תורת הגרפים - הגדרות בלבד

מתמטיקה בדידה - 80181

מרצה: צור לוריא

מתרגלת: שני שלומי

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

תודתי נתונה לגלעד שרם על סיכומיו המצוינים שהיו לי לעזור רב עד כדי כך שניתן לומר שהסיכום הזה מבוסס על סיכומיו.

* * *

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

הגדרה 1.1. גרף לא מכוון

תהא V קבוצה סופית ולא ריקה ותהא $E\subseteq P\left(V\right)$ כך שלכל $e\in E$ מתקיים $|e|=2$, הזוג $G:=\left(V,E\right)$ הוא גרף לא מכוון.

הגדרה 1.2. גרף מכוון

תהא V קבוצה סופית ולא ריקה ותהא $E\subseteq V\times V$, הזוג $G:=\left(V,E\right)$ הוא גרף מכוון.

הגדרה 1.3. יהי $G:=\left(V,E\right)$ גרף (מכוון/לא מכוון), איברי V נקראים קודקודים או צמתים ואיברי E נקראים צלעות או קשתות.

יהי $G:=\left(V,E\right)$ גרף לא מכוון.

הגדרה 1.4. נאמר ש-G הוא גרף שלם אם $E=\left\{ e\in P\left(V\right):|e|=2\right\}$, הגרף השלם מגודל $n\in\mathbb{N}$ מסומן ב-K_{n}.

הגדרה 1.5. הגרף המשלים של G הוא $\overline{G}:=\left(V,\overline{E}\right)$ כאשר $\overline{E}:=\left\{ e\in P\left(V\right):|e|=2,\ e\notin E\right\}$.

הגדרה 1.6. נאמר שקודקודים $v,u\in V$ הם שכנים אם מחברת ביניהם צלע (כלומר $\left\{ v,u\right\} \in E$).

הגדרה 1.7. יהי $v\in V$, הדרגה של v (מסומנת ב-$\deg\left(v\right)$) היא מספר הקודקודים השכנים שלו (ששווה למספר הצלעות שבהן הוא מופיע).

הגדרה 1.8. נאמר שקודקוד $v\in V$ הוא עלה אם $\deg\left(v\right)=1$.

הגדרה 1.9. נאמר ש-G הוא d-רגולרי (וגם באופן כללי גרף רגולרי) אם לכל $v,u\in V$ מתקיים $\deg v=d=\deg u$ (עבור $d\in\mathbb{N}_{0}$ כלשהו).

יהי $G':=\left(V',E'\right)$ גרף מכוון ויהי $v\in V'$.

הגדרה 1.10. דרגת היציאה של v היא מספר הצלעות היוצאות ממנו (מספר הצלעות שבהן הוא מופיע ראשון) ודרגת הכניסה של v היא מספר הצלעות הנכנסות אליו (אלה שבהן הוא מופיע שני), דרגת הכניסה מסומנת ב-$\text{indegree}\left(v\right)$ ודרגת היציאה מסומנת ב-$\text{outdegree}\left(v\right)$.

הגדרה 1.11. הדרגה של v היא $\deg\left(v\right):=\text{indegree}\left(v\right)+\text{outdegree}\left(v\right)$.

2 מסלולים וקשירות

יהי $G := (V, E)$ גרף לא מכוון.

הגדרה 2.1. נאמר שסדרת קודקודים $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ היא מסלול אם $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ לכל $n-1 \geq i \in \mathbb{N}$.

הגדרה 2.2. נאמר ש-G הוא גרף קשיר אם לכל שני קודקודים $v, u \in V$ קיים מסלול המחבר ביניהם[1].

הגדרה 2.3. יחס הקשירות הוא יחס שקילות על V שבו כל שני קודקודים שונים שקולים זה לזה אם קיים מסלול המחבר ביניהם (וכל קודקוד שקול לעצמו).

הגדרה 2.4. מחלקות השקילות של יחס הקשירות נקראות רכיבי קשירות.

הגדרה 2.5. מסלול פשוט הוא מסלול שאין בו חזרה על קודקוד פעמיים.

הגדרה 2.6. מסלול שבו אין חזרה על צלע אחת פעמיים נקרא מסילה.

הגדרה 2.7. מסילה פשוטה היא מסילה שבה אין חזרה על קודקוד פעמיים.

♣ מסלול פשוט ומסילה פשוטה הם מושגים שקולים מפני שגם מסלול פשוט אינו יכול לחזור על צלע פעמיים.

הגדרה 2.8. מסלול $(v_0, v_2, \ldots, v_n)$ יקרא מעגל אם $v_0 = v_n$.

הגדרה 2.9. מעגל יקרא מעגל פשוט אם אין בו חזרה על קודקוד פעמיים (מלבד החזרה המובנית של הקודקוד הראשון והאחרון).

♣ בכל מעגל יש מעגל פשוט.

3 מסלולים מיוחדים

יהי $G := (V, E)$ גרף לא מכוון.

הגדרה 3.1. מסלול פשוט העובר על כל הקודקודים ב-V יקרא מסלול המילטון[2] (וגם מסילת המילטון מפני שמסלול פשוט ומסילה פשוטה הם מושגים שקולים).

הגדרה 3.2. מעגל פשוט העובר על כל הקודקודים ב-V יקרא מעגל המילטון.

♣ נכון להיום אין בנמצא אלגוריתם יעיל הקובע לכל גרף אם יש בו מעגל המילטון, וכנראה שגם לא יהיה, שכן בעיה זו היא בעיית NP-שלמה ולכן קיום של פתרון יעיל עבורה (אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי) יגרור ש-P=NP.

הגדרה 3.3. מסילה העוברת על כל הצלעות ב-E תקרא מסילת אוילר (וגם מסלול אוילר).

הגדרה 3.4. מעגל העובר על כל צלע ב-E פעם אחת בדיוק יקרא מעגל אוילר.

♣ אי אפשר לדבר על מעגל אוילר מבלי לדבר על בעיית הגשרים של קניגסברג.

[1] כלומר קיים מסלול שהם נמצאים בקצותיו.
[2] ערך בוויקיפדיה: ויליאם ריאן המילטון.

4 עצים

הגדרה 4.1. גרף קשיר G יקרא עץ אם אין בו מעגלים פשוטים.

♣ מכיוון שבכל מעגל יש מעגל פשוט וכל מעגל פשוט הוא מעגל הדבר שקול לגרף קשיר שאין בו מעגלים כלל.

5 תורת רמזי

יהי $G:=(V,E)$ גרף לא מכוון.

הגדרה 5.1. צביעה של G היא פונקציה מ-E לקבוצת צבעים נתונה $\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$.

טענה. יהיו $2\le n,m\in\mathbb{N}$, אם קיימים $a,b\in\mathbb{N}$ כך שמתקיים:

1. ב-K_a הצבוע באדום וכחול יש בהכרח תת-גרף K_n הצבוע כולו אדום ו/או תת-גרף K_{m-1} הצבוע כולו כחול.
2. ב-K_b הצבוע באדום וכחול יש בהכרח תת-גרף K_{n-1} הצבוע כולו אדום ו/או תת-גרף K_m הצבוע כולו כחול.

אז ב-K_{a+b} הצבוע באדום וכחול יש בהכרח תת-גרף K_n הצבוע כולו אדום ו/או K_m הצבוע כולו כחול.

משפט. משפט רמזי[3]
יהיו $2\le n,m\in\mathbb{N}$, נסמן $N:=\binom{n+m-2}{n-1}$ ויהי K_N כשהוא צבוע באדום וכחול, יש ב-K_N תת-גרף K_n שכולו צבוע אדום ו/או שיש ב-K_N תת-גרף K_m שכולו צבוע כחול.

מסקנה. לכל $N<M\in\mathbb{N}$ ובהינתן צביעה של K_M באדום וכחול יש ב-K_M תת-גרף K_n שכולו צבוע אדום ו/או שיש ב-K_M תת-גרף K_m שכולו צבוע כחול.

הגדרה 5.2. מספר רמזי $R(n,m)$ מוגדר להיות המספר הטבעי המינימלי שעבורו לכל צביעה באדום וכחול של הגרף השלם המתאים יש בו K_n שכולו צבוע אדום ו/או שיש בו גרף K_m שכולו צבוע כחול.

♣ נכון להיום אין בנמצא אלגוריתם יעיל לחישוב מספרי רמזי (!).

[3] ערך בוויקיפדיה: פרנק רמזי.

6 קוביות, גרפים דו-צדדיים וזיווגים

הגדרה 6.1. הקוביה ה-n-מימדית היא הגרף $Q_n := (V, E)$ כאשר $V := \{0,1\}^n$ ובין כל שני קודקודים השונים זה מזה בקואורדינטה אחת בדיוק מחברת צלע.

יהי $G := (V, E)$ גרף לא מכוון.

הגדרה 6.2. גרף דו-צדדי

נאמר ש-G הוא דו-צדדי אם קיימים $V_1, V_2 \subseteq V$ כך ש-$V_1 \cup V_2 = V$ ו-$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ובנוסף לכל $e \in E$ מתקיים $|V_1 \cap e| = 1$ (כלומר כל צלע מכילה בדיוק קודקוד אחד מ-V_1 וקודקוד אחד מ-V_2), תתי-הקבוצות V_1 ו-V_2 נקראות הצדדים של G.

הגדרה 6.3. גרף דו-צדדי שלם

נאמר ש-G הוא דו-צדדי שלם אם הוא דו-צדדי וכל קודקוד בצד אחד של G הוא שכן של כל קודקוד בצד האחר, נסמן ב-$K_{n,m}$ את הגרף הדו-צדדי השלם שצדדיו בגודל m ו-n (יש רק אחד כזה).

♣ ב-$K_{n,m}$ מתקיים $|V| = n + m$ ו-$|E| = n \cdot m$.

הגדרה 6.4. נאמר ש-$M \subseteq E$ הוא זיווג אם לכל $e_1, e_2 \in M$ מתקיים $e_1 \cap e_2 = \emptyset$.

הגדרה 6.5. נאמר שזיווג $M \subseteq E$ הוא זיווג מושלם אם לכל $v \in V$ קיימת $e \in M$ כך ש-$v \in e$.

הגדרה 6.6. לכל $S \subseteq V$ נגדיר את $N(S)$ להיות קבוצת השכנים של איברי S (יש המסמנים אותה ב-$\Gamma(S)$).