תורת הקבוצות הנאיבית

חשבון אינפיניטסימלי (1) - 80131

מרצה: רז קופרמן

מתרגלים: אור יער ודניאל רוזנבלט

סמסטר ב' תשפ"ב, האוניברסיטה העברית

-

מתמטיקה בדידה - 80181

מרצה: צור לוריא

מתרגלת: שני שלומי

סמסטר א' תשפ"ג, האוניברסיטה העברית

-

סוכם ע"י שריה אנסבכר

תוכן העניינים

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 פסוקים וקשרים

הערה כללית בנושא הלוגיקה: כל מה שנלמד בנושא זה הוא בסה"כ דרך לכתוב דברים שידענו לפני כן, זה לא חומר חדש וכל מי שיודע עברית ומסוגל להשתמש בהגיון ע"מ להבין את התוכן של מה שהוא קורא כבר יודע הכל בנושא זה.

הגדרה 1.1. עקרון השלישי הנמנע
פסוק הוא משפט (sentence) היכול לקבל אחד משני ערכים: או שהמשפט נכון או שהוא לא נכון[1] אך לא תתכן שום אפשרות אחרת (אין דבר כזה "נכון חלקית"), הערך שמקבל הפסוק נקרא ערך האמת של הפסוק.

♣ איני רוצה לומר שהגדרה זו היא האקסיומה הקרויה בשם זה (ראו "עקרון השלישי הנמנע" בוויקיפדיה) אלא שכל משפט (sentence) שאינו מקיים את עקרון השלישי הנמנע אינו פסוק (ולהפך, כל משפט המקיים אותו הוא פסוק).

הגדרה 1.2. משפט (או טענה) הוא פסוק שמנוסח באופן כללי ע"י שימוש במשתנה שאינו מוגדר, ורק לאחר שמגדירים את המשתנה הופך המשפט לפסוק (כפי הגדרתו לעיל).

♣ לדוגמה: $x^2 = x$ אינו פסוק (שכן x אינו מוגדר) אך הוא אכן משפט.

♣ פעולה דו-מקומית (בינארית) היא פעולה[2] המקבלת שני פרטים (לאו דווקא שונים) ומחזירה אחד.

הגדרה 1.3. קשרים

- קשר בינארי הוא פעולה דו-מקומית המקבלת שני פסוקים ומחזירה פסוק חדש שערך האמת שלו נקבע ע"י הקשר הבינארי ע"פ ערכי האמת של הפסוקים שקיבל.
- קשר אונארי הוא פעולה המקבלת פסוק יחיד ומחזירה פסוק יחיד שערך האמת שלו נקבע ע"י הקשר הבינארי ע"פ ערך אמת של הפסוק שקיבל.

♣ בהגדרות הבאות נשתמש בטבלאות אמת כדי לתאר קשרים שונים, בצד שמאל יופיעו כל המקרים האפשריים עבור ערכי האמת של הפסוקים אותם הקשר מקבל (ארבעה מקרים עבור קשר בינארי ושניים עבור קשר אונארי) ובצד ימין יופיעו הערכים שמקבל הפסוק שמחזיר הקשר.

הגדרה 1.4. לא (not)
הקשר "לא" הוא קשר אונארי המחזיר לכל פסוק P את הפסוק $\neg P$ (קרי: לא P) שמקבל ערך אמת כאשר P נכון ומקבל ערך שקר כאשר P אינו נכון, כלומר:

P	$\neg P$
True	False
False	True

הגדרה 1.5. וגם (and)
הקשר "וגם" הוא קשר בינארי המחזיר לכל שני פסוקים P ו-Q את הפסוק $P \wedge Q$ (קרי: P וגם Q) שמקבל ערך אמת כאשר P ו-Q שניהם נכונים ומקבל ערך שקר בכל מקרה אחר, כלומר:

P	Q	$P \wedge Q$
True	True	True
True	False	False
False	True	False
False	False	False

[1] מקובל לומר שהמשפט מקבל אחד משני ערכים: אמת או שקר, בעברית המילה שקר משמשת לתיאור משפט שהאומר אותו יודע שאינו נכון ואומר זאת בכוונה תחילה, לכן זה קצת בעייתי לדבר על שקר במתמטיקה; באנגלית המושגים המקבילים הם True ו-False, עבור האחרון אין מילה מתאימה בעברית (מלבד "לא נכון") ולכן מתמטיקאים משתמשים בתרגום הגרוע ל-"שקר".
[2] גם למונח פעולה נתייחס לעת עתה כמושג יסוד.

הגדרה 1.6. או (or)

הקשר "או" הוא קשר בינארי המחזיר לכל שני פסוקים P ו-Q את הפסוק $P \vee Q$ (קרי: P או Q) שמקבל ערך אמת כאשר לפחות אחד מבין שני הפסוקים P ו-Q נכון ומקבל ערך שקר כאשר שניהם אינם נכונים, כלומר:

P	Q	$P \vee Q$
True	True	True
True	False	True
False	True	True
False	False	False

♣ במדעי המחשב ישנו קשר נוסף הנקרא "xor"[3] המקבל ערך אמת רק כאשר אחד בדיוק משני הפסוקים נכון ואילו רעהו אינו נכון, כלומר (אם נסמן ב-$\tilde{\vee}$[4] את "xor"):

P	Q	$P \tilde{\vee} Q$
True	True	False
True	False	True
False	True	True
False	False	False

משפטנים נוהגים לכתוב "ו/או" כדי להדגיש שכוונתם ל-"או" כולל ולא ל-"או" מוציא.

[3] אין לו סימון מתמטי, נוהגים לקרוא לו גם "או מוציא" כדי להבדילו מ-"או כולל" שבהגדרה הקודמת.
[4] זה ממש לא סימון מקובל.

הגדרה 1.7. אם-אז (if)

הקשר "אם-אז" הוא קשר בינארי המחזיר לכל שני פסוקים P ו-Q את הפסוק $P \to Q$ (קרי: אם P אז Q או: P גורר את Q) האומר שבכל מקרה שבו P נכון Q נכון, כלומר:

P	Q	$P \to Q$
True	True	True
True	False	False
False	True	True
False	False	True

♣ נשים לב שבניגוד לקשרים "או" ו-"וגם" בקשר "אם-אז" הסדר של הפסוקים משנה את התוצאה: "אם יורד גשם אז יש עננים" הוא פסוק אמת ואילו "אם יש עננים אז יורד גשם" הוא פסוק שקר.
למען האמת אין במתמטיקה שני סימונים שהמשמעות הלשונית שלהם זהה (גם אם מבחינה מעשית אין ביניהם שום הבדל והתוצאה זהה), דוגמאות:

- $P \wedge Q$ הוא "P וגם Q" ואילו $Q \wedge P$ הוא "Q וגם P".
- $P \vee Q$ הוא "P או Q" ואילו $Q \vee P$ הוא "Q או P".
- $x < y$ הוא "x קטן מ-y" ואילו $y > x$ הוא "y גדול מ-x".
- $\neg(x = y)$ הוא "זה לא נכון ש-x שווה ל-y" או "x לא שווה ל-y" ואילו $x \neq y$ הוא "x שונה מ-y".
- ואפילו $x = y$ ו-$y = x$ נושאים תוכן שונה מבחינה לשונית: הראשון הוא "x שווה ל-y" ואילו השני הוא "y שווה ל-x".[5]

לכן אם נתבקש לכתוב פסוק שקול ל-$\neg(x = y)$ מבלי להשתמש בשלילה נוכל לכתוב $x \neq y$.

♣ נשים לב למה שאומרת ההגדרה: היא אינה אומרת ש-Q נכון **בגלל** ש-P נכון אלא ש**בכל המקרים** שבהם P נכון גם Q נכון, כך למשל הפסוק "אם $2 = 2$ אז משפט פיתגורס נכון" הוא פסוק אמת במתמטיקה.

♣ מקובל לסמן גם $P \leftarrow Q$ והמשמעות הלשונית של סימון זה היא "Q נכון בכל מקרה שבו P נכון".

♣ אם הפסוק $P \to Q$ נכון נאמר ש<u>תנאי מספיק</u> לכך ש-Q יתקיים הוא ש-P מתקיים (נשים לב: ייתכן ש-Q נכון גם מבלי ש-P נכון ולכן אין זה תנאי הכרחי), לעומת זאת נאמר ש<u>תנאי הכרחי</u> לכך ש-P יתקיים הוא ש-Q יתקיים (שהרי P אינו יכול להיות נכון מבלי ש-Q נכון[6]).

טענה 1.8. אם $P \to Q$ וגם $Q \to R$ אז $P \to R$.

[5] במו אוזניי שמעתי מרז שיש הבדל מהותי בין הפסוק $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ל-$b = \lim_{x\to a} f(x)$ כאשר הגבול הנ"ל אינו קיים: הראשון אומר שהגבול קיים ושווה ל-b (ומכיוון שהגבול לא קיים זהו פסוק שקר) ואילו השני אומר ש-b שווה למשהו שאינו מוגדר ולכן א"א לומר שהוא אינו נכון ועל כן הוא פסוק אמת.
לכאורה הגבול לא מוגדר ולכן שני אלו אינם פסוקים, מה קורה פה?

[6] נשים לב לכך שייתכן ש-Q נכון ולמרות זאת P אינו נכון ולכן אין זה תנאי מספיק

הגדרה 1.9. אם ורק אם (if and only if)[7]

הקשר "אם ורק אם" הוא קשר בינארי המחזיר לכל שני פסוקים P ו-Q את הפסוק $P \longleftrightarrow Q$ (קרי: P אם ורק אם Q) האומר ש-P נכון אם Q נכון ורק כאשר Q נכון P נכון, כלומר:

P	Q	$P \longleftrightarrow Q$
True	True	True
True	False	False
False	True	False
False	False	True

- ♣ ניתן לומר גם שהקשר "אם ורק אם" אומר שאם P אז Q וגם אם Q אז P (זה גם מסתדר עם הסימון שלו), כלומר $P \longleftrightarrow Q = (P \to Q) \land (Q \to P)$.

- ♣ למעשה, למרות שהניסוח הלשוני נראה חסר סימטריה הקשר "אם ורק אם" אינו מתחשב בסדר הפסוקים ואמר ששניהם מקבלים את אותו ערך אמת בכל מקרה, רוצה לומר הם שקולים זה לזה.

- ♣ אם הפסוק $Q \to P$ נכון נאמר שתנאי הכרחי ומספיק לכך ש-Q יתקיים הוא ש-P מתקיים (כמובן שזה עובד גם בכיוון ההפוך).

- ♣ לפעמים משתמשים בחיצים כפולים: $Q \Rightarrow P$ או $Q \Longleftrightarrow P$, המשמעות המתמטית של החיצים הכפולים זהה למשמעות של המקורית אך בד"כ משתמשים בחץ הכפול "$\Rightarrow$" כדי לומר את המילים "מכאן ש-" ולא כדי לומר "אם P אז Q" ואילו השימוש בחץ הכפול "$\Longleftrightarrow$" בא ליופי או כחלק מכותרת/ ניסוח של משפט ולא סתם שלב בהוכחה.

יהיו P, Q ו-R פסוקים.

- ♣ נהוג להקדים את הקשר "לא" לכל קשר אחר (כפי שמקדימים כפל לחיבור בסדר פעולות חשבון).

טענה 1.10. שקילויות חשובות:

פסוק	פסוק שקול
$\neg(\neg P)$	P
$\neg(P \land Q)$	$\neg P \lor \neg Q$
$\neg(P \lor Q)$	$\neg P \land \neg Q$
$P \to Q$	$\neg P \lor Q$
$P \to Q$	$\neg Q \to \neg P$
$\neg(P \to Q)$	$\neg P \land Q$
$P \longleftrightarrow Q$	$(P \to Q) \land (Q \to P)$
$(P \to R) \land (Q \to R)$	$(P \lor Q) \to R$
$(P \land Q) \land R$	$P \land (Q \land R)$
$(P \lor Q) \lor R$	$P \lor (Q \lor R)$
$P \land (Q \lor R)$	$(P \land Q) \lor (P \land R)$
$P \lor (Q \land R)$	$(P \lor Q) \land (P \lor R)$

[7] מקובל לקצר ולכתוב אם"ם או אסס (ובאנגלית iff).

♣ ניתן לכתוב את כל הקשרים באמצעות שימוש בקשרים "וגם" (and) ו-"לא" (not)[8]:

$$P \vee Q \equiv \neg\left(\neg P \wedge \neg Q\right)$$
$$P \tilde{\vee} Q \equiv \neg\left(P \wedge Q\right) \wedge \neg\left(\neg P \wedge \neg Q\right)$$
$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \equiv \neg\left(\neg\left(\neg P\right) \wedge \neg Q\right) \equiv \neg\left(P \wedge \neg Q\right)$$
$$P \longleftrightarrow Q \equiv \left(P \wedge Q\right) \vee \left(\neg P \wedge \neg Q\right) \equiv \neg\left(P \wedge \neg Q\right) \wedge \neg\left(\neg P \wedge Q\right)$$

ניתן לעשות זאת גם באמצעות קשר יחיד בשם nand (שמקבל ערך שקר רק כאשר שני הפסוקים נכונים), אבל זה כבר מעבר לעניינו של קובץ זה.
ישנם בסה"כ 16 קשרים בינאריים אפשריים (2^4 אפשרויות מפני שישנם 4 מקרים ועבור כל אחד מהם ישנם שני ערכי אמת אפשריים), אלו הקשרים הבסיסיים.

1.1 נספח: הוכחה בדרך השלילה

נניח שאנו רוצים להוכיח שפסוק Q נכון, נסמן ב-P את פסוק ה-"וגם" על כל האקסיומות שלנו[9] ואז הדרך הקלאסית להוכיח ש-Q נכון היא לבצע שרשרת של גרירות מ-P ועד ל-Q (כלומר שימוש בטענה 1.8 כמה פעמים), בתוך זה ניתן לחלק למקרים שונים שעליהם חל הפסוק Q ולהוכיח בכל אחד מהם בנפרד ש-P גורר את נכונות Q כשהוא מצומצמת לכל אחד מן המקרים בנפרד וכך להוכיח ש-P גורר את Q בכלל (זוהי הוכחה בדרך **חלוקה למקרים**).
דרך נוספת היא ההוכחה בדרך השלילה אך לפני שנדבר עליה נצטרך לעסוק קודם בשקילות בין $P \rightarrow Q$ ל-$\neg P \rightarrow \neg Q$ (מכונה "קונטרה פוזיטיב"), שקילות זו היא בעצם השקילות (במילים) בין "בכל המקרים שבהם P נכון גם Q נכון" לבין "האפשרות היחידה שבה Q אינו נכון[10] היא שגם P אינו נכון", כעת נוכל להסביר את הרעיון מאחורי הוכחה בדרך השלילה.
מכיוון ש-Q הוא פסוק עקרון השלישי הנמנע קובע שישנם בדיוק שני מקרים: או ש-$Q = \text{True}$ או ש-$Q = \text{False}$ (זהו "או" מוציא), לכן אם נראה שהמקרה $Q = \text{False}$ אינו אפשרי (או למצער שלא ייתכן ש-$Q = \text{False}$ וגם שהאקסיומות שלנו נכונות) הרי שהוכחנו שהמקרה האחר נכון (כלומר $Q = \text{True}$ כנדרש). בדרך כלל הוכחה בשלילה עובדת כך: נניח ש-$Q = \text{False}$[11], כלומר ש-$\neg Q = \text{True}$, ולאחר שרשרת של גרירות נגלה שהפסוק $\neg Q$ (יחד עם האקסיומות שלנו או בלעדיהן) מוביל ל-$\neg P$, לאמר "האפשרות היחידה שבה Q אינו נכון היא שגם P אינו נכון" וזה שקול לכך ש-"בכל המקרים שבהם P נכון גם Q נכון", אבל אנחנו טוענים ש-P נכון בכל המקרים (הרי אלו האקסיומות שלנו) ומכאן ש-Q נכון בכל המקרים.
במקרים נדירים נגלה ש-$\neg Q$ מוביל ל-Q (או ל-$\neg(\neg Q)$ השקול לו), כמעט תמיד הגרירות המובילות מ-$\neg Q$ ל-Q תסתמכנה על P ולכן אין הבדל גדול בין שני המקרים (עדיין הגענו "רק" לכך שבכל המקרים שבהם P נכון גם Q נכון); אולם תאורטית, ייתכן שהגרירות לא תסתמכנה על P ואז קורה דבר מוזר: הוכחנו בעצם ש-Q נכון בכל מערכת אקסיומות (!), אישית קשה לי להאמין שקיים פסוק כזה שאיננו טאוטולוגיה (כדוגמת "כל האנשים הם בני אדם") ו/או נכון באופן ריק (כדוגמת "כל האיברים בקבוצה הריקה הם אנשים ג'ינג'ים") ולכן אם הגעתם למצב כזה (שאינו טאוטולוגיה ו/או נכון באופן ריק) אני מציע לבדוק את עצם היותו של Q פסוק[12].

[8] ישנה מוסכמה שמבצעים את פעולת השלילה של הקשר "לא" לפני כל קשר אחר, כך למשל בשורה הראשונה לא היה צורך להוסיף סוגריים ולכתוב $\neg\left(\left(\neg P\right) \wedge \left(\neg Q\right)\right)$.
[9] P היא: אקסיומה 1 וגם אקסיומה 2 וגם אקסיומה 3 וגם... וגם האקסיומה האחרונה.
[10] שקול לכך ש-$\neg Q = \text{True}$.
[11] זוהי ה"הנחה בשלילה" המפורסמת: נניח בשלילה ש-$Q = \text{False}$.
[12] לדוגמה: נסמן ב-Q את ה"פסוק": "המשפט הזה אינו נכון" (פרדוקס השקרן). נניח בשלילה ש-$Q = \text{False}$ ומכאן שלא נכון לומר ש-Q אינו נכון (זהו התוכן של Q), כלומר $\neg\left(\neg Q\right) = \text{True}$ וזה שקול לכך ש-$Q = \text{True}$ בסתירה להנחת השלילה, מכן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-Q נכון.

אבל...
ניתן היה להניח בשלילה ש-$Q = \text{True}$ ומכאן ש-$Q = \text{False}$ בסתירה להנחת השלילה ולהסיק ש-Q אינו נכון, מה קורה כאן? האם יש בעיה בעצם הרעיון שניתן להניח בשלילה?
האמת היא שייתכן שכן ואכן יש אסכולות מתמטיות **השוללות** הוכחה בדרך **השלילה** (כגון האינטואיציוניזם) אבל נראה לי שפרדוקס השקרן אינו סיבה מספקת לכך: אם נחלק למקרים נגלה שאף אחד משני המקרים (אמת או שקר) אינו אפשרי ולכן א"א לשייך ל-Q ערך אמת, כלומר הוא אינו פסוק.

2 קבוצות

♣ כל עוד לא נלמד קורסים שעוסקים בתורת הקבוצות כנושא מרכזי נתייחס לקבוצה כמושג יסוד[13], מבחינה אינטואיטיבית קבוצה היא פשוט אוסף[14] של פרטים הנקראים איברי הקבוצה (ייתכן שישנם אין-סוף איברים בקבוצה). הדרך הפשוטה ביותר לתאר קבוצה מסוימת היא לכתוב את איברי הקבוצה בתוך סוגריים מסולסלים, כך: $\{1,2,3\}$, צורה נוספת היא $\{x \mid P(x)\}$ או $\{x : P(x)\}$ כאשר P הוא פסוק במשתנה x[15] - זוהי קבוצת כל ה-x-ים מצורה מסוימת (במקרה זה לא הגבלנו את הצורה) שעבורם $P(x) = \text{True}$[16].

סימונים:

- אם a הוא איבר של קבוצה A נסמן $a \in A$ (קרי a שייך ל-A)[17], ואם a אינו איבר של A נסמן $a \notin A$ (קרי a לא שייך ל-A).
- את מספר האיברים בקבוצה סופית[18] A נסמן ב-$|A|$ ונקרא ל-$|A|$ הגודל של A (או העוצמה של A)[19].
- את הקבוצה הריקה (זו שאין בה איברים כלל) נסמן ע"י $\emptyset := \{\}$.
- באינפי' 1 נגדיר את המספרים הטבעיים, השלמים, הרציונליים והממשיים:
  - קבוצת המספרים הטבעיים (לא כולל 0) מסומנת ע"י $\mathbb{N}$ (סימון עבור טבעיים כולל 0 הוא $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$[20]).
  - קבוצת המספרים השלמים מסומנת ב-$\mathbb{Z}$.
  - קבוצת המספרים הרציונליים תסומן ע"י $\mathbb{Q}$.
  - קבוצת המספרים הממשיים תסומן ב-$\mathbb{R}$.
- באלגברה ליניארית נראה גם את הסימון "$\mathbb{C}$" עבור המספרים המרוכבים.

[13] כמו שלא ייתכן שכל הטענות נתמכות ע"י טענות אחרות אלא מוכרחות להיות טענות שהן הראשונות בשרשרת (האקסיומות - טענות היסוד) כך גם חייבים להיות מושגים שא"א להגדיר אותם ע"י מושגים קודמים ואלו נקראים מושגי יסוד.

[14] כן, זה מעגלי: מה זה אוסף? -קבוצה, ומהי קבוצה? -אוסף, רבל הייתי חייב לכתוב כאן משהו...

[15] כלומר P אינו פסוק עד שמכניסים לתוכו x מסוים וזאת מפני שהוא נכון עבור x-ים מסוימים ואינו נכון עבור אחרים ולכן ערך האמת שלו אינו מוגדר עד שמגדירים את x.

[16] לפעמים יהיה בתיאור הקבוצה יותר מפסוק אחד במשתנה x ואז המוסכמה היא שכל עוד לא נאמר אחרת הפסוקים מקושרים זה לזה ע"י קשר "וגם", כלומר כדי שאיבר "יוכל להיכנס" לקבוצה עליו לקיים את כל הפסוקים.

[17] זהו פסוק.

[18] גם למונח קבוצה סופית נתייחס לעת עתה כמושג יסוד, בסיכום של אינפי' 2 (בקובץ "קבוצות בנות מנייה וסכומים אינסופיים") מופיעה הגדרה פורמלית.

[19] סימון זהה משמש לציון העוצמה של קבוצה אינסופית.

[20] זמן רב לא ידעתי אם הסימון הזה מקובל, המצאתי אותו בעצמי ואז איתמר צביק (שלימד אותי את ליניארית 2) השתמש בו בהרצאה ללא כל הסבר וכששאלתי אותו אם זה סימון מקובל ענה "כל הסימונים שלי מקובלים" (שפטו בעצמכם...) עד שמצאתי אותו בוויקיפדיה האנגלית.

3 כמתים

נסמן $A:=\{1,2,3\}$ המשפט "x קטן מ-4" אינו פסוק משום ש-x אינו מוגדר ולכן אין למשפט ערך אמת מוגדר, לעומת זאת המשפט "לכל x ששייך ל-A מתקיים ש-x קטן מ-4" הוא פסוק ואפילו מדובר בפסוק אמת; כמו כן המשפט "קיים x כך ש-x גדול מ-4" אינו פסוק (מאותה סיבה) אבל "קיים x ששייך ל-A כך ש-x גדול מ-4" הוא פסוק (במקרה הזה זהו פסוק שקר).
לכמתים[21] "לכלי" ו-"קיים" ישנם סימונים מתמטיים, את הכמת "לכל" מסמנים ע"י "$\forall$"[22] ואת הכמת "קיים" נסמן ב-"$\exists$"[23] (ישנו גם סימון עבור "לא קיים": "$\nexists$" אבל כמעט שלא משתמשים בו); וכך את הפסוקים שלעיל ניתן לכתוב כך:

$$\forall x\in A:x<4$$
$$\exists x\in A:x>4$$

נשים לב שהכמתים הללו הפוכים זה לזה במובן מסוים:

$$\neg\left(\forall x\in A:x<4\right)\Longleftrightarrow\exists x\in A:\neg\left(x<4\right)$$
$$\neg\left(\exists x\in A:x<4\right)\Longleftrightarrow\forall x\in A:\neg\left(x<4\right)$$

♣ הסדר בין שני כמתים שונים משנה את משמעות המשפט: הפסוק $\forall n\in\mathbb{N}\exists m\in\mathbb{N}:n<m$ (בעברית: לכל מספר טבעי n קיים מספר טבעי m כך ש-n קטן מ-m.) הוא פסוק אמת ואילו הפסוק $\exists m\in\mathbb{N}\forall n\in n:n<m$ (בעברית: קיים מספר טבעי m כך שלכל מספר טבעי n, n קטן מ-m.) הוא פסוק שקר. לעומת זאת הסדר בין שני כמתים זהים אינו משנה:

$$\forall n\in\mathbb{N}\forall q\in\mathbb{Q}:n\cdot q\in\mathbb{Q}\Longleftrightarrow\forall q\in\mathbb{Q}\forall n\in\mathbb{N}:n\cdot q\in\mathbb{Q}$$
$$\exists n\in\mathbb{N}\exists m\in\mathbb{Z}:n+m<0\Longleftrightarrow\exists m\in\mathbb{Z}\exists n\in\mathbb{N}:n+m<0$$

♣ כדי להוכיח שפסוק המתחיל בכמת "לכל" מתקיים נאמר יהי x בקבוצה המתאימה, נוכיח ש-x מקיים את הנדרש ומכיוון ש-x היה שרירותי (הדבר היחיד שידענו עליו הוא שהוא שייך לקבוצה מתאימה) הדבר נכון לכל x באותה קבוצה[24]; כדי להוכיח פסוק "קיים" יש שתי דרכים: ניתן להצביע על x בקבוצה המתאימה שמקיים את הדרוש (הוכחה קונסטרוקטיבית) אך ניתן גם להראות שקיים x בקבוצה המתאימה המקיים את הנדרש גם מבלי להצביע עליו (הוכחה שאינה קונסטרוקטיבית), הדוגמה הקלאסית להוכחה בצורה השנייה היא הוכחת התכנסות של סדרה באמצעות תנאי קושי להתכנסות (אנחנו מראים שקיים גבול אך איננו יודעים מהו).

---

[21] נקראים כך מפני שהם מכמתים לנו את האיברים שבהם מדובר.
[22] האות "A" הפוכה בשביל "All".
[23] האות "E" הפוכה בשביל "Exists".
[24] אנחנו נשתמש בשיטה זו גם כדי להקל על ניסוח של הגדרות, יחד עם זאת יש לשים שמבחינה פורמלית האמירה "יהי x בקבוצה במתאימה" אומרת שאנחנו לוקחים x מסוים מהקבוצה.

4 יחסים בין קבוצות

הגדרה 4.1. נאמר ששתי קבוצות A ו-B זרות זו לזו אם לא קיים איבר ששייך לשתיהן (כלומר $\nexists a \in A : a \in B \wedge \nexists b \in B : b \in B$), וזה שקול לכך ש-$A \cap B = \emptyset$.

הגדרה 4.2. נאמר שקבוצה A מוכלת בקבוצה B (וגם ש-A היא תת-קבוצה של B) ונסמן $A \subseteq B$, אם כל איבר ב-A הוא גם איבר ב-B (כלומר $\forall a \in A : a \in B$).

טענה 4.3. הכלה היא יחס סדר חלש[25], כלומר מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. רפלקסיביות: לכל קבוצה A מתקיים $A \subseteq A$.
2. אנטי-סימטריות: לכל שתי קבוצות A ו-B, אם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$ אז $A = B$.
3. טרנזיטיביות: לכל שלוש קבוצות A, B ו-C, אם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq C$ אז $A \subseteq C$.

♣ הכלה היא יחס סדר חלש[26], כלומר קיימות שתי קבוצות A ו-B כך ש-$B \nsubseteq A$ וגם $A \nsubseteq B$ (למשל הקבוצות $\{1\}$ ו-$\{0\}$).

הגדרה 4.4. נאמר שקבוצה A מוכלת ממש בקבוצה B (וגם ש-A היא תת-קבוצה ממש של B) ונסמן $A \subset B$, אם כל איבר ב-A הוא גם איבר ב-B (כלומר $\forall a \in A : a \in B$) ובנוסף קיים איבר ב-$B$ שאינו איבר ב-A (כלומר $\exists b \in B : b \notin A$).

♣ הסימון "$\subset$" הוא סימון דו משמעי, יש משתמשים בו כפי שהגדרנו לעיל ויש המשתמשים בו כדי לציין הכלה רגילה (לא הכלה ממש) וכדי לציין הכלה ממש משתמשים בסימון "$\subsetneq$", אני בחרתי להגדיר כפי שהגדרתי ע"מ לשמור על היופי (שלילה היא תמיד דבר מכוער) וכדי להיות עקבי עם הסימונים "$\leq$" ו-"$<$"; על כל פנים המשמעות של הסימנים "$\subseteq$" ו-"$\subsetneq$" הן חד משמעיות עבור כולם.

טענה 4.5. הכלה ממש היא יחס סדר חזק[27], כלומר מתקיימים שני הפסוקים הבאים:

1. אנטי-רפלקסיביות: לכל קבוצה A לא מתקיים $A \subset A$.
2. טרנזיטיביות: לכל שלוש קבוצות A, B ו-C, אם $A \subset B$ וגם $B \subset C$ אז $A \subset C$[28].

♣ מכאן נובעת טענה פשוטה שלא קיימות שתי קבוצות A ו-B כך ש-$A \subset B$ וגם $B \subset A$.

הגדרה 4.6. נאמר ששתי קבוצות A ו-B הן שוות זו לזו (הן אותה קבוצה) אם יש בהן אותן איברים (רוצה לומר שהדבר היחיד שמאפיין קבוצה הוא אילו איברים שייכים לה ואילו לא), וזה שקול לכך ש-$A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$.

♣ כלומר אין משמעות לכתיבה של איבר מסוים פעמיים בתוך הסוגריים המסולסלים וגם אין משמעות לסדר שבו כותבים את האיברים בתוך הסוגריים.

♣ מהגדרה זו נובע שקיימת לכל היותר קבוצה אחת ריקה (שאין בה איברים), אנחנו נניח שהיא קיימת ונסמן אותה ב-"$\emptyset$".

---

[25] נראה את המושג הזה בפרק על יחסים בינאריים.
[26] גם את המושג הזה נראה בפרק על יחסים בינאריים.
[27] גם את המושג הזה נראה בפרק על יחסים בינאריים.
[28] למעשה הדבר נכון גם אם $A \subseteq B$ או $B \subseteq C$ (אך לא שניהם יחד).

5 פעולות על קבוצות

5.1 תכונות של פעולות

♣ התכונות שלהלן הן תכונות כלליות של פעולות בינאריות, לאו דווקא פעולות על קבוצות[29].

הגדרה. תהא $\oplus$ פעולה בינארית על קבוצה A (כלומר לכל $a, b \in A$ הביטוי "$a \oplus b$" מוגדר).

- נאמר ש-$\oplus$ מקיימת את חוק החילוף (קומוטטיבית) אם לכל $a, b \in A$ מתקיים $a \oplus b = b \oplus a$.
- נאמר ש-$\oplus$ מקיימת את חוק הקיבוץ (אסוציאטיבית) אם לכל $a, b, c \in A$ מתקיים $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.
- תהא $\odot$ גם היא פעולה מ-A, נאמר ש-$\odot$ מקיימת את חוק הפילוג (דיסטריבוטיבית) ביחס לפעולה $\oplus$ אם לכל $a, b, c \in A$ מתקיים $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$.

5.2 פעולות בסיסיות

הגדרה 5.1. חיתוך קבוצות

חיתוך קבוצות הוא פעולה בינארית המחזירה לכל שתי קבוצות A ו-B את הקבוצה $A \cap B$ (קרי: A חיתוך עם B או: A חיתוך B) המוגדרת ע"י:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

הגדרה 5.2. איחוד קבוצות

איחוד קבוצות הוא פעולה בינארית המחזירה לכל שתי קבוצות A ו-B את הקבוצה $A \cup B$ (קרי: A איחוד עם B או A איחוד B) המוגדרת ע"י:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

♣ כאשר מדובר באיחוד של קבוצות זרות יש המציינים זאת ע"י החלפת הסימון "$\cup$", ב-"$\uplus$", ב-"$\dot\cup$" או ב-"$\sqcup$", כך: $A \uplus B$, $A \dot\cup B$ ו-$A \sqcup B$.

[29] למען האמת הנושא הזה היה צריך להופיע לאחר שנגדיר מהי פעולה אבל הצורך דוחק בנו להכיר את התכונות כבר כעת.

טענה 5.3. תהיינה A ו-B קבוצות סופיות, אם A ו-B זרות אז $|A\cup B|=|A|+|B|$[30] (אחרת מתקיים $|A\cup B|\leq|A|+|B|$).

♣ ניתן להסיק מכאן שבכל מקרה מתקיים $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ שהרי הקבוצות A ו-$B\setminus A$ זרות זו לזו ובנוסף מתקיים $A\cup(B\setminus A)=A\cup B$ ו-$B\setminus A=B\setminus(A\cap B)$ ואז:

$$|A\cup B|=|A\cup(B\setminus A)|=|A|+|B\setminus A|=|A|+|B\setminus(A\cap B)|$$

והרי גם $B\setminus(A\cap B)$ ו-$A\cap B$ זרות זו לזו ולכן:

$$|B|=|B\setminus(A\cap B)|+|A\cap B|$$
$$\Rightarrow|B\setminus(A\cap B)|=|B|-|A\cap B|$$
$$\Rightarrow|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

זהו עקרון ההכלה וההדחה שאותו נראה בקובץ שיעסוק בקומבינטוריקה.

משפט 5.4. איחוד וחיתוך הם קומוטטיביים ואסוציאטיביים, בנוסף, הם גם דיסטריבוטיביים זה ביחס לזה; כלומר לכל שלוש קבוצות A, B ו-C מתקיים:

	איחוד	חיתוך
חילוף (קומוטטביות)	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
קיבוץ (אסוציאטיביות)	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cup C)$
פילוג 1 (דיסטריבוטיביות)	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	
פילוג 2 (דיסטריבוטיביות)	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	

♣ המשפט נובע ישירות מהחילוף, הקיבוץ והפילוג של הקשרים "וגם" ו-"או" (4 השקילויות האחרונות בטענה הראשונה), ראו פירוט אודות הקשר בין האיחוד והחיתוך לקשרים "או" ו-"וגם" בהערה על חוקי דה-מורגן (משפט 5.9).

הגדרה 5.5. חיסור קבוצות

<u>חיסור קבוצות</u> הוא פעולה בינארית המחזירה לכל שתי קבוצות A ו-B את הקבוצה $A\setminus B$ (קרי: A פחות B) המוגדרת ע"י:

$$A\setminus B:=\{x\in A\mid x\notin B\}$$

טענה 5.6. תהיינה A ו-B שתי קבוצות סופיות, אם $B\subseteq A$ אז $|A\setminus B|=|A|-|B|$.

טענה 5.7. לכל שלוש קבוצות A, B ו-C מתקיימים שני הפסוקים הבאים:

1. $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$
2. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

---

[30] ניתן להסיק מכאן באינדוקציה גם ליותר משתי קבוצות.

הגדרה 5.8. תהא U קבוצה ותהא $A\subseteq U$ תת-קבוצה שלה, המשלים של A (ביחס ל-U) הוא הקבוצה $U\setminus A$ שנהוג לסמנה ע"י A^{c} או ב-$\overline{A}$.

משפט 5.9. חוקי דה-מורגן[31]

תהא U קבוצה ותהיינה $A,B\subseteq U$, מתקיים:

1. $(A\cap B)^{c}=A^{c}\cup B^{c}$
2. $(A\cup B)^{c}=A^{c}\cap B^{c}$

♣ נשים לב לדמיון שבין חוקי דה-מורגן לשקילויות $\neg P\vee\neg Q \iff \neg(P\wedge Q)$ (דומה לחוק הראשון) ו-$\neg(P\vee Q)\iff\neg P\wedge\neg Q$ (דומה לחוק השני), הדמיון הזה אינו מקרי: מה הקשר בין "$\wedge$" ל-"$\cap$", בין "$\vee$" ל-"$\cup$" ובין "^{c}" ל-"$\neg$"? כמובן:

$$A\cap B:=\{x\mid x\in A\ \ \wedge\ \ x\in B\}$$
$$A\cup B:=\{x\mid x\in A\ \ \vee\ \ x\in B\}$$
$$A^{c}:=\{x\in U\mid\neg(x\in A)\}$$

אני חושב שזוהי גם הסיבה לדמיון בין הסמלים המייצגים את הקשרים והפעולות.
ניתן למצוא אנלוגיה גם בין הגרירה להכלה וממילא גם בין השקילות של שני פסוקים (אם ורק אם - גרירה דו כיוונית) לשוויון בין שתי קבוצות (הכלה דו-כיוונית).

הגדרה 5.10. קבוצת החזקה

תהא A קבוצה, קבוצת החזקה של A (מסומנת ב-$P(A)$) היא קבוצת כל תתי-הקבוצות של A:

$$P(A):=\{X\mid X\subseteq A\}$$

טענה 5.11. תהא A קבוצה סופית, מתקיים $|P(A)|=2^{|A|}$.

♣ טענה זו וטענות נוספות הקושרות בין קבוצת החזקה לתכונות של חזקות הן שנתנו לקבוצת החזקה את שמה.

[31] ערך בוויקיפדיה: אוגוסטוס דה מורגן.

5.3 המכפלה הקרטזית

♣ סדרה סופית היא כעין קבוצה אלא שבה הסדר משנה את זהותה של הסדרה ומסיבה זו יכול איבר להופיע בה יותר מפעם אחת, הדרך הפשוטה ביותר לתאר סדרה מסוימת היא לכתוב את איברי הסדרה בתוך סוגריים מעוגלים, כך: $(1,2,3)$.

הגדרה 5.12. מכפלה קרטזית[32]

מכפלה קרטזית היא פעולה בינארית המחזירה לכל שתי קבוצות A ו-B את קבוצת כל הזוגות הסדורים שהאיבר הראשון שלהם שייך ל-A והשני שייך ל-B, נסמן את המכפלה הקרטזית של A ו-B ב-$A\times B$ (קרי: A קרוס B):

$$A\times B:=\{(a,b)\mid a\in A,\ \ b\in B\}$$

♣ נשים לב שמבחינה פורמלית המכפלה הקרטזית אינה אסוציאטיבית:

$$\begin{aligned}(A\times B)\times C&=\{((a,b),c)\mid a\in A,\ \ b\in B,\ \ c\in C\}\\&\neq\{(a,(b,c))\mid a\in A,\ \ b\in B,\ \ c\in C\}=A\times(B\times C)\end{aligned}$$

למרות זאת, מכיוון ש-$(A\times B)\times C$ ו-$A\times(B\times C)$ איזומורפיות שתיהן ל-$\{(a,b,c)\mid a\in A,\ \ b\in B,\ \ c\in C\}$ (ולכן איזומורפיות זו לזו) מקובל להתייחס אליה כפעולה אסוציאטיבית שמחזירה קבוצת סדרות באורך מספר הקבוצות שבמכפלה הקרטזית, מדובר כמובן בסדרות שכל איבר בהן הוא איבר בקבוצה המתאימה (לפי הסדר של המכפלה[33]) ולא סדרה הכוללת איברים, כך:

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n:=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\mid\forall n\geq i\in\mathbb{N}:a_i\in A_i\}$$

♣ הסכמה זו מאפשרת לנו להגדיר (לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל קבוצה A)[34]:

$$A^n:=\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{\text{n פעמים}}=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\mid\forall n\geq i\in\mathbb{N}:a_i\in A\}$$

נשים לב לכך ש-A^1 איזומורפית ל-A ולכן מקובל להתייחס אליה כך.

♣ אם A ו/או B ריקות אז מהגדרה נובע ש-$A\times B=\emptyset$.

טענה 5.13. לכל שתי קבוצות סופיות A ו-B מתקיים $|A\times B|=|A|\cdot|B|$.[35]

♣ טענה זו היא שנתנה למכפלה הקרטזית את שמה.

♣ לסיכום ניתן לכתוב כמה מהטענות האחרונות תחת הכותרת "חוקים חשבוניים":
תהיינה A ו-B שתי קבוצות סופיות,

1. אם A ו-B זרות אז $|A\cup B|=|A|+|B|$.
2. אם $A\subseteq B$ אז $|A\setminus B|=|A|-|B|$.
3. מתקיים $|A\times B|=|A|\cdot|B|$.
4. מתקיים $|P(A)|=2^{|A|}$.

[32] על שמו של רנה דקארט.
[33] גם לאחר הסכמה זו המכפלה הקרטזית אינה קומוטטיבית.
[34] סימון זה גם הוא סימון מקובל ובתחילת התואר נפגוש אותו בעיקר בקורסי אלגברה ליניארית.
[35] ניתן להסיק מכאן באינדוקציה גם ליותר משתי קבוצות.

6 יחסים בינאריים

6.1 התחלה

הגדרה 6.1. תהיינה A ו-B קבוצות, תת-קבוצה $R\subseteq A\times B$ נקראת יחס בינארי מ-A ל-B, אם $A=B$ אז נאמר שזהו יחס על A. אם $(a,b)\in R$ אז נאמר ש-a מתייחס ל-b ונסמן aRb.

- ♣ הרעיון מאחורי ההגדרה הזו הוא לשמור על פורמליות, זו הדרך הקלה ביותר להגדיר יחסים (כגון: "קטן מ-" ושוויון) כפי שאנחנו מכירים אותם מבלי להזדקק לתוכן של היחס, כך למשל יחס השוויון על $\mathbb{R}$ הוא פשוט $"=":=\left\{(x,x)\in\mathbb{R}^2\right\}$ והיחס "קטן מ-" על הקבוצה $\{1,2,3,4\}$ הוא:
$$\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$
מלבד הרווח שבפורמליות לדעתי האישית זוהי צורה נוראית להגדיר יחסים, אני מוכן רק לומר שהקבוצות הללו איזומורפיות ליחסים אותן הן מתיימרות לייצג.
- ♣ ניתן לייצג יחס R על קבוצה A ע"י ייצוג איברי A כנקודות ומתיחת חיצים בין האיברים המקיימים את היחס R (כאשר החץ יוצא מהאיבר השמאלי בזוג הסדור ונכנס לימני), בהמשך הקורס מתמטיקה בדידה נראה שלייצוג כזה קוראים "גרף מכוון".
- ♣ היחסים זרות, הכלה, הכלה ממש ושוויון שראינו בפרק הקודם הם יחסים בינאריים על קבוצות[36].

הגדרה 6.2. תהיינה A, B ו-C קבוצות ויהיו $R\subseteq A\times B$ ו-$S\subseteq B\times C$ יחסים, נגדיר את יחס ההרכבה $S\circ R$ ע"י:
$$S\circ R:=\{(a,c)\in A\times C\mid \exists b\in B:(a,b)\in R\wedge(b,c)\in S\}$$

- ♣ הגדרה זו דומה מאד להגדרת הרכבה של פונקציות (בהמשך) ולמעשה היא הכללה שלה שכן כל פונקציה היא יחס אך לא כל יחס הוא פונקציה.

הגדרה 6.3. תהא A קבוצה, היחס הריק על A הוא $\emptyset$, יחס הזהות על A הוא $\{(a,a)\mid a\in A\}$ והיחס המלא על A הוא A^2.

תהא A קבוצה ויהיו R ו-S יחסים על A.

הגדרה 6.4. **תכונות של יחסים בינאריים**

1. נאמר ש-R רפלקסיבי אם לכל $a\in A$ מתקיים $(a,a)\in R$.
2. נאמר ש-R אנטי-רפלקסיבי אם לכל $a\in A$ מתקיים $(a,a)\notin R$.
3. נאמר ש-R סימטרי אם לכל $a,b\in A$ המקיימים $(a,b)\in R$ מתקיים $(b,a)\in R$.
4. נאמר ש-R אנטי-סימטרי אם לכל $a,b\in A$ המקיימים $(a,b)\in R$ וגם $(b,a)\in R$ מתקיים $a=b$.
5. נאמר ש-R טרנזיטיבי אם לכל $a,b,c\in A$ המקיימים $(a,b)\in R$ וגם $(b,c)\in R$ מתקיים $(a,c)\in R$.

[36] לא כתבתי כאן "קבוצת כל הקבוצות" מפני שזו מעוררת בעיות לוגיות, ראו את הפרדוקס של קנטור בוויקיפדיה.

טענה 6.5.

1. היחס הריק על A הוא אנטי-רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי; היחס הריק אינו רפלקסיבי אס"ם $A \neq \emptyset$.
   - בסעיפים הבאים נניח ש-$A \neq \emptyset$ מפני שאחרת קיים רק יחס אחד על A והוא היחס הריק.
2. יחס הזהות על A הוא רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי; יחס הזהות אינו אנטי-רפלקסיבי.
3. היחס המלא על A הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי; היחס המלא אינו אנטי-רפלקסיבי; היחס המלא אינו אנטי-סימטרי אס"ם $|A| \geq 2$ (או ש-A אינסופית).

טענה 6.6. מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. אם R ו-S הם יחסים סימטריים אז $R \setminus S$ הוא יחס סימטרי.
2. אם R הוא יחס אנטי-סימטרי אז $R \setminus S$ הוא יחס אנטי-סימטרי.
3. אם R ו-S הם יחסים אנטי-סימטריים אז $R \cap S$ הוא יחס אנטי-סימטרי.
4. אם R ו-S הם יחסים טרנזיטיביים אז $R \cap S$ הוא יחס טרנזיטיבי.
5. אם R ו-S הם יחסים רפלקסיביים אז $S \circ R$ הוא יחס רפלקסיבי.
6. אם $R = R \circ R$ אז R הוא יחס טרנזיטיבי.

טענה 6.7. R הוא יחס סימטרי ואנטי-סימטרי אס"ם הוא מוכל ביחס הזהות.

6.2 יחסי שקילות

הגדרה 6.8. נאמר ש-R הוא <u>יחס שקילות</u> אם R רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

הגדרה 6.9. קבוצה של קבוצות לא ריקות, זרות זו לזו שאיחודן הוא A נקראת <u>חלוקה</u> של A[37], כלומר $S := \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$[38] היא חלוקה של A אם היא מקיימת את שלושת התנאים הבאים:

1. $A_i \neq \emptyset$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ לכל $n \geq i, j \in \mathbb{N}$ השונים זה מזה.
3. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$.

הגדרה 6.10. נניח ש-R הוא יחס שקילות, לכל $a \in A$ נגדיר את <u>מחלקת השקילות</u> של a (ע"פ R) להיות קבוצת כל האיברים ב-A שמתייחסים ל-a[39], כך:

$$\overline{a} := [a]_R := \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$$

קבוצת כל מחלקות השקילות נקראת <u>החלוקה</u>[40] המושרת ע"י R וגם <u>קבוצת המנה</u> ונהוג לסמנה ב-A/R.

---

[37] מהגדרה לא קיימת חלוקה של הקבוצה הריקה.

[38] יכולה להיות חלוקה המחלקת את A לאינסוף קבוצות ואז הדרישות מהחלוקה הן:

1. אין בחלוקה קבוצה ריקה
2. כל הקבוצות בחלוקה זרות זו לזו
3. האיחוד של כל הקבוצות הוא A

[39] או ש-a מתייחס אליהם, ביחס שקילות זה היינו הך.

[40] ראו בטענה הבאה שאכן מדובר בחלוקה.

סימון: בד"כ נסמן את מחלקות השקילות ע"י נציגים, כלומר ניקח ממחלקת השקילות איבר a ונסמן אותה ע"י מחלקת השקילות שלו - $[a]_R$, דרך זו עובדת מפני שאם שני איברים שייכים לאותה מחלקת שקילות אז כמובן שמחלקות השקילות שלהם זהות (או: אם $b \in [a]_R$ אז $[b]_R = [a]_R$).

טענה 6.11. כל קבוצת מחלקות שקילות של יחס שקילות על A היא חלוקה של A וכל חלוקה של A היא קבוצת מחלקות שקילות של יחס שקילות כלשהו על A.

הגדרה 6.12. יחס החלוקה

יהיו $a, b \in \mathbb{Z}$, נאמר ש-a מחלק את b (או ש-b הוא כפולה של a) ונסמן $a \mid b$ אם קיים $q \in \mathbb{Z}$ כך ש-$b = a \cdot q$.

הגדרה 6.13. יחס השקילות המודולרי

יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהיו $a, b \in \mathbb{Z}$, נאמר ש-a שקול ל-b מודולו n (ונכתוב $a \equiv b \mod n$) אם $n \mid a - b$.

- ♣ זוהי דרך קצרה יותר לומר שחלוקת a ו-b (בנפרד) ב-n תיתן את אותה שארית (לא הגדרנו מהי שארית).
- ♣ כמובן שיחס השקילות המודולרי, כשמו כן הוא - יחס שקילות.

6.3 יחסי סדר

הגדרה 6.14. יחס סדר חלש

נאמר ש-R הוא יחס סדר חלש אם הוא טרנזיטיבי, אנטי-סימטרי ורפלקסיבי.

הגדרה 6.15. יחס סדר חזק

נאמר ש-R הוא יחס סדר חזק אם הוא טרנזיטיבי ואנטי-רפלקסיבי.

- ♣ מהטרנזיטיביות והאנטי-רפלקסיביות יחד נובע שלכל $a, b \in A$ לא מתקיים aRb וגם bRa אלא לכל היותר אחד מן השניים מתקיים.

נניח ש-R הוא יחס סדר (חלש או חזק).

הגדרה 6.16. נאמר ש-R הוא יחס סדר מלא[41] אם לכל $a, b \in A$ מתקיים aRb ו/או bRa ו/או $a = b$, אחרת נאמר שהוא יחס סדר חלקי.

הגדרה 6.17. נאמר שאיבר $a \in A$ הוא איבר מינימלי אם לא קיים $b \in A$ כך שמתקיים bRa, כמו כן נאמר ש-a הוא איבר מקסימלי אם לא קיים $b \in B$ כך ש-aRb.

- ♣ נשים לב לכך שאם R הוא יחס סדר חלקי ייתכן שישנם יותר מאיבר אחד מינימלי ואיבר אחד מקסימלי.

- ♣ הזכרנו שניתן לייצג את R ע"י ייצוג איברי A כנקודות ומתיחת חיצים בין האיברים המקיימים את היחס R (כאשר החץ יוצא מהאיבר השמאלי בזוג הסדור ונכנס לימני); ביחס סדר ה"ציור" הזה נראה כמו כמה שרשראות (אחת אם מדובר ביחס סדר מלא), הבעיה היא שישנם חיצים רבים שהטרנזיטיביות מייתרת אותם, זוהי המוטיבציה להגדרה הבאה.

הגדרה 6.18. נאמר ששני איברים שונים זה מזה $a, b \in A$ המקיימים aRb הם זוג לא מיותר אם לכל $c \in A$ השונה מ-a ו-b לא מתקיים $aRcRb$.

- ♣ דיאגרמת הסה היא ציור כנ"ל שבו מותחים חץ בין שני איברים במקיימים את יחס הסדר ובתנאי שהם זוג לא מיותר.

---

[41] נקרא גם יחס סדר ליניארי או יחס סדר קווי.

7 פונקציות

7.1 התחלה

הגדרה 7.1. פונקציה (או העתקה) f מקבוצה A לקבוצה B (מסמנים $f:A\to B$) היא התאמה בין איברי A ל-B כך שלכל איבר $a\in A$ קיים איבר יחיד $b\in B$ המותאם לו, במילים אחרות פונקציה היא **יחס** מ-A ל-B המקיים את תכונת החד-ערכיות: לכל שני זוגות (a,b) ו-(a,b') ביחס מתקיים $b=b'$.

- בסימונים הנ״ל, A נקראת תחום ההגדרה של הפונקציה f ואילו B נקראת הטווח של הפונקציה f.
- לכל $a\in A$ נסמן ב-$f(a)$ את האיבר ב-B ש-f מתאימה ל-a וכך a יהיה מקור של $f(a)$ ו-$f(a)$ הוא התמונה של a.
- הקבוצה $\mathrm{Graph}f:=\{(x,f(x))\in A\times B\mid x\in A\}$ (שהיא בעצם הפונקציה עצמה) נקראת גם גרף הפונקציה.

♣ פונקציות מאופיינות ע״פ שלושה דברים:

1. התחום של הפונקציה - קבוצת האיברים שממנה מגיעה ה״קלט״ ל״מכונה״.
2. הטווח של הפונקציה - קבוצת האיברים שיכולה ה״מכונה״ להחזיר כ״פלט״.
3. כלל ההעתקה של הפונקציה - קובע עבור כל ״קלט״ איזה ״פלט״ תחזיר המכונה.

סימון: מסמנים את קבוצת הפונקציות מ-A ל-B ע״י $B^A:=\{f\mid f:A\to B\}$.

♣ לסימון יש קשר לחזקה: אם A ו-B סופיות אז $\left|B^A\right|=|B|^{|A|}$ (לכל איבר ב-A ישנן $|B|$ אפשרויות לאן ״תשלח״ אותו הפונקציה), זהו גם סימון טוב לזכור את הסימון.

הגדרה 7.2. פונקציית הזהות על קבוצה A היא הפונקציה $\mathrm{Id}_A:A\to A$ המוגדרת ע״י $\mathrm{Id}_A(x):=x$ (לכל $x\in A$).

הגדרה 7.3. תהא $f:A\to A$ פונקציה מקבוצה A אל עצמה, איבר $a\in A$ יקרא נקודת שבת של f אם $f(a)=a$.

תהא $f:A\to B$ פונקציה מקבוצה A לקבוצה B.

הגדרה 7.4. תהא $g:C\to D$, נאמר ש-$f=g$ אם $A=C$ ולכל $x\in A=C$ מתקיים $f(x)=g(x)$.

♣ נשים לב: הגדרת השוויון הזו לא התייחסה לטווח באופן מפורש ואכן שינוי הטווח של פונקציה אינו משנה את זהותה אלא אם הטווח החדש אינו מכיל את התמונה של הפונקציה (התמונה תוגדר בשורה הבאה).

הגדרה 7.5. נגדיר את התמונה של f כך: $\mathrm{Im}f:=\{y\in B\mid\exists x\in A:f(x)=y\}=\{f(x):x\in A\}$.

הגדרה 7.6. נגדיר את התמונה של תת-קבוצה $C\subseteq A$ כך: $f(C):=\{y\in B\mid\exists x\in C:f(x)=y\}=\{f(x):x\in C\}$.

♣ אם C סופית אז מהגדרה גם $f(C)$ סופית ומתקיים $|f(C)|\le|C|$.

♣ עבור A מתקיים $f(A)=\mathrm{Im}f$ (נזכור ש-$A\subseteq A$).

הגדרה 7.7. נגדיר את המקור של תת-קבוצה $D\subseteq B$ כך: $f^{-1}(D):=\{x\in A\mid f(x)\in D\}$.

♣ מקור מוגדר לכל תת-קבוצה של הטווח (ולאו דווקא עבור תתי-קבוצות של התמונה), לכן זה שיש לקבוצה מקור שאינו הקבוצה הריקה עדיין לא אומר שכל איבר בה הוא תמונה של איבר בתחום.

טענה 7.8. תהיינה A ו-B שתי קבוצות, תהא $f:A\to B$ פונקציה ותהיינה $C\subseteq A$ ו-$D\subseteq B$ תתי-קבוצות, מתקיים:

$$f(C)\cap D=f\left(C\cap f^{-1}(D)\right)$$

טענה 7.9. תהיינה A ו-B שתי קבוצות, תהא $f:A\to B$ פונקציה ותהיינה $C_1,C_2\subseteq A$ ו-$D_1,D_2\subseteq B$ תתי-קבוצות, מתקיימים חמשת הפסוקים הבאים:

1. $f\left(C_1\cup C_2\right)=f\left(C_1\right)\cup f\left(C_2\right)$.
2. $f^{-1}\left(D_1\cap D_2\right)=f^{-1}\left(D_1\right)\cap f^{-1}\left(D_2\right)$.
3. $f\left(C_1\right)\setminus f\left(C_2\right)\subseteq f\left(C_1\setminus C_2\right)$.
4. אם $C_1\subseteq C_2$ אז $f\left(C_1\right)\subseteq f\left(C_2\right)$.
5. אם $D_1\subseteq D_2$ אז $f^{-1}\left(D_1\right)\subseteq f^{-1}\left(D_2\right)$.

♣ סעיף 1 אינו נכון עבור חיתוך וסעיף 2 אינו נכון עבור איחוד.

7.2 חד-חד-ערכיות, על, הרכבה והפיכות

הגדרה 7.10. נאמר ש-f היא <u>על B</u>[42] אם $B=\text{Im}f$.

♣ ניתן "לסדר" שכל פונקציה נתונה תהיה על: נצמצם את הטווח שלה לתמונתה ומהגדרת שוויון בין פונקציות לא שינינו את זהות הפונקציה.

הגדרה 7.11. f תקרא <u>חד-חד-ערכית</u> (להלן גם: <u>חח"ע</u>) אם לכל $y\in\text{Im}f$ קיים $x\in A$ **יחיד** כך ש-$f\left(x\right)=y$, במילים אחרות: אם $x_1,x_2\in A$ מקיימים ש-$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$ אז $x_1=x_2$ או בניסוח שקול לכל $x_1,x_2\in A$ המקיימים $x_1\neq x_2$ מתקיים $f\left(x_1\right)\neq f\left(x_2\right)$.

טענה 7.12. תהיינה A ו-B שתי קבוצות סופיות ותהא $f:A\to B$ פונקציה, אם f חח"ע אז $|A|\leq|B|$ ואם f על אז $|B|\leq|A|$.

מסקנה 7.13. בסימוני הטענה הקודמת: אם f חח"ע ועל אז $|A|=|B|$.

♣ המסקנה הזו היא הבסיס הרעיוני של המושג העוצמה עבור קבוצות אינסופיות.

טענה 7.14. תהיינה A ו-B שתי קבוצות סופיות שוות גודל ($|A|=|B|$) ותהא $f:A\to B$ פונקציה, f חח"ע אס"ם f על.

טענה 7.15. תהיינה A ו-B שתי קבוצות, תהא $f:A\to B$ פונקציה ותהיינה $C_1,C_2\subseteq A$ ו-$D_1,D_2\subseteq B$ תתי-קבוצות; מתקיימים שני הפסוקים הבאים:

1. אם f חח"ע אז $f\left(C_1\right)\setminus f\left(C_2\right)=f\left(C_1\setminus C_2\right)$.
2. נניח ש-f חח"ע, $C_1\subseteq C_2$ אס"ם $f\left(C_1\right)\subseteq f\left(C_2\right)$.
3. נניח ש-f על, $D_1\subseteq D_2$ אס"ם $f^{-1}\left(D_1\right)\subseteq f^{-1}\left(D_2\right)$ ו-f.

[42] התכונה "על" היא תכונה של פונקציה ביחס לקבוצה, וזאת משום שאם נגדיר אותה כתכונה של הפונקציה בלבד נקבל סתירה; לדוגמה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f\left(x\right)=x^2$ ותהא $g:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ המוגדרת ע"י $g\left(x\right)=f\left(x\right)$, ע"פ הגדרת שוויון בין פונקציות מתקיים $f=g$ אך לא ייתכן שהפונקציה היא גם "על" וגם "לא על", לכן נאמר ש-f היא על $[0,\infty)$ אך אינה על $\mathbb{R}$. למרות זאת בדרך כלל לא מציינים את הקבוצה שאודותיה מדובר משום שברור שהכוונה היא לקבוצה שהוגדרה בתור הטווח.

הגדרה 7.16. תהא $g : B \to C$ נגדיר את <u>ההרכבה</u> של g על f כך:

$$g \circ f : A \to C,$$
$$g \circ f : x \mapsto g\left(f\left(x\right)\right)$$

♣ נשים לב לסימן "$\mapsto$" (מסמל את "שליחת" x ל-$g\left(f\left(x\right)\right)$ לכל $x \in A$) השונה מחברו "$\to$".

טענה 7.17. תהיינה A, B ו-C קבוצות ותהיינה $f : A \to B$ ו-$g : B \to C$ פונקציות, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. אם f ו-g חח"ע אז $g \circ f$ חח"ע.
2. אם f ו-g על אז $g \circ f$ על.
3. אם $g \circ f$ חח"ע אז f חח"ע.
4. אם $g \circ f$ חח"ע ו-f על אז g חח"ע.
5. אם $g \circ f$ על אז g על.
6. אם $g \circ f$ על ו-g חח"ע אז f על.

טענה 7.18. תהיינה A, B ו-C קבוצות ותהיינה $f : A \to B$, $g : A \to B$ ו-$h : B \to C$ פונקציות, אם h חח"ע ו-$h \circ f = h \circ g$ אז $f = g$.

טענה 7.19. תהיינה A, B ו-C קבוצות ותהיינה $f : A \to B$, $g : B \to C$ ו-$h : B \to C$ פונקציות, אם f על ו-$g \circ f = h \circ f$ אז $g = h$.

טענה 7.20. הרכבה היא פעולה אסוציאטיבית, כלומר לכל שלוש פונקציות f, g, h כך ש-$g \circ f$ ו-$h \circ g$ מוגדרות היטב מתקיים $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

הגדרה 7.21. תהא $C \subseteq A$ נגדיר את הפונקציה $f|_C$ (קרי: f מצומצמת ל-C) כך:

$$f|_C : C \to B,$$
$$f|_C : x \mapsto f\left(x\right)$$

הגדרה 7.22. נאמר ש-f היא <u>פונקציה הפיכה</u> אם קיימת $g : B \to A$ כך ש-$f \circ g = \mathrm{Id}_B$ ו-$g \circ f = \mathrm{Id}_A$.

טענה 7.23. פונקציה היא פונקציה הפיכה אס"ם היא חח"ע ועל.

♣ למעשה, הדרישה היחידה כדי שפונקציה תהיה הפיכה היא היותה חח"ע משום שכפי שראינו לעיל שינוי הטווח של פונקציה אינו משנה את זהותה כל עוד הטווח החדש מכיל את התמונה, ולכן תמיד אפשר להגדיר את הטווח להיות התמונה של הפונקציה ואז היא תהיה על.

הגדרה 7.24. אם $A = B$ ו-f הפיכה אז נאמר ש-f היא <u>תמורה</u> על A.

טענה 7.25. אם f הפיכה אז קיימת $g : B \to A$ יחידה כך ש-$f \circ g = \mathrm{Id}_B$ ו-$g \circ f = \mathrm{Id}_A$.

הגדרה 7.26. אם f הפיכה אז נסמן את אותה g יחידה (במונחי הטענה הקודמת) ב-f^{-1} ונקרא לה <u>הפונקציה ההופכית</u> של f.

7.3 פונקציות מיוחדות

הגדרה 7.27. הדלתא של קרונקר[43]

הדלתא של קורנקר היא יותר סימון מאשר פונקציה[44], היא מוגדרת ע"י (לכל $i,j\in\mathbb{N}$):

$$\delta_{ij}:=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

הגדרה 7.28. פונקציה מציינת

תהא X קבוצה המכילה את A, הפונקציה המציינת של A (ביחס ל-X) היא הפונקציה $\chi_A:X\to\{0,1\}$ המוגדרת ע"י (לכל $x\in X$):

$$\chi_A\left(x\right):=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

♣ סימון מקובל נוסף לפונקציה המציינת הוא $\mathbb{1}_A$.

מסקנה 7.29. תהא X קבוצה המכילה את A ואת B, מתקיים (לכל $x\in X$):

- $\chi_{A^c}\left(x\right)=1-\chi_A\left(x\right)$
- $\chi_{A\cap B}\left(x\right)=\min\left\{\chi_A\left(x\right),\chi_B\left(x\right)\right\}=\chi_A\left(x\right)\cdot\chi_B\left(x\right)$
- $\chi_{A\cup B}\left(x\right)=\max\left\{\chi_A\left(x\right),\chi_B\left(x\right)\right\}=\chi_A\left(x\right)+\chi_{B\setminus A}\left(x\right)$

7.4 פעולות

♣ כעת לאחר שהגדרנו פונקציות נוכל לומר בפשטות שפעולה היא סוג של פונקציה[45].

הגדרה 7.30. פעולה חד-מקומית (אונארית)

פעולה חד-מקומית (אונארית) היא פונקציה מקבוצה A לקבוצה B, נהוג לסמן את תוצאת הפעולה על איבר $a\in A$ ב-$\oslash a$ (כאשר "$\oslash$" הוא הסימון של הפעולה שכמובן יכול להיות מוחלף בכל סימון אחר).

הגדרה 7.31. פעולה דו-מקומית (בינארית)

פעולה דו-מקומית (בינארית) היא פונקציה מקבוצת זוגות סדורים $A\times B$ לקבוצה C (כלומר פונקציה מהצורה $\oplus:A\times B\to C$ כאשר A,B,C הן קבוצות), נהוג לסמן את תוצאת הפעולה על שני איברים $a\in A$ ו-$b\in B$ ב-$a\oplus b$ (כאשר "$\oplus$" הוא הסימון של הפעולה שכמובן יכול להיות מוחלף בכל סימון אחר).

הגדרה 7.32. נאמר שפעולה דו-מקומית "$\oplus$" מוגדרת על קבוצה A אם התחום שלה הוא $A\times A$ ולכל $a,b\in A$ מתקיים $a\oplus b\in A$.

♣ באופן כללי אומרים שפעולה מוגדרת על קבוצה אם לכל "קלט" של מספר האיברים הרצוי מהקבוצה תחזיר הפעולה איבר מן הקבוצה.

נביא כאן שוב את התכונות שראינו לעיל לגבי פעולות על קבוצות.

תהא $\oplus:A\times A\to B$ פעולה דו-מקומית.

הגדרה 7.33. חילוף (קומוטטביות)

נאמר ש-$\oplus$ מקיימת את חוק החילוף (קומוטטיבית) אם לכל $a,b\in A$ מתקיים $a\oplus b=b\oplus a$.

הגדרה 7.34. קיבוץ (אסוציאטיביות)

נאמר ש-$\oplus$ מקיימת את חוק הקיבוץ (אסוציאטיבית) אם לכל $a,b,c\in A$ מתקיים $\left(a\oplus b\right)\oplus c=a\oplus\left(b\oplus c\right)$.

---

[43] ערך בוויקיפדיה: לאופולד קרונקר.

[44] למרות שמבחינה פורמלית הגבול בין סימון לפונקציה די מטושטש (האם "$\sqrt{}$" היא פונקציה או שזהו סימון?), הנקודה המשותפת לשניהם היא החד-ערכיות - יש להם רק פירוש אחד (זו הסיבה לכך שהשורש תמיד חיובי ויש להוסיף לפניו "$\pm$" אם רוצים להתייחס לשתי האפשרויות.

[45] יש כאן עוד במה לעיין מפני שפעולות על קבוצות צריכות לכאורה שהתחום שלהן יהיה קבוצת הזוגות הסדורים שאיבריהם מ**קבוצת כל הקבוצות**, אך זו יוצרת סתירות ולכן אינה קבוצה.

תהא $\odot : A \times A \to B$ גם היא פעולה דו-מקומית.

הגדרה 7.35. פילוג (דיסטריבוטיביות)

נאמר ש-$\odot$ היא מקיימת את חוק הפילוג (דיסטריבוטיבית) ביחס לפעולה $\oplus$ אם לכל $a, b, c \in A$ מתקיים $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$.

- ♣ באופן מסורתי פעולות הנקראות "כפל" מסומנות בעיגול ופעולות הנקראות "חיבור" מסומנות בצלב, וכמו כן המסורת היא שאם מתקיים פילוג אז הפעולה הנקראת "כפל" מקיימת אותו ביחס לפעולה הנקראת "חיבור".

הגדרה 7.36. איבר אדיש (ניטרלי)

איבר $e \in A$ יקרא אדיש או ניטרלי ביחס ל-$\odot$ אם לכל $a \in A$ מתקיים $a \odot e = a$ וגם $e \odot a = a$.

- ♣ באופן מסורתי איבר אדיש של פעולה הנקראת "חיבור" נקרא "אפס" ומסומן ב-"0" ואילו איבר אדיש של פעולה הנקראת "כפל" נקרא "אחד" ומסומן ב-"1".
- ♣ השם "איבר אדיש" קצת מפריע לי מבחינה לשונית, הרי זה לא האיבר שאדיש לפעולה אלא היא זו שאדישה אליו.

טענה 7.37. אם יש ב-A איבר אדיש ביחס ל-$\odot$ אז הוא יחיד.

הגדרה 7.38. איבר הפיך

נניח שיש ב-A איבר אדיש ביחס ל-$\odot$ ויהי $e \in A$ איבר אדיש, איבר $a \in A$ יקרא הפיך אם קיים $b \in A$ כך ש-$b \odot a = e = a \odot b$ ו-b כזה יקרא הופכי או נגדי של a ביחס ל-$\odot$.

- ♣ באופן מסורתי התואר "הופכי" ניתן ביחס לפעולות הנקראות "כפל" ותואר "נגדי" ניתן ביחס לפעולות הנקראות "חיבור".

טענה 7.39. אם הפעולה $\odot$ מקיימת את חוק הקיבוץ אז לכל איבר הפיך יש הופכי יחיד.

הגדרה 7.40.

- תהיינה $A_1, A_2 \subseteq A$, הקבוצה $A_1 \oplus A_2$ תוגדר ע"י $A_1 \oplus A_2 := \{a_1 \oplus a_2 \mid a_1 \in A_1,\ \ a_2 \in A_2\}$[46].
- תהיינה $A_0 \subseteq A$ ו-C קבוצות, תהא $\otimes : C \times A \to B$ פעולה ויהי $c \in C$; הקבוצה $c \otimes A_0$ תוגדר ע"י $c \otimes A_0 := \{c \otimes a_0 \mid a_0 \in A_0\}$[47].
- תהא D קבוצה ותהיינה $f, g : D \to A$ שתי פונקציות, הפונקציה $f \oplus g : D \to B$ תוגדר ע"י (לכל $d \in D$):

$$(f \oplus g)(d) := f(d) \oplus f(d)$$

- תהיינה C ו-D קבוצות, תהא $f : D \to A$ פונקציה, תהא $\otimes : C \times D \to B$ פעולה ויהי $c \in C$; הפונקציה $c \otimes f : D \to B$ תוגדר ע"י (לכל $d \in D$):

$$(c \otimes f)(d) := c \otimes f(d)$$

---

[46] שימו לב לכך ש-$A_1 \oplus A_2 \subseteq B$.
[47] גם כאן $c \otimes A_0 \subseteq B$.

7.5 סדרות

תהא B קבוצה.

הגדרה 7.41. סדרה סופית

סדרה סופית של איברים ב-B היא פונקציה מהצורה $f:\{n\in\mathbb{N}\mid n\leq N\}\to B$ עבור $N\in\mathbb{N}$ כלשהו; בד"כ מייצגים סדרה כזו באופן מפורש ע"י כתיבת האיברים לפי הסדר בתוך סוגריים מעוגלים[48], כך:

$$\left(f\left(1\right),f\left(2\right),\ldots,f\left(N\right)\right)$$

הגדרה 7.42. סדרה אינסופית

סדרה אינסופית של איברים ב-B היא פונקציה מהצורה $a:\mathbb{N}\to B$.

♣ כמו כל פונקציה נסמן סדרות אינסופיות ע"י אות, למשל a, ואז $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ יהיה הסימון לסדרה (ניתן לסמן סדרה גם ב-$\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ואם נתעצל גם ב-$\left(a_n\right)$).
האות n מסמנת משתנה סרק של הסדרה, באותה מידה היה יכול להופיע שם k (או כל אות ואפילו כל קשקוש עקבי אחר), מתקיים $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}=\left(a_k\right)_{k=1}^{\infty}$.
נסמן ב-a_n את הפלט שנותנת הפונקציה עבור n, כלומר כמו שעבור פונקציה f היינו מסמנים ב-$f\left(x\right)$ את הערך שמקבלת הפונקציה f ב-x כך נסמן ב-a_n את הערך שמקבלת הסדרה (הפונקציה) $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ ב-n, n יקרא האינדקס של a_n.

♣ ניתן להגדיר סדרות ע"י:

- נתינת נוסחה המגדירה לכל $n\in\mathbb{N}$ מהו האיבר ה-n-י בסדרה.
- הגדרה רקורסיבית, מגדירים מספר סופי של איברים בסדרה ועבור שאר האיברים מגדירים כיצד כל אחד מהם תלוי באלו שהוגדרו כבר.
- ניסוח מילולי מוגדר היטב.

הגדרה 7.43. תהא $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר שסדרה $\left(b_k\right)_{k=1}^{\infty}$ היא תת-סדרה של $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$, אם קיימת סדרה $\left(n_k\right)_{k=1}^{\infty}$ עולה ממש[49] שכל איבריה טבעיים (סדרת אינדקסים) כך שלכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $b_k=a_{n_k}$.

♣ לפעמים נתעסק גם בסדרות אינסופיות מהצורות הבאות:

- $a:\mathbb{Z}\to B$, ואז $\left(a_n\right)_{n=-\infty}^{\infty}$ יהיה הסימון לסדרה (ניתן לסמן גם ב-$\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$).
- $a:\{n\in\mathbb{Z}\mid n\geq N\}\to B$ עבור $N\in\mathbb{Z}$ כלשהו, ואז $\left(a_n\right)_{n=N}^{\infty}$ יהיה הסימון לסדרה.
- $a:\{n\in\mathbb{Z}\mid n\leq N\}\to B$ עבור $N\in\mathbb{Z}$ כלשהו, ואז $\left(a_n\right)_{n=-\infty}^{N}$ יהיה הסימון לסדרה.

[48] על מנת שלא להתבלבל עם קבוצות שהסוגריים שלהן מסולסלים.
[49] לכל $k_1,k_2\in\mathbb{N}$ כך ש-$k_1<k_2$ מתקיים $n_{k_1}<n_{k_2}$.

8 סימונים נפוצים

תהא A קבוצה ותהיינה "$+$" ו-"$\cdot$" פעולות המוגדרות עליה, לפעולה "$+$" נקרא "חיבור" ולפעולה "$\cdot$" נקרא "כפל". נניח שפעולות אלו מקימות את חוק הקיבוץ.

סימון: לכל $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ נסמן

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

♣ האינדקס i הוא משתנה סרק, באותה מידה היה יכול להופיע שם k (או כל אות ואפילו כל קשקוש עקבי אחר).

סימון: נניח שיש ב-A איברים אדישים ל-$+$ ול-$\cdot$, לעיל סימנו סכום ומכפלה סופיים, כעת נרצה להגדיר סכום ומכפלה **ריקים** - כלומר כאלה שסוכמים/כופלים 0 איברים; האיבר האדיש לחיבור יהיה ערכו של סכום ריק ואילו האיבר האדיש לכפל יהיה ערכה של מכפלה ריקה.

♣ סכום ומכפלה ריקים נוצרים כאשר אין ל-a_i פירוש לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ (נלך ע"פ הסימון שלעיל הסוכם/כופל את $a_1, a_2, \ldots, a_n$), הסיבות השכיחות לכך הן ש-$A = \emptyset$ או ש-$n < 1$.

סימון: ולכל $n \in \mathbb{N}_0$ ולכל $a \in A$ נסמן

$$a^n := \prod_{i=1}^{n} a$$

סימון זה נקרא חזקה.

♣ בפרט $a^1 = a$ ו-$a^0 = 1$.

סימון: נניח ש-$a \in A$ איבר הפיך, מכיוון שיש ל-a הופכי יחיד ניתן לקרוא לו ההופכי של a ולסמן אותו ב-a^{-1}. לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $a^{-n} := \left(a^{-1}\right)^n$.

סימון: נניח שהכפל והחיבור מקיימים את חוקי הקיבוץ והחילוף וש-A היא קבוצה סופית, יהיו $a_1, a_2, \ldots, a_n$ כל האיברים השונים ב-A ונסמן:

$$\sum_{a \in A} a := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\prod_{a \in A} a := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

♣ a הוא משתנה סרק, באותה מידה היה יכול להופיע שם b (או כל אות ואפילו כל קשקוש עקבי אחר).

♣ באופן כללי מקובל לקצר כתיבה של הפעלת פעולה כמה פעמים ע"י כתיבת הסימן של הפעולה בגופן גדול יותר כשמתחתיו נכתב שאנו "מריצים" את הפעולה על פני כל ה-x-ים שמקיימים תנאי כלשהו (במקרים שלעיל התנאי הוא $a \in A$) או שאנו "מריצים" את הפעולה על פני השלמים משלם אחד שמופיע מתחת לסימן הפעולה עד לשלם אחר (כולל) המופיע מעל סימן הפעולה. (במקרים שלעיל "רצנו" מ-1 עד n אך באותה מידה יכולנו לרוץ מ--3 עד 7).

הגדרה 8.1. תהא X קבוצה, נאמר ש-X בת-מנייה אם קיימת פונקציה חח"ע ועל מ-$\mathbb{N}$ ל-X, אחרת נאמר ש-X אינה בת-מנייה.

♣ כלומר קבוצה X היא בת-מנייה אם"ם קיימת סדרה המכילה את כל איברי X ללא חזרות.

סימון: תהא X קבוצה שכל איבריה הם קבוצות, נסמן:

$$\bigcup_{x\in X} x := \left\{ y \;\middle|\; \exists x \in X : y \in x \right\}$$

$$\bigcap_{x\in X} x := \left\{ y \;\middle|\; \forall x \in X : y \in x \right\}$$

אם $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (כלומר X סופית) מקובלים גם הסימונים:

$$\bigcup_{i=1}^{n} x_i := \bigcup_{x\in X} x$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} x_i := \bigcap_{x\in X} x$$

ואם X אין-סופית אך בת-מנייה (כלומר ניתן לסדר את איבריה בסדרה) ו-$(x_i)_{i=1}^{\infty}$ היא סדרת כל האיברים של X[50] מקובלים גם הסימונים:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} x_i := \bigcup_{x\in X} x$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} x_i := \bigcap_{x\in X} x$$

[50]אין צורך בכך שלא תהיינה בסדרה חזרות על אותו איבר פעמיים, זה לא משנה לחיתוך ולאיחוד של קבוצות.