in\text{Odd}$ אז $\lim\limits_{x\to-\infty}p(x)=-\infty$.

מסקנה 5.12. יהי $p\in\mathbb{R}[x]$ פולינום מדרגה $n\in\mathbb{N}$ ונסמן ב-a_n את המקדם של החזקה ה-n-ית שלו.

- נניח ש-$a_n>0$,
  - אם $n\in\text{Even}$ אז מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty}p(x)=\infty$ וגם $\lim\limits_{x\to\infty}p(x)=\infty$.
  - אם $n\in\text{Odd}$ אז מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty}p(x)=\infty$ וגם $\lim\limits_{x\to\infty}p(x)=-\infty$.
- נניח ש-$a_n<0$,
  - אם $n\in\text{Even}$ אז מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty}p(x)=-\infty$ וגם $\lim\limits_{x\to\infty}p(x)=-\infty$.
  - אם $n\in\text{Odd}$ אז מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty}p(x)=-\infty$ וגם $\lim\limits_{x\to\infty}p(x)=\infty$.

טענה 5.13. יהיו $p,q\in\mathbb{R}[x]$ ויהיו $a_0,a_1,\ldots,a_n,b_0,b_1,\ldots,b_m\in\mathbb{R}$ ‏($a_n\neq 0$ ו-$b_m\neq 0$) כך שמתקיים:

$$f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0$$
$$g(x)=b_m\cdot x^m+b_{m-1}\cdot x^{m-1}+\ldots+b_1\cdot x+b_0$$

- אם $n<m$ אז $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.
- אם $n=m$ אז $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_n}{b_n}$.
- נניח ש-$n>m$,
  - אם $\operatorname{sgn}(a_n)=\operatorname{sgn}(b_m)$ אז $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$.
  - אם $\operatorname{sgn}(a_n)\neq\operatorname{sgn}(b_m)$ אז $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

6 מונוטוניות

טענה 6.1. קיום גבולות חד-צדדיים של פונקציות מונוטוניות וחסומות:

1. תהא f פונקציה מונוטונית **עולה** המוגדרת בסביבה **שמאלית** U של נקודה $a\in\mathbb{R}$ וחסומה **מלעיל** בסביבה זו, הגבול $\lim_{x\to a^-}f(x)$ קיים ושווה ל-$\sup f(U)$.
2. תהא f פונקציה מונוטונית **עולה** המוגדרת בסביבה **ימנית** U של נקודה $a\in\mathbb{R}$ וחסומה **מלרע** בסביבה זו, הגבול $\lim_{x\to a^+}f(x)$ קיים ושווה ל-$\inf f(U)$.
3. תהא f פונקציה מונוטונית **יורדת** המוגדרת בסביבה **שמאלית** U של נקודה $a\in\mathbb{R}$ וחסומה **מלרע** בסביבה זו, הגבול $\lim_{x\to a^-}f(x)$ קיים ושווה ל-$\inf f(U)$.
4. תהא f פונקציה מונוטונית **יורדת** המוגדרת בסביבה **ימנית** U של נקודה $a\in\mathbb{R}$ וחסומה **מלעיל** בסביבה זו, הגבול $\lim_{x\to a^+}f(x)$ קיים ושווה ל-$\sup f(U)$.

מסקנה 6.2. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה $a\in\mathbb{R}$, אם f מונוטונית אז שני הגבולות החד-צדדיים של a קיימים ובנוסף:

- אם f מונוטונית עולה אז $\lim_{x\to a^-}f(x)\leq\lim_{x\to a^+}f(x)$,
- ואם f מונוטונית יורדת אז $\lim_{x\to a^-}f(x)\geq\lim_{x\to a^+}f(x)$.

מסקנה 6.3. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה של $a\in\mathbb{R}$.

- אם f מונוטונית עולה אז $\lim_{x\to a^-}f(x)\leq f(a)\leq\lim_{x\to a^+}f(x)$,
- ואם f מונוטונית יורדת אז $\lim_{x\to a^-}f(x)\geq f(a)\geq\lim_{x\to a^+}f(x)$.

טענה 6.4. תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, אם f מונוטונית ב-(a,b) אז f מונוטונית גם ב-$[a,b]$ באותו סוג מונוטוניות.

7 הפיכות

טענה 7.1. תהא f פונקציה מונוטונית וחח"ע, f מונוטונית ממש.

משפט 7.2. תהא $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה וחח"ע המוגדרת על מקטע I, f מונוטונית ממש.

משפט 7.3. תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ורציפה, מתקיים אחד משני הפסוקים הבאים:

- f עולה ממש ואז $\mathrm{Im}f=[f(a),f(b)]$.
- f יורדת ממש ואז $\mathrm{Im}f=[f(b),f(a)]$.

♣ המשפט נכון גם עבור מקטעים שאינם קטעים סגורים אך בשינוי קל: התמונה של פונקציה רציפה וחח"ע המוגדרת על מקטע היא מקטע בעל אותן תכונות של סגירות/פתיחות, כלומר לכל אחת משלוש הקטגוריות הבאות הפונקציה תעתיק מקטע מקטגוריה כלשהי למקטע מאותה קטגוריה:

1. מקטעים סגורים - קטעים סגורים.
2. מקטעים פתוחים - קטעים פתוחים, קרנות פתוחות והישר כולו.
3. מקטעים חצי סגורים - קטעים חצי סגורים וקרנות סגורות.

משפט 7.4. תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה והפיכה, גם f^{-1} רציפה.

♣ האינטואיציה למשפט היא שהגרף של f^{-1} הוא שיקוף הגרף של f ביחס לאלכסון הראשי, כלומר כל ציור של הגרף של f הוא גם ציור הגרף של f^{-1} (נחליף בין הצירים), ולכן אם אפשר "לצייר" את הגרף של f מבלי "להרים את העיפרון מהדף" הרי שבכך "ציירנו" גם את הגרף של f^{-1} מבלי לעשות זאת.
כדאי להוסיף תמונה.

♣ המשפט נכון גם עבור מקטעים שאינם קטעים סגורים: תהא f פונקציה המוגדרת על מקטע I ויהי $y\in\mathrm{Im}f$, אם נצמצם את f לקטע סגור I' כך ש-$f^{-1}(y)\in I'$ נקבל מהמשפט שהפונקציה ההופכית לפונקציה המצומצמת[8] רציפה ב-y ומכיוון שזו האחרונה היא צמצום של f^{-1} נדע שגם f^{-1} היא רציפה ב-y שהרי רציפות היא תכונה מקומית.

מסקנה 7.5. יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(x):=\sqrt[n]{x}$ לכל $x\in[0,\infty)$, f היא פונקציה רציפה.

משפט 7.6. תהא f פונקציה מונוטונית והפיכה, f^{-1} היא פונקציה מונוטונית בעלת אותו סוג מונוטוניות, כלומר מתקיים אחד משני הפסוקים הבאים:

1. f עולה ממש ואז גם f^{-1} עולה ממש.
2. f עולה ממש ואז גם f^{-1} יורדת ממש.

♣ גם כאן (כמו במשפטים רבים העוסקים בפונקציות הפיכות) עוזרת ההבחנה שהגרף של f^{-1} הוא שיקוף הגרף של f ביחס לאלכסון הראשי.

מסקנה 7.7. יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(x):=\sqrt[n]{x}$ לכל $x\in[0,\infty)$, f היא פונקציה עולה ממש.

מסקנה 7.8. לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{x}=\infty$ וכמו כן גם $\lim_{x\to 0}\sqrt[n]{x}=0$.

[8] כוונתי לפונקציה $(f|_{I'})^{-1}$ שהיא הופכית של f המצומצמת ל-I'.

8 הפונקציה האקספוננציאלית

8.1 הגדרת הפונקציה האקספוננציאלית

יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ ותהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י $a_n := \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$ (לכל $n \in \mathbb{N}$), נרצה להוכיח שהגבול $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ קיים.

טענה 8.1. קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שהסדרה $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ מונוטונית עולה.

טענה 8.2. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל.

מסקנה 8.3. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

מסקנה 8.4. הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ קיים לכל $x \in \mathbb{R}$.

8.2 תכונות הפונקציה האקספוננציאלית

טענה 8.5. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\exp(x) > 0$.

טענה 8.6. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\exp(x) \geq 1+x$.

למה 8.7. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n^2}\right)^n = 1$$

טענה 8.8. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

טענה 8.9. לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$.

מסקנה 8.10. לכל $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \prod_{k=1}^{n}\exp(x_k)$$

טענה 8.11. לכל $q \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\exp(q) = e^q$.

למה 8.12. לכל $x \in (-1,1)$ מתקיים:

$$1+x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$$

טענה 8.13. $\exp$ רציפה ב-0.

טענה 8.14. $\exp$ רציפה בכל $\mathbb{R}$.

טענה 8.15. $\exp$ היא פונקציה עולה ממש.

טענה 8.16. מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}\exp(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$$

מסקנה 8.17. $\exp$ חח"ע ועל ומכאן שהיא הפיכה.

8.3 הלוגריתם הטבעי

טענה 8.18. ממשפט 7.6 נובע שגם ln עולה ממש.

טענה 8.19. לכל $0 < x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$.

מסקנה 8.20. לכל $0 < x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)$$

למה 8.21. לכל $0 < a \in \mathbb{R}$ וכל $q \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\ln(a^q) = q \cdot \ln(a)$.

מסקנה 8.22. לכל $0 < a \in \mathbb{R}$ ולכל $q \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\exp(q \cdot \ln(a)) = a^q$.

8.4 חזקה ממשית ולוגריתמים בבסיסים שונים מ-e

משפט 8.23. חוקי חזקות כשהמעריך ממשי

יהיו $0 < a, b \in \mathbb{R}$, לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
2. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
3. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
4. אם $0 < a < b$ ו-$0 < x$ אז $a^x < b^x$, כמו כן אם $0 < a < b$ ו-$0 > x$ אז $a^x > b^x$.
5. אם $1 < a$ ו-$x < y$ אז $a^x < a^y$.
6. אם $0 < a < 1$ ו-$x < y$ אז $a^x > a^y$.

מסקנה 8.24. יהי $0 < a \in \mathbb{R}$ ונגדיר את הפונקציה $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ע"י $f(x) = a^x$ (לכל $x \in \mathbb{R}$);

- אם $1 < a$ אז f עולה ממש.
- אם $a < 1$ אז f יורדת ממש.
- אם $a = 1$ אז f פונקציה קבועה ($f(x) = 1$ לכל $x \in \mathbb{R}$).

מכאן נסיק שאם $a \neq 1$ אז f חח"ע ועל וממילא הפיכה.

מסקנה 8.25. יהי $0 < a \in \mathbb{R}$ שונה מ-1, אם $1 < a$ אז $\log_a$ עולה ממש ואם $a < 1$ אז $\log_a$ יורדת ממש.

מסקנה 8.26. יהי $0 < a \in \mathbb{R}$ שונה מ-1.

- אם $1 < a$ אז $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ ו-$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, וכמו כן $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = \infty$ ו-$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$.
- אם $a < 1$ אז $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ ו-$\lim_{x\to-\infty} a^x = -\infty$, וכמו כן $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = -\infty$ ו-$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \infty$.

טענה 8.27. לכל $0 < a \in \mathbb{R}$ השונה מ-1 ולכל $0 < x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

משפט 8.28. חוקי לוגריתמים

יהיו $0 < a, b, c, d \in \mathbb{R}$ כך ש-a ו-b שונים מ-1, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $\log_b(c) = \dfrac{\log_a(c)}{\log_a(b)}$.
2. $\log_a(c \cdot d) = \log_a(c) + \log_a(d)$.[9]
3. $\log_a\left(\dfrac{c}{d}\right) = \log_a(c) - \log_a(d)$.
4. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\log_a(c^x) = x \cdot \log_a(c)$.

9 רציפות במידה שווה

תהא f פונקציה המוגדרת על מקטע $I \subseteq \mathbb{R}$.

טענה 9.1. אם f רציפה במידה שווה על I אז f רציפה במידה שווה על כל מקטע $J \subseteq I$.

משפט 9.2. אם f רציפה במידה שווה על I אז f גם רציפה ב-I.

משפט 9.3. אם f רציפה במידה שווה על I אז לכל סדרה מתכנסת $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שכל איבריה ב-I גם הסדרה $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת.

♣ שימו לב: העובדה ש-$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ושכל איבריה ב-I אינה אומרת שגם $\lim_{n\to\infty} a_n$ נמצא ב-I, מסיבה זו המשפט אינו נכון לכל פונקציה רציפה.
לדוגמה: הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ רציפה בקטע $(0,1]$ ו-$a_n = \frac{1}{n}$ היא סדרה מתכנסת שכל איבריה ב-$(0,1]$ אך $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \infty$.

משפט 9.4. "אפיון היינה" לרציפות במידה שווה של פונקציה

f רציפה במידה שווה על I אם"ם לכל שתי סדרות $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(y_n)_{n=1}^{\infty}$ שכל איבריהן ב-I המקיימות $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0$.

משפט 9.5. אריתמטיקה של רציפות במידה שווה

נניח ש-f רציפה במידה שווה על I ותהא g גם היא פונקציה רציפה במידה שווה על I (ובפרט מוגדרת בו).

1. $f + g$ רציפה במידה שווה על I.
2. אם f ו-g חסומות ב-I אז $f \cdot g$ רציפה במידה שווה על I.
3. אם קיים $0 < c \in \mathbb{R}$ כך ש-$|g(x)| \geq c$ לכל $x \in I$ אז $\frac{1}{g}$ רציפה במידה שווה על I.
4. אם f חסומה ב-I וגם קיים $0 < c \in \mathbb{R}$ כך ש-$|g(x)| \geq c$ לכל $x \in I$ אז $\frac{f}{g}$ רציפה במידה שווה על I.

משפט 9.6. נניח ש-f רציפה במידה שווה על I ותהא $g : \mathrm{Im} f \to \mathbb{R}$ גם היא פונקציה רציפה במידה שווה על $\mathrm{Im} f$[10], גם הפונקציה $g \circ f$ רציפה במידה שווה על I.

---

[9] ניתן להסיק מכאן (באינדוקציה) גם ליותר משני מוכפלים.

[10] מהעובדה ש-I הוא מקטע ו-f רציפה (משפט 9.2) נובע שגם $\mathrm{Im} f$ הוא מקטע.

משפט 9.7. נניח ש-I הוא קטע פתוח ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$I=(a,b)$, אם f רציפה במידה שווה על I אז הגבולות $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ ו-$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ קיימים.

מסקנה 9.8. "משפט ויירשטראס" לרציפות במידה שווה

נניח ש-I הוא קטע פתוח, אם f רציפה במידה שווה על I אז f חסומה ב-I.

מסקנה 9.9. נניח ש-f רציפה במידה שווה על I,

- אם $I=(a,\infty)$ (עבור $a\in\mathbb{R}$ כלשהו) אז הגבול $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ קיים
- אם $I=(-\infty,a)$ (עבור $a\in\mathbb{R}$ כלשהו) אז הגבול $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ קיים.

משפט 9.10. תהא $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, אם ל-g יש אסימפטוטות משופעות ב-$\pm\infty$ אז g רציפה במידה שווה על כל $\mathbb{R}$.

מסקנה 9.11. נניח ש-f רציפה ב-I,

- אם I היא קרן ימנית ול-f יש אסימפטוטה משופעת ב-∞ אז f רציפה במידה שווה על I.
- אם I היא קרן שמאלית ול-f יש אסימפטוטה משופעת ב-$-\infty$ אז f רציפה במידה שווה על I.

משפט 9.12. משפט קנטור

נניח ש-I הוא קטע סגור, אם f רציפה ב-I אז f רציפה במידה שווה על I.

טענה 9.13. יהיו $I_1,I_2,\ldots,I_n\subseteq\mathbb{R}$ מקטעים, נסמן $A:=I_1\cup I_2\cup\ldots\cup I_n$ ותהא g פונקציה המוגדרת ב-A, אם לכל $n\geq k\in\mathbb{N}$ הפונקציה g רציפה במידה שווה על I_k אז g רציפה במידה שווה על A[11].

מסקנה 9.14. תהא $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה, אם g מחזורית ורציפה אז g רציפה במידה שווה על כל $\mathbb{R}$.

משפט 9.15. תנאי ליפשיץ[12]

אם קיים $K\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x_1,x_2\in I$ שונים זה מזה ($x_1\neq x_2$) מתקיים $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\leq K$ אז f רציפה במידה שווה על I.

♣ תנאי ליפשיץ הוא תנאי מספיק לרציפות במידה שווה אך אינו תנאי הכרחי, לדוגמה הפונקציה המעתיקה את x ל-$\sqrt{x}$ בקטע $[0,1]$ היא פונקציה רציפה במידה שווה מפני שהיא פונקציה רציפה על קטע סגור[13] אך לכל $0<K\in\mathbb{R}$ קיים $x\in[0,1]$ כך שמתקיים:

$$\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}\right|=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}>K$$

מסקנה 9.16. אם f גזירה ב-I[14] ו-f' חסומה ב-I אז f רציפה במידה שווה על I.

[11] לשם כך נגדיר רציפות במידה שווה על איחוד מקטעים בצורה הבאה: g תיקרא <u>רציפה במידה שווה</u> על A אם לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x_1,x_2\in A$ המקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.
שימו לב לכך שאם A היא מקטע בעצמה (בנוסף לכך שהיא איחוד מקטעים) אז ההגדרה מתלכדת אם ההגדרה הרגילה.

[12] ערך בוויקיפדיה: רודולף ליפשיץ, ראו גם תנאי ליפשיץ.

[13] ראו את משפט קנטור להלן.

[14] אם I סגור באחד הקצוות אז מדובר בגזירות חד-צדדית בקצה כזה.