סדרות וטורים של פונקציות - הוכחות נבחרות

חשבון אינפיניטסימלי (2) - 80132

מרצה: יורם לסט

מתרגלים: דניאל אופנר ומתן בן-אשר

סוכם ע״י: שריה אנסבכר

סמסטר א׳ תשפ״ג, האונ׳ העברית

תוכן העניינים

הפרק העוסק בפולינומי טיילור הועבר לסיכומים של נגזרות (אינפי' 1).

* * *

תודתי נתונה ל**מסכם אלמוני** על הסיכום שכתב בשנת הלימודים תשפ"א,
נעזרתי בו רבות על מנת לכתוב את הסיכום שלפניכם.
אשמח מאד לדעת מי הוא אותו מסכם אלמוני כדי שאוכל לציין זאת כאן.

* * *

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

♣ אתם רוצים לחשב את $\sin\left(1\right)$, מה עושים? פותחים מחשבון ומקישים את החישוב המבוקש ובן רגע מופיעה התשובה על מסך המחשבון בדיוק של 10 ספרות אחרי הנקודה.
שאלתם את עצמכם איך המחשבון עושה את זה? כשההורים שלנו למדו מתמטיקה לבגרות הייתה להם טבלה ובה הערכים של sin עבור עשרות זוויות (וכמו כן עבור cos ו-tan) אך לא יתכן שזה המצב במחשבון שהרי הוא נותן תשובה לכל זווית, טבלה גדולה כזו הייתה דורשת נפח אחסון גדול מאד, אז איך בכל זאת החשבון יודע כמה שווה $\sin\left(1\right)$?
התשובה היא הנושא הבא בקורס שלנו וכאן אני רוצה לתת הבהרה חשובה: **סדרות וטורים של פונקציות זה נושא לא מעניין**, לפחות לא בפני עצמו, הסיבה שאנחנו בכל זאת מתעניינים בו היא שבתנאים מסוימים ניתן ליצור סדרת פונקציות פשוטות לחישוב שמתקרבת לפונקציה קשה לחישוב (כמו סינוס) כך שנדע בדיוק עבור כל טווח טעות רצוי כמה אנחנו צריכים להתקדם בסדרה ע"מ למצוא קירוב טוב מספיק. זהו, ניגש לעבודה.

1.1 תנאים להתכנסות במידה שווה

משפט 1.1. אפיון שקול להתכנסות במ"ש של סדרות וטורים של פונקציות

תהא $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות, $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש לפונקציה גבולית f ב-D[1] אם"ם מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup\left\{\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|:x\in D\right\}\right)=0$$

באופן דומה טור פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ מתכנס במ"ש לפונקציה גבולית S אם"ם מתקיים:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{N}u_n\left(x\right)-S\left(x\right)\right|:x\in D\right\}\right)=0$$

משפט 1.2. תנאי קושי להתכנסות במ"ש של סדרות וטורים של פונקציות

תהא $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות., תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-$\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ תתכנס במ"ש ב-D הוא שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n,m\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in D$ מתקיים $\left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right|<\varepsilon$.
כמו כן תנאי הכרחי ומספיק לכך שטור פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ יתכנס במ"ש הוא שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n\in\mathbb{N}$, לכל $m\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in D$ מתקיים

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m}u_k\left(x\right)\right|<\varepsilon$$

הערה: תנאי קושי להתכנסות נקודתית הוא פשוט תנאי קושי להתכנסות סדרות.

משפט 1.3. מבחן ה-M של ויירשטראס[2]

יהי $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(x\right)$ טור פונקציות המוגדרות בתחום D, אם קיים טור מספרים $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ מתכנס כך שלכל $x\in D$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left|u_n\left(x\right)\right|\leq M_n$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(x\right)$ מתכנס בהחלט במ"ש ב-D.

[1] D מוכל בחיתוך תחומי ההגדרה של הפונקציות וכן לגבי טורים ובכלל בסיכום זה.
[2] ערך בוויקיפדיה: קארל ויירשטראס.

1.2 הורשת תכונות לפונקציה הגבולית

טענה 1.4. תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום D וחסומות בו, אם $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ב-D לפונקציה גבולית f אז f חסומה.

טענה 1.5. תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום D ורציפות בנקודה x_0, אם $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ב-D לפונקציה גבולית f אז f רציפה ב-x_0.

מסקנה 1.6. תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות המוגדרות בתחום D, אם $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ב-D לפונקציה גבולית f אז f רציפה ב-D.

♣ נשים לב ששתי הטענות האחרונות נכונות (והמסקנה) גם אם יש רק תת-סדרה של $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ העומדת בתנאים שהרי הפונקציה הגבולית f היא גם הגבולית של תת-הסדרה (ירושה).

מסקנה 1.7. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ טור פונקציות המוגדרות בתחום D ורציפות בנקודה $x_0 \in D$, אם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס במ"ש ב-D אז גם הפונקציה הגבולית S של הטור רציפה בנקודה זו, ואם (בנוסף) אלו פונקציות רציפות ב-D אז גם S רציפה ב-D.

♣ לעומת זאת אם ב-$(u_n)_{n=1}^{\infty}$ יש פונקציה אחת שאינה רציפה לא נוכל לדעת אם קיימת תת-סדרה של סדרת הסכומים החלקיים שבה כל הפונקציות רציפות ולכן ההערה הקודמת אינה נכונה עבור טורי פונקציות.[3]

♣ המשפטים האחרונים מאפשרים כמין חילוף של סדר הגבולות, נשים לב שאם $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(u_n)_{n=1}^{\infty}$ הן סדרות של פונקציות רציפות בנקודה $x_0 \in D$ אז מתקיים:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right)$$

משפט 1.8. משפט דיני (Dini)[4]

תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות על קטע סגור $[a,b]$ המתכנסת נקודתית על קטע זה לפונקציה רציפה f, אם לכל $x \in [a,b]$ סדרת המספרים $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית אז $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-f במ"ש על $[a,b]$.

הוכחה. נניח בשלילה ש-$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת במ"ש, א"כ קיים $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ וקיימת סדרת אינדקסים עולה ממש $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ שכל איבריה ב-$[a,b]$ כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon$.
הסדרה $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה ולכן ממשפט בולצאנו-ויירשטראס יש לה תת-סדרה מתכנסת $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ לגבול $x_0 \in [a,b]$.[5]
מהמונוטוניות של $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ לכל $x \in [a,b]$ נובע שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $j \in \mathbb{N}$ כך ש-$n < n_{k_j}$ ואז מתקיים:

$$\varepsilon \leq \left|f_{n_{k_j}}(x_{k_j}) - f(x_{k_j})\right| \leq \left|f_n(x_{k_j}) - f(x_{k_j})\right|$$

אבל f ו-f_n רציפות (לכל $n \in \mathbb{N}$) ולכן מאפיון היינה לרציפות נובע שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים[6]:

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq \lim_{j\to\infty}\left|f_n(x_{k_j}) - f(x_{k_j})\right| \\ &= \left|\lim_{j\to\infty} f_n(x_{k_j}) - \lim_{j\to\infty} f(x_{k_j})\right| \\ &= |f_n(x_0) - f(x_0)|\end{aligned}$$

---

[3] כאן תת-סדרה אינה יכולה "לדלג" על הפונקציה שאינה רציפה משום שסדרת הסכומים החלקיים כוללת אותה ממקום מסוים ואילך (והטור הוא הגבול **שלה**) ולכן תת-סדרה של סדרת הסכומים החלקיים תכלול אותה ממקום מסוים ואילך.

[4] ערך בוויקיפדיה האנגלית: Ulisse Dini.

[5] נשים לב שא"א להחליש את תנאי המשפט לקטע פתוח מכיוון שאז הגבול לא חייב להיות בתוך הקטע.

[6] גבולות משמרים א"ש חלשים, אם יש לנו סדרה של ביטויים שכולם מקיימים א"ש חלש עם מספר קבוע גם הגבול שלהם יקיים את אותו א"ש.

בסתירה לכך ש-$\left(f_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל-f ב-x_0, מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$\left(f_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-f במ"ש על $[a,b]$. ■

מסקנה 1.9. יהי $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n}\left(x\right)$ טור פונקציות רציפות ואי-שליליות על קטע סגור $[a,b]$ המתכנס נקודתית על קטע זה, $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n}\left(x\right)$ מתכנס במידה שווה על $[a,b]$.

1.3 אינטגרלים ונגזרות

כדאי להוסיף כאן הקדמה.

משפט 1.10. תהא $\left(f_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אינטגרביליות רימן על קטע סגור $[a,b]$ המתכנסת במ"ש על קטע זה לפונקציה f, f אינטגרבילית רימן על $[a,b]$ ולא זו אף זו, מתקיים:

$$\int_{a}^{x}f_{n}\left(t\right)dt\xrightarrow[n\to\infty]{\text{במידה שווה}}\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt$$

כלומר סדרת הצוברות של $\left(f_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש על הקטע $[a,b]$ לצוברת של f, וכמו כן מתקיים גם:

$$\int_{x}^{b}f_{n}\left(t\right)dt\xrightarrow[n\to\infty]{\text{במידה שווה}}\int_{x}^{b}f\left(t\right)dt$$

הוכחה. יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$.
מהתכנסות $\left(f_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ במ"ש נובע שקיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $x\in[a,b]$ יתקיים $\left|f_{N}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon':=\frac{\varepsilon}{1+2(b-a)}$, מכאן שלכל $x,y\in[a,b]$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right| & =\left|f\left(x\right)-f_{N}\left(x\right)+f_{N}\left(x\right)-f_{N}\left(y\right)+f_{N}\left(y\right)-f\left(y\right)\right|\\
 & \leq\left|f\left(x\right)-f_{N}\left(x\right)\right|+\left|f_{N}\left(x\right)-f_{N}\left(y\right)\right|+\left|f_{N}\left(y\right)-f\left(y\right)\right|\\
 & =2\varepsilon'+\left|f_{N}\left(x\right)-f_{N}\left(y\right)\right|
\end{aligned}$$

ולכן גם לכל תת-קטע סגור $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$ מתקיים:

$$\sup\left\{ \left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|:x,y\in[\alpha,\beta]\right\} \leq\sup\left\{ \left|f_{N}\left(x\right)-f_{N}\left(y\right)\right|:x,y\in[\alpha,\beta]\right\} +2\varepsilon'$$

כלומר התנודות של f קטנות קרובות לאלו של f_N עד כדי $2\varepsilon'$.
כעת נזכר ש-$f_{N}\in R[a,b]$ ולכן מתנאי רימן לאינטגרביליות נובע שקיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל חלוקה $P:=\left\{ x_{0},x_{1},\ldots,x_{n}\right\}$ המקיימת $\lambda\left(P\right)<\delta$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n}W_{i}\left(f_{N},P\right)\cdot\left(x_{i}-x_{i-1}\right)<\varepsilon'$$

תהא δ כנ"ל ומכאן שלכל חלוקה P כנ"ל המקיימת $\lambda\left(P\right)<\delta$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}W_{i}\left(f,P\right)\cdot\left(x_{i}-x_{i-1}\right) & \leq\sum_{i=1}^{n}\left(W_{i}\left(f_{N},P\right)+2\varepsilon'\right)\cdot\left(x_{i}-x_{i-1}\right)\\
 & =\sum_{i=1}^{n}W_{i}\left(f_{N},P\right)\cdot\left(x_{i}-x_{i-1}\right)+2\varepsilon'\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i}-x_{i-1}\right)\\
 & <\varepsilon'+2\varepsilon'\cdot\left(b-a\right)=\varepsilon'\cdot\left(1+2\left(b-a\right)\right)\\
 & =\frac{\varepsilon}{1+2\left(b-a\right)}\cdot\left(1+2\left(b-a\right)\right)=\varepsilon
\end{aligned}$$

ε הנ"ל היה שרירותי ולכן הנ"ל נכון לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ומתנאי רימן לאינטגרביליות נובע ש-$f \in [a,b]$.
מהתכנסות במ"ש של $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ נובע שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ ולכל $t \in [a,b]$ מתקיים $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, יהי N כנ"ל.
מכאן שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in [a,b]$ מתקיים:

$$\left|\int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^x f_n(t) - f(t)\,dt\right| \le \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,dt$$
$$< \int_a^x \frac{\varepsilon}{b-a}dt = (x-a)\cdot\frac{\varepsilon}{b-a} \le \varepsilon$$
$$\left|\int_x^b f_n(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_x^b f_n(t) - f(t)\,dt\right| \le \int_x^b |f_n(t) - f(t)|\,dt$$
$$< \int_x^b \frac{\varepsilon}{b-a}dt = (b-x)\cdot\frac{\varepsilon}{b-a} \le \varepsilon$$

ושוב, ε הנ"ל היה שרירותי ולכן הנ"ל נכון לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ומהגדרה נובע שסדרת הצוברות של $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש לצוברת של f כנדרש.[7] $\blacksquare$

מסקנה 1.11. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ טור פונקציות אינטגרביליות רימן על קטע סגור $[a,b]$ המתכנס במ"ש על קטע זה לפונקציה S; S אינטגרבילית רימן על $[a,b]$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\,dt$ מתכנס במ"ש על $[a,b]$ ומתקיים השוויון (לכל $x \in [a,b]$)[8]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\,dt = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\int_a^x u_n(t)\,dt\right) = \lim_{N\to\infty}\int_a^x\left(\sum_{n=1}^{N}u_n(t)\right)dt = \int_a^x S(t)\,dt = \int_a^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\right)dt$$

מסקנה 1.12. תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות גזירות ברציפות על קטע סגור $[a,b]$; אם הסדרה $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש על $[a,b]$ לפונקציה h וגם קיימת נקודה $x_0 \in [a,b]$ שבה $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית, אז $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש על $[a,b]$ לפונקציה גזירה f ולכל $x \in [a,b]$ מתקיים:

$$f'(x) = h(x)$$

כמו כן, יהי $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ טור פונקציות גזירות ברציפות על קטע סגור $[a,b]$; אם טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ מתכנס במ"ש על $[a,b]$ וגם קיימת נקודה $x_0 \in [a,b]$ שבה הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס נקודתית, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס במ"ש על $[a,b]$ לפונקציה גזירה S ולכל $x \in [a,b]$ מתקיים:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)' = S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$$

הוכחה. תהא x_0 כנ"ל ונסמן $C := \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$.
מנוסחת לייבניץ-ניוטון נובע שלכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in [a,b]$ מתקיים:

$$\int_{x_0}^x f'_n(t)\,dt = f_n(x) - f_n(x_0)$$

[7] שתי השורות האחרונות מוכיחות את החלק השני של המשפט - זה שעסק באינטגרל מ-x ל-b.
[8] אנחנו משתמשים במשפט הקודם רק בשוויון המסומן באדום.

וממילא גם:

$$f_n(x) = (f_n(x) - f_n(x_0)) + f_n(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt + f_n(x_0)$$

מהמשפט האחרון (1.10) נובע שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in [a,b]$ מתקיים:

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - \int\limits_{x_0}^{x} h(t)\,dt\right| < \varepsilon$$

ומכאן שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in [a,b]$ מתקיים:

$$\left|f_n(x) - \left(\int\limits_{x_0}^{x} h(t)\,dt + C\right)\right| = \left|\left(\int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt + f_n(x_0)\right) - \left(\int\limits_{x_0}^{x} h(t)\,dt + C\right)\right| < \varepsilon$$

כלומר הסדרה $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש על $[a,b]$ לפונקציה $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $x \in [a,b]$):

$$f(x) := \int\limits_{x_0}^{x} h(t)\,dt + C$$

בפרט $f(x_0) = C$ ומכאן שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים:

$$f(x) - f(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} h(t)\,dt$$

$$f(a) - f(x_0) = \int\limits_{x_0}^{a} h(t)\,dt$$

כלומר:

$$f(x) - f(a) = -(f(a) - f(x_0)) + (f(x) - f(x_0)) = \int\limits_{a}^{x_0} h(t)\,dt + \int\limits_{x_0}^{x} h(t)\,dt = \int\limits_{a}^{x} h(t)\,dt$$

ראינו במסקנה 1.6 שהרציפות של הפונקציות ב-$(f_n')_{n=1}^{\infty}$ גוררת את הרציפות של h ומכאן שע"פ המשפט היסודי הצוברת של h היא קדומה שלה ומכיוון שבשורה הקודמת הוכחנו ש-f נבדלת ממנה בקבוע נדע שגם f היא קדומה של h. ■

2 טורי חזקות

יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ טור חזקות סביב נקודה $x_0 \in \mathbb{R}$.

2.1 התכנסות

משפט 2.1. משפט אבל (Abel)[9]
יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ כך שהטור הנ"ל מתכנס ב-α[10], הטור הנ"ל מתכנס נקודתית בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$ המקיימת $|x-x_0| < |\alpha - x_0|$.

♣ נשים לב: המשפט אינו נכון אם היינו משתמשים בא"ש חלש במקום החזק המופיע בו משום שייתכן שהטור מתכנס ב-α אך אינו מתכנס ב-$2x_0 - \alpha = x_0 - (\alpha - x_0)$ והרי מתקיים $|x_0 - \alpha| = |2x_0 - \alpha - x_0|$.

הוכחה. הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\alpha - x_0)^n$ מתכנס ולכן $a_n \cdot (\alpha - x_0)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ בפרט קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n \cdot (\alpha - x_0)^n| \leq M$, א"כ לכל נקודה $x \in \mathbb{R}$ המקיימת $|x-x_0| < |\alpha - x_0|$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot (x-x_0)^n| &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x-x_0|^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x-x_0|^n \cdot \frac{|\alpha - x_0|^n}{|\alpha - x_0|^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |\alpha-x_0|^n \cdot \frac{|x - x_0|^n}{|\alpha - x_0|^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot (\alpha - x_0)^n| \cdot \left|\frac{x-x_0}{\alpha - x_0}\right|^n \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left|\frac{x-x_0}{\alpha - x_0}\right|^n
\end{aligned}$$

והרי $\left|\frac{x-x_0}{\alpha-x_0}\right| < 1$ ולכן $\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left|\frac{x-x_0}{\alpha-x_0}\right|^n$ הוא טור גאומטרי מתכנס וממבחן ההשוואה לטורים חיוביים נובע שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot (x-x_0)^n|$ אכן מתכנס וממילא הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ מתכנס ואפילו מתכנס בהחלט. ■

משפט 2.2. מתקיימת אחת משלוש האפשרויות הבאות:

1. הטור מתכנס נקודתית על כל הישר.
2. קיים $0 < R \in \mathbb{R}$ יחיד כך שהטור מתכנס נקודתית על $(x_0 - R, x_0 + R)$ ואולי גם ב-$x_0 + R$ ו/או ב-$x_0 - R$ אך לא בשום נקודה אחרת.
3. הטור מתכנס נקודתית אך ורק ב-x_0.

♣ המשפט הזה כמעט מובן מאליו אחרי משפט Abel ולכאורה הוא אינו אומר דבר, הנקודה היא שניתן לחשב את אותו R במקרה השני או להוכיח שמדובר באחד משני המקרים האחרים, על כך בשני המשפטים הבאים.

[9] ערך בוויקיפדיה: נילס הנריק אבל.
[10] בהכרח קיים כזה כי הטור מתכנס ב-x_0.

משפט 2.3. משפט קושי-אדמר[11]
נסמן:

$$c := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

ואז:

1. אם $c = \infty$ אז רדיוס ההתכנסות של הטור הוא 0.
2. אם $0 < c \in \mathbb{R}$ אז רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{c}$.
3. אם $c = 0$ אז רדיוס ההתכנסות הוא ∞.

משפט 2.4. משפט ד'אלמבר[12]
אם קיים הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

אז רדיוס ההתכנסות שווה לו.

♣ שני המשפטים הללו מזכירים את מבחן השורש של קושי ומבחן ד'לאמבר להתכנסות טורים חיוביים, ולא בכדי: הם נובעים ישירות ממבחנים אלו (בהתאמה).

משפט 2.5. כל טור חזקות מתכנס בהחלט במ"ש על כל תת-קטע סגור של קטע ההתכנסות, אם הטור מתכנס נקודתית בהחלט בקצה הקטע[13] אז הוא מתכנס במ"ש על הקטע הסגור המתאים לקטע ההתכנסות (שהוא קטע פתוח מהגדרה).

הוכחה. נסמן ב-R את רדיוס ההתכנסות (אם רדיוס ההתכנסות הוא ∞ אז R הוא מספר חיובי שרירותי), יהי $r \in \mathbb{R}$ כך ש-$0 \le r \le R$ ובנוסף הטור מתכנס נקודתית ב-$x_0 + r$.
לכל $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$|a_n \cdot (x - x_0)^n| = |a_n| \cdot |x - x_0|^n \le |a_n| \cdot r^n = |a_n| \cdot |(x_0 + r) - x_0|^n = |a_n \cdot ((x_0 + r) - x_0)^n|$$

ומכיוון שע"פ ההנחה הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot |(x_0 + r) - x_0|^n$ מתכנס נובע ממשפט ויירשטראס שטור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ מתכנס בהחלט במ"ש על $[x_0 - r, x_0 + r]$.
לכל תת-קטע סגור של קטע ההתכנסות קיים r כנ"ל כך שתת-הקטע מוכל בקטע $[x_0 - r, x_0 + r]$[14], ואם הטור מתכנס ב-$x_0 + R$ אז מהנימוק שלעיל נובע שהוא מתכנס בהחלט במ"ש ב-$[x_0 - R, x_0 + R]$. ■

מסקנה 2.6. הפונקציה הגבולית של טור חזקות רציפה בקטע ההתכנסות.

---

[11] ערך בוויקיפדיה: ז'אן אדמר.
[12] ערך בוויקיפדיה: ז'אן לה רון ד'אלמבר.
[13] התכנסות בהחלט בקצה אחד שקולה להתכנסות בהחלט בקצה האחר ולכן אין כל הבדל ביניהם, בנוסף, נשים לב שאם קטע ההתכנסות הוא כל הישר אז אין לקטע ההתכנסות קצה ולכן תנאי זה אינו מתקיים מהגדרה.
[14] עבור קטעים שאינם סגורים לא בהכרח קיים r כזה משום שהקצוות שלהם יכולים לכלול את קצוות קטע ההתכנסות.

למה 2.7. יהי $m \in \mathbb{N}$ ויהיו $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $m-1 \geq i \in \mathbb{N}$ מתקיים $\alpha_i \geq \alpha_{i+1} \geq 0$. אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $m \geq k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \beta_i\right| < M$$

אז מתקיים:

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \beta_i\right| < M \cdot (\alpha_1 + \alpha_m)$$

הוכחה. נסמן $B_k := \sum_{i=1}^{k} \beta_i$ לכל $m \geq k \in \mathbb{N}_0$, א"כ מתקיים:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \beta_i &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot (B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i \cdot B_i) - \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i \cdot B_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i \cdot B_i) - \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} \cdot B_i) \\
&= \alpha_m \cdot B_m - \alpha_1 \cdot B_0 + \sum_{i=1}^{m-1} (B_i \cdot (\alpha_i - \alpha_{i+1})) \\
&= \alpha_m \cdot B_m - \alpha_1 \cdot 0 + \sum_{i=1}^{m-1} (B_i \cdot (\alpha_i - \alpha_{i+1}))
\end{aligned}$$

מהעובדה ש-$\alpha_i \geq \alpha_{i+1} \geq 0$ לכל $m-1 \geq i \in \mathbb{N}$ נובע שמתקיים גם $|\alpha_i - \alpha_{i+1}| = \alpha_i - \alpha_{i+1}$ לכל $m-1 \geq i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \beta_i\right| &= \left|\alpha_m \cdot B_m - \alpha_1 \cdot 0 + \sum_{i=1}^{m-1} (B_i \cdot (\alpha_i - \alpha_{i+1}))\right| \\
&\leq |\alpha_m \cdot B_m| + \sum_{i=1}^{m-1} |B_i \cdot (\alpha_i - \alpha_{i+1})| \\
&= |\alpha_m| \cdot |B_m| + \sum_{i=1}^{m-1} |B_i| \cdot |\alpha_i - \alpha_{i+1}| \\
&< \alpha_m \cdot M + \sum_{i=1}^{m-1} M \cdot (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \\
&= \alpha_m \cdot M + M \cdot (\alpha_1 - \alpha_m) = M \cdot \alpha_1 \leq M \cdot (\alpha_1 + \alpha_m)
\end{aligned}$$

■

משפט 2.8. אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ מתכנס נקודתית ב-x_0+R (כאשר R הוא רדיוס ההתכנסות של הטור ו-$0<R\in\mathbb{R}$) אז הוא מתכנס במ"ש ב-$[x_0,x_0+R]$, כמו כן, אם הטור מתכנס נקודתית ב-x_0-R אז הוא מתכנס במ"ש ב-$[x_0-R,x_0]$. בנוסף, אם הטור מתבדר ב-x_0+R ו/או ב-x_0-R אז הוא איננו מתכנס במ"ש בקטע ההתכנסות.

♣ כמסקנה משני המשפטים האחרונים, אם הטור מתכנס נקודתית ב-x_0+R אז הוא מתכנס במ"ש בכל קטע מהצורה $[x_0-r,x_0+R]$ עבור $0<r\in\mathbb{R}$, ואם הוא מתכנס נקודתית ב-x_0-R אז הוא מתכנס במ"ש בכל קטע מהצורה $[x_0-R,x_0+r]$ (שוב עבור $0<r\in\mathbb{R}$).

הוכחה. נניח שהטור הנ"ל מתכנס ב-x_0+R (ההוכחה עבור x_0-R דומה מאד).
יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$, מתנאי קושי להתכנסות טורים נובע שקיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n,m\in\mathbb{N}$ כך ש-$n<m$ מתקיים:

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\cdot R^i\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\cdot((x_0+R)-x_0)^i\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

יהי N כנ"ל ויהיו $N<n,m\in\mathbb{N}$ כך ש-$n<m$. לכל $x\in[x_0,x_0+R]$ מתקיים $0\le\frac{x-x_0}{R}\le 1$ ולכן מהלמה (2.7) נובע שגם:

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\cdot (x-x_0)^i\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\cdot R^i\cdot\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^i\right| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot\left(\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^{n+1}+\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^{n+m}\right)\le\frac{\varepsilon}{2}\cdot 2=\varepsilon$$

שכן לכל $i\in\mathbb{N}$ כך ש-$n+1\le i\le m-1$ מתקיים $\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^i\ge\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^{i+1}$.
n ו-m הנ"ל היו שרירותיים וכמותם גם ε ולכן מתנאי קושי להתכנסות במ"ש נובע שהטור מתכנס במ"ש ב-$[x_0,x_0+R]$.
נניח שהטור מתבדר ב-x_0+R ו/או ב-x_0+R ונניח בשלילה שהוא מתכנס במ"ש ב-(x_0-R,x_0+R).
יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$, א"כ מתנאי קושי להתכנסות טורים נובע שקיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $x\in(x_0-R,x_0+R)$ ולכל $N<n,m\in\mathbb{N}$ כך ש-$n<m$ מתקיים:

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\cdot (x-x_0)^i\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

יהי N כנ"ל ויהיו $N<n,m\in\mathbb{N}$ כך ש-$n<m$, מרציפות של פולינומים נובע שמתקיים:

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\cdot((x_0\pm R)-x_0)^i\right| = \lim_{x\to(x_0\pm R)^{\mp}}\left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\cdot (x-x_0)^i\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

ולכן מתנאי קושי להתכנסות טורים נובע שהטורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot((x_0\pm R)-x_0)^n$ מתכנסים בסתירה להנחה, מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה והטור אינו מתכנס במ"ש ב-(x_0-R,x_0+R). ■

מסקנה 2.9. משפט הגבול של Abel
אם טור חזקות מתכנס נקודתית בקצה הימני של קטע ההתכנסות אז הפונקציה הגבולית שלו רציפה משמאל בקצה זה, כמו כן, אם הוא מתכנס נקודתית בקצה השמאלי אז הפונקציה הגבולית רציפה בו מימין.

מסקנה 2.10. הפונקציה הגבולית של טור חזקות רציפה בתחום ההתכנסות של הטור.

♣ נדגיש: מדובר בתחום ההתכנסות (ראינו כבר שהיא רציפה בקטע ההתכנסות).

2.2 אינטגרלים ונגזרות

משפט 2.11. הטור המתקבל מאינטגרציה איבר איבר של טור החזקות, כלומר:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \int_{x_0}^{x} (t-x_0)^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x-x_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} \cdot (x-x_0)^n$$

הוא בעל אותו רדיוס התכנסות כמו זה של הטור המקורי. בנוסף, לכל x בתחום ההתכנסות[15] מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} \cdot (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \int_{x_0}^{x} (t-x_0)^n \, dt = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t-x_0)^n \right) dt$$

♣ נובע מכאן שטור האינטגרלים מתכנס במ"ש על כל תת-קטע סגור של קטע ההתכנסות ואם הוא מתכנס נקודתית באחד מקצות הקטע אז הוא מתכנס במ"ש על הקטע הסגור שבין x_0 לקצה זה.

הוכחה. זהו מקרה פרטי של מסקנה ?? האומרת שעבור טור של פונקציות אינטגרביליות על קטע סגור המתכנס במ"ש על אותו קטע, הפונקציה הגבולית שלו אינטגרבילית על אותו קטע ומתקיים שטור האינטגרלים מתכנס במ"ש לאינטגרל של הגבולית בקטע זה; מכיוון שכל נקודה בקטע ההתכנסות כלולה בקטע סגור המוכל בקטע ההתכנסות ניתן לומר זאת כל כל נקודה בקטע ההתכנסות (גם אם אין התכנסות בקצוות). ∎

משפט 2.12. הטור המתקבל ע"י גזירה איבר איבר של טור החזקות, כלומר:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cdot (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \, (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \, (n+1) \cdot (x-x_0)^n$$

הוא בעל אותו רדיוס התכנסות של הטור המקורי ולכל x בתחום ההתכנסות[16] מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \, (n+1) \cdot (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cdot (x-x_0)^n\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cdot (x-x_0)^n\right) \right)'$$

♣ שוב נובע מכאן שטור הנגזרות מתכנס במ"ש על כל תת-קטע סגור של קטע ההתכנסות ואם הוא מתכנס נקודתית באחד מקצות הקטע אז הוא מתכנס במ"ש על הקטע הסגור שבין x_0 לקצה זה.

♣ בכיתה הוכחנו את המשפט הזה ע"י משפט קושי-אדמר אולם ניתן להוכיח אותו גם ע"י המשפט הקודם: לטור הנגזרות יש רדיוס התכנסות כלשהו, מהמשפט הקודם נובע שלטור הצוברות שלו יש את אותו רדיוס התכנסות אבל הצוברות של טור הנגזרות הן בדיוק החזקות של הטור המקורי שהרי שתיהן מקבלות ב-x_0 ערך זהה - 0.

מסקנה 2.13. נניח שרדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k$ חיובי (כולל האפשרות שהוא ∞) ונסמן ב-S את הפונקציה הגבולית של הטור, לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל x בתחום ההתכנסות מתקיים:

$$S^{(n)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k \right)^{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \cdot a_k \cdot (x-x_0)^{k-n}$$

[15] שוב נדגיש שמדובר כאן בתחום ההתכנסות, כלומר כולל כל אחד מקצות קטע ההתכנסות אם הטור מתכנס בו נקודתית.

[16] שוב נדגיש שמדובר בתחום ההתכנסות ולא רק בקטע ההתכנסות.

טענה 2.14. אם לפונקציה f יש פיתוח לטור חזקות סביב נקודה $a\in\mathbb{R}$ אז מדובר בטור טיילור שלה, כלומר בטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^{n}$$

♣ הטענה נובעת ישירות מן המסקנה הקודמת, אנחנו יודעים שלכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל x בתחום ההתכנסות מתקיים (עבור סדרה $(b_k)_{k=0}^{\infty}$ כלשהי):

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\cdot b_k\cdot(x-a)^{k-n}$$

בפרט עבור $x=a$ מתקיים:

$$f^{(n)}(a)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\cdot b_k\cdot(a-a)^{k-n}=n!\cdot b_n$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

♣ נשים לב שמהטענה האחרונה נובע שכדי שיהיה אפשר לדבר על פיתוח של פונקציה לטור חזקות היא חייבת להיות גזירה מכל סדר שהרי הטור עצמו גזיר מכל סדר.

מסקנה 2.15. לפונקציה f יש פיתוח לטור חזקות סביב נקודה $a\in\mathbb{R}$ אם"ם קיימת סביבה של a כך שלכל x בסביבה מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}R_{n,f,a}(x)=0$$

מסקנה 2.16. טורי טיילור של פונקציות נפוצות

לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{k}}{n!}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}\qquad \ln(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(x-1)^{n}}{n}$$

משפט 2.17. תהא f פונקציה גזירה מכל סדר בנקודה $a\in\mathbb{R}$, אם קיימים $0<r,M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in[a-r,a+r]$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left|f^{(n)}(x)\right|<M$ אז רדיוס ההתכנסות R של טור טיילור של f מקיים $r\geq R$ ולכל $x\in[a-r,a+r]$ מתקיים:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^{n}$$

♣ זהו תנאי מספיק לכך שטור טיילור של f יתכנס ב-$[-r,r]$ ויהיה שווה לה אך אין זה תנאי הכרחי משום שייתכן שהשארית תשאף ל-0 גם אם אין חסם אחיד על כל הנגזרות של f.

טענה 2.18. יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ ו-$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-x_0)^n$ טורי חזקות בעלי רדיוסי התכנסות חיוביים וסופיים R_1 ו-R_2 ונסמן ב-R_3 את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) \cdot (x-x_0)^n$, מתקיים $R_3 \geq \min\{R_1, R_2\}$ ואם $R_1 \neq R_2$ אז $R_3 = \min\{R_1, R_2\}$.

הוכחה. נסמן $R := \min\{R_1, R_2\}$, א"כ מאריתמטיקה של טורים נובע שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) \cdot (x-x_0)^n$ מתכנס לכל $x \in (x_0-R, x_0+R)$ שכן:

$$(x_0-R, x_0+R) = (x_0-R_1, x_0+R_1) \cap (x_0-R_2, x_0+R_2)$$

ומכאן ש-$R \geq R_3$. נניח כעת ש-$R_2 \neq R_1$ ובהג"כ נניח כי $R_1 < R_2$ ויהי $x \in (x_0+R_1, x_0+R_2)$.
אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) \cdot (x-x_0)^n$ מתכנס אז מאריתמטיקה של טורים ומהעובדה שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-x_0)^n$ מתכנס נובע שגם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ מתכנס בסתירה להגדרת x.
א"כ $R_3 \leq R_1$ ולכן $R_3 = R_1$. ■

משפט 2.19. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ טור חזקות המתכנס במ"ש על כל הישר ותהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$, f היא פונקציה פולינומיאלית - כלומר קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש-$a_n = 0$ לכל $N < n \in \mathbb{N}$.

הוכחה. תהא $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת הפונקציות המהווה את סדרת הסכומים החלקיים של טור החזקות, מתנאי קושי להתכנסות במ"ש נובע שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $N < n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$1 > |S_{n_1}(x) - S_{n_2}(x)|$$

יהי N כנ"ל. נשים לב שלכל $N < n \in \mathbb{N}$, אם $|a_{n+1}| \neq 0$ אז:

$$1 > \left|S_{n+1}\left(x_0 + \frac{1}{\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}}\right) - S_n\left(x_0 + \frac{1}{\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}}\right)\right| = \left|a_{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}}\right)^{n+1}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{|a_{n+1}|}\right| = 1$$

וזו סתירה, מכאן שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} = 0$, כלומר לכל $N+1 < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n = 0$. ■

2.3 פונקציות אנליטיות

משפט 2.20. תהא f פונקציה אנליטית בנקודה $a \in \mathbb{R}$ ורדיוס ההתכנסות של טור טיילור שלה סביב a הוא $0 < R$ (כולל המקרה שבו רדיוס ההתכנסות הוא ∞) אז f אנליטית בכל קטע ההתכנסות של הטור; בנוסף, רדיוס ההתכנסות של טור טיילור שלה R' סביב נקודה $x_0 \in (a-R, a+R)$ מקיים:

$$R' \geq \min\{|(a+R)-x_0|, |(a-R)-x_0|\}$$

אזהרה: לא למדנו את ההוכחה בכיתה, את ההוכחה שלהלן מצאתי בסיכום של אותו מסכם אלמוני (שהוזכר בראש הסיכום) ובסיכום של איב גודין אך לדעתי ישנה בעיה במעבר האחרון של ההוכחה (ראו הסבר למטה).

הוכחה. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$ טור חזקות כך ש-$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$ לכל $x \in (a-R, a+R)$.
יהי $x_0 \in (a-R, a+R)$ ויהי $h \in \mathbb{R}$ המקיים $x_0 + h \in (a-R, a+R)$ וגם $|x_0-a| + |h| < R$, מההנחה נובע כי:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x_0+h-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (x_0-a)^{n-k} \cdot h^k\right) \end{aligned}$$

מכיוון ש-$|x_0 - a| + |h| < R$ נדע שהטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot (|x_0 - a| + |h|)^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot |x_0 - a|^{n-k} \cdot |h|^k\right)$$

מתכנס (ראו את ההוכחה למשפט Abel), זהו טור הערכים המוחלטים של הטור הקודם ולכן אותו טור מתכנס בהחלט ומכאן נובע שניתן לשנות את סדר הסכימה שלו מבלי לפגוע בהתכנסותו לאותו גבול, א"כ מתקיים:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n \cdot \binom{n}{k} \cdot (x_0 - a)^{n-k} \cdot h^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot \binom{n}{k} \cdot (x_0 - a)^{n-k}\right) \cdot h^k \end{aligned}$$

■

למה זה נחשב שינוי סדר סכימה? הרי האיברים כאן שונים לחלוטין וא"א לומר שכל האיברים נמצאים בתוך הטור הפנימי משום שהטור הפנימי הוא אינסופי, הוא אינו סכום של מספרים אלא מספר ממשי המהווה גבול של סדרה (שבה כלולים האיברים שאותם אנו רוצים לסכום).

טענה 2.21. אם שתי פונקציות f ו-g אנליטיות בנקודה $a \in \mathbb{R}$ אז גם $f \pm g$ אנליטית ב-a.

הוכחה. הטענה נובעת ישירות מאריתמטיקה של טורים. ■

טענה 2.22. אם שתי פונקציות f ו-g אנליטיות בנקודה $a \in \mathbb{R}$ אז גם $f \cdot g$ אנליטית ב-a.

הוכחה. יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$ ו-$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-a)^n$ טורי חזקות כך ש-$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$ ו-$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-a)^n$ לכל x בסביבה כלשהי של a.

א"כ קיים $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ששני הטורים מתכנסים בהחלט ב-$[a-r, a+r]$ ולכן ממשפט מרטן נובע שלכל $x \in (a-r, a+r)$ מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x-a)^k \cdot b_{n-k} \cdot (x-a)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right) \cdot (x-a)^n$$

כלומר מצאנו טור חזקות המתכנס ל-$f \cdot g$ בסביבה של a ולכן $f \cdot g$ אנליטית ב-a. ■

משפט 2.23. אם פונקציה f אנליטית בנקודה $a \in \mathbb{R}$ ופונקציה g אנליטית ב-$f(a)$ אז $g \circ f$ אנליטית ב-a.

♣ בשביל הטענה הבאה יש לשים לב לכך שהפונקציה $\frac{1}{x}$ אנליטית בכל נקודה שונה מ-0 ולהשתמש במשפט האחרון.

הוכחה. **לא הוכחנו את המשפט בכיתה.** ■

טענה 2.24. אם פונקציה g אנליטית בנקודה $a \in \mathbb{R}$ ו-$g(a) \neq 0$ אז $\frac{1}{g}$ אנליטית ב-a.

מסקנה 2.25. אם שתי פונקציות f ו-g אנליטיות בנקודה $a \in \mathbb{R}$ וגם $g(a) \neq 0$ אז $\frac{f}{g}$ אנליטית ב-a.

מסקנה 2.26. אם f היא פונקציה רציונלית, כלומר קיימים שני פולינומים $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ שאינו שורש של Q מתקיים:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

אז f אנליטית בכל נקודה שאינה שורש של Q.