סדרות ופונקציות - טענות בלבד

אנליזה אלמנטרית רב-ממדית - 80116

מרצה: נועה ניצן

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 סדרות

תהא $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-$\mathbb{R}^k$ ונסמן ב-x_{nj} את הקואורדינטה ה-j של הנקודה P_n (לכל $k \geq j \in \mathbb{N}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$).

טענה 1.1. $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה (ב-$\mathbb{R}^k$) אם"ם לכל $k \geq j \in \mathbb{N}$ הסדרה $(x_{nj})_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה (ב-$\mathbb{R}$).

טענה 1.2. אם $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אז היא גם חסומה.

טענה 1.3. $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת (ב-$\mathbb{R}^k$) אם"ם לכל $k \geq j \in \mathbb{N}$ הסדרה $(x_{n,j})_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת (ב-$\mathbb{R}$).

משפט 1.4. קבוצה $U \subseteq \mathbb{R}^k$ היא קבוצה סגורה אם"ם לכל סדרת נקודות מתכנסת $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ שכל איבריה ב-U מתקיים ש-$\lim_{n\to\infty} P_n \in U$.

משפט 1.5. קבוצה $K \subseteq \mathbb{R}^k$ היא קבוצה קומפקטית אם"ם לכל סדרת נקודות $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ שכל איבריה ב-K קיימת תת-סדרה מתכנסת שגבולה ב-K.

משפט 1.6. משפט בולצאנו-ויירשטראס

אם $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה אז יש לה תת-סדרה מתכנסת.

2 פונקציות

טענה 2.1. אם לפונקציה $f : D \to \mathbb{R}^n$ יש גבול בנקודה $P_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^m$ אז קיימת סביבה מנוקבת $U \subseteq D$ של P_0 כך ש-$f(U)$ היא קבוצה חסומה.

משפט 2.2. תנאי היינה לגבול של פונקציה בנקודה

תהא $f : D \to \mathbb{R}^n$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת U של נקודה $P_0 \in \mathbb{R}^m$ ($D \subseteq \mathbb{R}^m$).

תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-$\lim_{P\to P_0} f(P) = L \in \mathbb{R}^n$ הוא שלכל סדרת נקודות $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ ב-U המתכנסת ל-P_0 מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = L$.

מסקנה 2.3. תנאי היינה לרציפות של פונקציה בנקודה

תהא $f : D \to \mathbb{R}^n$ פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה U של נקודה $P_0 \in \mathbb{R}^m$ ($D \subseteq \mathbb{R}^m$).

תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-f רציפה ב-P_0 הוא שלכל סדרת נקודות $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ ב-U המתכנסת ל-P_0 מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(P_0)$.

משפט 2.4. משפט ההצבה בגבולות

תהיינה $f : D_1 \to D_2$ ו-$g : D_2 \to \mathbb{R}^k$ (כאשר $D_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ ו-$D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$) ותהיינה $P_0 \in D_1$ ו-$Q_0 \in D_2$ נקודות פנימיות (בהתאמה).

- אם ל-g יש גבול ב-Q_0, ל-f יש גבול ב-P_0 ו-$\lim_{P\to P_0} f(P) = Q_0$, ובנוסף קיימת סביבה מנוקבת U של P_0 כך שלכל $P \in U$ מתקיים $f(P) \neq Q_0$, אז ל-$g \circ f$ יש גבול ב-P_0 ומתקיים:

$$\lim_{P\to P_0} g(f(P)) = \lim_{Q\to Q_0} g(Q)$$

- אם f ו-g רציפות ב-P_0 וב-Q_0 (בהתאמה) אז $g \circ f$ רציפה ב-P_0 ומתקיים $g(f(P_0)) = g(Q_0)$.

2.1 מסילות

משפט 2.5. תהא $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ מסילה ותהיינה $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbb{R}^I$ פונקציות כך שלכל $n \geq j \in \mathbb{N}$ ולכל $t \in I$ יתקיים:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

תהא $t_0 \in I$ נקודה פנימית ב-I, γ גזירה בנקודה $t_0 \in I$ אם"ם לכל $n \geq j \in \mathbb{N}$ הפונקציה f_j גזירה ב-t_0 ואז וקטור הנגזרת של γ ב-t_0 הוא:

$$\begin{bmatrix} f_1'(t_0) \\ f_2'(t_0) \\ \vdots \\ f_n'(t_0) \end{bmatrix}$$

משפט 2.6. יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש-$a < b$ ותהיינה $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ פונקציות רציפות בקטע $[a, b]$ וגזירות בקטע (a, b) כך ש-$g'(t) \neq 0$ לכל $t \in (a, b)$.
תהא גם $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ מסילה המוגדרת ע"י (לכל $t \in [a, b]$):

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} g(t) \\ f(t) \end{pmatrix}$$

קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך שמתקיים:

$$\frac{g(b) - g(a)}{g'(c)} \cdot \gamma'(c) = \gamma(b) - \gamma(a)$$

- ♣ כלומר משפט הערך הממוצע של קושי אומר שקיימת נקודה $c \in (a, b)$ שבה שיפוע הישר המשיק למסלול של γ הוא בדיוק השיפוע של הקטע המחבר בין $\gamma(a)$ ל-$\gamma(b)$.
- ♣ כדי להוכיח את המשפט יש להשתמש במשפט הערך הממוצע של קושי, ע"פ משפט הערך הממוצע של קושי נובע קיימת $c \in (a, b)$ כך שמתקיים:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

וממילא גם:

$$\frac{g(b) - g(a)}{g'(c)} \cdot f'(c) = f(b) - f(a)$$

ומכאן שע"פ המשפט הקודם (2.5) מתקיים:

$$\frac{g(b) - g(a)}{g'(c)} \cdot \gamma'(t_0) = \frac{g(b) - g(a)}{g'(c)} \cdot \begin{bmatrix} f'(c) \\ g'(c) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f(b) - f(a) \\ g(b) - g(a) \end{pmatrix} = \gamma(b) - \gamma(a)$$

2.2 פונקציות מרובות משתנים

כל הפונקציות שנעסוק בהן בסעיף זה הן פונקציות מהצורה $f:D\to\mathbb{R}$ כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ולכן לא אטרח לציין זאת בכל פעם מחדש.

טענה 2.7. תהא f פונקציה כך של-f יש גבול $L\in\mathbb{R}$ בנקודה $P_{0}\in\mathbb{R}^{n}$.
אם $0<L$ אז קיימת סביבה מנוקבת U של P_{0} כך שלכל $P\in U$ מתקיים $\frac{L}{2}<f\left(P\right)<\frac{3L}{2}$,
ואם $L<0$ אז קיימת סביבה מנוקבת U של P_{0} כך שלכל $P\in U$ מתקיים $\frac{3L}{2}<f\left(P\right)<\frac{L}{2}$.

מסקנה 2.8. תהא f פונקציה כך של-f יש גבול $L\in\mathbb{R}$ בנקודה $P_{0}\in\mathbb{R}^{m}$.
אם $0<L$ אז קיימת סביבה מנוקבת של P_{0} שבה f חיובית ואם $L<0$ אז קיימת סביבה מנוקבת של P_{0} שבה f שלילית.

משפט 2.9. "האנלוג הרציף של תנאי היינה"
תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה $P_{0}\in\mathbb{R}^{n}$, ל-f יש גבול $L\in\mathbb{R}$ ב-P_{0} אם"ם לכל מסילה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת $\gamma\left((a,b]\right)\subseteq D\setminus\left\{ P_{0}\right\}$ ו-$\gamma\left(a\right)=P_{0}$ מתקיים:

$$\lim_{t\to a^{+}}\left(f\circ\gamma\right)\left(t\right)=L$$

- ♣ נזכור שמהגדרתה מסילה היא פונקציה רציפה ולכן $\lim_{x\to a^{+}}\gamma\left(t\right)=\gamma\left(a\right)=P_{0}$.
- ♣ נשים לב ש-$f\circ\gamma$ היא פונקציה שהתחום שלה הוא $(a,b]$ והטווח שלה הוא $D\setminus\left\{ P_{0}\right\}$.

משפט 2.10. אריתמטיקה של גבולות
תהיינה f ו-g פונקציות כך שקיימים הגבולות (עבור $P_{0}\in\mathbb{R}^{n}$):

$$L_{1}:=\lim_{P\to P_{0}}f\left(P\right),\ L_{2}:=\lim_{P\to P_{0}}g\left(P\right)$$

מתקיימים ארבעת הפסוקים הבאים:

1. לפונקציה $f+g$ יש גבול בנקודה P_{0} וערכו הוא $L_{1}+L_{2}$.
2. לפונקציה $f\cdot g$ יש גבול בנקודה P_{0} וערכו הוא $L_{1}\cdot L_{2}$.
3. אם $L_{2}\neq0$ אז לפונקציה $\frac{1}{g}$ יש גבול בנקודה P_{0} וערכו הוא $\frac{1}{L_{2}}$.
4. אם $L_{2}\neq0$ אז לפונקציה $\frac{f}{g}$ יש גבול בנקודה P_{0} וערכו הוא $\frac{L_{1}}{L_{2}}$.

מסקנה 2.11. אריתמטיקה של רציפות
תהיינה f ו-g פונקציות רציפות בנקודה $P_{0}\in\mathbb{R}^{n}$.
מתקיימים ארבעת הפסוקים הבאים:

1. הפונקציה $f+g$ רציפה ב-P_{0} ו-$\left(f+g\right)\left(P_{0}\right)=f\left(P_{0}\right)+g\left(P_{0}\right)$.
2. הפונקציה $f\cdot g$ רציפה ב-P_{0} ו-$\left(f\cdot g\right)\left(P_{0}\right)=f\left(P_{0}\right)\cdot g\left(P_{0}\right)$.
3. אם $g\left(P_{0}\right)\neq0$ אז הפונקציה $\frac{1}{g}$ רציפה ב-P_{0} ו-$\left(\frac{1}{g}\right)\left(P_{0}\right)=\frac{1}{g\left(P_{0}\right)}$.
4. אם $g\left(P_{0}\right)\neq0$ אז הפונקציה $\frac{1}{g}$ רציפה ב-P_{0} ו-$\left(\frac{f}{g}\right)\left(P_{0}\right)=\frac{f\left(P_{0}\right)}{g\left(P_{0}\right)}$.

משפט 2.12. תהיינה f ו-g פונקציות כך שקיימים הגבולות (עבור $P_0 \in \mathbb{R}^n$):

$$L_1 := \lim_{P \to P_0} f(P), \ \ L_2 := \lim_{P \to P_0} g(P)$$

1. כלל חסומה ואפסה: אם $L_1 = 0$ ו-g חסומה בסביבה מנוקבת של P_0 אז ל-$f \cdot g$ יש גבול ב-P_0 והוא 0.
2. אם קיימת סביבה מנוקבת U של P_0 כך שלכל $P \in U$ מתקיים $f(P) \leq g(P)$ אז $L_1 \leq L_2$.
3. אם $L_1 < L_2$ אז קיימת סביבה מנוקבת U של P_0 כך שלכל $P \in U$ מתקיים $f(P) < g(P)$.

♣ כפי שראינו באינפי' 1 גם כאן א"ש חזק בין f ל-g בסעיף 2 לא יגרום לא"ש חזק בין הגבולות ובסעיף 3 א"א לוותר על הא"ש החזק.

משפט 2.13. משפט הכריך

תהיינה f, g ו-h פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת U של נקודה $P_0 \in \mathbb{R}^n$.

אם לכל $P \in U$ מתקיים $f(P) \leq g(P) \leq h(P)$ ובנוסף ל-f ול-h יש גבול בנקודה P_0 כך שמתקיים:

$$L := \lim_{P \to P_0} f(P) = \lim_{P \to P_0} h(P)$$

אז גם ל-g יש גבול ב-P_0 ומתקיים:

$$\lim_{P \to P_0} g(P) = L$$

משפט 2.14. משפט ויירשטראס הראשון

תהא f פונקציה המוגדרת בעל קבוצה קומפקטית $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$, f חסומה ב-K.

משפט 2.15. עיקרון המקסימום והמינימום של ויירשטראס (משפט ויירשטראס השני)

תהא f פונקציה המוגדרת בעל קבוצה קומפקטית $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$, f מקבלת מקסימום ומינימום ב-K (או במילים אחרות $f(K)$ היא קטע סגור ב-$\mathbb{R}$).