אינטגרלים - הוכחות נבחרות

חשבון אינפיניטסימלי (2) - 80132

מרצה: יורם לסט

מתרגלים: דניאל אופנר ומתן בן-אשר

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

תודתי נתונה ל**מסכם אלמוני** על הסיכום שכתב בשנת הלימודים תשפ"א,
נעזרתי בו רבות על מנת לכתוב את הסיכום שלפניכם.
אשמח מאד לדעת מי הוא אותו מסכם אלמוני כדי שאוכל לציין זאת כאן.

* * *

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 האינטגרל הלא מסוים (פונקציות קדומות)

♣ בפרק שיעסוק במשפט היסודי נראה הוכחה לכך שלכל פונקציה רציפה יש פונקציה קדומה, כדאי לזכור זאת משום שיחד עם משפט דארבו[1] ניתן לדעת עבור מרבית הפונקציות אם יש להן פונקציה קדומה: אם הפונקציה רציפה אז יש לה ואם אינה מקיימת את משפט דארבו אז אין לה, פונקציות שאינן נופלות באחת מהקטגוריות יכולות להיות נגזרות של פונקציות פתולוגיות (ראו דוגמה לכך בקובץ "מאגר פונקציות פתולוגיות").

♣ ההוכחה הכי טובה לכך שמצאנו את האינטגרל הלא מסוים של פונקציה היא לגזור את אחת הפונקציות שאנו טוענים כי היא קדומה, כדאי לעשות זאת גם מחשש לטעות אלגברית בדרך.

משפט 1.1. ליניאריות האינטגרל הלא מסוים

תהיינה $f,g:I\to\mathbb{R}$ פונקציות המוגדרות על מקטע I ובעלות פונקציה קדומה על מקטע זה.

1. לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\int a\cdot f(x)\,dx=a\cdot\int f(x)\,dx$.
2. מתקיים $\int f(x)\pm g(x)\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$.

משפט 1.2. אינטגרציה בחלקים

תהיינה $f,g:I\to\mathbb{R}$ פונקציות המוגדרות על מקטע I ובעלות פונקציה קדומה על מקטע זה.
אם f ו-g גזירות ב-I אז מתקיים $\int f(x)\,g'(x)\,dx=f(x)\,g(x)-\int f'(x)\,g(x)\,dx$.

הוכחה. ע"פ כלל לייבניץ לנגזרת של מכפלת פונקציות. ■

משפט 1.3. אינטגרציה ע"י הצבה

תהא $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת על מקטע I ובעלת פונקציה קדומה מקטע זה, ותהא $\varphi:I_0\to I$ פונקציה גזירה על מקטע I_0; לכל פונקציה קדומה $F:I\to\mathbb{R}$ של f מתקיים:

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx=F(\varphi(x))+C$$

♣ בד"כ לא נקבל אינטגרלים בצורה הזו ונצטרך להביא אותם אליה כדי שנוכל להשתמש במשפט: נניח שאנחנו רוצים למצוא את האינטגרל $\int g(x)\,dx$ עבור פונקציה $g:I\to\mathbb{R}$ והצלחנו למצוא שתי פונקציות $\varphi:I\to I_0$ ו-$\psi:I_0\to\mathbb{R}$ כך של-ψ יש קדומה Ψ על I_0 ו-φ גזירה ב-I ובנוסף מתקיים $g(x)=\psi(\varphi(x))$ לכל $x\in I$, במקרה כזה נוכל להשתמש במשפט ולומר שמתקיים $\int g(x)\,dx=\Psi(\varphi(x))+C$.

- פעמים רבות משתמשים במשפט זה בצורה הלא פורמלית הבאה: מסמנים $u=\varphi(x)$ ואז (נשתמש בסימון של לייבניץ לנגזרות) $\frac{du}{dx}=\varphi'(x)$ ולכן "מתקיים" $du=\varphi'(x)\,dx$ ומכאן שגם:

$$\int g(x)\,dx=\int\psi(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx=\int\psi(u)\,du=\Psi(u)+C=\Psi(\varphi(x))+C$$

- אם φ גם הפיכה נפוצה גם הצורה הלא פורמלית הנוספת: $\varphi^{-1}(u)=x$ ומכאן נובע כי:

$$\frac{dx}{du}=\varphi^{-1\prime}(u)=\frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(u)\right)}$$

[1] כל נגזרת (כלומר כל פונקציה שיש לה קדומה) מקיימת את משפט ערך הביניים גם אם אינה רציפה.

ולכן "מתקיים" $dx = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(u))}du$ ומכאן שגם

$$\begin{aligned}\int g(x)\,dx &= \int \psi(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx\\ &= \int \psi\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(u)\right)\right)\cdot\varphi'\left(\varphi^{-1}(u)\right)\cdot\frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(u)\right)}du\\ &= \int \psi(u)\,du = \Psi(u)+C = \Psi(\varphi(x))+C\end{aligned}$$

זה לא מקרי: הסיבה לכך שלייבניץ סימן את הנגזרת בצורה $\frac{du}{dx}$ היא ששיפוע הוא בעצם מנה של הפרש ערכי הפונקציה חלקי הפרש ערכי המקורות, המקור לסימון הזה הוא הסימון הנפוץ בפיזיקה

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x_2)-u(x_1)}{x_2-x_1}$$

כאשר $x_1 \neq x_2$, בעצם הביטוי dx רוצה לומר "גודל קטן עד לאינסוף" (אינפיניטסימל) מה שפורמל אח"כ בהגדרת הגבול. מה שאני רוצה לומר הוא שהנגזרת אמנם אינה מנה מבחינה פורמלית אך מבחינה אינטואיטיבית היא אכן כזו או לפחות "סוג של" ופעמים רבות האינטואיציה שלנו מכוונת היטב למטרה.

♣ למרות כל ההסבר היפה הוכחה בצורה הנ"ל **אינה הוכחה פורמלית** ולכן יש לגזור את הפונקציה כדי להוכיח שאכן מצאנו את האינטגרל הלא מסוים.

הוכחה. ע"פ כלל השרשרת. ■

משפט 1.4. אינטגרל של פונקציה הופכית

תהא $f: I \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה על מקטע I, ותהא F פונקציה קדומה של f על מקטע זה.[2]

אם f הפיכה אז מתקיים:

$$\int f^{-1}(y)\,dy = y\cdot f^{-1}(y) - F\left(f^{-1}(y)\right)+C$$

♣ מבחינה אינטואיטיבית זה אכן מה שציפינו לקבל מכיוון שלכל נקודה על הגרף של f, שטח המלבן הנוצר מהצירים ומהישרים המקבילים אליהם שנחתכים בנקודה זו מחלק לשני חלקים: החלק התחום בין גרף הפונקציה לציר ה-x וזה התחום בינו לבין ציר ה-y שעבור f^{-1} הוא ציר ה-x[3]; הביטוי $f^{-1}(y)\cdot y$ מבטא את שטח המלבן כולו והביטוי $F\left(f^{-1}(y)\right)$ מבטא את השטח התחום בין הגרף של f לציר ה-x "שלה".

כן, אני יודע, הטיעון הזה מדבר על אינטגרלי רימן (ומשתמש בהוכחה גאומטרית רחמנא ליצלן) ואינו מתייחס לאפשרות שהפונקציה עוברת ביותר מרביע אחד של המישור; אבל הקשר של השטח מתחת לגרף הפונקציה לבין הקדומה שלה הוא אינטואיטיבי מאד וניתן להכליל את הטיעון הזה גם ליותר מרביע אחד, כמובן שכל זה ברמת האינטואיציה ולא מדובר בהוכחה פורמלית אבל זה כל היופי במתמטיקה: האפשרות לפרמל את האינטואיציה.

צריך לצרף ציור.

[2] בהמשך נראה שבהכרח יש כזו בגלל ש-f רציפה (המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי).

[3] הגרפים של f ושל f^{-1} זהים עד כדי שיקוף וסיבוב שכמובן אינם משנים את השטחים.

הוכחה. ראינו בקורס הקודם שהנגזרת של f^{-1} היא $f^{-1\prime}(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.
נסמן $u=f^{-1}(y)$.

$$\Rightarrow \frac{du}{dy}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\Rightarrow du=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\cdot dy$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\int f^{-1}(y)\,dy&=\int f^{-1}(y)\cdot\frac{f'\left(f^{-1}(y)\right)}{f'(f^{-1}(y))}dy=\int u\cdot f'(u)\,du\\&=u\cdot f(u)-\int 1\cdot f(u)\,du\\&=u\cdot f(u)-F(u)+C\\&=f^{-1}(y)\cdot f\left(f^{-1}(y)\right)-F\left(f^{-1}(y)\right)+C\\&=y\cdot f^{-1}(y)-F\left(f^{-1}(y)\right)+C\end{aligned}$$

עד כאן השתמשנו בשיטה הלא פורמלית שתוארה לעיל וכעת יש לנו שתי סיבות אינטואיטיביות להאמין שאכן הפונקציה הנ"ל היא קדומה של f^{-1} וכעת נעבור להוכחה פורמלית.
תהא $g:\mathrm{Im}f\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $y\in\mathrm{Im}f$):

$$g(y):=y\cdot f^{-1}(y)-F\left(f^{-1}(y)\right)$$

מכאן שלכל $y\in\mathrm{Im}f$ כך ש-$f'\left(f^{-1}(y)\right)\neq 0$ מתקיים:

$$\begin{aligned}g'(y)&=1\cdot f^{-1}(y)+y\cdot\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}-F'\left(f^{-1}(y)\right)\cdot\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\\&=f^{-1}(y)+y\cdot\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}-f\left(f^{-1}(y)\right)\cdot\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\\&=f^{-1}(y)+y\cdot\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}-y\cdot\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}=f^{-1}(y)\end{aligned}$$

כדי להוכיח את הטענה עבור נקודות שבהן $f'\left(f^{-1}(y)\right)=0$ נצטרך להשתמש בעובדה ש-f^{-1} רציפה[4] ולכן ע"פ המשפט היסודי (שעוד לא למדנו) יש לה פונקציה קדומה G.

בהג"כ נניח שקיים $y_0\in\mathrm{Im}f$ כך ש-$G(y_0)=g(y_0)$ וא"כ לכל $y\in\mathrm{Im}f$ כך ש-$f'\left(f^{-1}(y)\right)\neq 0$ מתקיים $G(y)=g(y)$, נשים לב לכך שקבוצת הנקודות ב-$\mathrm{Im}f$ המקיימת $f'\left(f^{-1}(y)\right)\neq 0$ צפופה ב-$\mathrm{Im}f$[5] ולכן מהרציפות של שתי הפונקציות נובע שהן מקבלות את אותו ערך גם בנקודות שבהן $f'\left(f^{-1}(y)\right)=0$. ■

[4] הגזירות של f גוררת את רציפותה ומכאן שגם f^{-1} רציפה.
[5] אחרת מהרציפות של f^{-1} ומהיותה הפיכה היה נובע שקיים מקטע שבו מתקיים $f'(x)=0$, כלומר f הייתה פונקציה קבועה במקטע זה בסתירה לכך שהיא חח"ע.

מסקנה 1.5. מתקיים:

$$\int \ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x) - x$$
$$\int \arcsin(x)\,dx = x\cdot\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$
$$\int \arccos(x)\,dx = x\cdot\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$$
$$\int \arctan(x)\,dx = x\cdot\arctan(x) + \frac{1}{2}\cdot\ln\left(1+x^2\right)$$

בטבלה הבאה מופיעה אותה טבלה שהופיעה בפרק הנגזרות (בקורס הקודם) בסידור הפוך כך שכעת היא נותנת את את האינטגרל הלא מסוים במקום את הנגזרת.

פונקציה	אינטגרל לא מסוים	מקרים פרטיים והערות
a	$ax+C$	
$x^{\alpha}\ \ \alpha\neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	ניתן להסיק את האינטגרל של כל פולינום.
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+C$	
$a^x,\ \ 0<a\neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)}+C$	$\int \exp(x)\,dx=\exp(x)+C$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$	
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$	
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)+C$	באופן כללי האינטגרל של $\frac{f'(x)}{f(x)}$ הוא $\ln(\lvert f(x)\rvert)+C$.
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)+C$	
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)+C$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)+C$	
$\cosh(x)$	$\sinh(x)+C$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)+C$	
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsinh}(x)+C$	

2 האינטגרל המסוים (שטחים)

2.1 אינטגרביליות לפי רימן

משפט 2.1. תנאי קושי לאינטגרביליות רימן
יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$ ותהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-f אינטגרבילית רימן על $[a,b]$ הוא שלכל $0<\varepsilon$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל שני סכומי רימן S ו-S' של f עבור חלוקות P ו-P' (בהתאמה) המקיימות $\lambda(P),\lambda(P')<\delta$ מתקיים $|S-S'|<\varepsilon$.

הוכחה. זה לא תנאי קושי האחרון שנפגוש בקורס זה, כמעט לכל גבול קיים תנאי קושי מתאים ולכן בשלב כלשהו (לקראת סוף הקורס) נמאס לי להוכיח את אותו הדבר בכל פעם מחדש וכתבתי את הקובץ "תנאי קושי לקיום גבול" כדי לשים לדבר סוף: משה רוזנשטיין ואני הגדרנו הגדרת גבול כללית ותנאי קושי כללי והראנו שהם שקולים זה לזה; לפיכך מכאן והלאה לא אטרח להוכיח את תנאי קושי השונים שבהם ניתקל. ■

משפט 2.2. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$ ותהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, אם f אינטגרבילית רימן על $[a,b]$ אז f חסומה על $[a,b]$.

♣ מבחינה אינטואיטיבית ברור למה המשפט נכון: אם f לא הייתה חסומה על $[a,b]$ זה היה אומר שלא משנה כמה נקטין את גדלי המלבנים תמיד ימצא אחד מהם שיכול לחתוך את גרף הפונקציה בכל נקודה שהיא (גדולה ככל שנרצה ו/או קטנה ככל שנרצה, תלוי אם הפונקציה אינה חסומה מלעיל ו/או מלרע) ובכך להביא לסכומי רימן גדולים ו/או קטנים ככל שנרצה; כלומר לכל חלוקה, לא משנה מהו פרמטר החלוקה, ניתן יהיה למצוא שני סכומי רימן הרחוקים זה מזה כמה שנרצה. הוכחת המשפט מפרמלת בדיוק את האמירה הזו ע"י תנאי קושי.

2.2 אינטגרביליות לפי דארבו

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$.
תהיינה $f\in B[a,b]$ ו-$P:=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$.

למה 2.3. תהא P' חלוקה של $[a,b]$ המתקבלת מ-P ע"י הוספת נקודות (כלומר $P\subseteq P'$), מתקיים:

$$L(f,P)\le L(f,P')\le U(f,P')\le U(f,P)$$

למה 2.4. תהא P' חלוקה של $[a,b]$ המתקבלת מ-P ע"י הוספת k נקודות (כלומר $P\subseteq P'$ ו-$|P'|-|P|=k\in\mathbb{N}_0$), מתקיים:

$$L(f,P')-k\cdot\lambda(P)\cdot\Omega\le L(f,P)\le U(f,P)\le U(f,P')+k\cdot\lambda(P)\cdot\Omega$$

כאשר

$$\begin{aligned}\Omega&:=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}-\inf\{f(x):x\in[a,b]\}\\&=\sup\{f(x_1)-f(x_2)\mid x_1,x_2\in[a,b]\}\end{aligned}$$

מסקנה 2.5. מתקיים $\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)$.

משפט 2.6. משפט דארבו[6]

מתקיים:

$$\overline{I}\left(f\right)=\lim_{\lambda(P)\to0}U\left(f,P\right),\ \ \underline{I}\left(f\right)=\lim_{\lambda(P)\to0}L\left(f,P\right)$$

כלומר לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל חלוקה P של $[a,b]$ המקיימת $\lambda\left(P\right)<\delta$ מתקיים $\left|U\left(f,P\right)-\overline{I}\right|<\varepsilon$, ולכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל חלוקה P של $[a,b]$ המקיימת $\lambda\left(P\right)<\delta$ מתקיים $\left|L\left(f,P\right)-\underline{I}\right|<\varepsilon$.

הוכחה. יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$, מהגדרת $\underline{I}$ קיימת חלוקה P' של $[a,b]$ המקיימת $\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}<L\left(P'\right)\leq\underline{I}$, נגדיר $\delta:=\frac{\varepsilon}{2m'\Omega}$ כאשר m' הוא מס' נקודות החלוקה ב-P' ו-Ω מוגדרת כדלעיל[7].

תהא P'' חלוקה של $[a,b]$ המקיימת $\lambda\left(P''\right)<\delta$, נגדיר $P^{*}:=P'\cup P''$ ונסמן ב-k את ההפרש בין מס' הנקודות של P^{*} לאלו של P'' (כלומר $k:=\left|P^{*}\right|-\left|P''\right|\leq\left|P'\right|=m'$), מהלמות הנ"ל נובע שמתקיים:

$$\begin{aligned}\underline{I} & \geq L\left(P''\right)\\
 & \geq L\left(P^{*}\right)-k\cdot\lambda\left(P''\right)\cdot\Omega\\
 & \geq L\left(P'\right)-k\cdot\lambda\left(P''\right)\cdot\Omega\\
 & \geq L\left(P'\right)-m'\cdot\lambda\left(P''\right)\cdot\Omega\\
 & >L\left(P'\right)-m'\cdot\delta\cdot\Omega\\
 & =L\left(P'\right)-m'\cdot\frac{\varepsilon}{2m'\Omega}\cdot\Omega\\
 & >L\left(P'\right)-\frac{\varepsilon}{2}\\
 & >\underline{I}-\varepsilon
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\varepsilon>\underline{I}-L\left(P''\right)=\left|\underline{I}-L\left(P''\right)\right|$$

ההוכחה עבור $\overline{I}$ זהה לחלוטין (כמובן שיש להפוך את כיווני אי-השוויונות). ■

משפט 2.7. f אינטגרבילית לפי רימן על $[a,b]$ אם"ם f אינטגרבילית גם לפי דארבו על קטע זה, כלומר אם"ם $\overline{I}\left(f\right)=\underline{I}\left(f\right)$.

משפט 2.8. תנאי רימן לאינטגרביליות

תהא $f\in B\left[a,b\right]$, תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-f אינטגרבילית רימן על $[a,b]$ הוא שמתקיים[8]:

$$\lim_{\lambda(P)\to0}\sum_{i=1}^{n}W_{i}\left(f,P\right)\cdot\left(x_{i}-x_{i-1}\right)=0$$

כאשר לכל חלוקה $P:=\left\{ x_{0},x_{1},\ldots,x_{n}\right\}$ של $[a,b]$ נסמן:

$$\begin{aligned}W_{i}\left(f,P\right) & :=M_{i}\left(f,P\right)-m_{i}\left(f,P\right)\\
 & =\sup\left\{ f\left(t\right):t\in\left[x_{i-1},x_{i}\right]\right\} -\inf\left\{ f\left(t\right):t\in\left[x_{i-1},x_{i}\right]\right\} \\
 & =\sup\left\{ f\left(t_{1}\right)-f\left(t_{2}\right):t_{1},t_{2}\in\left[x_{i-1},x_{i}\right]\right\}
\end{aligned}$$

ונקרא ל-$W_{i}\left(f,P\right)$ <u>התנודה</u> של f <u>בקטע</u> $\left[x_{i-1},x_{i}\right]$.

♣ יש לשים לב לכך ש-n אינו מספר קבוע, למען האמת השאיפה של $\lambda\left(P\right)$ ל-0 גוררת את השאיפה של n לאינסוף (אך ההפך אינו נכון).

הוכחה. המשפט נובע ישירות ממשפט דארבו וממשפט 2.7. ■

[6] ערך בוויקיפדיה: ז'אן גסטון דארבו.

[7] נשים לב שאם $\Omega=0$ אז f היא פונקציה קבועה ואז הטענה טריוויאלית.

[8] קיום הגבול הוא באותו מובן שראינו לעיל.

2.3 תכונות האינטגרל המסוים

משפט 2.9. תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, אם f רציפה אז היא אינטגרבילית רימן על $[a,b]$.

הוכחה. נניח ש-f רציפה על $[a,b]$, מכאן שהיא חסומה עליו וכן רציפה עליו במידה שווה.
יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$, מרציפות במ"ש של f נובע שקיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x_1,x_2\in[a,b]$ המקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.
מכאן שלכל חלוקה $P:=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ המקיימת $\lambda(P)<\delta$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}W_i(f,P)\cdot(x_i-x_{i-1})&<\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(x_i-x_{i-1})\\&=\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\\&=\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon\end{aligned}$$

ולכן מתנאי רימן לאינטגרביליות נובע ש-f אינטגרבילית רימן על $[a,b]$. ■

משפט 2.10. תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, אם f מונוטונית אז היא אינטגרבילית רימן על $[a,b]$.

הוכחה. נניח ש-f מונוטונית, אם f קבועה אז המשפט טריוויאלי, לכן נניח בהג"כ ש-f עולה ממש.
יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ ונגדיר $\delta:=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, מכאן שלכל חלוקה $P:=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ של $[a,b]$ המקיימת $\lambda(P)<\delta$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}W_i(f,P)\cdot(x_i-x_{i-1})&=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\cdot(x_i-x_{i-1})\\&<\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\cdot\delta\\&=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\\&=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot(f(b)-f(a))=\varepsilon\end{aligned}$$

ולכן מתנאי רימן לאינטגרביליות נובע ש-f אינטגרבילית רימן על $[a,b]$. ■

טענה 2.11. תהיינה $f,g\in R[a,b]$ ו-$c\in\mathbb{R}$, מתקיימים הפסוקים הבאים:

1. אם f אי-שלילית ב-$[a,b]$ אז $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$.
2. אם לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\geq g(x)$ אז $\int_a^b f(x)\,dx\geq\int_a^b g(x)\,dx$.

משפט 2.12. ליניאריות האינטגרל המסוים
תהיינה $f,g\in R[a,b]$ ו-$c\in\mathbb{R}$, מתקיימים הפסוקים הבאים:

1. $c\cdot f\in R[a,b]$ ומתקיים $\int_a^b(c\cdot f)(x)\,dx=c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$.
2. $f\pm g\in R[a,b]$ ומתקיים $\int_a^b(f\pm g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$.

♣ מהמשפט האחרון נובע ש-$R[a,b]$ מהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ והאינטגרציה (של רימן) היא פונקציונל ליניארי[9] על $R[a,b]$.

משפט 2.13. תהיינה $f,g\in R[a,b]$, מתקיים גם $f\cdot g\in R[a,b]$.

[9] פונקציונל ליניארי על מ"ו הוא העתקה ליניארית מהמרחב לשדה, במקרה זה מ-$R[a,b]$ ל-$\mathbb{R}$.

הוכחה. ראינו לעיל שהיות f ו-g אינטגרביליות רימן גוררת ש-f ו-g חסומות על $[a,b]$, א"כ יהיו $M_1,M_2\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים $|f(x)|\le M_1$ ו-$|g(x)|\le M_2$ לכל $x\in[a,b]$, נשים לב ש-$f\cdot g$ חסומה על $[a,b]$ (לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $|f(x)\cdot g(x)|=|f(x)|\cdot|g(x)|\le M_1\cdot M_2$).

תהא $P:=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$. לכל $n\ge i\in\mathbb{N}$ ולכל $s,t\in[x_i-x_{i-1}]$ מתקיים:

$$\begin{aligned}|(f\cdot g)(s)-(f\cdot g)(t)| &= |f(s)\cdot g(s)-f(t)\cdot g(t)|\\ &= |f(s)\cdot g(s)-f(t)\cdot g(s)+f(t)\cdot g(s)-f(t)\cdot g(t)|\\ &= |[f(s)-f(t)]\cdot g(s)+f(t)\cdot[g(s)-g(t)]|\\ &\le |f(s)-f(t)|\cdot|g(s)|+|f(t)|\cdot|g(s)-g(t)|\\ &\le W_i(f,P)\cdot|g(s)|+|f(t)|\cdot W_i(g,P)\\ &\le W_i(f,P)\cdot M_2+M_1\cdot W_i(g,P)\end{aligned}$$

ומכאן שמתקיים גם:

$$W_i(f\cdot g,P)\le M_2\cdot W_i(f,P)+M_1\cdot W_i(g,P)$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}W_i(f\cdot g,P)\cdot(x_i-x_{i-1}) &\le \sum_{i=1}^{n}(M_2\cdot W_i(f,P)+M_1\cdot W_i(g,P))\cdot(x_i-x_{i-1})\\ &= M_2\cdot\sum_{i=1}^{n}W_i(f,P)\cdot(x_i-x_{i-1})+M_1\cdot\sum_{i=1}^{n}W_i(g,P)\cdot(x_i-x_{i-1})\xrightarrow[\lambda(P)\to0]{}0\end{aligned}$$

ומכאן שע"פ תנאי רימן לאינטגרביליות מתקיים $f\cdot g\in R[a,b]$. ■

משפט 2.14. תהא $g\in R[a,b]$, אם קיים $0<C\in\mathbb{R}$ כך ש-$|g(x)|\ge C$ לכל $x\in[a,b]$ אז גם $\frac{1}{g}\in R[a,b]$.

הוכחה. נניח שקיים C כנ"ל, א"כ לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $\left|\frac{1}{g(x)}\right|\le\frac{1}{C}$ ולכן $\frac{1}{g}\in B[a,b]$.
תהא $P:=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$, לכל $n\ge i\in\mathbb{N}$ ולכל $s,t\in[x_{i-1},x_i]$ מתקיים:

$$\left|\frac{1}{g(s)}-\frac{1}{g(t)}\right|=\left|\frac{g(t)-g(s)}{g(s)\cdot g(t)}\right|\le\frac{W_i(g,P)}{C^2}$$

ומכאן שגם:

$$W_i\left(\frac{1}{g},P\right)\le\frac{W_i(g,P)}{C^2}$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}W_i\left(\frac{1}{g},P\right)(x_i-x_{i-1})\le\frac{1}{C^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}W_i(g,P)(x_i-x_{i-1})\xrightarrow[\lambda(P)\to0]{}0$$

ומכאן שע"פ תנאי רימן לאינטגרביליות מתקיים $\frac{1}{g}\in R[a,b]$. ■

מסקנה 2.15. תהיינה $f,g\in R[a,b]$, אם קיים $0<C\in\mathbb{R}$ כך ש-$|g(x)|\ge C$ לכל $x\in[a,b]$ אז גם $\frac{f}{g}\in R[a,b]$.

משפט 2.16. תהא $f\in R[a,b]$, מכאן ש-f אינטגרבילית רימן על כל תת-קטע סגור של $[a,b]$.

משפט 2.17. תהא $c\in(a,b)$ ותהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in R[a,c]$ וגם $f\in R[c,b]$, ש-f אינטגרבילית רימן על $[a,b]$ ומתקיים השוויון:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

מסקנה 2.18. תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f אינטגרבילית רימן על $[a,b]$ אם"ם f אינטגרבילית על כל תת-קטע סגור של $[a,b]$.

טענה 2.19. תהא $h\in R[a,b]$ פונקציה רציפה, אם $\int_a^b (h(x))^2\,dx=0$ אז $h\equiv 0$ (כלומר $h(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$).

♣ למעשה הטענה הזו לא כל כך מעניינת מנקודת המבט של הקורס שלנו, היא מובאת כאן מפני שבליניארית 2 אנחנו נשתמש בה כדי להראות ש-$C[a,b]$ - מרחב הפונקציות הרציפות על $[a,b]$ (שהוא תמ"ו של $R[a,b]$) הוא מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ כאשר המכפלה הפנימית מוגדרת ע"י $\langle f\mid g\rangle:=\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$ (לכל $f,g\in C[a,b]$).

הוכחה. נניח ש-$\int_a^b (h(x))^2\,dx=0$ ונניח בשלילה שקיים $y\in[a,b]$ כך ש-$h(y)\neq 0$. מהרציפות של h נובע שקיים קטע סגור $[c,d]\subseteq[a,b]$ כך ש-$h(x)\geq\frac{h(y)}{2}$ לכל $x\in[c,d]$ ואז $\int_c^d (h(x))^2\,dx\geq\int_c^d\left(\frac{h(y)}{2}\right)^2dx>0$ ומכיוון ש-$(h(x))^2\geq 0$ לכל $x\in[a,b]$ נובע מזה שמתקיים:

$$\int_a^b (h(x))^2\,dx=\int_a^c (h(x))^2\,dx+\int_c^d (h(x))^2\,dx+\int_d^b (h(x))^2\,dx>0$$

מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה - לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $h(x)=0$. ■

משפט 2.20. יהיו $c,d\in\mathbb{R}$ כך ש-$c<d$.
תהיינה $f:[a,b]\to[c,d]$ פונקציה אינטגרבילית רימן על $[a,b]$ ו-$g:[c,d]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

$$\Rightarrow g\circ f\in R[a,b]$$

♣ בפרט $|f|$ אינטגרבילית רימן על $[a,b]$.

הוכחה. g רציפה על קטע סגור ולכן חסומה ורציפה במידה שווה.
יהי $M\in\mathbb{R}$ כך ש-$|g(x)|<M$ לכל $x\in[c,d]$.
יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$.
מרציפות במידה שווה של g נובע שקיימת $0<\delta_1\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x,y\in[c,d]$ כך ש-$|x-y|<\delta_1$ מתקיים $|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, תהא δ_1 כנ"ל.
היות ש-$f\in R[a,b]$ נדע שקיימת $0<\delta_2\in\mathbb{R}$ כך שלכל חלוקה $P:=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ המקיימת $\lambda(P)<\delta_2$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n}W_i(f,P)\cdot(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon\cdot\delta_1}{4M}$$

תהא δ_2 כנ"ל ותהא P חלוקה כנ"ל.
נשים לב שלכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ המקיים $W_i(f,P)<\delta_1$ מתקיים $W_i(g\circ f,P)<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
בנוסף מתקיים:

$$\delta_1\cdot\sum_{W_i(f)\geq\delta_1}(x_i-x_{i-1})\leq\sum_{i=1}^{n}W_i(f,P)\cdot(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon\cdot\delta_1}{4M}$$

ומכאן שגם:

$$\sum_{W_i(f)\geq\delta_1}(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{4M}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} W_i\left(g\circ f,P\right)\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{W_i(f)\geq\delta_1} W_i\left(g\circ f,P\right)\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)+\sum_{W_i(f)<\delta_1} W_i\left(g\circ f,P\right)\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)$$
$$<2M\cdot\sum_{W_i(f)\geq\delta_1}\left(x_i-x_{i-1}\right)+\frac{\varepsilon}{2\left(b-a\right)}\cdot\sum_{W_i(f)<\delta_1}\left(x_i-x_{i-1}\right)$$
$$<2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{2\left(b-a\right)}\cdot\left(b-a\right)=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

P הנ"ל היתה שרירותית ולכן הנ"ל נכון לכל חלוקה P של $[a,b]$ המקיימת $\lambda\left(P\right)<\delta_2$.

ε הנ"ל היה שרירותי ולכן לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל חלוקה P של $[a,b]$ המקיימת $\lambda\left(P\right)<\delta$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} W_i\left(g\circ f,P\right)\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)<\varepsilon$$

מתנאי רימן לאינטגרביליות נובע ש-$f\circ g\in R\left[a,b\right]$. ■

משפט 2.21. תהא $f\in R\left[a,b\right]$, מתקיים:

$$\left|\int_a^b f\left(x\right)dx\right|\leq\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx$$

♣ נשים לב לדמיון לא"ש המשולש, גם כאן הערך המוחלט של ה"סכום" קטן או שווה לסכום של הערכים המוחלטים ומבחינה אינטואיטיבית זה קורה מאותה סיבה.

הוכחה. מתקיים אחד משני מקרים: או ש-$\left|\int_a^b f\left(x\right)dx\right|=\int_a^b f\left(x\right)dx$ או ש-$\left|\int_a^b f\left(x\right)dx\right|=-\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^b -f\left(x\right)dx$, מהעובדה שלכל $x\in\left[a,b\right]$ מתקיים $\pm f\left(x\right)\leq\left|f\left(x\right)\right|$ נובע כי:

$$\left|\int_a^b f\left(x\right)dx\right|=\int_a^b \pm f\left(x\right)dx\leq\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx$$

■

משפט 2.22. אינווריאנטיות האינטגרל להזזה ולכפל

תהא $f\in R\left[a,b\right]$, לכל $c\in\mathbb{R}$ ולכל $0<q\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\int_{a-c}^{b-c} f\left(x+c\right)dx=\int_a^b f\left(x\right)dx$$
$$\int_a^b f\left(q\cdot x\right)dx=\frac{1}{q}\cdot\int_a^b f\left(x\right)dx$$

מסקנה 2.23. כדי להוכיח שפונקציה מחזורית אינטגרבילית על כל תת-קטע סגור של תחום הגדרתה מספיק להוכיח שהיא אינטגרבילית על קטע סגור שהמרחק בין קצותיו הוא כאורך מחזור שלה.

3 המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$ ותהא $f\in R\left[a,b\right]$ ותהא F הפונקציה הצוברת של f.

3.1 המשפט היסודי

משפט 3.1. F רציפה על $[a,b]$.

♣ נשים לב שזה אינטואיטיבי מאד: השינוי בערכי F עבור $x,y\in[a,b]$ כך ש-$|x-y|<\delta$ חסום מלעיל ע"י $2M\cdot\delta$ כאשר M הוא מספר המקיים $|f\left(x\right)|<M$ לכל $x\in[a,b]$, כלומר כשמסתכלים על קטע קטן מאד השטח שמתחת לגרף של f קטן מאד גם הוא (האמת שזה מוכיח רציפות במידה שווה ואכן היות F רציפה על קטע סגור גורר את היותה רציפה במידה שווה עליו), ההוכחה תפרמל בדיוק את האינטואיציה הזו.

הוכחה. f רציפה על קטע סגור ולכן חסומה, מכאן שקיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $|f\left(x\right)|<M$.
לכל $h\in[a-b,b-a]\setminus\{0\}$ ולכל $x\in[a,b]$ ו-$h\in\mathbb{R}$ כך ש-$x+h\in[a,b]$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\left|F\left(x+h\right)-F\left(x\right)\right| &= \left|\int_{a}^{x+h}f\left(x\right)dx-\int_{a}^{x}f\left(x\right)dx\right| = \left|-\int_{x+h}^{a}f\left(x\right)dx-\int_{a}^{x}f\left(x\right)dx\right| \\ &= \left|-\int_{x+h}^{x}f\left(x\right)dx\right| = \left|\int_{x}^{x+h}f\left(x\right)dx\right| \leq \left|\int_{x}^{x+h}\left|f\left(x\right)\right|dx\right| \\ &\leq \left|\int_{x}^{x+h}M\ \ dx\right| = \left|h\cdot M\right| = \left|h\right|\cdot M\end{aligned}$$

ומכאן שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $\lim_{h\to0}\left|F\left(x+h\right)-F\left(x\right)\right|=0$, כלומר F רציפה על $[a,b]$. ■

מסקנה 3.2. מתקיים:

$$\lim_{\delta\to0^{+}}\int_{a+\delta}^{b}f\left(x\right)dx=\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=\lim_{\delta\to0^{+}}\int_{a}^{b-\delta}f\left(x\right)dx$$

משפט 3.3. לכל נקודה $x\in[a,b]$ שבה f רציפה מתקיים $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.

♣ גם משפט זה אינטואיטיבי מאד: ראינו במבוא האינטואיטיבי שקצב הצבירה של הפונקציה הצוברת הוא בדיוק הפונקציה ה"נצברת", אם זו רציפה בנקודה מסוימת זה אומר שהקצב אינו "קופץ" פתאום בנקודה זו (מה שהיה יוצר "שפיץ" בצוברת) או סתם משתולל ליד נקודה זו ולכן הצוברת גזירה בנקודה זו.

הוכחה. תהא x_0 נקודת רציפות של f ויהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$, מרציפות של f ב-x_0 נובע שקיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in[a,b]$ המקיים $|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)|<\varepsilon$, תהא δ כנ"ל.

א"כ לכל $h \in \mathbb{R}$ כך ש-$a \le x_0 + h \le b$ וגם $0 < |h| < \delta$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{h}\cdot\left[\int_a^{x_0+h} f(x)\,dx - \int_a^{x_0} f(x)\,dx\right] - f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\cdot\left[\int_a^{x_0+h} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{a} f(x)\,dx\right] - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\cdot\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx - \frac{1}{h}\cdot\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dx\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\cdot\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)-f(x_0)\,dx\right| \le \frac{1}{|h|}\cdot\left|\int_{x_0}^{x_0+h} |f(x)-f(x_0)|\,dx\right| \\
&< \frac{1}{|h|}\cdot\left|\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\ dx\right| = \frac{1}{|h|}\cdot|h\cdot\varepsilon| = \frac{1}{|h|}\cdot|h|\cdot\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

ε הנ"ל היה שרירותי ולכן הנ"ל נכון לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$, כלומר[10]:

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

■

מסקנה 3.4. המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי

לכל פונקציה רציפה קיימת פונקציה קדומה, בפרט אם f רציפה אזי F היא פונקציה קדומה שלה.

♣ עד כאן ראינו שכאשר f רציפה בנקודה כלשהי אז F גזירה באותה נקודה ונגזרתה בנקודה זו שווה לערך שמקבלת f באותה נקודה, מה קורה כאשר f אינטגרבילית אך אינה רציפה? הדבר תלוי בסוג של אי-הרציפות ונראה זאת בהמשך.

3.2 מסקנות מהמשפט היסודי

תזכורת: לכל פונקציה ממשית g המוגדרת על הקטע $[a,b]$ הגדרנו $g|_a^b := g(x)|_a^b = g(b) - g(a)$.

משפט 3.5. נוסחת לייבניץ-ניוטון - הנוסחה היסודית של החשבון האינטגרלי

נניח ש-f רציפה על $[a,b]$ ותהא $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה קדומה של f, מתקיים:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a) = \phi(x)\,|_a^b$$

הוכחה. מהיות f רציפה נובע ש-F היא פונקציה קדומה של f (ע"פ המשפט היסודי) ולכן קיים $C \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים $F(x) + C = \phi(x)$ (יהי C כנ"ל).

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) = F(b) - F(a) = (F(b)+C) - (F(a)+C) = \phi(b) - \phi(a) = \phi(x)|_a^b$$

■

[10] אם $x_0 = a$ או $x_0 = b$ אז מדובר בגבול חד-צדדי וממילא בנגזרת חד-צדדית.

משפט 3.6. משפט הערך הממוצע האינטגרלי
אם f רציפה ב-$[a,b]$ אז קיים $c\in(a,b)$ כך שמתקיים:

$$f\left(c\right)=\frac{F\left(b\right)-F\left(a\right)}{b-a}=\frac{\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx}{b-a}$$

טענה 3.7. תהיינה $g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$, אם $g\in R\left[a,b\right]$ ולכל $x\in(a,b)$ מתקיים $g\left(x\right)=h\left(x\right)$ אז $h\in R\left[a,b\right]$ ומתקיים $\int_{a}^{b}h\left(x\right)dx=\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx$,
כמו כן אם $f\in R\left[a,b\right]$ ולכל $[a,b)$ מתקיים $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ אז $g\in R\left[a,b\right]$ ומתקיים $\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx=\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx$.

מסקנה 3.8. תהיינה $g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$, אם $g\in R\left[a,b\right]$ וגם קיימת נקודה יחידה $c\in[a,b]$ כך ש-$g\left(c\right)\neq f\left(c\right)$[11]
אז $h\in R\left[a,b\right]$ ומתקיים $\int_{a}^{b}h\left(x\right)dx=\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx$.

מסקנה 3.9. תהיינה $h,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, אם $g\in R\left[a,b\right]$ וגם לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $g\left(x\right)=h\left(x\right)$ פרט למספר סופי של נקודות
אז $h\in R\left[a,b\right]$ ומתקיים $\int_{a}^{b}h\left(x\right)dx=\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx$.

♣ מסקנה זו מובילה אותנו להבנה שהצוברת גזירה בנקודות אי-רציפות סליקות של הפונקציה ה"נצברת" אולם נגזרתה שווה לגבול של הנצברת בנקודה זו ולא לערך שהיא מקבלת, כמו כן בנקודות אי-רציפות מסדר ראשון הצוברת אינה גזירה (נקבל "שפיץ" בצוברת), עבור נקודות אי-רציפות מסדר שני א"א לקבוע אם הצוברת גזירה בהן ואם הנגזרת שלה שווה לערך שמקבלת ה"נצברת".

♣ לאחר מסקנה זו נסכים שפונקציה יכולה להיות אינטגרבילית רימן על קטע סגור אפילו אם היא לא מוגדרת בכולו ובתנאי שמספר הנקודות בקטע שבהן היא אינה מוגדרת סופי, האינטגרל של פונקציה כזו יהיה האינטגרל של פונקציה זהה המוגדרת באתן נקודות בכל דרך שהיא.
הסכמה זו תקפה גם באינטגרלים לא אמיתיים (להלן).

משפט 3.10. הרחבה של הנוסחה היסודית
תהא $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה על $[a,b]$ וגזירה ב-(a,b) כך שלכל $x\in(a,b)$ מתקיים $\phi'\left(x\right)=f\left(x\right)$ פרט למספר סופי של נקודות, מתקיים:

$$\int\limits_{a}^{b}f\left(x\right)dx=\phi\left(b\right)-\phi\left(a\right)=\phi\left(x\right)\Big|_{a}^{b}$$

♣ נשים לב שמהעובדה שהנוסחה היסודית נכונה עבור כל פונקציה אינטגרבילית רימן נובע שאם לפונקציה אינטגרבילית רימן יש קדומה אז הצוברת היא קדומה.

הוכחה. תהא $P:=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$, ממשפט הערך הממוצע של לגראנז' נובע שלכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ קיימת $c_i\in[x_{i-1},x_i]$:

$$\phi\left(x_i\right)-\phi\left(x_{i-1}\right)=\phi'\left(c_i\right)\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)$$

יהיו $c_1,c_2,\ldots,c_n$ כנ"ל ומכאן שמתקיים:

$$\phi\left(b\right)-\phi\left(a\right)=\phi\left(x_n\right)-\phi\left(x_0\right)=\sum_{i=1}^{n}\phi'\left(c_i\right)\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)$$

[11] כלומר לכל $x\in[a,b]\setminus\{c\}$ מתקיים $g\left(x\right)=h\left(x\right)$.

כלומר לכל חלוקה של $[a,b]$ קיימת בחירת נקודות כך שסכום רימן המתאים (של ϕ') שווה ל-$\phi(b)-\phi(a)$.
מהגדרת האינטגרל המסוים ומהמסקנה האחרונה (3.8) נובע שמתקיים:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^b \phi'(x)\,dx=\phi(b)-\phi(a)$$

■

טענה 3.11. תהא $f\in B[a,b]$, אם f רציפה ב-$(a,b]$ או ב-$[a,b)$ אז $f\in R[a,b]$.

מסקנה 3.12. תהא $f\in B[a,b]$, אם f רציפה ב-$[a,b]$ פרט לנקודה אחת אז $f\in R[a,b]$.

מסקנה 3.13. תהא $f\in B[a,b]$, אם f רציפה ב-$[a,b]$ פרט למספר סופי של נקודות אז $f\in R[a,b]$.

♣ למעשה, ניתן לומר הרבה יותר מזה, הזכרנו בקורס (ללא כל הוכחה) את המשפט הבא:

משפט. משפט לבג[12]
תהא $f\in B[a,b]$, f אינטגרבילית רימן אם"ם קבוצת נקודות אי-הרציפות של f ב-$[a,b]$ היא ממידה 0.

3.3 שיטות אינטגרציה

משפט 3.14. אינטגרציה בחלקים
תהיינה f,g גזירות על $[a,b]$ כך ש-$f',g'\in R[a,b]$, א"כ מתקיים:

$$\int\limits_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx=(f\cdot g)|_a^b-\int\limits_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$$
$$=f(b)\cdot g(b)-f(a)\cdot g(a)-\int\limits_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

משפט 3.15. הצבה
תהא $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה[13] על קטע סגור I ותהא $\varphi:[a,b]\to I$ פונקציה גזירה כך ש-φ' אינטגרבילית רימן על $[a,b]$, מתקיים:

$$\int\limits_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx=\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

♣ האינטואיציה דומה מאד לאינטואיציה של כלל השרשרת.
כל פונקציה ליניארית $ax+b$ מעוותת את הישר הממשי בצורה הבאה: היא מותחת/מכווצת אותו פי a ומזיזה אותו ב-b יחידות ימינה, ההזזה ב-b אינה משנה דבר לאינטגרל אבל ברור שאם ניקח גרף של פונקציה אינטגרבילית ונכווץ אותו פי a (שזה שקול להרכבה על פונקציה ליניארית כנ"ל) נקבל פונקציה דומה מאד שהשטח שמתחת לגרף שלה קטן/גדול פי a מזה של הפונקציה המקורית ולכן עלינו לתקן זאת ע"י הכפלת האינטגרל ב-a. פונקציות שאינן ליניאריות מעוותות גם הן את הישר הממשי ע"פ כלל ההתאמה שלהן אך מכיוון שקרוב מספיק לנקודה גזירה x הן מתנהגות "כמעט" כמו פונקציות ליניאריות התיקון שוב יהיה הכפלה בנגזרת כשהפעם התיקון מתבצע בכל נקודה בקטע הסגור שבו נחשב את האינטגרל.

---

[12] ערך בוויקיפדיה: אנרי לבג.
[13] ניתן להחליף את הרציפות בעמידה בתנאים של הרחבת הנוסחה היסודית, הערה זו תקפה גם במסקנה ובמשפט שלהלן.

הוכחה. תהא F פונקציה קדומה של f, מתקיים:

$$\int\limits_a^b f\left(\varphi\left(x\right)\right)\cdot\varphi'\left(x\right)dx=\left(F\circ\varphi\right)\left(b\right)-\left(F\circ\varphi\right)\left(a\right)=F\left(\varphi\left(b\right)\right)-F\left(\varphi\left(a\right)\right)=\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(t\right)dt$$

■

מסקנה 3.16. תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ותהיינה $\varphi,\psi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ פונקציות גזירות.
תהא $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x\in[\alpha,\beta]$):

$$g\left(x\right)=\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f\left(t\right)dt$$

g גזירה ולכל $x\in[\alpha,\beta]$ מתקיים:

$$g'\left(x\right)=f\left(\psi\left(x\right)\right)\cdot\psi'\left(x\right)-f\left(\varphi\left(x\right)\right)\cdot\varphi'\left(x\right)$$

משפט 3.17. הצבה הפוכה
תהיינה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ותהא $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ פונקציה הפיכה וגזירה, מהרציפות וההפיכות של φ נובע שהיא מונוטונית ממש.

1. אם φ עולה ממש אז:

$$\int\limits_a^b f\left(t\right)dt=\int\limits_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\left(\varphi\left(x\right)\right)\cdot\varphi'\left(x\right)dx$$

2. אם φ יורדת ממש אז:

$$\int\limits_a^b f\left(t\right)dt=\int\limits_{\varphi^{-1}(b)}^{\varphi^{-1}(a)} f\left(\varphi\left(x\right)\right)\cdot\varphi'\left(x\right)dx$$

הוכחה. מהיות φ הפיכה ורציפה נובע שתמונתה היא הקטע הסגור שבין $\varphi\left(\alpha\right)$ ו-$\varphi\left(\beta\right)$.

1. אם φ עולה ממש אז $\varphi\left(\alpha\right)=a$ ו-$\varphi\left(\beta\right)=b$ ולכן ממשפט ההצבה נובע שמתקיים:

$$\int\limits_a^b f\left(t\right)dt=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f\left(t\right)dt=\int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi\left(x\right)\right)\cdot\varphi'\left(x\right)dx=\int\limits_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\left(\varphi\left(x\right)\right)\cdot\varphi'\left(x\right)dx$$

2. אם φ יורדת ממש ממש אז $\varphi\left(\alpha\right)=b$ ו-$\varphi\left(\beta\right)=a$ ולכן ממשפט ההצבה נובע שמתקיים:

$$\int\limits_a^b f\left(t\right)dt=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f\left(t\right)dt=\int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi\left(x\right)\right)\cdot\varphi'\left(x\right)dx=\int\limits_{\varphi^{-1}(b)}^{\varphi^{-1}(a)} f\left(\varphi\left(x\right)\right)\cdot\varphi'\left(x\right)dx$$

■

4 אינטגרלים מסוימים לא אמיתיים

4.1 אינטגרל על קבוצה לא חסומה

♣ לאורך הפרק נשים לב לדמיון בין התכנסות של אינטגרל על קרן להתכנסות של טור; ישנם גם הבדלים בין התכנסות של טורים לזו של אינטגרלים על קרן, ההבדל המרכזי הוא שהאיבר הכללי של טור מוכרח להתכנס ל-0 אם הטור מתכנס אך לא כן עבור אינטגרלים, הפונקציה אפילו לא חייבת להיות חסומה כדי שהאינטגרל יתכנס.

תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathbb{R}$.

משפט 4.1. אריתמטיקה של אינטגרלים לא אמיתיים

1. אם f אינטגרבילית על $[a,\infty)$ אז לכל $c\in\mathbb{R}$ מתקיים:
$$\int_a^\infty c\cdot f(x)\,dx=c\cdot\int_a^\infty f(x)\,dx$$
ואם f אינטגרבילית על $(-\infty,a]$ אז לכל $c\in\mathbb{R}$ מתקיים:
$$\int_{-\infty}^a c\cdot f(x)\,dx=c\cdot\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$$

2. אם f ו-g אינטגרביליות על $[a,\infty)$ אז:
$$\int_a^\infty f(x)\pm g(x)\,dx=\int_a^\infty f(x)\,dx\pm\int_a^\infty g(x)\,dx$$
ואם f ו-g אינטגרביליות על $(-\infty,a]$ אז:
$$\int_{-\infty}^a f(x)\pm g(x)\,dx=\int_{-\infty}^a f(x)\,dx\pm\int_{-\infty}^a g(x)\,dx$$

3. אם f אינטגרבילית על $[a,\infty)$ אז f אינטגרבילית על $[c,\infty)$ לכל $c\in[a,\infty)$ ובנוסף מתקיים:
$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^\infty f(x)\,dx$$
ואם f אינטגרבילית על $(-\infty,a]$ אז f אינטגרבילית על $(-\infty,c]$ לכל $c\in(-\infty,a]$ ובנוסף מתקיים:
$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx=\int_{-\infty}^c f(x)\,dx+\int_c^a f(x)\,dx$$

משפט 4.2. תנאי קושי להתכנסות של אינטגרל לא אמיתי על קרן

- נניח ש-f אינטגרבילית רימן על כל תת-קטע סגור של $[a,\infty)$.
תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-f אינטגרבילית על $[a,\infty)$ הוא שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $M<b_1,b_2\in\mathbb{R}$ מתקיים:
$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}f\left(x\right)dx\right|<\varepsilon$$

- נניח ש-f אינטגרבילית רימן על כל תת-קטע סגור של $(-\infty,a]$.
תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-f אינטגרבילית על $(-\infty,a]$ הוא שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $m\in\mathbb{R}$ כך שלכל $m>b_1,b_2\in\mathbb{R}$ מתקיים:
$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}f\left(x\right)dx\right|<\varepsilon$$

♣ כאן היה השלב שבו נמאס להוכיח את תנאי קושי פעם אחר פעם וכתבתי את הקובץ "תנאי קושי כללי לקיום גבול".

משפט 4.3. מבחן ההשוואה

- נניח ש-f ו-g אינטגרביליות רימן על כל תת-קטע סגור של $[a,\infty)$ ושקיימים $0<c\in\mathbb{R}$ ו-$b\in[a,\infty)$ כך שלכל $x\in[b,\infty)$ מתקיים $0\leq f\left(x\right)\leq c\cdot g\left(x\right)$, מתקיים:
  1. אם $\int_a^\infty g\left(x\right)dx$ מתכנס אז גם $\int_a^\infty f\left(x\right)dx$ מתכנס.
  2. אם $\int_a^\infty f\left(x\right)dx$ מתבדר אז גם $\int_a^\infty g\left(x\right)dx$ מתבדר.
- נניח ש-f ו-g אינטגרביליות רימן על כל תת-קטע סגור של $(-\infty,a]$ ושקיימים $0<c\in\mathbb{R}$ ו-$b\in(-\infty,a]$ כך שלכל $x\in(-\infty,b]$ מתקיים $0\leq f\left(x\right)\leq c\cdot g\left(x\right)$, מתקיים:
  1. אם $\int_{-\infty}^a g\left(x\right)dx$ מתכנס אז גם $\int_{-\infty}^a f\left(x\right)dx$ מתכנס.
  2. אם $\int_{-\infty}^a f\left(x\right)dx$ מתבדר אז גם $\int_{-\infty}^a g\left(x\right)dx$ מתבדר.

משפט 4.4. מבחן ההשוואה הגבולי

- נניח ש-f ו-g אינטגרביליות רימן על כל תת-קטע סגור של $[a,\infty)$ ושקיים $b\in[a,\infty)$ כך שלכל $x\in[b,\infty)$ מתקיים $0<g\left(x\right)$ ו-$0\leq f\left(x\right)$.
אם הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים וחיובי אז האינטגרלים $\int_a^\infty f\left(x\right)dx$ ו-$\int_a^\infty g\left(x\right)dx$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.
- נניח ש-f ו-g אינטגרביליות רימן על כל תת-קטע סגור של $(-\infty,a]$ ושקיים $b\in(-\infty,a]$ כך שלכל $x\in(-\infty,b]$ מתקיים $0<g\left(x\right)$ ו-$0\leq f\left(x\right)$.
אם הגבול $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים וחיובי אז האינטגרלים $\int_{-\infty}^a f\left(x\right)dx$ ו-$\int_{-\infty}^a g\left(x\right)dx$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.

משפט 4.5. מבחן דיריכלה לאינטגרלים לא אמיתיים

- נניח ש-f רציפה ב-$[a,\infty)$ והפונקציה הצוברת שלה חסומה בקרן זו, אם g גזירה ומונוטונית המקיימת $\lim_{x\to\infty}g\left(x\right)=0$ (כלומר g אי-שלילית/אי-חיובית) ובנוסף g' אינטגרבילית רימן על כל תת-קטע סגור של $[a,\infty)$ אז האינטגרל $\int_{a}^{\infty}f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)dx$ מתכנס.
- נניח ש-f רציפה ב-$(-\infty,a]$ והפונקציה הצוברת שלה חסומה בקרן זו, אם g גזירה ומונוטונית המקיימת $\lim_{x\to-\infty}g\left(x\right)=0$ (כלומר g אי-שלילית/אי-חיובית) ובנוסף g' אינטגרבילית רימן על כל תת-קטע סגור של $(-\infty,a]$ אז האינטגרל $\int_{-\infty}^{a}f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)dx$ מתכנס.

הוכחה. נוכיח את הסעיף הראשון ובהג"כ נניח ש-g מונוטונית יורדת, ההוכחה עבור פונקציה מונוטונית עולה ועבור קרן שמאלית דומה למדי.

תהא F הפונקציה הצוברת של f (מהמשפט היסודי של החשבון האינטגרלי F היא פונקציה קדומה של f) ויהי $M\in\mathbb{R}$ כך ש-$|F\left(x\right)\leq M|$ לכל $x\in[a,\infty)$.

מהיותה של g מונוטונית יורדת נדע ש-g אינטגרבילית רימן על כל תת-קטע סגור של $[a,\infty)$[14] וש-g' אי-חיובית.

מאינטגרציה בחלקים נובע כי לכל $x\in[a,\infty)$ מתקיים:

$$\int_{a}^{x}f\left(t\right)\cdot g\left(t\right)dt=\left(F\cdot g\right)|_{a}^{b}-\int_{a}^{x}F\left(t\right)\cdot g'\left(t\right)\ dt$$

נשים לב לכך ש לכל $x\in[a,\infty)$ מתקיים:

$$\begin{aligned}F\left(x\right)\cdot g\left(x\right)-F\left(a\right)\cdot g\left(a\right)&=F\left(x\right)\cdot g\left(x\right)-0\cdot g\left(a\right)\\&=F\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\\&\leq M\cdot g\left(x\right)\xrightarrow[x\to\infty]{}0\end{aligned}$$

ובנוסף גם:

$$\begin{aligned}\int_{a}^{x}\left|F\left(t\right)\cdot g'\left(t\right)\right|dt&=\int_{a}^{x}\left|F\left(t\right)\right|\cdot\left|g'\left(t\right)\right|dt\leq\int_{a}^{x}M\cdot\left|g'\left(t\right)\right|dt\\&=M\cdot\int_{a}^{x}\left|g'\left(t\right)\right|dt=M\cdot\int_{a}^{x}-g'\left(t\right)dt=-M\cdot\int_{a}^{x}g'\left(t\right)dt\end{aligned}$$

כעת נזכור ש-g' אינטגרבילית רימן כל כל תת-קטע סגור של $[a,\infty)$ ולכן, ע"פ נוסחת לייבניץ-ניוטון, לכל $x\in[a,\infty)$ מתקיים גם:

$$\int_{a}^{x}g'\left(t\right)dt=g\left(x\right)-g\left(a\right)\xrightarrow[x\to\infty]{}-g\left(a\right)$$

כלומר האינטגרל $-M\cdot\int_{a}^{\infty}g'\left(t\right)dt$ מתכנס ולכן ממבחן ההשוואה גם $\int_{a}^{\infty}F\left(t\right)\cdot g'\left(t\right)$ מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס, מאריתמטיקה של גבולות נקבל שהאינטגרל המבוקש מתכנס. ■

[14] ולכן גם מכפלתה ב-f אינטגרבילית רימן כל כל תת-קטע סגור של $[a,\infty)$.

משפט 4.6.

- נניח ש-f אינטגרבילית רימן בכל תת-קטע סגור של $[a,\infty)$,
  - אם f היא פונקציה **אי-שלילית** ומונוטונית **יורדת** אז האינטגרל $\int_a^\infty f(x)\,dx$ והטור $\sum_{n=0}^\infty f(a+n)$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.
  - אם f היא פונקציה **שלילית** ומונוטונית **עולה** אז האינטגרל $\int_a^\infty f(x)\,dx$ והטור $\sum_{n=0}^\infty f(a+n)$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.
- נניח ש-f אינטגרבילית רימן בכל תת-קטע סגור של $(-\infty,a]$,
  - אם f היא פונקציה **אי-חיובית** ומונוטונית **עולה** אז האינטגרל $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ והטור $\sum_{n=0}^\infty f(a-n)$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.
  - אם f היא פונקציה **אי-שלילית** ומונוטונית **יורדת** אז האינטגרל $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ והטור $\sum_{n=0}^\infty f(a-n)$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.

♣ ניתן להסתכל על כל סדרה $(a_n)_{n=1}^\infty$ כפונקציית מדרגות המוגדרת ע"י $g(x):=a_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in[n-1,n]$, כך סדרה חשבונית דומה מאד לפונקציה ליניארית וסדרה הנדסית דומה מאד לפונקציה מעריכית; מנקודת מבט זו הטור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ בעצם סוכם את השטחים שמתחת למדרגות בגרף של g, כלומר ישנה אנלוגיה בין סדרה והטור שלה לבין פונקציה והאינטגרל שלה. במשפט אנחנו רואים את הכיוון ההפוך: לקחנו פונקציה ובנינו ממנה סדרה, הבעיה היא שבתהליך הזה ישנה שרירותיות מסוימת בבחירה של הנקודות בגרף של f שיהיו איברי הסדרה; כלומר מסדרה אפשר ליצור פונקציה אחת בדיוק שתהיה מקבילה לה אך קיימות פונקציות רבות שהסדרה המקבילה להן זהה. העובדה הזו בעצם מאפשרת לפונקציה "להשתולל" בין הנקודות הטבעיות ולהיות "יפה" רק בהן ואז הטור והאינטגרל לא בהכרח יתכנסו ויתבדרו ביחד, זו הסיבה לכך שהמשפט דורש את המונוטוניות של f: המונוטוניות של f לא תאפשר לה "להשתולל" ויתר על כן ניתן יהיה "לכלוא" את השטח שמתחת לגרף שלה בין הטור $\sum_{n=0}^\infty f(a+n)$ לטור $\sum_{n=0}^\infty f(a+n+1)$, הוכחת המשפט תפרמל בדיוק את הטיעון הזה.

הוכחה. נוכיח את הסעיף הראשון, ההוכחה עבור הסעיפים האחרים דומה מאד.
מהעובדה ש-f מונוטונית יורדת ואי-שלילית נובע שלכל $n\in\mathbb{N}_0$ ולכל $x\in[a+n-1,a+n]$ מתקיים:

$$f(a+n+1)\leq f(x)\leq f(a+n)$$

וממילא:

$$f(a+n+1)=\int\limits_{a+n}^{a+n+1}f(a+n+1)\,dx\leq\int\limits_{a+n}^{a+n+1}f(x)\,dx\leq\int\limits_{a+1}^{a+n+1}f(a+n)\,dx=f(a+n)$$

ולכן לכל $N\in\mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{N+1}f(a+n)=\sum_{n=0}^{N}f(a+n+1)\leq\sum_{n=0}^{N}\int\limits_{a+n}^{a+n+1}f(x)\,dx\leq\sum_{n=0}^{N}f(a+n)$$

מכאן שע"פ מבחן ההשוואה הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f(a+n)$ מתכנס אם"ם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_{a+n}^{a+n+1}f(x)\,dx$ מתכנס.

נשים לב לכך שלכל $N\in\mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{N}\int\limits_{a+n}^{a+n+1}f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{a+N+1}f(x)\,dx$$

ולכך שמהיות f אי-שלילית נובע שלכל $x\in[a,\infty)$ מתקיים קיים $N\in\mathbb{N}_0$ כך שמתקיים:

$$\int_a^{a+N} f(x)\,dx \le \int_a^x f(t)\,dt \le \int_a^{a+N+1} f(x)\,dx$$

ולכן (מדובר בשוויון פורמלי בלבד):

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^{a+N} f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

כלומר הגבול שבאגף שמאל קיים אם"ם האינטגרל שבאגף ימין מתכנס ואז הם שווים. ■

מסקנה 4.7. יהי α, האינטגרל $\int_1^{\infty} x^{\alpha}\ dx$ מתכנס אם"ם $\alpha<-1$.

4.2 אינטגרל של פונקציה לא חסומה

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$ ותהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

משפט 4.8. מעבר בין שני סוגי האינטגרלים הלא אמיתיים

- אם a היא הנקודה המיוחדת היחידה של f אז (מדובר בשוויון פורמלי בלבד):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y^2}\ dy$$

כלומר האינטגרלים מתכנסים ומתבדרים ביחד ובמקרה של התכנסות הם שווים.

- אם b היא הנקודה המיוחדת היחידה של f אז (מדובר בשוויון פורמלי בלבד):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(b-\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y^2}\ dy$$

כלומר האינטגרלים מתכנסים ומתבדרים ביחד ובמקרה של התכנסות הם שווים.

♣ האינטואיציה למשפט היא שאם ניקח את הגרף של פונקציה לא חסומה בקטע סגור ונשקף אותו סביב האלכסון הראשי נקבל גרף של פונקציה[15] חסומה המוגדרת על קרן, לדוגמה קל לראות (מבחינה גאומטרית שמתקיים:

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx = \int_{-\infty}^1 \exp(x)\,dx$$

♣ המשפט מאפשר לנו לעבור בין סוגי האינטגרלים הלא אמיתיים כדי לבדוק את ההתכנסות של אינטגרל נתון וכך נוכל להשתמש במבחני ההתכנסות של שני הסוגים.

מסקנה 4.9. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$, האינטגרל $\int_0^1 x^{\alpha}dx$ מתכנס אם"ם $\alpha>-1$ ולכן האינטגרל $\int_0^{\infty} x^{\beta}\ dx$ אינו מתכנס לכל $\beta\in\mathbb{R}$.

[15] למעשה אם הפונקציה אינה הפיכה אנחנו לא נקבל גרף של פונקציה ולכן פה האינטואיציה כושלת מעט אך המשפט עובד למרות בעיה זו מפני שהוא אינו משתמש בהפיכות של f אלא בהצבה.

הוכחה. מהמשפט הקודם (4.8) נובע שמתקיים (שוויון פורמלי בלבד):

$$\int_{0}^{1} x^{\alpha}dx = \int_{\frac{1}{1-0}}^{\infty} \left(0+\frac{1}{y}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{y^2}dy = \int_{1}^{\infty} y^{-\alpha} \cdot y^{-2} \ dy = \int_{1}^{\infty} y^{-\alpha-2} \ dy$$

ממסקנה 4.7 נובע שהאינטגרלים הנ"ל מתכנסים אם"ם $-\alpha-2<-1$ כלומר אם"ם $\alpha>-1$. ■

משפט 4.10. תנאי קושי להתכנסות של אינטגרל לא אמיתי של פונקציה לא חסומה

- נניח ש-a היא הנקודה המיוחדת היחידה של f, תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-$\int_a^b f(x)\,dx$ יתכנס הוא שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $\delta_1,\delta_2\in(0,\delta)$ מתקיים:

$$\left|\int_{a+\delta_1}^{a+\delta_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

- נניח ש-b היא הנקודה המיוחדת היחידה של f, תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-$\int_a^b f(x)\,dx$ יתכנס הוא שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $\delta_1,\delta_2\in(0,\delta)$ מתקיים:

$$\left|\int_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

משפט 4.11. מבחן ההשוואה

תהא $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, נניח ש-a או b היא הנקודה המיוחדת היחידה של f ו-g ושקיים $0<c\in\mathbb{R}$ לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $0\le f(x)\le c\cdot g(x)$,

1. אם $\int_a^b g(x)\,dx$ מתכנס אז גם $\int_a^b f(x)\,dx$ מתכנס.
2. אם $\int_a^b f(x)\,dx$ מתבדר אז גם $\int_a^b g(x)\,dx$ מתבדר.

משפט 4.12. מבחן ההשוואה הגבולי

תהא $g:[a,b]\to\mathbb{R}$.

- נניח ש-a היא הנקודה המיוחדת היחידה של f ו-g ושקיים $c\in(a,b]$ כך שלכל $x\in(a,c]$ מתקיים $0<g(x)$ ו-$0\le f(x)$. אם הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים וחיובי אז האינטגרלים $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ו-$\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.
- נניח ש-b היא הנקודה המיוחדת היחידה של f ו-g ושקיים $c\in[a,b)$ כך שלכל $x\in[c,b)$ מתקיים $0<g(x)$ ו-$0\le f(x)$. אם הגבול $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים וחיובי אז האינטגרלים $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ו-$\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.

משפט 4.13. מבחן דיריכלה לאינטגרלים לא אמיתיים

- נניח ש-f רציפה ב-$[a,b)$ והפונקציה הצוברת שלה חסומה בקטע זה, אם g גזירה ומונוטונית המקיימת $\lim_{x\to b}g(x)=0$ (כלומר g אי-שלילית/אי-חיובית) ובנוסף g' אינטגרבילית רימן על כל תת-קטע סגור של $[a,b)$ אז האינטגרל $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$ מתכנס.
- נניח ש-f רציפה ב-$(a,b]$ והפונקציה הצוברת שלה חסומה בקטע זה, אם g גזירה ומונוטונית המקיימת $\lim_{x\to a}g(x)=0$ (כלומר g אי-שלילית/אי-חיובית) ובנוסף g' אינטגרבילית רימן על כל תת-קטע סגור של $(a,b]$ אז האינטגרל $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$ מתכנס.

הוכחה. נוכיח את הסעיף הראשון ובהג"כ נניח ש-g מונוטונית יורדת, ההוכחה עבור פונקציה מונוטונית עולה ועבור הקטע $(a,b]$ דומה למדי.

תהא F הפונקציה הצוברת של f (מהמשפט היסודי של החשבון האינטגרלי F היא פונקציה קדומה של f) ויהי $M \in \mathbb{R}$ כך ש-$|F(x) \leq M|$ לכל $x \in [a,b)$.

מהיותה של g מונוטונית יורדת נדע ש-g אינטגרבילית רימן על כל תת-קטע סגור של $[a,\infty)$[16] וש-g' אי-חיובית.

מאינטגרציה בחלקים נובע כי לכל $x \in [a,b)$ מתקיים:

$$\int_a^x f(t)\cdot g(t)\,dt = (F\cdot g)|_a^b - \int_a^x F(t)\cdot g'(t)\ \ dt$$

נשים לב לכך ש לכל $x \in [a,b)$ מתקיים:

$$\begin{aligned} F(x)\cdot g(x) - F(a)\cdot g(a) &= F(x)\cdot g(x) - 0\cdot g(a) \\ &= F(x)\cdot g(x) \\ &\leq M\cdot g(x) \xrightarrow[x\to b]{} 0 \end{aligned}$$

ובנוסף גם:

$$\begin{aligned} \int_a^x |F(t)\cdot g'(t)|\,dt &= \int_a^x |F(t)|\cdot|g'(t)|\,dt \leq \int_a^x M\cdot|g'(t)|\,dt \\ &= M\cdot\int_a^x |g'(t)|\,dt = M\cdot\int_a^x -g'(t)\,dt = -M\cdot\int_a^x g'(t)\,dt \end{aligned}$$

כעת נזכור ש-g' אינטגרבילית רימן כל כל תת-קטע סגור של $[a,b)$ ולכן, ע"פ נוסחת לייבניץ-ניוטון, לכל $x \in [a,b)$ מתקיים גם:

$$\int_a^x g'(t)\,dt = g(x) - g(a) \xrightarrow[x\to b]{} -g(a)$$

כלומר האינטגרל $-M\cdot\int_a^b g'(t)\,dt$ מתכנס ולכן ממבחן ההשוואה גם $\int_a^b F(t)\cdot g'(t)$ מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס, מאריתמטיקה של גבולות נקבל שהאינטגרל המבוקש מתכנס. ■

4.3 רשימת מבחני התכנסות

1. תנאי קושי (משפטים 4.2 ו-4.10)
2. מבחן ההשוואה (משפטים 4.3 ו-4.11)
3. מבחן ההשוואה הגבולי (משפטים 4.4 ו-4.12)
4. מבחן דיריכלה (משפטים 4.5 ו-4.13)
5. הקשר בין טור לאינטגרל של פונקציה מונוטונית (משפט 4.6)

[16] ולכן גם מכפלתה ב-f אינטגרבילית רימן כל כל תת-קטע סגור של $[a,\infty)$.