אינטגרלים - הוכחות נבחרות

חשבון אינפיניטסימלי (3) - 80415

מרצה: תמר (תמי) ציגלר

מתרגלים: אריה דויטש, קרן דניאל ואור קופרמן

סוכם ע"י שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ד, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

תודה לגלעד שרם על סיכומו המצוין, נעזרתי בו רבות בכתיבת הסיכום שלפניכם.

* * *

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 אינטגרביליות על תיבות

תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ תיבה סגורה, ותהיינה $f,g:A\to\mathbb{R}$ פונקציות חסומות.

משפט 1.1. ליניאריות האינטגרל
נניח ש-f ו-g אינטגרביליות על A.

- לכל $c\in\mathbb{R}$ מתקיים $c\cdot\int_{A}f\left(x\right)dx=\int_{A}\left(c\cdot f\right)\left(x\right)dx$.
- מתקיים $\int_{A}\left(f\pm g\right)\left(x\right)dx=\int_{A}f\left(x\right)dx\pm\int_{A}g\left(x\right)dx$.

משפט 1.2. מונוטוניות האינטגרל
נניח ש-f ו-g אינטגרביליות על A, אם $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$ לכל $x\in A$ אז:

$$\int\limits_{A}f\left(x\right)dx\leq\int\limits_{A}g\left(x\right)dx$$

מסקנה 1.3. נניח ש-f אינטגרבילית על A, מתקיים:

$$\left|\int\limits_{A}f\left(x\right)dx\right|\leq V\left(A\right)\cdot\sup_{x\in A}\left|f\left(x\right)\right|$$

טענה 1.4. תהיינה P ו-Q חלוקות של A כך ש-$P\subseteq Q$; מתקיים:

$$\underline{s}\left(f,P\right)\leq\underline{s}\left(f,Q\right)\leq\overline{S}\left(f,Q\right)\leq\overline{S}\left(f,Q\right)$$

משפט 1.5. f אינטגרבילית על A אם"ם לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת חלוקה P של A כך ש-$\overline{S}\left(f,P\right)-\underline{s}\left(f,P\right)<\varepsilon$.

משפט 1.6. תהא B תיבה כך ש-$A\cup B$ היא תיבה ו-$A^{\circ}\cap B^{\circ}=\emptyset$, ותהא $h:A\cup B\to\mathbb{R}$ פונקציה.
h אינטגרבילית על $A\cup B$ אם"ם היא אינטגרבילית על A ועל B בנפרד, ובמקרה כזה מתקיים:

$$\int\limits_{A\cup B}h\left(x\right)dx=\int\limits_{A}h\left(x\right)dx+\int\limits_{B}h\left(x\right)dx$$

טענה 1.7. תהא $B \subseteq A$ תיבה סגורה, קיימות תיבות סגורות $C_1, C_2, \ldots, C_m \subseteq A$ המקיימות:

1. $C_i^\circ \cap C_j^\circ = \emptyset$ ו-$B^\circ \cap C_i^\circ$ לכל $m \geq i, j \in \mathbb{N}$ כך ש-$i \neq j$.
2. $B \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i\right) = A$.

מסקנה 1.8. f אינטגרבילית על A אם"ם f אינטגרבילית על כל תיבה $B \subseteq A$.

טענה 1.9. החיתוך של שתי תיבות סגורות הוא תיבה סגורה.

מסקנה 1.10. תהא B תיבה ותהא $h : A \cup B \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה, h אינטגרבילית על $A \cup B$ אם"ם היא אינטגרבילית על A ועל B בנפרד, ובמקרה כזה מתקיים:

$$\int\limits_{A \cup B} h(x)\, dx = \int\limits_{A} h(x)\, dx + \int\limits_{B} h(x)\, dx - \int\limits_{A \cap B} h(x)\, dx$$

משפט 1.11. אם f רציפה אז היא אינטגרבילית על A.

טענה 1.12. תהא $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, אם f אינטגרבילית על A אז גם $h \circ f$ אינטגרבילית על A.

מסקנה 1.13. אי-שוויון המשולש האינטגרלי

אם f אינטגרבילית על A אז מתקיים:

$$\left| \int\limits_{A} f(x)\, dx \right| \leq \int\limits_{A} |f(x)|\, dx$$

2 מידה אפס ואינטגרביליות (משפט לבג)

2.1 משפט לבג

טענה 2.1. תת-קבוצה של קבוצה ממידה אפס גם היא ממידה אפס.

טענה 2.2. איחוד סופי או בן-מנייה של קבוצות ממידה אפס הוא קבוצה ממידה אפס.

מסקנה 2.3. כל קבוצה בת-מנייה היא קבוצה ממידה אפס.

משפט 2.4. משפט לבג[1]
תהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ תיבה סגורה ותהא $f:A\to\mathbb{R}^k$ פונקציה, f אינטגרבילית על A אם"ם קבוצת נקודות האי-רציפות של f היא ממידה אפס.

מסקנה 2.5. תהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ תיבה סגורה, תהיינה $f_1,f_2,\ldots,f_m:A\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות על A, ותהא $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
תהא $h:A\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $h\left(x\right):=g\left(f_1\left(x\right),f_2\left(x\right),\ldots,f_m\left(x\right)\right)$ לכל $x\in A$, h אינטגרבילית על A.

♣ בפרט נובע מכאן שמכפלת פונקציות אינטגרביליות היא אינטגרבילית.

למה 2.6. תהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ תיבה סגורה ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית על A כך ש-$f\left(x\right)\geq 0$ לכל $x\in A$.
מתקיים $\int_A f\left(x\right)dx=0$ אם"ם קיימת קבוצה $E\subseteq A$ ממידה אפס כך ש-$f\left(x\right)=0$ לכל $x\in A\setminus E$.

מסקנה 2.7. תהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ תיבה סגורה ותהינה $f,g:A\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות על A, מתקיים $\int_A f\left(x\right)dx=\int_A g\left(x\right)dx$ אם"ם קיימת קבוצה $E\subseteq A$ ממידה אפס כך ש-$f\left(x\right)=g\left(x\right)$ לכל $x\in A\setminus E$.

2.2 טענות נוספות על קבוצות ממידה אפס

טענה 2.8. תהא $h:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ פונקציה רציפה לפי ליפשיץ, לכל קבוצה $E\subseteq\mathbb{R}^k$ ממידה אפס גם $h\left(E\right)$ ממידה אפס.

מסקנה 2.9. בפרט לכל העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ ולכל קבוצה $E\subseteq\mathbb{R}^k$ ממידה אפס גם $T\left(E\right)$ ממידה אפס.

מסקנה 2.10. כל תת-מרחב ממש של $\mathbb{R}^k$ הוא ממידה אפס.

טענה 2.11. תהא $K\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה קומפקטית, ותהא $f:K\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה; הגרף של f (שהוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}^{k+1}$) הוא קבוצה ממידה אפס.

מסקנה 2.12. תהא $S\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה הניתנת להצגה כאיחוד סופי או בן-מנייה של קבוצות קומפקטיות, ותהא $f:S\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה; הגרף של f (שהוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}^{k+1}$) הוא קבוצה ממידה אפס.

♣ בפרט פונקציה הגרף של פונקציה רציפה $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$.

[1] ערך בוויקיפדיה: אנרי לבג.

3 אינטגרביליות על קבוצות בעלות נפח

3.1 התחלה

משפט 3.1. תכונות בסיסיות של האינטגרל

תהא $S\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה בעלת נפח, ותהיינה $f,g:S\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות על S.

1. ליניאריות האינטגרל -
   - לכל $c\in\mathbb{R}$ מתקיים $c\cdot\int_{S}f\left(x\right)dx=\int_{S}\left(c\cdot f\right)\left(x\right)dx$.
   - מתקיים $\int_{S}\left(f\pm g\right)\left(x\right)dx=\int_{S}f\left(x\right)dx\pm\int_{S}g\left(x\right)dx$.
2. מונוטוניות האינטגרל -
   - אם $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$ לכל $x\in S$ אז:

$$\int\limits_{S}f\left(x\right)dx\leq\int\limits_{S}g\left(x\right)dx$$

   - אם $f\left(x\right)\geq0$ לכל $x\in S$ אז לכל קבוצה בעלת נפח $T\subseteq S$ מתקיים:

$$\int\limits_{T}f\left(x\right)dx\leq\int\limits_{S}f\left(x\right)dx$$

3. אי-שוויון המשולש האינטגרלי -

$$\left|\int\limits_{S}f\left(x\right)dx\right|\leq\int\limits_{S}\left|f\left(x\right)\right|dx$$

טענה 3.2. תהא $S\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה בעלת נפח ותהא $f:S\to\mathbb{R}$ פונקציה, אם f אינטגרבילית על S אז f חסומה ומתקיים:

$$\left|\int\limits_{S}f\left(x\right)dx\right|\leq V\left(S\right)\cdot\sup_{x\in S}\left|f\left(x\right)\right|$$

בפרט, אם $V\left(S\right)=0$ אז $\int_{S}f\left(x\right)dx=0$.

טענה 3.3. כל קבוצה בעלת נפח היא קבוצה חסומה.

טענה 3.4. לכל שתי קבוצות בעלות נפח $S,T\subseteq\mathbb{R}^{k}$ כך ש-$S\subseteq T$ מתקיים $V\left(S\right)\leq V\left(T\right)$.

3.2 מסקנות ממשפט לבג

מסקנה 3.5. קבוצה $S\subseteq\mathbb{R}^{k}$ היא בעלת נפח אם"ם השפה של S (∂S) היא קבוצה ממידה אפס.

מסקנה 3.6. תהא $S\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה בעלת נפח ותהא $f:S\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה, f אינטגרבילית על S אם"ם קבוצת נקודות האי-רציפות של f היא ממידה אפס.

מסקנה 3.7. תהיינה $S,T\subseteq\mathbb{R}^{k}$ שתי קבוצות בעלות נפח.

- $S\cup T$ ו-$S\cap T$ בעלות נפח.
- תהא $f:S\cup T\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה, f אינטגרבילית על $S\cup T$ אם"ם היא אינטגרבילית על S ועל T בנפרד, ובמקרה כזה היא אינטגרבילית גם על $S\cap T$ ומתקיים:

$$\int\limits_{S\cup T}f\left(x\right)dx=\int\limits_{S}f\left(x\right)dx+\int\limits_{T}f\left(x\right)dx-\int\limits_{S\cap T}f\left(x\right)dx$$

- מתקיים:

$$V\left(S\cup T\right)=V\left(S\right)+V\left(T\right)-V\left(S\cap T\right)$$

3.3 אינטגרביליות על פנים וסגור

טענה 3.8. תהיינה $B_{1},B_{2},\ldots,B_{n}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ תיבות סגורות, קיימות תיבות סגורות $C_{1},C_{2},\ldots,C_{m}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ המקיימות:

1. $C_{i}^{\circ}\cap C_{j}^{\circ}=\emptyset$ לכל $m\geq i,j\in\mathbb{N}$ כך ש-$i\neq j$.
2. $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_{i}=\bigcup\limits_{i=1}^{m}C_{i}$.

טענה 3.9. קיימות תיבות סגורות $B_{1},B_{2},\ldots,B_{n}$ המקיימות:

1. $B_{i}^{\circ}\cap B_{j}^{\circ}=\emptyset$ לכל $n\geq i,j\in\mathbb{N}$ כך ש-$i\neq j$.
2. $\text{ar}\left(B_{i}\right)\leq2$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$.
3. $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_{n}$.

טענה 3.10. יהי $1\leq M\in\mathbb{R}$, לכל תיבה סגורה $B\subseteq\mathbb{R}^{k}$ כך ש-$\text{ar}\left(B\right)\leq M$ קיימת קובייה סגורה $C\subseteq\mathbb{R}^{k}$ המקיימת:

$$B\subseteq C\qquad\qquad V\left(C\right)\leq M^{k-1}\cdot V\left(B\right)$$

מסקנה 3.11. יהי $1\leq M\in\mathbb{R}$, לכל תיבה סגורה $B\subseteq\mathbb{R}^{k}$ כך ש-$\text{ar}\left(B\right)\leq M$ ולכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת קובייה $C\subseteq\mathbb{R}^{k}$ המקיימת:

$$B\subseteq C^{\circ}\qquad\qquad V\left(C\right)\leq M^{k-1}\cdot V\left(B\right)+\varepsilon$$

מסקנה 3.12. תהא $E\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה ממידה אפס. לכל $0<\varepsilon,\delta\in\mathbb{R}$ קיימת סדרה $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ של קוביות סגורות כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $V(C_n)<\delta$, ובנוסף:

$$\sum_{n=1}^{\infty}V(C_n)<\varepsilon \qquad\qquad E\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}C_n^{\circ}$$

♣ כמובן שקיום כיסוי של קוביות פתוחות גורר קיום של כיסוי ע"י קוביות סגורות.

טענה 3.13. תהא $K\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה קומפקטית ובעלת נפח, ותהא $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת תיבות סגורות כך שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V(B_n)$ מתכנס ו-$K\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n^{\circ}$.
קיימת סדרה אינדקסים סופית ועולה ממש $(n_j)_{j=1}^{m}$ כך שמתקיים:

$$V(K)\leq\sum_{j=1}^{m}V\left(B_{n_j}\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}V(B_n) \qquad\qquad K\subseteq\bigcup_{j=1}^{m}B_{n_j}^{\circ}$$

מסקנה 3.14. תהא $K\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה קומפקטית, אם K ממידה אפס אז K בעלת נפח ומתקיים $V(K)=0$.

מסקנה 3.15. תהא $S\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה בעלת נפח, אם S ממידה אפס אז $V(S)=0$.

♣ מכאן שהאינטגרל של כל פונקציה חסומה, על קבוצה בעלת נפח ממידה אפס, הוא 0.

מסקנה 3.16. תהא $S\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה בעלת נפח, מתקיים $V(S)>0$ אם"ם $S^{\circ}\neq\emptyset$.

מסקנה 3.17. תהא $S\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה בעלת נפח ותהא $f:\overline{S}\to\mathbb{R}$ פונקציה, התנאים הבאים שקולים:

- f אינטגרבילית על S.
- f אינטגרבילית על $\overline{S}$.
- f אינטגרבילית על S°.

ואם אחד מהם מתקיים אז $\int_S f(x)\,dx=\int_{\overline{S}}f(x)\,dx=\int_{S^{\circ}}f(x)\,dx$.

מסקנה 3.18. תהא $S\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה, אם S בעלת נפח אז גם $\overline{S}$ ו-S° בעלות נפח ומתקיים:

$$V(S)=V\left(\overline{S}\right)=V(S^{\circ})$$

4 אינטגרלים לא אמיתיים

משפט 4.1. לכל קבוצה פתוחה יש סדרת מיצוי.

♣ מדרך ההוכחה של המשפט ניתן לראות שלכל קבוצה פתוחה יש סדרת מיצוי שבה כל אחד מהאיברים הוא איחוד סופי של תיבות סגורות, וניתן להניח גם שהתיבות הללו בעלות פנימים זרים.

משפט 4.2. תהא $U\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה, ותהא $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה[2]; f אינטגרבילית על U אם"ם לכל סדרת מיצוי $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ של U קיים הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{K_n} f(x)\,dx$$

ובמקרה כזה מתקיים:

$$\int\limits_{U} f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{K_n} f(x)\,dx$$

משפט 4.3. תהא $U\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה, ותהא $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית על U.
לכל קבוצה סגורה ובעלות נפח $C\subseteq U$, קיימות סדרות $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(B_n)_{n=1}^{\infty}$ של קבוצות קומפקטיות כך ש-A_n ו-B_n כך ש-$A_n\subseteq C\subseteq B_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$, ובנוסף:

$$\int\limits_{C} f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{A_n} f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{B_n} f(x)\,dx$$

♣ גם כאן ניתן להניח שכל איבר בשתי הסדרות הנ"ל הוא איחוד סופי של תיבות סגורות בעלות פנימים זרים.

משפט 4.4. תכונות בסיסיות של האינטגרל
תהא $U\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה, ותהיינה $f,g:S\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות על U.

1. ליניאריות האינטגרל -
   - לכל $c\in\mathbb{R}$ מתקיים $c\cdot\int_U f(x)\,dx=\int_U (c\cdot f)(x)\,dx$.
   - מתקיים $\int_U (f\pm g)(x)\,dx=\int_U f(x)\,dx\pm\int_U g(x)\,dx$.
2. מונוטוניות האינטגרל -
   - אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in U$ אז:

$$\int\limits_{U} f(x)\,dx\le\int\limits_{U} g(x)\,dx$$

   - כמו כן אם $f(x)\ge 0$ לכל $x\in U$ ו-f אינטגרבילית על קבוצה פתוחה / בעלת נפח $S\subseteq U$ אז:

$$\int\limits_{S} f(x)\,dx=\int\limits_{U} f(x)\,dx$$

3. אי-שוויון המשולש האינטגרלי -

$$\left|\int\limits_{U} f(x)\,dx\right|\le\int\limits_{U}|f(x)|\,dx$$

[2] למעשה מספיק ש-f אינטגרבילית על כל תת-קבוצה קומפקטית של U.

5 משפט פוביני והחלפת משתנה

5.1 משפט פוביני

משפט 5.1. משפט פוביני[3]
תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ ו-$B\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תיבות, ותהא $f:A\times B\to\mathbb{R}$ פונקציה.
אם f אינטגרבילית על $A\times B$ ($A\times B\subseteq\mathbb{R}^{k+m}$) אז האינטגרלים:

$$\int\limits_{A}\left(\underline{\int}_{B}f\left(x,y\right)dy\right)dx \qquad \int\limits_{A}\left(\overline{\int}_{B}f\left(x,y\right)dy\right)dx$$

$$\int\limits_{B}\left(\underline{\int}_{A}f\left(x,y\right)dx\right)dy \qquad \int\limits_{B}\left(\overline{\int}_{A}f\left(x,y\right)dx\right)dy$$

קיימים ושווים ל-$\int\limits_{A\times B}f\left(x,y\right)dxdy$.

מסקנה 5.2. תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ ו-$B\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תיבות, ותהא $f:A\times B\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית (ב-$\mathbb{R}^{k+m}$).
אם לכל $a\in A$ ולכל $b\in B$ קיימים האינטגרלים:

$$\int\limits_{B}f\left(a,y\right)dy \qquad \int\limits_{A}f\left(x,b\right)dx$$

אז מתקיים:

$$\int\limits_{A\times B}f\left(t\right)dt=\int\limits_{B}\left(\int\limits_{A}f\left(x,y\right)dx\right)dy=\int\limits_{A}\left(\int\limits_{B}f\left(x,y\right)dy\right)dx$$

♣ בפרט עבור כל פונקציה רציפה על תיבה ניתן "לפרק" את האינטגרל לאינטגרלים מממד 1 ולחשב אותם בכל סדר שנרצה.

לכתוב על הקשר למשפט שוורץ.

מסקנה 5.3. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a\le b$ ותהיינה $g_{1},g_{2}:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות כך ש-$g_{1}\left(x\right)\le g_{2}\left(x\right)$ לכל $x\in\left[a,b\right]$.
נסמן:

$$S:=\left\{ \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{2}\mid x\in\left[a,b\right],\ \ y\in\left[g_{1}\left(x\right),g_{2}\left(x\right)\right]\right\}$$

S היא קבוצה בעלת נפח ולכל פונקציה רציפה $f:S\to\mathbb{R}$[4] מתקיים:

$$\int\limits_{S}f\left(t\right)dt=\int\limits_{a}^{b}\left(\int\limits_{g_{1}\left(x\right)}^{g_{2}\left(x\right)}f\left(x,y\right)dy\right)dx$$

♣ כמובן שניתן להמשיך ולהגדיר פונקציות רציפות $h_{1},h_{2}:S\to\mathbb{R}$ כך ש-$h_{1}\left(x,y\right)\le h_{2}\left(x,y\right)$ לכל $\left(x,y\right)\in A$, לסמן:

$$T:=\left\{ \ \left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^{3}\ \middle|\ x\in\left[a,b\right],\ \ y\in\left[g_{1}\left(x\right),g_{2}\left(x\right)\right],\ \ z\in\left[h_{1}\left(x,y\right),h_{2}\left(x,y\right)\right]\ \right\}$$

---

[3] ערך בוויקיפדיה: גווידו פוביני.

[4] ניתן להחליף את התנאי ש-f רציפה בכך שהאינטגרל $\int_{g_{1}\left(x\right)}^{g_{2}\left(x\right)}f\left(x,y\right)dy$ מוגדר לכל $x\in\left[a,b\right]$.

ואז לכל פונקציה רציפה $f:T\to\mathbb{R}$ יתקיים:

$$\int\limits_{T} f\left(t\right)dt=\int\limits_{a}^{b}\left(\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)}\left(\int\limits_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)}f\left(x,y,z\right)dz\right)dy\right)dx$$

וכן הלאה...

5.2 החלפת משתנה

♣ באינפי' 2 ראינו את המשפט הבא:

משפט. הצבה

תהא $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה על קטע סגור I ותהא $\varphi:[a,b]\to I$ פונקציה גזירה כך ש-φ' אינטגרבילית רימן על $[a,b]$, מתקיים:

$$\int\limits_{a}^{b}f\left(\varphi\left(x\right)\right)\cdot\varphi'\left(x\right)dx=\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f\left(t\right)dt$$

והסקנו ממנו משפט נוסף:

משפט. הצבה הפוכה

תהיינה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ותהא $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ פונקציה הפיכה וגזירה כך ש-φ' אינטגרבילית רימן על $[\alpha,\beta]$, מהרציפות וההפיכות של φ נובע שהיא מונוטונית ממש.

1. אם φ עולה ממש אז:

$$\int\limits_{a}^{b}f\left(t\right)dt=\int\limits_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}f\left(\varphi\left(x\right)\right)\cdot\varphi'\left(x\right)dx$$

2. אם φ יורדת ממש אז:

$$\int\limits_{a}^{b}f\left(t\right)dt=\int\limits_{\varphi^{-1}(b)}^{\varphi^{-1}(a)}f\left(\varphi\left(x\right)\right)\cdot\varphi'\left(x\right)dx$$

נשים לב לכך שבכל מקרה זה אומר שמתקיים:

$$\int\limits_{a}^{b}f\left(t\right)dt=\int\limits_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}f\left(\varphi\left(x\right)\right)\cdot\left|\varphi'\left(x\right)\right|dx$$

כעת עולה השאלה האם משפטים דומים מתקיימים גם בממדים גבוהים יותר, אמנם ההוכחה המקורית של משפט ההצבה הסתמכה על קיום פונקציה קדומה ל-f אך האינטואיציה תקפה גם כאן.

תזכורת: ראינו שעבור $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ הומיאומורפיזם וקבוצה $S\subseteq\mathbb{X}$ מתקיים:

$$f\left(S\right)^{\circ}=f\left(S^{\circ}\right)$$
$$\partial f\left(S\right)=f\left(\partial S\right)$$
$$\overline{f\left(S\right)}=f\left(\overline{S}\right)$$

וכמו עבור כל פונקציה רציפה גם $f\left(S\right)$ קומפקטית.

בכיתה ראינו את הטענה עבור קבוצות קומפקטיות אך היא נכונה באופן כללי.

טענה 5.4. תהיינה $U,V\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצות פתוחות, ותהא $g:U\to V$ פונקציה גזירה ברציפות, חח"ע ועל, לכל קבוצה $E\subseteq U$ ממידה אפס גם $g\left(E\right)$ ממידה אפס.

טענה 5.5. תהא $T:\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}^{k}$ העתקה ליניארית, ותהא $S\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה בעלת נפח; מתקיים:

$$V\left(T\left(S\right)\right)=\int\limits_{T\left(S\right)}1\ dx=\int\limits_{S}\left|\det T\right|dx=V\left(S\right)\cdot\left|\det T\right|$$

♣ טענה זו מראה שהגדרת "פונקציית **נפח**" שראינו בליניארית 1 אכן מתיישבת עם הגדרת **נפח** בקורס זה.

סימון: לכל $x\in\mathbb{R}^{k}$ ולכל $0<r\in\mathbb{R}$ נסמן $C_{r}\left(x\right):=\left[x_{1}-r,x_{1}+r\right]\times\left[x_{2}-r,x_{2}+r\right]\times\ldots\times\left[x_{k}-r,x_{k}+r\right]$, זוהי הקובייה הסגורה שמרכזה ב-x ואורך כל מקצוע שלה הוא $2r$.

♣ נזכור שמתקיים $C_{r}\left(x\right)=\left\{ y\in\mathbb{R}^{k}:\left\Vert y-x\right\Vert _{\infty}\le r\right\}$, כלומר קובייה סגורה בנורמה האוקלידית היא כדור סגור בנורמת ℓ_{∞}.

תזכורת: לפני שהוכחנו את משפט הפונקציה ההפוכה ראינו את שתי הלמות שלהלן, אמנם אז חשבנו על הנורמה האוקלידית אך בהוכחה לא השתמשנו בהנחה זו ולכן היא תקפה לכל נורמה ובפרט עבור נורמת ℓ_{∞}.

למה. תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה פתוחה ותהא $g:A\to\mathbb{R}^{k}$ פונקציה גזירה, אם קיים $\varepsilon\in\left(0,1\right)$ כך שלכל $x\in A$ מתקיים:

$$\left\Vert Dg_{x}-\text{Id}\right\Vert _{\text{op}}\le\varepsilon$$

אז לכל $a\in A$ ולכל $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_{r}\left(a\right)\subseteq A$ מתקיים (עבור אותו ε):

$$B_{\left(1-\varepsilon\right)r}\left(g\left(a\right)\right)\subseteq g\left(B_{r}\left(a\right)\right)\subseteq B_{\left(1+\varepsilon\right)r}\left(g\left(a\right)\right)$$

למה. תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ קבוצה פתוחה, ותהא $f:A\to\mathbb{R}^{k}$ פונקציה חח"ע וגזירה ברציפות כך ש-Df_{a} הפיכה לכל $a\in A$. אם קיים $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ כך שלכל $x\in A$ מתקיים:

$$\left\Vert \left(Df_{a}\right)^{-1}\circ Df_{x}-\text{Id}\right\Vert _{\text{op}}\le\varepsilon$$

אז לכל $a\in A$ ולכל $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_{r}\left(a\right)\subseteq A$ מתקיים (עבור אותו ε):

$$Df_{a}\left(B_{\left(1-\varepsilon\right)r}\left(\left(Df_{a}\right)^{-1}\left(f\left(a\right)\right)\right)\right)\subseteq f\left(B_{r}\left(a\right)\right)\subseteq Df_{a}\left(B_{\left(1+\varepsilon\right)r}\left(\left(Df_{a}\right)^{-1}\left(f\left(a\right)\right)\right)\right)$$

מסקנה 5.6. תהיינה $U\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה פתוחה, ו-$B\subseteq U$ תיבה שמרכזה[5] בנקודה $a\in\mathbb{R}^k$, כך ש-$\mathrm{ar}\left(B\right)\leq 2$, ותהא $g:U\to\mathbb{R}^k$ פונקציה חח"ע וגזירה ברציפות כך ש-Dg_x הפיכה לכל $x\in U$.
אם קיים $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ כך ש ש-$\left\|\left(Dg_a\right)^{-1}\circ Dg_x-\mathrm{Id}\right\|_{\mathrm{op}_\infty}<\varepsilon$[6] לכל $x\in U$, אז $g\left(B\right)$ בעלת נפח ומתקיים:

$$\left(1-2\varepsilon\right)^k\cdot\left|J_g\left(a\right)\right|\cdot V\left(B\right)\leq V\left(g\left(B\right)\right)\leq\left(1+2\varepsilon\right)^k\cdot\left|J_g\left(a\right)\right|\cdot V\left(B\right)$$

משפט 5.7. חילוף משתנה לקבוצות קומפקטיות
תהא $U\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה, תהא $g:U\to\mathbb{R}^k$ פונקציה חח"ע וגזירה ברציפות כך ש-$J_g\left(x\right)\neq 0$ לכל $x\in U$, ותהא $K\subseteq g\left(U\right)$ קבוצה קומפקטית בעלת נפח.
לכל פונקציה אינטגרבילית $f:K\to\mathbb{R}$ כך ש-$f\circ g$ אינטגרבילית על $g^{-1}\left(K\right)$[7] מתקיים:

$$\int\limits_K f\left(x\right)dx=\int\limits_{g^{-1}\left(K\right)} f\left(g\left(x\right)\right)\cdot\left|J_g\left(x\right)\right|dx$$

מסקנה 5.8. חילוף משתנה לקבוצות פתוחות
תהא $U\subseteq\mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה, תהא $g:U\to\mathbb{R}^k$ פונקציה חח"ע וגזירה ברציפות כך ש-$J_g\left(x\right)\neq 0$ לכל $x\in U$.
לכל פונקציה אינטגרבילית $f:g\left(U\right)\to\mathbb{R}$ כך ש-$f\circ g$ אינטגרבילית על U מתקיים:

$$\int\limits_{g\left(U\right)} f\left(x\right)dx=\int\limits_U f\left(g\left(x\right)\right)\cdot\left|J_g\left(x\right)\right|dx$$

[5] המרכז של תיבה $\left[a_1,b_1\right]\times\left[a_2,b_2\right]\times\ldots\times\left[a_k,b_k\right]$ הוא הנקודה $\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\ldots,\frac{a_k+b_k}{2}\right)$.
[6] הכוונה כאן לנורמה האופרטורית עבור נורמת ℓ_∞.
[7] ע"פ משפט הפונקציה ההפוכה g^{-1} עומדת באותם תנאים של g, ולכן ע"פ טענה 5.4 $g^{-1}\left(K\right)$ בעלת נפח (השפה שלה ממידה אפס).

נספח: מעבר בין מערכות קואורדינטות

דוגמה 5.9. חילופי משתנים נפוצים - מערכות קואורדינטות

- המעבר ממערכת קואורדינטות קוטביות/גליליות לקרטזיות מתבצע ע"י ההעתקות:

$$(r,\theta)\mapsto(r\cdot\cos\theta,r\cdot\sin\theta)$$
$$(\rho,\theta,z)\mapsto(\rho\cdot\cos\theta,\rho\cdot\sin\theta,z)$$

הדיפרנציאלים של העתקות אלו הם:

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\cdot\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cdot\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\cos\theta & -r\cdot\sin\theta\\ \sin\theta & r\cdot\cos\theta\end{bmatrix}$$

ולפיכך היעקוביאן בכל נקודה הוא r או ρ בהתאמה, וכמובן היעקוביאן בכיוון ההפוך הוא $\frac{1}{r}$ ו-$\frac{1}{\rho}$ בהתאמה.

- המעבר ממערכת קואורדינטות גליליות לכדוריות מתבצע ע"י ההעתקה $(r,\theta,\phi)\mapsto(r\cdot\sin\theta\cdot\cos\phi,r\cdot\sin\theta\cdot\sin\phi,r\cdot\cos\theta)$[8], [9] הדיפרנציאל של העתקה זו הוא:

$$\begin{bmatrix}\sin\theta\cdot\cos\phi & r\cdot\cos\theta\cdot\cos\phi & -r\cdot\sin\theta\cdot\sin\phi\\ \sin\theta\cdot\sin\phi & r\cdot\cos\theta\cdot\sin\phi & r\cdot\sin\theta\cdot\cos\phi\\ \cos\theta & -r\cdot\sin\theta & 0\end{bmatrix}$$

ולפיכך היעקוביאן בכל נקודה הוא (נפתח את הדטרמיננטה לפי השורה התחתונה):

$$\begin{aligned}
&\cos\theta\cdot(r\cdot\cos\theta\cdot\cos\phi\cdot r\cdot\sin\theta\cdot\cos\phi+r\cdot\sin\theta\cdot\sin\phi\cdot r\cdot\cos\theta\cdot\sin\phi)\\
&-(-r\cdot\sin\theta)\cdot(\sin\theta\cdot\cos\phi\cdot r\cdot\sin\theta\cdot\cos\phi+r\cdot\sin\theta\cdot\sin\phi\cdot\sin\theta\cdot\sin\phi)\\
=&\cos\theta\cdot\left(r^2\cdot\cos^2\phi\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta+r^2\cdot\sin^2\phi\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta\right)\\
&+r\cdot\sin\theta\cdot\left(r\cdot\sin^2\theta\cdot\cos^2\phi+r\cdot\sin^2\theta\cdot\sin^2\phi\right)\\
=&r^2\cdot\sin\theta\cdot\left(\cos^2\phi\cdot\cos^2\theta+\sin^2\phi\cdot\cos^2\theta\right)\\
&+r^2\cdot\sin\theta\cdot\left(\sin^2\theta\cdot\cos^2\phi+\sin^2\theta\cdot\sin^2\phi\right)\\
=&r^2\cdot\sin\theta\cdot\left(\cos^2\phi\cdot\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)+\sin^2\phi\cdot\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\right)\\
=&r^2\cdot\sin\theta\cdot\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\cdot\left(\sin^2\phi+\cos^2\phi\right)=r^2\cdot\sin\theta
\end{aligned}$$

♣ בכל אחת מההחלפת הקואורדינטות הללו היעקוביאן יוצא חיובי ולכן אין צורך לקחת את הערך המוחלט שלו.

[8] כאן יש לדייק ולומר ש-$\theta\in[0,\pi]$, כמובן שניתן להחליט באופן שרירותי ש-$\theta\in[\pi,2\pi]$ (או כל קטע אחר באורך π).
[9] **שימו לב לכך ש התפקידים של θ ו-ϕ הפוכים מאלה שבתרגול 11.**