המספרים הממשיים - הגדרות בלבד

חשבון אינפיניטסימלי (1) - 80131

מרצה: רז קופרמן

מתרגלים: אור יער ודניאל רוזנבלט

סוכם ע״י: שריה אנסבכר

סמסטר ב׳ תשפ״ב, האונ׳ העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא״ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 שדה סדור

הגדרה 1.1. שדה סדור

שדה סדור הוא שדה $\mathbb{F}$ שעליו מוגדר יחס בינארי (נקרא לו "קטן מ-" ונסמן אותו ב-"$<$") המקיים את 4 התכונות הבאות (נקראות יחד עם אקסיומות השדה "אקסיומות השדה הסדור"):

1. טריכוטומיה: לכל $a, b \in \mathbb{F}$ מתקיימת בדיוק אחת משלוש האפשרויות הבאות: $a < b$, $b < a$ או $a = b$.
2. טרנזיטיביות: לכל $a, b, c \in \mathbb{F}$ אם $a < b$ וגם $b < c$ אז $a < c$.
3. הלימה לחיבור: לכל $a, b, c \in \mathbb{F}$ אם $a < b$ אז $a + c < b + c$ (מחוק החילוף של חיבור נסיק שגם $c + a < c + b$).
4. הלימה לכפל בחיובי[1]: לכל $a, b, c \in \mathbb{F}$ אם $a < b$ וגם $0 < c$ אז $a \cdot c < b \cdot c$ (מחוק החילוף של כפל נסיק שגם $c \cdot a < c \cdot b$).

♣ שתי התכונות הראשונות שקולות לכך שמדובר ביחס סדר חזק ומלא.

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור ויהיו $a, b \in \mathbb{F}$.

הגדרה 1.2. "גדול מ-", "קטן/גדול ו/או שווה ל-"

- נאמר ש-a גדול מ-b אם $b < a$, במקרה כזה נסמן $a > b$.
- נאמר ש-a קטן ו/או שווה ל-b אם $a = b$ ו/או $a < b$, במקרה כזה נסמן $a \leq b$.
- נאמר ש-a גדול ו/או שווה ל-b אם $a = b$ ו/או $a > b$, במקרה כזה נסמן $a \geq b$.

הגדרה 1.3. החיוביים והשליליים

- נאמר ש-a חיובי אם $0 < a$.
- נאמר ש-a שלילי אם $0 > a$.
- נאמר ש-a אי-שלילי אם $0 \leq a$.
- נאמר ש-a אי-חיובי אם $0 \geq a$.

2 הערך המוחלט

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור ויהי $a \in \mathbb{F}$.

הגדרה 2.1. הערך המוחלט

נסמן את הערך המוחלט של a ב-$|a|$ ונגדירו כך:

$$|a| := \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

♣ כמובן שהערך המוחלט מוגדר אך ורק בשדות סדורים.

[1] המושג "חיובי" יוגדר בהמשך.

3 קבוצות מיוחדות בשדה סדור

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

♣ את הקבוצות המיוחדות הללו ניתן להגדיר גם בשדה שאינו סדור אולם בשדות מהסוג $\mathbb{F}_P$ (כאשר P ראשוני) כל אחת מהן כוללת את כל איברי השדה, לעומתם ב-$\mathbb{C}$ (שדה המרוכבים) ניתן להגדירן מבלי לכלול את כל השדה.

3.1 המספרים הטבעיים

הגדרה 3.1. קבוצה אינדוקטיבית

נאמר שקבוצה $I \subseteq \mathbb{F}$ היא קבוצה אינדוקטיבית אם $1 \in I$ ולכל $x \in I$ גם $x + 1 \in I$.

הגדרה 3.2. קבוצת המספרים הטבעיים

נסמן את קבוצת המספרים הטבעיים ב-$\mathbb{N}$ ונגדיר אותה כחיתוך כל הקבוצות האינדוקטיביות המוכלות ב-$\mathbb{F}$.
במילים אחרות: יהא A אוסף כל הקבוצות האינדוקטיביות המוכלות ב-$\mathbb{F}$, נגדיר:

$$\mathbb{N} := \bigcap_{a \in A} a$$

♣ לעיתים נשתמש גם בסימון: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3.2 המספרים השלמים והמספרים הרציונליים

הגדרה 3.3. קבוצת המספרים השלמים

נסמן את קבוצת המספרים השלמים ב-$\mathbb{Z}$ ונגדיר אותה כך:

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \in \mathbb{F} : n \in \mathbb{N}\}$$

מסקנה 3.4. מספר שלם הוא טבעי אם"ם הוא חיובי.

הגדרה 3.5. יחס החלוקה

יהיו $m, n \in \mathbb{Z}$, נאמר ש-n מחלק את m (או ש-m הוא כפולה של n) ונסמן $n \mid m$ אם קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש-$m = n \cdot k$.

הגדרה 3.6. קבוצת הזוגיים וקבוצת האי-זוגיים

נסמן:

$$\begin{aligned} 2 &:= 1 + 1 \\ \text{Even} &:= \{n \in \mathbb{Z} : 2 \mid n\} \\ \text{Odd} &:= \mathbb{Z} \setminus \text{Even} \end{aligned}$$

Even תיקרא קבוצת הזוגיים ו-Odd תיקרא קבוצת האי-זוגיים.

מסקנה 3.7. מתקיים $\text{Even} = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k\} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

מסקנה 3.8. $\text{Even} \cap \text{Odd} = \emptyset$ וגם $\text{Even} \cup \text{Odd} = \mathbb{Z}$.

הגדרה 3.9. קבוצת המספרים הרציונליים

נסמן את קבוצת המספרים הרציונליים ב-$\mathbb{Q}$ ונגדיר אותה כך:

$$\mathbb{Q} := \left\{ q \in \mathbb{F} \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} : q = \frac{m}{n} \right\}$$

למה. יהיו $a,c\in\mathbb{F}$ ו-$0\neq b,d\in\mathbb{F}$ אז $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ אס"ם $a\cdot d=b\cdot c$.

♣ כלומר לכל מספר רציונלי יש יותר מהצגה אחת כמנה של שלם וטבעי (למעשה יש אין-סוף).

למה 3.10. לכל $q\in\mathbb{Q}$ קיימים $n\in\mathbb{N}$ ו-$m\in\mathbb{Z}$ יחידים כך שמתקיים $q=\frac{m}{n}$ ובנוסף לא קיים $\pm 1\neq k\in\mathbb{Z}$ כך ש-$k\mid n$ ו-$k\mid m$ (כלומר n ו-m זרים זה לזה).

הגדרה 3.11. במונחי הלמה הקודמת נגדיר את ההצגה המצומצמת של q להיות $\frac{m}{n}$ עבור אותם $n\in\mathbb{N}$ ו-$m\in\mathbb{Z}$ יחידים המקיימים את הלמה (וזאת לכל $q\in\mathbb{Q}$).

4 חסמים וארכימדיות

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

הגדרה 4.1. חסמים וקבוצות חסומות

- קבוצה $A\subseteq\mathbb{F}$ תקרא חסומה מלעיל אם קיים $M\in\mathbb{F}$ כך שלכל $a\in A$ מתקיים $a\leq M$.
  - איבר $M\in\mathbb{F}$ ייקרא חסם מלעיל של קבוצה $A\subseteq\mathbb{F}$ אם לכל $a\in A$ מתקיים $a\leq M$.
- קבוצה $A\subseteq\mathbb{F}$ תיקרא חסומה מלרע אם קיים $m\in\mathbb{F}$ כך שלכל $a\in A$ מתקיים $a\geq m$.
  - איבר $m\in\mathbb{F}$ ייקרא חסם מלרע של קבוצה $A\subseteq\mathbb{F}$ אם לכל $a\in A$ מתקיים $a\geq m$.
- קבוצה $A\subseteq\mathbb{F}$ תיקרא חסומה אם היא חסומה מלעיל ומלרע.

4.1 ארכימדיות

הגדרה 4.2. שדה סדור $\mathbb{F}$ יקרא ארכימדי אם קבוצת הטבעיים שלו אינה חסומה מלעיל, כלומר לכל $M\in\mathbb{F}$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$M<n$.

5 השדה הסדור השלם (המספרים הממשיים)

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

למה. נסמן $4:=2+2$, מתקיים:

- לכל $m,n\in\text{Even}$ קיים $k\in\mathbb{Z}$ כך ש-$m\cdot n=4k$.
- אם $m,n\in\text{Odd}$ אז $m\cdot n\in\text{Odd}$.

טענה. לא קיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש-$q^2=2$.[2]

♣ זהו המובן שבו שדה הרציונליים "מלא חורים", אם ניקח את ההמחשה שהבאנו בקובץ ההגדרות, ניתן לחלק את הקרש שאנו רוצים להפוך ליתר של המשולש לשני חלקים: החלק שאנו רוצים להפוך ליתר והאחר שאנו רוצים להיפטר ממנו, אם נשאר עם מספרים רציונליים בלבד לא נוכל להצביע על הנקודה שבין שני החלקים כדי שנוכל להעביר בה את המסור.

[2] לכל $x\in\mathbb{R}$ נסמן $x^2:=x\cdot x$.

הגדרה 5.1. השדה הסדור השלם (אקסיומת השלמות)

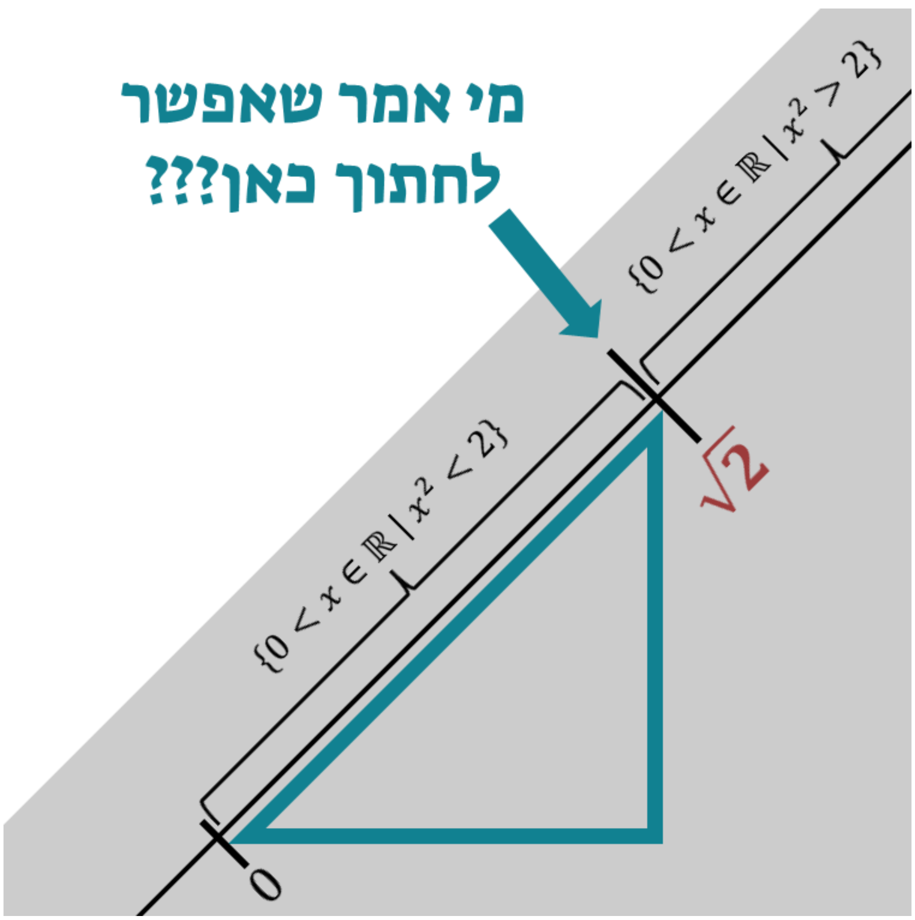
שדה סדור $\mathbb{F}$ ייקרא שלם אם יקיים את הפסוק הבא (נקרא "אקסיומת השלמות"):
לכל שתי קבוצות $A, B \subseteq \mathbb{F}$ שאינן ריקות המקיימות $a \leq b$ לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$,
קיים $c \in \mathbb{F}$ כך ש-$a \leq c \leq b$ לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$.

נסמן את השדה הסדור השלם[3] ב-$\mathbb{R}$ ונקרא לו גם שדה המספרים הממשיים או הישר הממשי, לאיברי $\mathbb{R}$ נקרא מספרים ממשיים או נקודות.

♣ נשים לב ליופי שבדבר: המתמטיקאים הצליחו לשים את האצבע על התכונה שעושה את המספרים הממשיים למה שהם, על מהותם (!).

נניח למשל שאני רוצה לבנות משולש ישר זווית שאורכי ניצביו שווים, אקח קרש אחד, אשים אותו ליד אחר (גדול יותר) ואחתוך את הקרש השני לפי הראשון (כך שיהיו שווים); כעת אניח את אחד הקרשים על הקרקע, אמדוד זווית ישרה (ניתן לעשות זאת עם סרגל ומחוגה) ואניח את הקרש השני כך שיהיה אנך לראשון וקצותיהם יגעו זה בזה. וכעת לעצם העניין: אני צריך צלע שלישית, תאמרו "מה הבעיה? קח קרש שלישי שיהיה ארוך יותר מהמרחק שבין קצות הקרשים הראשונים שאינם נוגעים זה בזה, הנח אותו על הישר שקצוות אלו מגדירים כך שאחד מקצותיו יגע באחד הקצוות הללו, חתוך את החלק הבולט של הקרש וחסל!", אבל... מי אמר שקיימת נקודה שנמצאת בדיוק בין החלק שאני רוצה לחלק המיותר???

- זוהי אקסיומת השלמות!



איור 1: מי אמר שניתן לחתוך את הקרש במקום הרצוי???

[3] ניתן להוכיח שקיים רק שדה סדור שלם אחד (כל השדות הסדורים השלמים דומים עד כדי איזומורפיזם) ולכן מוצדק לקרוא לו "שדה הממשיים" בה"א הידיעה ותת לו סימון.

הגדרה 5.2. קבוצה $I \subseteq \mathbb{R}$ תיקרא מקטע אם לכל $a, b \in I$ כך ש-$a < b$ ולכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$a < x < b$ מתקיים $x \in I$.

הגדרה 5.3. מקטעים שונים
יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ המקיימים $a < b$.

- קטע פתוח הוא קבוצה מהצורה: $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
- קטע סגור הוא קבוצה מהצורה: $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
- קטעים חצי פתוחים-חצי סגורים (שני סוגים):
  - קטע פתוח משמאל וסגור מימין הוא קבוצה מהצורה: $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.
  - קטע סגור משמאל ופתוח מימין הוא קבוצה מהצורה: $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.
- קרניים שונות (ארבעה סוגים):
  - קרן ימנית פתוחה היא קבוצה מהצורה: $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$.
  - קרן ימנית סגורה היא קבוצה מהצורה: $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$.
  - קרן שמאלית פתוחה היא קבוצה מהצורה: $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.
  - קרן שמאלית סגורה היא קבוצה מהצורה: $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$.

♣ גם הקבוצה הריקה והשדה כולו הם מקטעים.

הגדרה 5.4. סביבה וסביבה מנוקבת
יהי $x \in \mathbb{R}$.

- סביבות דו-צדדיות:
  - סביבה של x היא קטע פתוח (a, b) (כאשר $a, b \in \mathbb{R}$) המקיים $x \in (a, b)$.
  - סביבה מנוקבת של x היא קבוצה מהצורה $(a, b) \setminus \{x\}$ (כאשר $a, b \in \mathbb{R}$) המקיימת $x \in (a, b)$.
- סביבות חד-צדדיות:
  - סביבה חד-צדדית ימנית של x היא קטע פתוח מהצורה (x, b) כאשר $x < b \in \mathbb{R}$.
  - סביבה חד-צדדית שמאלית של x היא קטע פתוח מהצורה (a, x) כאשר $x > a \in \mathbb{R}$.

הגדרה 5.5. יהיו $0 < r \in \mathbb{R}$ ו-$a \in \mathbb{R}$.

- נסמן $B_r(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$ ונקרא ל-$B_r(a)$ הכדור הפתוח שרדיוסו r ומרכזו a וגם סביבה סימטרית.
- נסמן $B_r^\circ(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$ ונקרא ל-$B_r^\circ(a)$ הכדור הפתוח המנוקב שרדיוסו r ומרכזו a וגם סביבה סימטרית מנוקבת.

6 חסם עליון וחסם תחתון

יהא $\mathbb{F}$ שדה סדור.

הגדרה 6.1. חסם עליון וחסם תחתון
תהא $A \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה לא ריקה.

- נאמר ש-$M \in \mathbb{F}$ הוא חסם עליון (נקרא גם סופרמום) של A אם מתקיימים שני התנאים הבאים:
  1. M הוא חסם מלעיל של A.
  2. לכל $M' \in \mathbb{F}$ המהווה חסם מלעיל של A מתקיים $M \leq M'$.

  מכיוון שניתן להוכיח שאם יש לקבוצה סופרמום אז הוא יחיד נסמן אותו ב-$\sup A$.
- נאמר ש-$m \in \mathbb{F}$ הוא חסם תחתון (נקרא גם אינפימום) של A אם מתקיימים שני התנאים הבאים:
  1. m הוא חסם מלרע של A.
  2. לכל $m' \in \mathbb{F}$ המהווה חסם מלרע של A מתקיים $m' \leq m$.

  מכיוון שניתן להוכיח שאם יש לקבוצה סופרמום אז הוא יחיד נסמן אותו ב-$\inf A$.

הגדרה 6.2. מינימום ומקסימום
תהא $A \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה.

- נאמר שיש ל-A מקסימום אם קיים $M \in A$ המהווה חסם מלעיל של A.
  אותו M יקרא מקסימום של A ומכיוון שניתן להוכיח שאם הוא קיים אז הוא יחיד נסמן אותו ב-$\max A$.
- נאמר שיש ל-A מינימום אם קיים $m \in A$ המהווה חסם מלרע של A.
  אותו m יקרא מינימום של A ומכיוון שניתן להוכיח שאם הוא קיים אז הוא יחיד נסמן אותו ב-$\min A$.

7 חזקות

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

הגדרה 7.1. חזקה טבעית

לכל $x\in\mathbb{F}$ נגדיר $x^1:=x$ (קרי: x בחזקת 1) ולכל $k\in\mathbb{N}$ נגדיר $x^{k+1}:=x^k\cdot x$ (קרי: x בחזקת $k+1$)[4].

טענה 7.2. לכל $a\in\mathbb{F}$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ החזקה ה-n-ית של a (a^n) מוגדרת היטב.

הגדרה 7.3. חזקה שלמה

לכל $x\in\mathbb{F}$ נגדיר $x^0:=1$ (קרי: x בחזקת 0).

לכל $x\in\mathbb{F}$ ולכל $0>m\in\mathbb{Z}$ נגדיר:

$$x^m:=\frac{1}{x^{-m}}$$

- ♣ נשים לב שהסימון a^{-1} עבור ההופכי של $a\in\mathbb{R}$ והסימון a^{-1} עבור "a בחזקת -1" מגדירים את אותו מספר ולכן אין לנו בעיה בסימון.
  למה לא הגדרנו חזקה שלמה כשהבסיס הוא 0? כי אז נקבל את 0^{-1}.
- ♣ ניתן היה להגדיר את 0^0 להיות 1 או 0 כרצוננו (מבלי לקבל סתירה), אנו בחרנו להגדיר $0^0:=1$ מפני שהדבר יקל עלינו בנוסחאות רבות בהמשך.
- ♣ ניתן להגדיר חזקות טבעיות ושלמות בכל שדה (לאו דווקא סדור) ומכיוון שההוכחות לכל חוקי החזקות שלא כללו אי-שוויונים משתמשות אך ורק באקסיומות השדה חוקים אלו חלים בכל שדה[5].

משפט. קיום ויחידות השורש

לכל $0<x\in\mathbb{R}$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $0<y\in\mathbb{R}$ יחיד כך ש-$y^n=x$.

הגדרה 7.4. שורש

יהי $0<x\in\mathbb{R}$, לכל $n\in\mathbb{N}$ <u>השורש ה-n-י</u> של x הוא $0<y\in\mathbb{R}$ היחיד שמקיים $y^n=x$; נסמן את השורש ה-n-י של x ב-$\sqrt[n]{x}$ או ב-$x^{1/n}$.

כמו כן לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $\sqrt[n]{0}:=0$ (המוטיבציה להגדרה ברורה).

---

[4] הוכחנו באינדוקציה שכך x^k מוגדר היטב לכל $k\in\mathbb{N}$.

[5] למעשה, שני חוקי החזקות הראשונים במעריך טבעי ($x^m\cdot x^n=x^{m+n}$ ו-$(x^m)^n=x^{m\cdot n}$) השתמשו רק בקיבוץ של הכפל והחוק השלישי ($(x\cdot y)^n=x^n\cdot y^n$) השתמש גם בחילוף; מסיבה זו הם תקפים אפילו בקבוצות שאינן שדות אך מוגדרת עליהן פעולת כפל המקיימת את התכונות הללו.

למה. יהי $0 < x \in \mathbb{R}$, לכל $n, k \in \mathbb{N}$ ו-$m, j \in \mathbb{Z}$ המקיימים $\frac{k}{j} = \frac{m}{n}$ מתקיים $\left(x^j\right)^{\frac{1}{k}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$.

הגדרה 7.5. חזקה רציונלית

יהי $q \in \mathbb{Q}$, לכל $0 < x \in \mathbb{R}$ נגדיר:

$$x^q := (x^m)^{\frac{1}{n}}$$

כאשר m ו-n הם שלם וטבעי ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) המקיימים $q = \frac{m}{n}$.

♣ למה לא הגדרנו חזקה רציונלית כשהבסיס שלילי? בגלל שא"א להגדיר זאת היטב, לדוגמה:

$$-5 = (-5)^1 = (-5)^{\frac{6}{6}} = \left((-5)^6\right)^{\frac{1}{6}} = \left(5^6\right)^{\frac{1}{6}} = 5$$

כמובן שניתן היה להביא כאן גם את: $\left(\sqrt{-5}\right)^4 = (-5)^{\frac{4}{2}} = 25$, מצד אחד 25 מוגדר היטב אך מצד שני $\left(\sqrt{-5}\right)^4$ אינו מוגדר כלל; אולם אינני בטוח שזה היה מהווה עילה שלא להגדיר זאת, מצד שני אולי זו הסיבה שלא הגדרנו חזקה רציונלית חיובית כשהבסיס הוא 0:

$$0 = 0^1 = 0^{\frac{-1}{-1}} = \left(0^{-1}\right)^{\frac{1}{-1}} = \left(0^{-1}\right)^{-1}$$

♣ ניתן להגדיר חזקות ממשיות כבר כעת אולם אנו נעשה זאת רק בקובץ שיעסוק בפונקציות כדי להקל על הוכחת חוקי חזקות כשהמעריך ממשי, להלן ההגדרה שניתן להגדיר כבר כעת (כמובן שהגדרה זו וההגדרה שתובא בהמשך שקולות):
לכל $0 < a \in \mathbb{R}$ ולכל $x \in \mathbb{R}$ נגדיר:

$$a^x := \begin{cases} \sup\left\{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r < x\right\} & 1 < a \\ 1 & a = 1 \\ \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} & a < 1 \end{cases}$$