מבוא לאנליזה מרוכבת - הגדרות בלבד

פונקציות מרוכבות - 80519

מרצה: אילון לינדנשטראוס

מתרגל: שאול (שאולי) רגימוב

סוכם ע"י שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ד, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

סיכום זה הוא הסיכום המקביל מאינפי' 2 שעבר עריכה כדי שיתאים עבור המרוכבים, לכן יש להניח שנפלו בו טעויות מתמטיות רבות. אנא מכם, אל תסתמכו עליו ללא מחשבה שנייה, ועדכנו אותי בכל טעות שמצאתם. תודה!

* * *

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

הקדמה

סיכומי קורס זה מניחים את כל הכתוב בסיכומים שלי עבור אינפי' 3 בנושאים "מרחבים מטריים" ו-"דיפרנציאביליות", בכל מקום נתייחס ל-$\mathbb{C}$ כמו למרחב הנורמי $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$ - כלומר המישור עם הנורמה האוקלידית.
אזכיר רק ש-$\mathbb{C}$ הוא מרחב נורמי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$, ולכן הוא מקיים את המשפטים הבאים:

- $\mathbb{C}$ הוא מרחב מטרי שלם.
- קבוצה $K \subseteq \mathbb{C}$ היא קומפקטית אם"ם היא סגורה וחסומה.
- תהא K קבוצה קומפקטית, ותהא $f : K \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
  - עיקרון המינימום והמקסימום של ויירשטראס - f מקבלת מקסימום ומינימום.
  - משפט קנטור - f רציפה במידה שווה.
- הלמה של קנטור - תהא $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות סגורות כך ש-$C_{n+1} \subseteq C_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, אם $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(C_n) = 0$ אז קיים $c \in \mathbb{C}$ יחיד כך ש-$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n = \{c\}$.
- תהא $A \subseteq \mathbb{R}^2$, תהא $f : A \to \mathbb{R}^2$, ותהיינה $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ כך ש-$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ לכל $x \in A$.
  אם f גזירה בנקודה פנימית $a \in A$ אז המטריצה המייצגת של Df_a בבסיס הסטנדרטי היא
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

1 טורים

1.1 התחלה

סימון: בהינתן סדרת מספרים מרוכבים $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ נקרא לסימון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (או באופן שקול: $a_1 + a_2 + a_3 + ...$) "הטור האינסופי" של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$", לאיברי הסדרה קוראים במקרה כזה גם "איברי הטור" ולאיבר ה-n-י (a_n) קוראים "האיבר הכללי של הטור".

הגדרה 1.1. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים מרוכבים; נסמן ב-S_N את $\sum_{n=1}^{N} a_n$ (לכל $N \in \mathbb{N}$) ונקרא לו "הסכום החלקי ה-N-י של הטור", הסדרה $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ תקרא "סדרת הסכומים החלקיים של הטור".
נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם הסדרה $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ מתכנסת ובמקרה כזה נאמר שסכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא $\lim_{N\to\infty} S_N$ ונכתוב:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$$

אם הטור אינו מתכנס נאמר שהוא מתבדר.

- ♣ בהינתן סדרה, הטור שלה לא מוכרח להיות קיים שהרי אין זה מוכרח שהגבול הנ"ל קיים.
- ♣ כל הטורים שנדבר עליהם בקורס זה יהיו טורים של מספרים מרוכבים.

הגדרה 1.2. בהינתן טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא לטור $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ ($m \in \mathbb{N}_0$) בשם ה-m זנב של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ או גם ה-m-שארית של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, אם ה-m-זנב של טור מתכנס נסמן את סכומו ב-r_m.

1.2 התכנסות בהחלט

למה 1.3. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה, אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

הגדרה 1.4. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור.

1. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.
2. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אך הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ אינו מתכנס, נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי.

1.3 הכנסת סוגריים ושינוי סדר

הגדרה 1.5. נאמר שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ מתקבל מהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ע"י הכנסת סוגריים אם קיימת תת-סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\sigma_k = \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} a_l$$

וזאת כאשר נסמן $n_0 = 0$.

המחשה:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k = \underbrace{(a_1 + a_2 + ... + a_{n_1})}_{\sigma_1} + \underbrace{(a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + ... + a_{n_2})}_{\sigma_2} + ... + \underbrace{(a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + ... + a_{n_k})}_{\sigma_k} + ...$$

1.4 טורים הנדסיים

הגדרה 1.6. סדרת מספרים מרוכבים $(a_n)_{n=0}^{\infty}$תיקרא סדרה הנדסית אם קיים $q\in\mathbb{C}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}_0$ מתקיים $a_{n+1}=a_n\cdot q$; ובמקרה כזה q ייקרא מנת הסדרה, והטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ ייקרא טור הנדסי.

1.5 פונקציית האקספוננט, הפונקציות הטריגונומטריות וחזקות מרוכבות

בשיעור אילון לא הגדיר את cos ו-sin המרוכבות, וכמו כן את פונקציית האקספוננט הגדיר באמצעות נוסחת אוילר שאותה נראה בקובץ הטענות. למרות זאת מסיבות מובנות לא יכולתי להתאפק ובחרתי להגדיר את שלושתן באמצעות טורי טיילור שלהן שכן שזוהי הדרך הטבעית להגדיר אותן, וכבר כתבתי מספיק על טורים מרוכבים כדי שיהיה ניתן להראות בקלות שהטורים הללו מתכנסים בהחלט בכל המישור המרוכב.

טענה. יהי $z\in\mathbb{C}$, שלושת הטורים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

מתכנסים בהחלט ובפרט מתכנסים.

♣ הטענה נובעת מהשוואה לטור הנדסי מתכנס, לכל $z\in\mathbb{C}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש-$N>|z|$ ואז לכל $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים גם:

$$\left|\pm1\cdot\frac{z^n}{n!}\right|=\frac{|z|^n}{n!}=\frac{|z|^N}{N!}\cdot\frac{|z|^{n-N}}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(N+1)}<\frac{|z|^N}{N!}\cdot\left(\frac{|z|}{N}\right)^{n-N}$$

$\frac{|z|^N}{N!}$ הוא מספר ממשי קבוע ו-$\frac{|z|}{N}<1$, א"כ לכל $N<n\in\mathbb{N}$ הערך המוחלט של האיבר ה-n-י בטורים הנ"ל קטן מהאיבר ה-$n-N$-י בסדרה הנדסית שמנתה קטנה מ-1.

♣ באינפי' 2 ראינו שהטורים הנ"ל הם טורי טיילור של של cos, sin ו-exp (בהתאמה) ושלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

לכן טבעי מאד להגדיר את הפונקציות המרוכבות המקבילות באמצעות הטורים הללו.

סימון: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.[1]

הגדרה 1.7. סינוס, קוסינוס ופונקציית האקספוננט

- תהא $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ הפונקציה המוגדרת ע"י (לכל $z \in \mathbb{C}$):

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- תהא $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ הפונקציה המוגדרת ע"י (לכל $z \in \mathbb{C}$):

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

- תהא $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$[2] הפונקציה המוגדרת ע"י (לכל $z \in \mathbb{Z}$):

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

מסקנה 1.8. $\cos$ היא פונקציה זוגית ו-$\sin$ היא פונקציה אי-זוגית.

טענה. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים:

$$e^{iz} = \exp(iz) = \cos z + i \cdot \sin z$$

♣ ההוכחה זהה לזו של נוסחת אוילר, לא היה בהוכחה שום דבר מיוחד עבור מספרים ממשיים.

מסקנה. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

מסקנה. לכל $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ מתקיים $\sin z \neq 0$ ו-$\cos z \neq 0$, ומכאן נובע כי:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sin z = 0\} = \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\{z \in \mathbb{C} \mid \cos z = 0\} = \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

הגדרה 1.9. טנגנס

תהא $\tan : \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{C}$ הפונקציה המוגדרת ע"י (לכל $z \in \mathbb{C}$):

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i \cdot (e^{iz} + e^{-iz})}$$

---

[1] באופן כללי R^* (או $R^\times$) מסמן את קבוצת האיברים ההפיכים בחוג R.

[2] אנחנו נראה בהמשך ש-$\exp(z) \neq 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$ (**האם אפשר להוכיח זאת כבר כעת?**).

הגדרה 1.10. חזקות מרוכבות

לכל $0 < a \in \mathbb{R}$ ולכל $z \in \mathbb{C}$ נגדיר $a^z := \exp(z \cdot \ln a)$.

♣ כאן $\ln$ היא פונקציית הלוגריתם טבעי על הממשיים, אנחנו נראה בקובץ הטענות ש-$\exp$ אינה חח"ע ולכן נתקשה להגדיר את הלוגריתם הטבעי על המרוכבים.

2 נגזרות

♣ בכל הסיכומים של קורס זה ובקורסים שיתבססו עליו נדבר אך ורק על פונקציות שתחום ההגדרה והטווח שלהן הם תתי-קבוצות של $\mathbb{C}$ (אלא אם נאמר אחרת במפורש) - פונקציות אלה תיקראנה גם פונקציות מרוכבות, כמעט תמיד יהיה מדובר בפונקציות שתחום ההגדרה שלהן יהיה קבוצה פתוחה וקשירה (קבוצה כזו תיקרא גם סתם תחום) ועל הקורא תוטל המשימה להבין מן ההקשר מתי מדובר גם בפונקציות שתחום ההגדרה שלהן אינו בהכרח כזה.

הגדרה 2.1. נגזרת של פונקציה בנקודה

תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה $w \in \mathbb{C}$, נאמר ש-f גזירה ב-w אם קיים הגבול:

$$\lim_{z \to w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

ובמקרה כזה נקרא לאותו הגבול הנגזרת של f ב-w ונסמן אותו ב-$f'(w)$.

♣ כמו בגזירות ב-$\mathbb{R}$, גם כאן אנו מנסים למצוא את קירוב ליניארי טוב ל-f ב-w, אלא שליניאריות ב-$\mathbb{C}$ פירוש סיבוב ומתיחה/כיווץ ולא מתיחה/כיווץ בלבד.

מסקנה 2.2. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה $w \in \mathbb{C}$, f גזירה ב-w אם"ם קיים הגבול:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(w+h) - f(w)}{h}$$

הגדרה 2.3. אנליטיות בנקודה

תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה $w \in \mathbb{C}$, נאמר ש-f אנליטית ב-w אם f גזירה בסביבה של w.

הגדרה 2.4. אנליטיות על קבוצה

- נאמר שפונקציה f אנליטית על קבוצה פתוחה $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ אם f גזירה בכל נקודה ב-Ω.
- נאמר שפונקציה f אנליטית על קבוצה $A \subseteq \mathbb{C}$ (לאו דווקא פתוחה) אם קיימות קבוצה פתוחה $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ כך ש-$A \subseteq \Omega$ ופונקציה $g : \Omega \to \mathbb{C}$ אנליטית על Ω, ובנוסף $f(z) = g(z)$ לכל $z \in A$.
- נאמר שפונקציה היא אנליטית אם היא אנליטית על כל תחום הגדרתה.

מסקנה 2.5. פונקציה היא אנליטית על קבוצה פתוחה אם"ם היא גזירה בכל נקודה באותה קבוצה.

הגדרה 2.6. פונקציה שלמה

נאמר שפונקציה $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ היא פונקציה שלמה אם היא אנליטית על $\mathbb{C}$.

הגדרה 2.7. פונקציה קדומה

נאמר שפונקציה מרוכבת F היא פונקציה קדומה של פונקציה f על קבוצה פתוחה $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ אם לכל $z \in \Omega$ מתקיים $F'(z) = f(z)$.

3 אינטגרלים

3.1 מסילות

הגדרה 3.1. חיבור של מסילות
יהיו $c,d\in\mathbb{R}$ כך ש-$c<d$, ותהיינה $\gamma_1:[a,b]\to\mathbb{C}$ ו-$\gamma_2:[c,d]\to\mathbb{C}$ מסילות כך ש-$\gamma_1(b)=\gamma_2(c)$, החיבור של γ_1 ו-γ_2 הוא המסילה $\gamma_1*\gamma_2:[a,b+(d-c)]\to\mathbb{C}$ המוגדרת ע"י (לכל $t\in[a,b+(d-c)]$):

$$\gamma_1*\gamma_2(t):=\begin{cases}\gamma_1(t) & t\in[a,b]\\ \gamma_2(c+(t-b)) & t\in[b,b+(d-c)]\end{cases}$$

סימון: לכל $z,w\in\mathbb{C}$ נסמן ב-$I(z,w)$ את המסילה $I(z,w):[0,1]\to\mathbb{C}$ המוגדרת ע"י (לכל $t\in[0,1]$):

$$I(z,w)\,t:=z+t\cdot(w-z)$$

חיבור מספר סופי של מסילות מצורה זו ייקרא מסילה פוליגונלית.

- ♣ הרעיון הוא כמובן ש-$I(z,w)$ "הולכת" מ-z ל-w על הקו הישר המחבר אותם בתוך "יחידת זמן" אחת, ובזמן t היא עוברת t מהמרחק.

הגדרה 3.2. המסילה ההפוכה
תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה, המסילה ההפוכה של γ היא המסילה $\tilde{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{C}$ המוגדרת ע"י (לכל $t\in[a,b]$):

$$\tilde{\gamma}(t):=\gamma(b-(t-a))=\gamma(b-t+a)$$

תזכורת: נאמר שקבוצה סופית $P\subseteq[a,b]$ היא חלוקה של קטע סגור $[a,b]$ אם $a,b\in P$.

הגדרה 3.3. אורך של מסילה
תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה, האורך של γ הוא:

$$\ell(\gamma):=L(\gamma):=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})\right| \;\middle|\; \text{היא חלוקה של } [a,b] \text{ כך ש-} x_{i-1}\le x_i \text{ לכל } n\ge i\in\mathbb{N} \;\; \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}\right\}$$

- ♣ ישנן מסילות שעבורן קבוצה זו אינה חסומה מלעיל ולכן אין לה חסם עליון, האורך של מוגדר רק עבור מסילות שאינן כאלה.
- ♣ כמובן שלכל $z,w\in\mathbb{C}$ מתקיים $L(I(z,w))=|w-z|$.
- ♣ הרעיון בהגדרת האורך הוא שאנו מקרבים את תמונת המסילה ע"י קטעים ישרים (קו "שבור") וסוכמים את אורכיהם[3], מא"ש המשולש נובע שהוספת נקודות רק מגדילה את האורך של קירוב כזה ולכן הגבול של התהליך הזה הוא החסם העליון של קבוצת הקירובים.

[3] ניתן להסתכל על זה כאילו אנו מנסים לקרב את γ ע"י המסילות $I(x_0,x_1),I(x_1,x_2),\ldots,I(x_{n-1},x_n)$ שאורכיהן פשוטים.

הגדרה 3.4. נגזרת של מסילה בנקודה

יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ מקטע.

נאמר שמסילה $\gamma:I\to\mathbb{C}$ גזירה בנקודה פנימית $x\in I$ אם קיים הגבול[4]:

$$\lim_{t\to x}\frac{\gamma\left(t\right)-\gamma\left(x\right)}{t-x}$$

ובמקרה כזה נקרא לאותו הגבול הנגזרת של γ ב-x ונסמן אותו ב-$\gamma'\left(x\right)$.

כמו כן נאמר שמסילה $\gamma:I\to\mathbb{C}$ גזירה מימין/משמאל בנקודה $x\in I$ אם קיים הגבול[5]:

$$\lim_{t\to x^{\pm}}\frac{\gamma\left(t\right)-\gamma\left(x\right)}{t-x}$$

ובמקרה כזה נקרא לאותו הגבול הנגזרת הימנית/שמאלית של γ ב-x ונסמן אותו ב-$\gamma'\left(x^{\pm}\right)$.

הגדרה 3.5. נאמר שמסילה גזירה ברציפות על מקטע פתוח בתחום הגדרתה אם היא גזירה בכל נקודה שבו, והנגזרת שלה רציפה באותו המקטע.

הגדרה 3.6. מסילה גזירה ברציפות למקוטעין (קונטור)

תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה, נאמר ש-γ גזירה ברציפות למקוטעין אם קיימת חלוקה $P:=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ של $[a,b]$ כך שלכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ מתקיים $x_i>x_{i-1}$ וגם:

1. γ גזירה ברציפות על (x_{i-1},x_i).
2. $\gamma'\left({x_{i-1}}^{-}\right)=\lim_{t\to {x_{i-1}}^{-}}\gamma'\left(t\right)\neq 0$.
3. $\gamma'\left({x_i}^{+}\right)=\lim_{t\to {x_i}^{+}}\gamma'\left(t\right)\neq 0$.
4. $\gamma'\left(t\right)\neq 0$ לכל $t\in\left(x_{i-1},x_i\right)$.

מסילה שתחום ההגדרה שלה אינו קטע סגור תיקרא גזירה ברציפות למקוטעין אם הצמצום שלה לכל תת-קטע סגור של תחום ההגדרה הוא כזה.

---

[4] כלומר לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $t\in I$ המקיים $0<|t-x|<\delta$ מתקיים:

$$\left|\frac{\gamma\left(t\right)-\gamma\left(x\right)}{t-x}\right|<\varepsilon$$

[5] כלומר לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $t\in I$ המקיים $0<t-x<\delta$ (עבור גזירות מימין) או $0<x-t<\delta$ (עבור גזירות משמאל) מתקיים:

$$\left|\frac{\gamma\left(t\right)-\gamma\left(x\right)}{t-x}\right|<\varepsilon$$

3.2 אינטגרל מסילתי/קווי

הגדרה 3.7. אינטגרל של מסילה

תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה, מכיוון ש-γ רציפה קיימים האינטגרלים הממשיים[6] (לכל $c,d\in[a,b]$):

$$\int\limits_c^d \mathrm{Re}\gamma\left(x\right)dx,\quad \int\limits_c^d \mathrm{Im}\gamma\left(x\right)dx$$

א"כ לכל $c,d\in[a,b]$ נסמן את האינטגרל של γ על $[c,d]$ ע"י:

$$\int\limits_c^d \gamma\left(t\right)dt:=\int\limits_c^d \mathrm{Re}\left(\gamma\left(x\right)\right)dx+i\cdot\int\limits_c^d \mathrm{Im}\left(\gamma\left(x\right)\right)dx$$

♣ זה בדיוק מה שהיינו מקבלים לו היינו מגדירים את אינטגרל רימן מההתחלה: שתי הקואורדינטות נסכמות בנפרד ולכן כל סכום רימן "מתפרק" לשני סכומים, וממילא גם האינטגרל הסופי מורכב משתי הקואורדינטות בנפרד.

הגדרה 3.8. אינטגרל מסילתי/קווי של פונקציה מרוכבת

תהא $f:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה ותהא $\gamma:[a,b]\to\Omega$ מסילה גזירה ברציפות למקוטעין. האינטגרל של f לאורך γ הוא:

$$\int\limits_\gamma f\left(z\right)dz:=\int\limits_a^b f\left(\gamma\left(t\right)\right)\cdot\gamma'\left(t\right)dt$$

[6] ממש אינטגרלי רימן כפי שלמדנו באינפי' 2.

3.3 אינטגרלים לא אמיתיים

הגדרה 3.9. אינטגרביליות על קרן

תהא γ מסילה ויהי $a\in\mathbb{R}$.

- נאמר ש-γ אינטגרבילית על הקרן $[a,\infty)$ אם הגבול $\lim_{b\to\infty}\int_a^b \gamma(t)\,dt$ קיים, ובמקרה כזה נסמן:

$$\int_a^\infty \gamma(t)\,dt := \lim_{b\to\infty}\int_a^b \gamma(t)\,dt$$

- נאמר ש-γ אינטגרבילית על הקרן $(-\infty,b]$ אם הגבול $\lim_{a\to-\infty}\int_b^b \gamma(t)\,dt$ קיים, ובמקרה כזה נסמן:

$$\int_{-\infty}^a \gamma(t)\,dt := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b \gamma(t)\,dt$$

למה 3.10. תהא $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ מסילה אם קיים $a\in\mathbb{R}$ כך שקיימים האינטגרלים:

$$\int_a^\infty \gamma(t)\,dt,\quad \int_{-\infty}^a \gamma(t)\,dt$$

אז לכל $c\in\mathbb{R}$ קיימים האינטגרלים:

$$\int_c^\infty \gamma(t)\,dt,\quad \int_{-\infty}^c \gamma(t)\,dt$$

ומתקיים:

$$\int_{-\infty}^a \gamma(t)\,dt+\int_a^\infty \gamma(t)\,dt=\int_{-\infty}^c \gamma(t)\,dt+\int_c^\infty \gamma(t)\,dt$$

הגדרה 3.11. אינטגרביליות על כל הישר

נאמר שמסילה γ אינטגרבילית על כל הישר אם קיים $a\in\mathbb{R}$ כך שקיימים האינטגרלים:

$$\int_{-\infty}^a \gamma(t)\,dt,\quad \int_a^\infty \gamma(t)\,dt$$

ובמקרה כזה נסמן:

$$\int_{-\infty}^\infty \gamma(t)\,dt := \int_{-\infty}^a \gamma(t)\,dt+\int_a^\infty \gamma(t)\,dt$$

4 סדרות וטורים של פונקציות

הגדרה 4.1. נקודת התכנסות, תחום התכנסות ופונקציה גבולית

תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות ונסמן ב-D את החיתוך של תחומי ההגדרה שלהן, נאמר שנקודה $z_0 \in D$ היא נקודת התכנסות של $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ אם הגבול $\lim_{n\to\infty} f_n(z_0)$ קיים.

קבוצת נקודות ההתכנסות של $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ תקרא תחום ההתכנסות של $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ונאמר גם ש-$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית בקבוצה זו ובכל תת-קבוצה שלה.

יהי D' תחום ההתכנסות של $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ הפונקציה $f: D' \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $x \in D'$):

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

תיקרא הפונקציה הגבולית של f_n.

הגדרה 4.2. התכנסות טור פונקציות

תהא $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות ממשיות ונסמן ב-D את החיתוך של תחומי ההגדרה שלהן.

תהא $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מ-D ל-$\mathbb{C}$ המוגדרת ע"י (לכל $N \in \mathbb{N}$ ולכל $z \in D$):

$$S_N(z) := \sum_{n=1}^{N} u_n(z)$$

נאמר שנקודה $z_0 \in D$ היא נקודת התכנסות של טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ אם הגבול $\lim_{N\to\infty} S_N(z_0)$ קיים (כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z_0)$ מתכנס).

קבוצת נקודות ההתכנסות של טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ תקרא תחום ההתכנסות שלו ונאמר גם שהוא מתכנס בקבוצה זו ובכל תת-קבוצה שלה.

יהי D' תחום ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ הפונקציה $S: D' \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $z \in D'$):

$$S(z) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

תיקרא הפונקציה הגבולית של טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

- ♣ נשים לב שההגדרה עבור טור של פונקציות כלולה בהגדרה של סדרת פונקציות שהרי טור הוא בסך הכל גבול של סדרה (סדרת הסכומים החלקיים).

- ♣ בהינתן סדרת פונקציות $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש-D הוא חיתוך תחומי ההגדרה של הפונקציות, נוכל להגדיר סדרת פונקציות $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $u_n = f_n - f_{n-1}$ לכל $1 < n \in \mathbb{N}$ ו-$u_1 = f_1$ ואז נקבל שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = f_N$, ומכאן שגם (מדובר בשוויון פורמלי בלבד): $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n = \lim_{N\to\infty} f_N = f$. כלומר הסדרה $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתלכדת עם סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ובפרט הם מתכנסים ומתבדרים ביחד, זוהי התאמה חח"ע ועל בין סדרות של פונקציות לטורי פונקציות השומרת על תכונת ההתכנסות.

הגדרה 4.3. התכנסות במידה שווה של סדרות וטורי פונקציות

נאמר שסדרת פונקציות $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה גבולית f ב-D[7] אם לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $z \in D$ ולכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

כמו כן נאמר שטור פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס במידה שווה לפונקציה גבולית S ב-D אם לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $z \in D$ ולכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$.

[7] D מוכל בחיתוך תחומי ההגדרה של הפונקציות וכן לגבי טורים ובכלל בסיכום זה.

הגדרה 4.4. התכנסות בהחלט של טור פונקציות בנקודה

יהא $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(z\right)$ טור פונקציות המוגדרות בתחום D, נאמר ש-$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(z\right)$ מתכנס בהחלט בנקודה $z_0\in D$ אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(z_0\right)$ מתכנס בהחלט, כמו כן נאמר ש-$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(z\right)$ מתכנס בהחלט ב-D אם לכל $z\in D$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(z\right)$ מתכנס בהחלט. אם $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(z\right)$ מתכנס בנקודה/בקבוצת נקודות אך אינו מתכנס בהן בהחלט נאמר שהוא מתכנס בתנאי בנקודה/בקבוצת הנקודות (בהתאמה).

הגדרה 4.5. התכנסות בהחלט במידה שווה של טור פונקציות

יהי $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(z\right)$ טור פונקציות המוגדרות בתחום D, נאמר ש-$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(z\right)$ מתכנס בהחלט במידה שווה ב-D אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\left(z_0\right)\right|$ מתכנס במ"ש ב-D.

♣ ההירכיה היא כזו: התכנסות בהחלט במ"ש גוררת התכנסות בהחלט והתכנסות במ"ש בנפרד, והתכנסות במ"ש גוררת התכנסות נקודתית; הגרירות ההפוכות אינן נכונות בהכרח.

הגדרה 4.6. טור חזקות

טור חזקות סביב נקודה $z_0\in\mathbb{C}$ הוא טור פונקציות מהצורה:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\left(z-z_0\right)^n$$

עבור סדרה מרוכבת $\left(a_n\right)_{n=0}^{\infty}$ כלשהי.

♣ נשים לב שכל סדרת פולינומי טיילור היא טור חזקות, עוד נשים לב שכל טור חזקות סביב נקודה כשלהי מתכנס באותה נקודה לפונקציית האפס.

משפט. יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\left(z-z_0\right)^n$ טור חזקות סביב נקודה $z_0\in\mathbb{C}$[8] מתקיימת אחת משלוש האפשרויות הבאות:

1. הטור מתכנס נקודתית על כל המישור המרוכב.
2. קיים $0<R\in\mathbb{R}$ יחיד כך שהטור מתכנס נקודתית ב-$B_R\left(z_0\right)$ ואולי גם ב-$\partial B_R\left(z_0\right)$ אך לא בשום נקודה אחרת[9].
3. הטור מתכנס נקודתית אך ורק ב-z_0.

הגדרה 4.7. רדיוס התכנסות ודיסק התכנסות

במונחי המשפט שלעיל וע"פ החלוקה למקרים שבו:

1. אם מתקיימת האפשרות הראשונה נאמר שרדיוס ההתכנסות של הטור הוא ∞ ודיסק ההתכנסות הוא $\mathbb{C}$.
2. אם מתקיימת האפשרות השנייה נאמר שרדיוס ההתכנסות הוא R ודיסק ההתכנסות הוא $B_R\left(z_0\right)$.
3. אם מתקיימת האפשרות השלישית נאמר שרדיוס ההתכנסות הוא 0 ודיסק ההתכנסות הוא $B_0\left(z_0\right)=\emptyset$.

♣ דיסק ההתכנסות אינו שווה בהכרח לתחום ההתכנסות של הטור, אמנם ניתן לראות זאת בבירור במקרה השלישי אולם הדבר נכון גם עבור האפשרות השנייה (ראו את ניסוח המשפט עבורה).

הגדרה 4.8. נאמר שלפונקציה f יש פיתוח לטור חזקות סביב נקודה $z_0\in\mathbb{R}$ אם קיים טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\left(z-z_0\right)^n$ כך שלכל $z\in B_R\left(z_0\right)$ מתקיים השוויון (עבור $0<R\in\mathbb{R}$[10]):

$$f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\left(z-z_0\right)^n$$

[8] $\left(a_n\right)_{n=0}^{\infty}$ היא סדרה מרוכבת כלשהי.

[9] כלומר הטור אינו מתכנס בשום נקודה שאינה ב-$\hat{B_R}\left(z_0\right)$.

[10] בקובץ הטענות אנחנו נראה שאם קיים R חיובי כזה אז הגדול ביותר מביניהם הוא רדיוס ההתכנסות, כולל המקרה שבו אין גדול ביותר ואז רדיוס ההתכנסות הוא ∞.