על שטחים ואינטגרלים

חשבון אינפיניטסימלי (2) - 80132

מרצה: יורם לסט

מתרגלים: דניאל אופנר ומתן בן-אשר

נכתב ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 מהו שטח?

מה עובר לכם בראש (מבחינה אינטואיטיבית) כשאנחנו מדברים על "שטח"?

♣ לפני שאוכל להמשיך אצטרך להסביר למה אני מתכוון שאני מדבר על "הזחה"[1] ולשם כך אתן כמה דוגמאות:

1. ישר הוא **הזחה** של נקודה בשיפוע קבוע
2. מלבן הוא **הזחה** של קטע אחד לאורך קטע אחר המאונך לו
3. מקבילית היא **הזחה** של ישר אחד לאורך קטע אחר ללא תלות בזווית שביניהם ובלבד שלא יהיו מקבילים
4. עיגול הוא **הזחה** של "מחוג" באורך הרדיוס של העיגול כשאחד מקצותיו נותר קבוע במקומו והאחר מסתובב סביבו סיבוב שלם
5. תיבה היא **הזחה** של מלבן לאורך קטע המאונך למישורים שבהם עובר המלבן בתהליך ההזחה
6. פירמידה היא **הזחה** של מצולע לאורך קטע המאונך לו כאשר המצולע קטן ביחס ישר למרחק שנשאר עד לסיום ההזחה

כלומר **הזחה** של צורה (קבוצת נקודות כלשהי) במרחב לאורך עקומה כלשהי היא קבוצת כל הנקודות שהצורה "עוברת" בהן שמזיזים אותה לאורך העקומה.

♣ לא מדובר במושג מתמטי מוגדר היטב (למרות שאולי ניתן לפרמל אותו) וכפי שציינתי בהערה לא מצאתי אף אחד אחר שמדבר על הזחה באופן דומה.

כשאנחנו מדברים על "שטח" עוברת אצלי מחשבה על מין "סכימה רציפה" של כל הנקודות שבתוך היקף הצורה הנתונה[2], כמובן שאי אפשר לבצע זאת באמת ובכל זאת יש לזה משמעות:

זוכרים שביסודי, כשלמדנו על פעולת הכפל, קראנו את $4\cdot 7$ כ-7 **פעמים** 4? האמירה הזו בעצם מרמזת על כך שאנו חושבים על פעולת הכפל כקיצור לכתיבה של סכום[3],

כשאני רוצה לחשב את שטחו של מלבן שאורכי צלעותיו הם 4 ו-7 אני בעצם חושב על קטע באורך 4 שאותו אני **מזיח** לאורך קטע באורך 7;

כלומר אני מבצע "סכימה רציפה" של קטע באורך 4 שבע "פעמים", כאשר כאן המילה "פעמים" אינה מתייחסת לסכום עם שישה סימני "+" אלא למה שכיניתי "סכימה רציפה" - אני "סוכם" את כל הקטעים באורך 4 שמופיעים בתוך המלבן וכאלה ישנם "שבעה".

זו הסיבה (האינטואיטיבית) לכך שברור לכולנו ששטח מלבן הוא מכפלת אורכי צלעותיו.

בעצם ניתן לחשוב על "הסכימה הרציפה" בצורה הבאה: אני "שם" את המלבן במערכת צירים ומעביר ישר על פני המישור מקצה אחד של המלבן עד לקצהו השני ובכל נקודה אני "שומר" את כמות הנקודות בישר שנמצאות בתוך המלבן ו"מוסיף" את ה"מספר" הזה למה ש"סכמתי" עד כה, את האינטואיציה הזו ניתן להכליל עבור כל צורה שהיא (שימו אותה במערכת צירים והעבירו ישר...) ובהמשך אנחנו נראה שההגדרה של אינטגרביליות לפי רימן מפרמלת בדיוק את זה.

[1] לא מצאתי שום מקור שמדבר על "הזחה" באופן דומה, קרוב לוודאי שקראתי ספר יחיד שדיבר בשפה זו או שהמצאתי את המושג בעצמי.

[2] וכפי שאתם יכולים לנחש מהדוגמה הראשונה שנתתי, יש לי מחשבה דומה גם כשאנחנו מדברים על "אורך".

[3] ואכן, עבור כפל של שני מספרים שלפחות אחד מהם שלם ניתן להגדיר את הכפל כחיבור כך וכך פעמים (בדומה לצורה שבה הגדרנו את הקשר בין חזקה טבעית לכפל), אולם כבר עבור מכפלה של שני רציונליים א"א לעשות זאת ולכן נזקקו המתמטיקאים להגדיר שתי פעולות על השדה ולא אחת בלבד.

2 איך מחשבים שטח של צורה נתונה?

אנחנו יודעים לחשב שטח של מלבן בצורה ישירה ע"י הכפלת אורכי שתיים מצלעותיו הניצבות זו לזו אך מה בדבר צורות אחרות? ע"פ עיקרון הסימטריה ניתן לחשב את השטח של משולש ישר זווית: ניתן להציג שני עותקים של כל משולש ישר זווית ע"י סרטוט מלבן יחיד[4] ואחד מאלכסוניו, לכן השטח של כל משולש ישר זווית הוא חצי משטחו של המלבן המתאים.
ניתן להכליל את השיטה הזו גם עבור משולש חד זוויות (מורידים אנך בתוך המשולש...), ואפילו עבור משולש קהה זווית (קצת יותר מסובך ואין זה מעניינו כעת), ומכאן לכל מצולע מפני שניתן לחלק כל מצולע למשולשים.
עד כאן היה לנו מזל אבל לא לכל צורה ניתן למצוא קשר ישיר למלבן או למשולש, מה נעשה במקרים כאלה?
כאן בא לעזרתנו מושג הגבול, נניח שאנו רוצים לחשב שטח של עיגול, ודאי ששטח העיגול קטן משטח הריבוע שחוסם אותו וגדול משטח הריבוע הנחסם על ידו; ניתן להוסיף לריבוע החסום עוד ועוד מלבנים קטנים יותר בתוך שטח העיגול או לחסר מהריבוע החוסם את העיגול עוד ועוד מלבנים קטנים יותר מחוץ לשטח העיגול[5]. הנקודה היא שככל שגדלי המלבנים הללו קטנים יותר[6] אנו נתקרב יותר ויותר אל מה שמבחינה אינטואיטיבית הוא "שטח העיגול", לכן ניתן להגדיר את השטח של העיגול כ**גבול** של סכום שטחי המלבנים כאשר גודל כל אחד מהם בנפרד שואף לאפס.

3 מה הקשר בין שטח לאינטגרלים?

בואו נניח שאני נוסע בקו ישר מנקודה x_0 במהירות קבועה v, איפה אהיה בעוד שעה? כולנו מכירים את הנוסחה מהתיכון "מהירות כפול זמן שווה דרך"[7], מכאן שלכל $t\in[0,\infty)$ המיקום שלי בזמן t יהיה $X(t)=x_0+v\cdot t$ לכל $t\in[0,\infty)$.
כעת נגדיר את הפונקציה V להיות הפונקציה של המהירות כתלות בזמן, במקרה זה מתקיים $V(t)=v$ לכל $t\in[0,\infty)$; ניזכר שהמהירות היא הנגזרת של המיקום כתלות בזמן ואכן לכל $t\in[0,\infty)$ מתקיים $X'(t)=v=V(t)$ ומכאן ש-$\int V(t)\,dt=X(t)+C$.
נסמן ב-$V_S(t)$ את השטח מתחת לגרף הפונקציה V על הקטע $[0,t]$ וראו איזה פלא: מתקיים $V_S(t)=v\cdot t=X(t)-x_0=\int V(t)\,dt$.
לקחתי מקרה פשוט מדי, נכון? מה קורה אם אני נוסע בתאוצה קבועה a? במקרה כזה נקבל שלכל $t\in[0,\infty)$ מתקיים $V(t)=v_0+a\cdot t$, כאשר v_0 היא המהירות ההתחלתית (כאשר $t=0$);
במקרה כזה השטח מתחת לגרף של פונקציית המהירות הוא שטח המלבן שאורכו t ורוחבו v_0 ועוד שטח המשולש ישר הזווית שאורך צלעותיו t ו-$a\cdot t$, א"כ השטח שמתחת לגרף הוא $v_0\cdot t+\frac{a}{2}\cdot t^2$.
מי שלמד פיזיקה בתיכון אולי ייזכר כעת שבמקרה כזה הנוסחה של המיקום היא[8]:

$$X(t)=x_0+v_0\cdot t+\frac{a}{2}\cdot t^2$$

ואכן לכל $t\in[0,\infty)$ מתקיים $X'(t)=v_0+at=V(t)$ ושוב מתקיים גם $V_S(t)=v_0\cdot t+\frac{1}{2}\cdot at\cdot t=X(t)-x_0=\int V(t)\,dt$.

[4] לכל משולש ישר זווית קיים מלבן יחיד כזה.
[5] ניתן כמובן לשלב בין שתי השיטות כך שיהיו שטחים שאינם חלק מהעיגול ויכוסו ע"י מלבנים ויהיו במקביל חלקים מהעיגול שלא יכוסו ע"י מלבנים.
[6] ובהנחה שכאשר אנו מוסיפים מלבנים איננו יכולים להוסיף מלבן שכל שטחו אינו בתוך העיגול, ובהתאמה, כאשר אנו מחסרים מלבנים איננו יכולים לחסר מלבן שכל שטחו בתוך העיגול.
[7] למעשה ההגדרה הבסיסית ביותר של מהירות היא "דרך חלקי זמן".
[8] האמת היא שכאן אני בעצם מרמה, הנוסחה הזו התקבלה ע"י אינטגרציה של V: $\int V(t)\,dt=v_0\cdot t+\frac{a}{2}\cdot t^2+C$.

למה זה עובד? נשים לב שלכל פונקציה גזירה, פונקציית הנגזרת שלה עושה בדיוק את מה שתיארתי בפרק הראשון של הקדמה זו: בכל נקודה פונקציית הנגזרת "שומרת" את השינוי בערכה של הפונקציה הקדומה (כמו שהישר שהעברנו על פני הצורה הנתונה "שמר" את תוספת[9] השטח בכל נקודה), כדי לבצע "סכימה רציפה" על כל ה"מספרים" השמורים הללו כל שעלינו לעשות הוא להעביר את את הישר שלנו על פני הגרף של הנגזרת ובכל נקודה "לשמור" את ערך הנגזרת ו"להוסיף" אותו למה ש"נסכם" עד כה - זהו בדיוק השטח שבין גרף הנגזרת לציר ה-x!

כמובן, כפי שראינו בחלק השני של הקדמה זו, הצורה הפורמלית לחשב את השטח הזה היא לקרב את השטח ע"י מלבנים שגובהם חותך את גרף הפונקציה ואז להשאיף את גודל הצלע השנייה ל-0 ובכך להשאיף גם את גודל המלבנים ל-0, זוהי בדיוק ההגדרה של אינטגרל רימן.

♣ לו הייתי יכול להכניס את האנימציה הזו לקובץ PDF הייתי מוסיף אותה כאן שכן היא מסכמת את הנאמר בצורה נהדרת.

4 דוגמאות

דוגמה. לאחר שנוכיח את הקשר בין האינטגרל הלא מסוים לבין השטח שמתחת לגרף הפונקציה נוכל לחשב את הנפח של פירמידה ששטח בסיסה הוא S וגובהה הוא h:

נשים לב שלכל $x\in[0,h]$ שטח החתך המתאים הוא $\left(\frac{x}{h}\right)^2\cdot S$ (היקף המלבן[10] המהווה את החתך עולה בקצב ליניארי ולכן שטחו גדל בקצב ריבועי),

כאשר $x=h$ פירושו החתך בגובה בסיס הפירמידה ו-$x=0$ פירושו החתך בקודקוד הפירמידה.

נגדיר $V:[0,h]\to\mathbb{R}$ ע"י $V(x)=\left(\frac{x}{h}\right)^2\cdot S$ ומכאן שנפח הפירמידה מתקבל ע"י החישוב הבא:

$$\int V(x)\,dx=\int\frac{x^2}{h^2}\cdot S\ dx=\frac{S}{h^2}\cdot\int x^2\ dx=\frac{S}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}+C=\frac{S}{3h^2}\cdot x^3+C$$

$$\Rightarrow V_\Delta=\int_0^h V(x)\,dx=\frac{S}{3h^2}\cdot h^3-\frac{S}{3h^2}\cdot 0^3=\frac{S\cdot h}{3}$$

וקיבלנו את הנוסחה המוכרת מהתיכון.

[9] במקרה של חישוב שטח צורה כל השינויים הם אי-שליליים ואפילו חיוביים ממש, במקרה של פונקציה השינוי יכול להיות גם שלילי עד כדי כך שאולי אפילו נקבל "שטח שלילי".

[10] או כל צורה אחרת של הבסיס, כולל עיגול ואז נקבל נפח של חרוט.

דוגמה. בצורה דומה נוכל לחשב נפח של כדור שרדיוסו הוא r:
נשים לב שלכל $x\in[-r,r]$ שטח החתך המתאים הוא $\pi\cdot\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2$[11] נגדיר $V:[0,r]\to\mathbb{R}$ ע"י $V\left(x\right)=\pi\cdot\left(r^2-x^2\right)$[12]
ומכאן שנפח הכדור מתקבל ע"י החישוב הבא:

$$\begin{aligned}\int V\left(x\right)dx&=\int\pi\cdot\left(r^2-x^2\right)dx\\&=\pi\cdot\int r^2-x^2dx\\&=\pi\cdot\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow V_{\odot}=2\cdot\int\limits_0^r V\left(x\right)dx&=2\pi\cdot\left(r^2\cdot r-\frac{r^3}{3}\right)-2\pi\cdot\left(r^2\cdot 0-\frac{0^3}{3}\right)\\&=2\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)=2\pi\cdot\frac{2r^3}{3}=\frac{4\pi r^3}{3}\end{aligned}$$

וקיבלנו עוד נוסחה מדף הנוסחאות של התיכון.

♣ אנחנו יודעים גם ששטח עיגול שרדיוסו הוא r שווה ל-$4\cdot\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\ dx$ אך מכיוון ש-π הוא מספר טרנסצנדנטי לא נוכל להציג את האינטגרל בצורה טובה יותר לעת עתה, זו הסיבה לכך שהתחלתי לחשב נפחים במקום להראות חישוב "בסיסי יותר" של שטח עיגול או אליפסה.

דוגמה. תהיתם פעם למה π של היקף העיגול הוא אותו π של שטחו? כלומר למה היחס בין שטח עיגול לריבוע הרדיוס שלו שווה ליחס בין היקף העיגול לקוטרו?
לפני שנמשיך נסכים על כך ש-π מוגדר להיות היחס בין היקף העיגול לקוטרו, כלומר ההיקף של עיגול שרדיוסו r הוא $2\pi r$, זוהי ההגדרה של π ואנחנו עדיין לא יודעים ששטחו הוא πr^2 - זה בדיוק מה שעלינו להוכיח.
במסכת סוכה דף ח.[13] דנה הגמרא מה צריך להיות גודלה של סוכה עגולה כדי שתיחשב כשרה וכחלק מהדיון מזכירה ששטח עיגול הוא (בקירוב) $\frac{3}{4}$ משטח הריבוע החוסם אותו, התוספות שם[14] מראים כיצד ניתן להגיע למסקנה זו[15], בעמוד הבא מופיע ציטוט[16] סוף דבריהם[17] והסבר שלי.

---

[11] הנוסחה של חצי מעגל שמרכזו בנקודה $(0,0)$ ורדיוסו r היא $\sqrt{r^2-x^2}$, כעת, לאחר שקיבלנו את אורך הרדיוס של החתך נעלה אותו בריבוע ונכפיל ב-π כדי לקבל את שטח החתך.

[12] אנו מסתכלים רק על החלק שבצד החיובי כדי שלא נקבל שהוא מתאפס יחד עם השלילי, אח"כ נכפיל את התוצאה ב-2.

[13] האות ח"ת מתייחסת לדף השמיני של המסכת (כשהדף הראשון הוא השער של הספר ולא הדף הראשון של הטקסט), והנקודה הבודדת אומרת שמדובר בעמוד הראשון של הדף (לדף יש שני צדדים וכל אחד מהם נקרא "עמוד"), אם היינו רוצים לדבר על הדף השני היינו כותבים "ח:".

[14] בדיבור המתחיל "כמה מרובע יתר על העיגול רביע".

[15] מקור ההוכחה בספר "חיבור המשיחה והתשבורת" שכתב רבי אברהם בר חייא (המאות ה-11 וה-12) שהיה הראשון להביא את האלגברה הערבית לאירופה הנבערת של תקופתו (בתוך תחומים מדעיים נוספים) ובכך מילא תפקיד חשוב בהתפתחות המתמטיקה (מקור: ויקיפדיה העברית בערך הנ"ל).

[16] הציטוט נלקח מוויקיטקסט (ראו כאן), ההערות בסוגריים והפיסוק הם משלי.

[17] לפני כן הם טורחים לבטל את הסברה שיש קשר ליניארי בין ההיקף של ריבוע לשטחו.

"...ואם באנו לכוין החשבון דמרובע יתר על העגול נוכל להוכיח בענין זה שתעשה נקודה של משהו (נקודה שאין לה שטח - עיגול קטן לאינסוף) ותקיפנה בחוטין הרבה סביב זה סיבוב אחר סיבוב עד שירחיבו ויגדל רוחב בעוגל טפח על טפח (עד שהקוטר יהיה באורך טפח ולכן הריבוע החוסם יהיה טפח על טפח); ואחר כך תחתך החוטין מן הנקודה ולמטה (ראו חלק מס' 1 באיור למטה), דהיינו מחצי רוחב עיגול ולמטה, ואחר שיחתכו יתפשטו כל החוטין מימין ומשמאל ונמצא כל חוט הולך ומאריך מחבירו משהו מכאן ומשהו מכאן עד שאתה מגיע לחוט העליון דארכו ג' טפחים שהוא חוט החיצון שהוא מסבב טפח על טפח דכל שיש ברוחבו טפח (כל עיגול שקוטרו באורך טפח) יש בהיקפו שלשה טפחים (היקפו הוא שלושה טפחים - הקירוב של π שהגמרא והתוספות משתמשים בו הוא 3). נמצאו החוטין הללו סדורין כענין זה:

כמין רצועה רחבה באמצע חצי טפח, והיינו כנגד הנקודה, מכאן ומכאן כלה והולכת וצרה עד משהו (עד 0, כלומר מדובר במשולש שווה שוקיים שאורך הבסיס שלו הוא 3 טפחים ואורך הגובה שלו הוא $\frac{1}{2}$ טפח, ראו חלק מס' 2 באיור לעיל). ואם באת לחזור ולחלק אותה באמצע היינו כנגד הנקודה תמצא שתי רצועות שכל אחת ארכה טפח ומחצה ומצד אחת רחבה חצי טפח ומצד אחת כלה עד משהו (כלומר מדובר בשני משולשים ישרי זווית שאורך אחד מניצביו הוא $1\frac{1}{2}$ טפחים וארך האחר $\frac{1}{2}$ טפח, שוב החלק מס' 2), ועתה תצטרף אלו שתי הרצועות ושים הארוך כנגד הקצר את תמצא רצועה ארכה טפח ומחצה על רוחב חצי טפח (חבר את שני המשולשים זה לזה כך שייווצר מלבן שאורכי צלעותיו כאורכי הניצבים של שני המשולשים, ראו חלק מס' 3 באיור); תחלוק אותה לשלש רצועות תמצא בה שלש רצועות מחצי טפח על חצי טפח (נחלק את המלבן לשלושה ריבועים חופפים שאורך צלעותיהם הוא חצי טפח), ואילו רצועה מרובעת של טפח (ריבוע שאורך צלעותיו הוא טפח - שהוא הריבוע אליו אנו משווים את העיגול) כשתחלקנה שתי וערב תמצא בה ארבע רצועות של חצי טפח על חצי טפח הרי לך מרובע יתר על העיגול רביע."

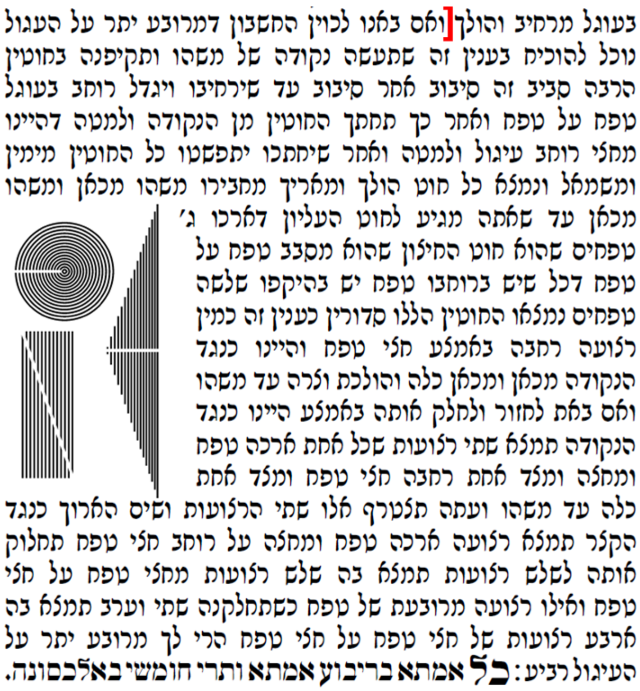
<u>הסבר של דברי התוספות בשפה אינטואיטיבית</u>

ניקח עיגול שקוטרו $2r$ נחתוך בו רדיוס ו"נפתח" את העיגול למשולש שווה שוקיים שאורך בסיסו כאורך היקף העיגול, והמרחק בין כל שתי נקודות הנמצאות באותו הגובה בשוקיים הוא כהיקף העיגול שאורך רדיוסו הוא המרחק בין הקטע שבין שתי הנקודות לבין הקודקוד שבין שתי השוקיים. הסיבה לכך שאכן קיבלנו משולש היא ההנחה שלנו שקיים יחס ישר בין היקף המעגל לקוטרו ולרדיוסו, ולכן הפונקציה המתאימה לכל נקודה על הרדיוס את היקף המעגל המתאים היא פונקציה ליניארית.

א"כ שטח העיגול הוא כשטח משולש שווה שוקיים שאורך בסיסו הוא $2\pi r$ וגובהו r, כלומר:

$$\frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

<u>דברי התוספות - "צורת הדף"</u>



בעוגל מרחיב והולך] ואם באנו לכוין החשבון דמרובע יתר על העגול נוכל להוכיח בענין זה שתעשה נקודה של משהו ותקיפנה בחוטין הרבה סביב זה סיבוב אחר סיבוב עד שירחיבו ויגדל רוחב בעוגל טפח על טפח ואחר כך תחתך החוטין מן הנקודה ולמטה דהיינו מחצי רוחב עיגול ולמטה ואחר שיחתכו יתפשטו כל החוטין מימין ומשמאל ונמצא כל חוט הולך ומאריך מחבירו משהו מכאן ומשהו מכאן עד שאתה מגיע לחוט העליון דארכו ג' טפחים שהוא חוט החיצון שהוא מסבב טפח על טפח דכל שיש ברוחבו טפח יש בהיקפו שלשה טפחים נמצאו החוטין הללו סדורין כענין זה כמין רצועה רחבה באמצע חצי טפח והיינו כנגד הנקודה מכאן ומכאן כלה והולכת וצרה עד משהו ואם באת לחזור ולחלק אותה באמצע היינו כנגד הנקודה תמצא שתי רצועות שכל אחת ארכה טפח ומחצה ומצד אחת רחבה חצי טפח ומצד אחת כלה עד משהו ועתה תצטרף אלו שתי הרצועות ושים הארוך כנגד הקצר תמצא רצועה ארכה טפח ומחצה על רוחב חצי טפח תחלוק אותה לשלש רצועות תמצא בה שלש רצועות מחצי טפח על חצי טפח ואילו רצועה מרובעת של טפח כשתחלקנה שתי וערב תמצא בה ארבע רצועות של חצי טפח על חצי טפח הרי לך מרובע יתר על העיגול רביע: **כל אמתא בריבוע אמתא ותרי חומשי באלכסונה.**

מקור: פורטל הדף היומי.

אם נרצה להמיר את ההוכחה של התוספות לשפה האינטואיטיבית שדיברנו בה קודם אז נאמר שאנו לוקחים "מעגל" ברדיוס 0 ומזיחים אותו לאורך רדיוס העיגול כך שהמעגל גדל בהתאם לרדיוס, הפונקציה המתארת את גודל המעגל כתלות ברדיוס היא הפונקציה $f\left(x\right)=2\pi x$ שהשטח מתחת לגרף שלה הוא משולש ישר זווית שאורך ניצבו האחד כאורך רדיוס העיגול ואורך ניצבו האחר הוא כהיקף העיגול ושוב קיבלנו את הנוסחה:

$$\frac{2\pi r\cdot r}{2}=\pi r^2$$

נשים לב לכך ש-$\int f\left(x\right)dx=\int 2\pi x\ dx=\pi x^2+C$ ולכן הפירמול של האינטואיציה הזו הוא באמירה ששטח העיגול הוא האינטגרל:

$$\int\limits_0^r 2\pi x\ dx=\pi r^2-\pi\cdot 0^2=\pi r^2$$

♣ הנה ניסיון שלי בילדותי לקשר בין π של היקף העיגול לבין π של שטחו: ניקח "מחוג" באורך רדיוס העיגול **ונזיח** אותו כשאחד מקצותיו נותר קבוע במקומו והאחר מסתובב סביבו סיבוב שלם, א"כ כמו שחישבנו את שטח המלבן נקבל כעת ששטח העיגול הוא $2\pi r$ "פעמים" r, כלומר $2\pi r^2$! למה זה לא עובד? למה האינטואיציה של הוכחת התוספות הצליחה בעוד ששלי נכשלה?

ובכן התשובה ברורה: למה החלטתי שאורך העקומה שלאורכה אני מזיח את המחוג היא $2\pi r$? הרי בכל נקודה של המחוג אורך העקומה שונה! מכאן אנחנו למדים שהאינטואיציה עובדת באופן פשוט רק כאשר העקומה שלאורכה אנו מזיחים את הצורה המדוברת **מאונכת** לאותה צורה[18]; אחרת יש לבצע תיקונים, במקרה הזה התיקון הנדרש הוא חישוב ממוצע בין אורכי העקומות השונות שמרכיבות את המסלול של כל נקודה במחוג ומכיוון שאין שום סיבה להעדיף אחת מהן על פני חברתה הממוצע הוא בדיוק πr אבל זה כבר ממש לא אינטואיטיבי ולא ברור שזה עובד ולכן כדאי להישאר עם האינטואיציה של הזחה במאונך לקטע המוזח.

אם בכל זאת רוצים לדעת כיצד לבצע תיקון ניתן להיעזר באינטואיציה הבאה: אם ניקח מקבילית שאינה מלבן **ונזיח** את אחת מצלעותיה לאורך אחת מהצלעות שאינה מקבילה לה נקבל את שטח המקבילית, אבל הכפלת אורכי הצלעות נותנת תשובה שגויה משום שהקטע המוזח אינו מאונך לקטע שלאורכו הוא מוזח; לכן צריך להכפיל את התשובה השגויה ב-$\sin\alpha$ כאשר α היא אחת הזוויות במקבילית (לא משנה איזו כי $\left(\sin\alpha=\sin\left(\pi-\alpha\right)\right.$ כדי לקבל מהקטע השגוי את הקטע הנכון. באותה דרך ניתן לתקן כל חישוב שבו הקטע השגוי בעל זווית קבועה בינו לבין הקטע הנכון לאורך כל ההזחה, אך לא מצאתי דרך לבצע את התיקון הזה באינטואיציה שלי עם המחוג מפני שלא מצאתי את הישר הנכון.

♣ למיטיבי לכת: מיד לאחר ההסבר על הקשר בין היקף העיגול לשטחו התוספות עוברים להוכיח שמתקיים $\sqrt{2}<1.4$.

[18] מכיוון שהשטחים היחידים שאנחנו באמת יודעים לחשב הם של מלבנים ולפיהם הגדרנו את מושג השטח.