פונקציות נפח - טענות בלבד

אלגברה ליניארית (1) - 80134

מרצה: ערן נבו

מתרגלים: איתמר ישראלי ושני שלומי

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

1 התחלה

1.1 במרחב וקטורי כללי

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל לשדה $\mathbb{F}$ כך ש-$\dim V > 0$, נסמן $n := \dim V$.
נניח שקיימת פונקציית נפח $D : V^n \to \mathbb{F}$, תהא D כנ"ל ויהיו $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$.

טענה 1.1. אם קיים $n \geq i \in \mathbb{N}$ כך ש-$v_i = 0_V$ אז $D(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$.

מסקנה 1.2. אם הסדרה $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ תלויה ליניארית אז $D(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$.

♣ כלומר אם $D(v_1, v_2, \ldots, v_n) \neq 0$ אז הסדרה $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ בת"ל וממילא היא בסיס של V, אנחנו נראה בהמשך שגם הכיוון ההפוך נכון (אלא אם D היא פונקציית האפס).

טענה 1.3. יהיו $i, j \in \mathbb{N}$ כך ש-$n \geq i, j$, $i < j$, מתקיים:

$$D(v_1, v_2, \ldots v_{i-1}, \boldsymbol{v_j}, v_{i+1} \ldots, v_{j-1}, \boldsymbol{v_i}, v_{j+1}, \ldots, v_n) = -D(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

♣ כלומר החלפה של שני וקטורים זה בזה משנה את הסימן של נפח ה"מקבילון", הטענה הזו אינטואיטיבית למדי: החלפה של שני וקטורים שקולה לשיקוף סביב ציר הסימטרייה שלהם (בסימוני הטענה ציר הסימטרייה הוא $\text{span}(\boldsymbol{v_i} + \boldsymbol{v_j})$) ושיקוף אכן משנה את הסימן של שטח/נפח מכוון. מי שזה לא מספיק לו מוזמן להסתכל על החלפה של שני צירים כהכפלת אחד מהם ב--1 ואז סיבוב ב-$90°$, אין ספק שהכפל ב--1 צריך לשנות את הסימן ושהסיבוב אינו משנה דבר בכל הקשור לשטחים ונפחים.

סימון: לכל פעולת שורה אלמנטרית $\varepsilon : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ נתאים פונקציה $\varepsilon^* : V^n \to V^n$ המהווה את פעולת ה"עמודה" האלמנטרית המקבילה, כלומר[1]:

1. אם ε היא החלפת השורות ה-i וה-j זו בזו ($n \geq i, j \in \mathbb{N}$) אז

$$\varepsilon^*(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (v_1, v_2, \ldots v_{i-1}, v_j, v_{i+1} \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n)$$

2. אם ε הכפלת השורה ה-i בסקלר $0 \neq c \in \mathbb{F}$ ($n \geq i \in \mathbb{N}$) אז

$$\varepsilon^*(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i + c \cdot v_j, v_{i-1}, , \ldots, v_n)$$

3. אם ε היא הוספת כפולה של שורה j (בסקלר $0 \neq c \in \mathbb{F}$) לשורה i ($n \geq i, j \in \mathbb{N}$ ו-$i \neq j$) אז

$$\varepsilon^*(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, c \cdot v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

סימון: תהא $\varepsilon^* : V^n \to V^n$ פעולת "עמודה" אלמנטרית, נסמן ב-$\mu(\varepsilon^*)$ את קבוע הפעולה ε^*, כאשר:

1. אם ε^* היא החלפה של שני וקטורים זה בזה אז $\mu(\varepsilon^*) := -1$.
2. אם ε^* היא הכפלת וקטור מסוים בסקלר $0 \neq c \in \mathbb{R}$ אז $\mu(\varepsilon^*) := c$.
3. אם ε^* היא הוספת כפולה של וקטור אחד לאחר אז $\mu(\varepsilon^*) := 1$.

[1] שימו לב שלא מדובר ממש בפעולת "עמודה" מפני ש-V אינו בהכרח מרחב קואורדינטות.

טענה 1.4. תהא $\varepsilon^*:V^n\to V^n$ פעולת "עמודה" אלמנטרית, מתקיים:

$$D\left(\varepsilon^*\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)\right)=D\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)\cdot\mu\left(\varepsilon^*\right)$$

מסקנה 1.5. תהיינה $\varepsilon_1^*,\varepsilon_2^*,\ldots,\varepsilon_r^*:V^n\to V^n$ פעולות "עמודה" אלמנטריות, מתקיים:

$$D\left(\varepsilon_r^*\left(\varepsilon_{r-1}^*\left(\ldots\varepsilon_2^*\left(\varepsilon_1^*\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)\right)\right)\right)\right)=D\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)\cdot\mu\left(\varepsilon_1^*\right)\cdot\mu\left(\varepsilon_2^*\right)\cdot\ldots\cdot\mu\left(\varepsilon_r^*\right)$$

טענה 1.6. תהא ε פעולת שורה אלמנטרית ותהא $E\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ המטריצה האלמנטרית המתאימה לה, מתקיים:

$$\varepsilon^*\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)=\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)\cdot E^t$$

♣ כדי להבין את האינטואיציה לטענה זו נזכור שניתן להתייחס למטריצה כסדרה של וקטורים במרחב הקואורדינטות ונשים לב לכך שכדי להפעיל על מטריצה A פעולת "עמודה" אלמנטרית יש לשחלף אותה, להפעיל עליה את פעולת השורה המקבילה ולשחלף בחזרה, כלומר:

$$\varepsilon^*\left(A\right)=\left(\varepsilon\left(A^t\right)\right)^t=\left(E\cdot A^t\right)^t=A\cdot E^t$$

למה 1.7. מטריצה $E\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ היא מטריצה אלמנטרית אם"ם גם E^t היא מטריצה אלמנטרית.
יתרה מזאת: אם E מתאימה להחלפת שורות או לכפל שורה בסקלר אז $E=E^t$ (כלומר E סימטרית ו-E^t מתאימה לאותה פעולת שורה),
ואם E מתאימה להוספת כפולה של השורה ה-j לשורה ה-i אז E^t מתאימה להוספת אותה כפולה של השורה ה-i לשורה ה-j.

מסקנה 1.8. יהיו $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ בסיסים סדורים של V, תהיינה $E_1,E_2,\ldots,E_r\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצות אלמנטריות כך שמתקיים:

$$\left[\mathrm{Id}_V\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}=\left(E_1\right)^t\cdot\left(E_2\right)^t\cdot\ldots\cdot\left(E_r\right)^t$$

ותהיינה $\varepsilon_1^*,\varepsilon_2^*,\ldots,\varepsilon_r^*:V^n\to V^n$ פעולות העמודה האלמנטריות המתאימות; מתקיים:

$$D\left(\mathcal{C}\right)=D\left(\mathcal{B}\right)\cdot\mu\left(\varepsilon_1^*\right)\cdot\mu\left(\varepsilon_2^*\right)\cdot\ldots\cdot\mu\left(\varepsilon_r^*\right)$$

מסקנה 1.9. נניח ש-D אינה פונקציית האפס ויהי $\mathcal{B}$ בסיס סדור של V כך ש-$D\left(\mathcal{B}\right)\neq 0$.[2]
לכל פונקציית נפח $D':V^n\to\mathbb{F}$ מתקיים:

$$D'\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)=\frac{D'\left(\mathcal{B}\right)}{D\left(\mathcal{B}\right)}\cdot D\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)$$

♣ כלומר כל פונקציות הנפח נבדלות זו מזו בכפל בקבוע בלבד.

מסקנה 1.10. אם D אינה פונקציית האפס אז לכל בסיס סדור $\mathcal{B}$ (של V) מתקיים $D\left(\mathcal{B}\right)\neq 0$.

[2] כזכור אם פונקציית נפח מחזירה ערך שונה מ-0 אז מדובר בבסיס.

טענה 1.11. קבוצת פונקציות הנפח היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ובפרט היא סגורה לחיבור ולכפל בסקלר, כלומר לכל שתי פונקציות נפח D_1 ו-D_2 גם $D_1 + D_2$ היא פונקציית נפח ולכל $c \in \mathbb{F}$ גם $c \cdot D$ היא פונקציית נפח.

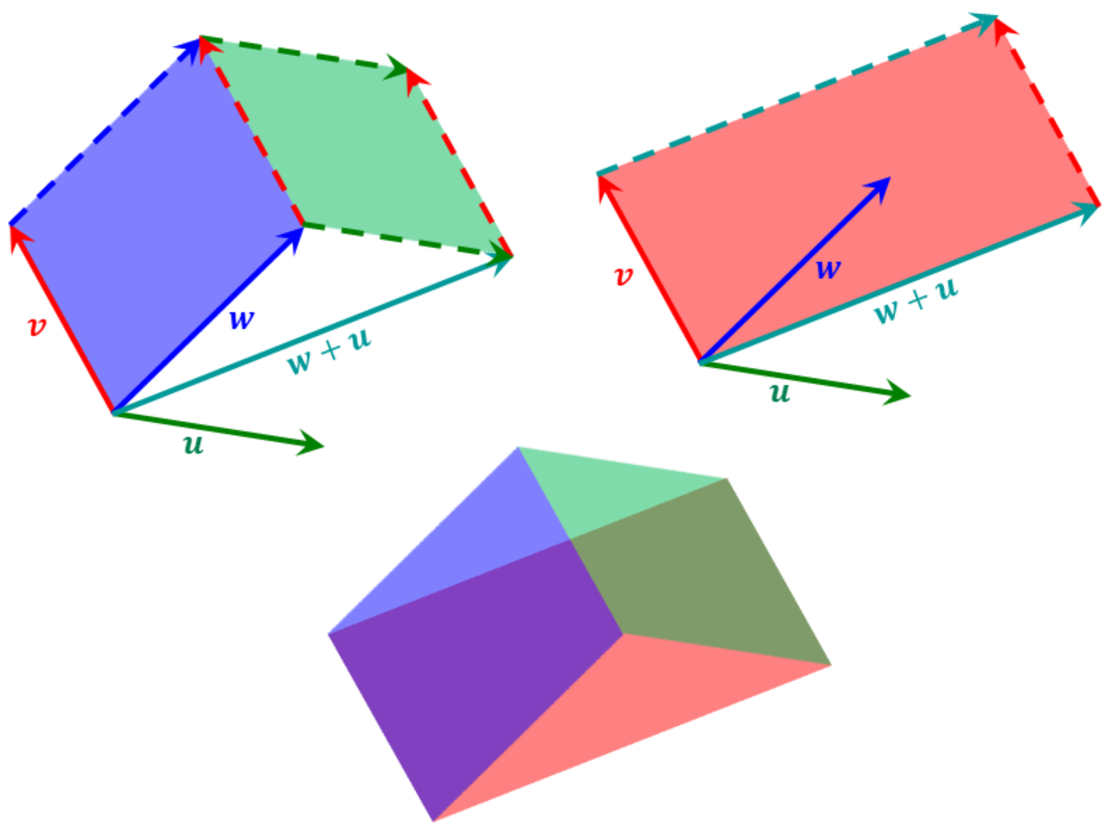
מסקנה 1.12. אם קיימת פונקציית נפח $D' : V^n \to \mathbb{F}$ שאינה פונקציית האפס אז לכל בסיס סדור $\mathcal{B}$ (של V) קיימת פונקציית נפח $D_{\mathcal{B}} : V^n \to \mathbb{F}$ יחידה כך ש-$D_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

♣ אנחנו נראה בהמשך שאכן קיימת פונקציית נפח שאינה פונקציית האפס.

1.2 מולטי-ליניאריות והתחלפות

משפט 1.13. פונקציה $f : V^n \to \mathbb{F}$ היא פונקציית נפח אם"ם היא מולטי-ליניארית ומתחלפת.

♣ מהגדרה כל פונקציית נפח היא כפלית בכל רכיב (התכונה הראשונה) ומטענה 1.3 נובע שכל פונקציית נפח גם מתחלפת (אם ב-$\mathbb{F}$ מתקיים $1 + 1 = 0$ אז נקבל זאת ממסקנה 1.2), אבל למה פונקציית נפח גם חיבורית בכל רכיב? אני מאמין שכדי להסביר את האינטואיציה כאן אין טוב יותר ממראה עיניים:



איור 1: פונקציית נפח היא חיבורית

המקבילית הכחולה היא זו שנפרשת ע"י v ו-w, הירוקה היא זו של v ו-u ואילו האדומה נפרשת ע"י v ו-$u + w$; חפיפת משולשים פשוטה מראה ששטחה של האדומה שווה לסכום שטחיהן של האחרות.

1.3 במרחב הקואורדינטות

נניח כעת ש-$V=\mathbb{F}^n$ ונשתמש באיזומורפיזם בין V^n ל-$M_n\left(\mathbb{F}\right)$, א"כ D היא פונקציה מ-$M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ל-$\mathbb{F}$ ופעולות "עמודה" אלמנטריות הן באמת פעולות עמודה.

♣ כל הטענות הבאות הן הטענות שראינו עבור מרחב וקטורי כללי כשהפעם הן מנוסחות בשפה של מטריצות.

טענה 1.14. לכל פעולת שורה אלמנטרית מתקיים $\varepsilon^*\left(I_n\right)=\left(\varepsilon\left(I_n\right)\right)^t$.

♣ כלומר המטריצה המתאימה לפעולת עמודה היא המשוחלפת של המטריצה המתאימה לפעולת השורה המקבילה.

טענה 1.15. תהיינה $A,B\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$, מתקיים:

1. אם A מתקבלת מ-B ע"י החלפת עמודות אז $D\left(A\right)=-D\left(B\right)$.
2. אם A מתקבלת מ-B ע"י כפל עמודה כלשהי בסקלר $c\in\mathbb{F}$ אז $D\left(A\right)=c\cdot D\left(B\right)$.
3. אם A מתקבלת מ-B ע"י הוספת כפולה של עמודה אחת לעמודה אחרת אז $D\left(A\right)=D\left(B\right)$.

מסקנה 1.16. תהיינה $A,E\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ כך ש-E היא מטריצה אלמנטרית, מתקיים:

1. אם E היא מטריצה המתאימה להחלפת שורות אז $D\left(A\cdot E^t\right)=-D\left(A\right)$.
2. אם E היא מטריצה המתאימה לכפל שורה בסקלר $0\neq c\in\mathbb{F}$ אז $D\left(A\cdot E^t\right)=c\cdot D\left(A\right)$.
3. אם E היא מטריצה המתאימה להוספת כפולה של שורה אחת לאחרת אז $D\left(A\cdot E^t\right)=D\left(A\right)$.

נניח ש-D אינה פונקציית האפס.

מסקנה 1.17. $D\left(I_n\right)\neq 0$.

טענה 1.18. לכל פונקציית נפח $D':M_n\left(\mathbb{F}\right)\to\mathbb{F}$ שאינה פונקציית האפס ולכל מטריצה אלמנטרית $E\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ מתקיים:

$$\frac{D\left(E^t\right)}{D\left(I_n\right)}=\frac{D\left(E\right)}{D\left(I_n\right)}=\frac{D'\left(E\right)}{D'\left(I_n\right)}=\frac{D'\left(E^t\right)}{D'\left(I_n\right)}$$

מסקנה 1.19. תהא $P\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה הפיכה ותהיינה $E_1,E_2,\ldots,E_r\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצות אלמנטריות כך ש-: $P=\left(E_1\right)^t\cdot\left(E_2\right)^t\cdot\ldots\cdot\left(E_r\right)^t$; מתקיים:

$$D\left(P\right)=D\left(I_n\right)\cdot\prod_{i=1}^{r}\frac{D\left(\left(E_i\right)^t\right)}{D\left(I_n\right)}=D\left(I_n\right)\cdot\prod_{i=1}^{r}\frac{D\left(E_i\right)}{D\left(I_n\right)}=D\left(P^t\right)$$

מסקנה 1.20. לכל מטריצה $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ מתקיים $D\left(A^t\right)=D\left(A\right)$.[3]

♣ המסקנה הקודמת (1.19) מאפשרת לנו לחשב במהירות את הערך שמחזירה D לכל מטריצה $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ אם אנחנו יודעים את הערך של $D\left(I_n\right)$: נדרג את המטריצה ונכפול את $D\left(I_n\right)$ בסקלרים המתאימים, ממסקנה זו נובע שאנחנו יכולים לדרג כרגיל (לפי שורות) ואין צורך לעבוד לפי עמודות.

מסקנה 1.21. לכל פונקציית נפח $D':M_n\left(\mathbb{F}\right)\to\mathbb{F}$ ולכל $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ מתקיים:

$$D'\left(A\right)=\frac{D'\left(I_n\right)}{D\left(I_n\right)}\cdot D\left(A\right)$$

[3] כמובן שטענה זו נכונה גם עבור פונקציית האפס.

מסקנה 1.22. מטריצה $P \in M_n(\mathbb{F})$ היא הפיכה אם"ם $D(P) \neq 0$.

מסקנה 1.23. אם קיימת פונקציית נפח $D' : V^n \to \mathbb{F}$ שאינה פונקציית האפס אז לכל מטריצה הפיכה $P \in M_n(\mathbb{F})$ קיימת פונקציית נפח יחידה $D_P : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ כך ש-$D_P(P) = 1$.

2 הדטרמיננטה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

2.1 הנוסחה המפורשת

למה 2.1. הפונקציה $D_1 : M_1(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ המוגדרת ע"י $D_1(A) := [A]_{11}$ (לכל $A \in M_1(\mathbb{F})$) היא פונקציית נפח מנורמלת.

משפט 2.2. יהיו $n \in \mathbb{N}$ ו-$n+1 \geq j \in \mathbb{N}$, ונניח שקיימת פונקציית נפח מנורמלת $D_n : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ (תהא D_n כנ"ל).
תהא $D_{n+1} : M_{n+1}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $A \in M_{n+1}(\mathbb{F})$):

$$D_{n+1}(A) := \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i+j} \cdot [A]_{ij} \cdot D_n(A_{ij}) \right)$$

D_{n+1} היא פונקציית נפח מנורמלת.

♣ כדי להבין מהיכן "צצה" הנוסחה הזו יש לזכור שכל פונקציית נפח היא חיבורית בכל רכיב בנפרד (במטריצות זה אומר שהיא חיבורית בכל עמודה), א"כ ניתן "לפרק" את המטריצה ל-n מטריצות כבכל אחת מהן רכיב אחד בלבד של העמודה ה-j, לדוגמה (כאן $j = n+1 = 3$):

$$D_3\left(\begin{bmatrix} a & d & \boldsymbol{g} \\ b & e & \boldsymbol{h} \\ c & f & \boldsymbol{i} \end{bmatrix}\right) = D_3\left(\begin{bmatrix} a & d & \boldsymbol{g} \\ b & e & \mathbf{0} \\ c & f & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) + D_3\left(\begin{bmatrix} a & d & \mathbf{0} \\ b & e & \boldsymbol{h} \\ c & f & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) + D_3\left(\begin{bmatrix} a & d & \mathbf{0} \\ b & e & \mathbf{0} \\ c & f & \boldsymbol{i} \end{bmatrix}\right)$$

מהתכונה השנייה של פונקציות נפח נקבל:

$$D_3\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{g} \\ b & e & \mathbf{0} \\ c & f & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) = D_3\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{g} \\ b & e & \mathbf{0} \\ c & f & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right)$$

$$D_3\left(\begin{bmatrix} a & d & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{h} \\ c & f & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) = D_3\left(\begin{bmatrix} a & d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{h} \\ c & f & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right)$$

$$D_3\left(\begin{bmatrix} a & d & \mathbf{0} \\ b & e & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{i} \end{bmatrix}\right) = D_3\left(\begin{bmatrix} a & d & \mathbf{0} \\ b & e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{i} \end{bmatrix}\right)$$

הנפח של כל מנסרה הוא שטח הבסיס כפול הגובה ולכן נקבל (נזכור שאנו עוסקים כאן בנפח מכוון):

$$\left|D_3\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & g \\ b & e & 0 \\ c & f & 0 \end{bmatrix}\right)\right| = \left|g \cdot D_2\left(\begin{bmatrix} b & e \\ c & f \end{bmatrix}\right)\right|$$

$$\left|D_3\left(\begin{bmatrix} a & d & 0 \\ 0 & 0 & h \\ c & f & 0 \end{bmatrix}\right)\right| = \left|h \cdot D_2\left(\begin{bmatrix} a & d \\ c & f \end{bmatrix}\right)\right|$$

$$\left|D_3\left(\begin{bmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}\right)\right| = \left|i \cdot D_2\left(\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \end{bmatrix}\right)\right|$$

א"כ השאלה היחידה היא מהו הסימן של כל איבר בסכום הנ"ל, נשים לב לכך שצריך להתקיים (ללא ערך מוחלט):

$$D_3\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & g \\ b & e & 0 \\ c & f & 0 \end{bmatrix}\right) = g \cdot D_2\left(\begin{bmatrix} b & e \\ c & f \end{bmatrix}\right)$$

$$D_3\left(\begin{bmatrix} a & 0 & d \\ 0 & h & 0 \\ c & 0 & f \end{bmatrix}\right) = h \cdot D_2\left(\begin{bmatrix} a & d \\ c & f \end{bmatrix}\right)$$

$$D_3\left(\begin{bmatrix} 0 & a & d \\ 0 & b & e \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = i \cdot D_2\left(\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \end{bmatrix}\right)$$

ולכן הסימן תלוי בזוגיות של מספר ההחלפות שיש לבצע כדי "להחזיר כל וקטור למקומו"[4], א"כ קיבלנו:

$$D_3\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & g \\ b & e & 0 \\ c & f & 0 \end{bmatrix}\right) = g \cdot D_2\left(\begin{bmatrix} b & e \\ c & f \end{bmatrix}\right) = (-1)^{1+3} \cdot g \cdot D_2\left(\begin{bmatrix} b & e \\ c & f \end{bmatrix}\right)$$

$$D_3\left(\begin{bmatrix} a & d & 0 \\ 0 & 0 & h \\ c & f & 0 \end{bmatrix}\right) = -h \cdot D_2\left(\begin{bmatrix} a & d \\ c & f \end{bmatrix}\right) = (-1)^{2+3} \cdot h \cdot D_2\left(\begin{bmatrix} a & d \\ c & f \end{bmatrix}\right)$$

$$D_3\left(\begin{bmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}\right) = i \cdot D_2\left(\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \end{bmatrix}\right) = (-1)^{3+3} \cdot i \cdot D_2\left(\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \end{bmatrix}\right)$$

כמובן שאת כל התהליך הזה יכולנו לבצע עבור כל גודל של מטריצה ובכל עמודה.

מסקנה 2.3. לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת פונקציית נפח מנורמלת יחידה עבור מרחב הקואורדינטות $\mathbb{F}^n$.

♣ בפרט קיימת פונקציית נפח שאינה פונקציית האפס בכל מרחב קואורדינטות.

[4] זה לא משנה שיש דרכים רבות לעשות זאת - לנו מספיקה רק אחת מהן כדי לקבוע את הסימן; ניתן ללמוד מזה שהזוגיות של כל הדרכים הללו זהה, ואכן זוהי טענה שנלמד במבנים 1 כאשר נעסוק בתמורות (ראו כאן).

טענה 2.4. יהי $1 < n \in \mathbb{N}$ ותהא $A \in M_n(\mathbb{F})$.

- לכל $n \geq j \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i+j} \cdot [A]_{ij} \cdot |A_{ij}|\right)$$

- לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{i+j} \cdot [A]_{ij} \cdot |A_{ij}|\right)$$

♣ את הנוסחה הראשונה ראינו לעיל (משפט 2.2) ולה קוראים "פיתוח דטרמיננטה לפי עמודה"[5], לנוסחה השנייה קוראים "פיתוח דטרמיננטה לפי שורה" ולשתיהן יחד - "פיתוח דטרמיננטה לפי מינורים".

♣ בדרך כלל לא כדאי לחשב את הדטרמיננטה בצורה זו אלא לדרג את המטריצה ולחשב את מכפלת הסקלרים המתאימים כפי שנראה בסעיף הבא, לפעמים יש הרבה אפסים במטריצה ואז ע"י בחירה מושכלת של שורה/עמודה ניתן לפתח את הדטרמיננטה לפי מינורים בקלות רבה.

מסקנה 2.5. הדטרמיננטה של מטריצת סיבוב היא 1.

מסקנה 2.6. הדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא מכפלת הסקלרים שעל האלכסון הראשי.

טענה 2.7. הדטרמיננטה של מטריצה משולשית לפי בלוקים (ובפרט של אלכסונית לפי בלוקים) היא מכפלת הדטרמיננטות של הבלוקים על האלכסון הראשי (לפי הבלוקים).

♣ לדוגמה המטריצה:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 5 & 8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 2 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 3 & 9 & 0 \\ \hline 3 & 7 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{array}\right]$$

היא מטריצה משולשית לפי בלוקים, אתם מוזמנים גם לעיין בערך מטריצת בלוקים בוויקיפדיה.

[5] אנחנו בוחרים עמודה j וכל מחובר בסכום הוא איבר בעמודה כפול המינור המתאים כשהסימן מתחלף בכל שורה.

2.2 חישוב ע"י פעולות שורה/עמודה אלמנטריות

♣ שתי הלמות הבאות נובעות ישירות ממסקנה 1.16.

למה 2.8. תהא $\varepsilon : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ פעולת שורה אלמנטרית ותהא $E \in M_n(\mathbb{F})$ המטריצה האלמנטרית המתאימה לה, מתקיים:

$$|E| = \left|E^t\right| = \mu(\varepsilon^*)$$

למה 2.9. תהיינה $A, E \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש-E היא מטריצה אלמנטרית, מתקיים:

$$\left|A \cdot E^t\right| = |A| \cdot \left|E^t\right| = |A| \cdot |E|$$

מסקנה 2.10. יהי V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ תהא $D : V^n \to \mathbb{F}$ פונקציית נפח ויהיו $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ בסיסים סדורים של V, מתקיים:

$$D(\mathcal{C}) = D(\mathcal{B}) \cdot \det\left([\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)$$

מסקנה 2.11. לכל מ"ו נ"ס קיימת פונקציית נפח שאינה פונקציית האפס.

♣ מכאן שאותה פונקציית נפח יחידה $D_{\mathcal{B}} : V^n \to \mathbb{F}$ המקיימת $D_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ היא הפונקציה המוגדרת ע"י $D_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) := \det\left([\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)$ לכל בסיס $\mathcal{C}$ (ו-0 לכל סדרה שאינה בסיס).

מסקנה 2.12. תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ שתי מטריצות, מתקיים $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

מסקנה 2.13. תהא $P \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה, מתקיים $\left|P^{-1}\right| = |P|^{-1}$.

מסקנה 2.14. לכל שתי מטריצות דומות $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים $|A| = |B|$.

3 המטריצה המצורפת וחיות אחרות

יהיו $\mathbb{F}$ שדה.

3.1 כלל קרמר

למה 3.1. תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה, יהי $b\in\mathbb{F}^n$ ונסמן ב-$A^{(i)}$ את המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת העמודה ה-i ב-b (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$).
אם קיים $x\in\mathbb{F}^n$ כך ש-$A\cdot x=b$ אז עבור אותו x מתקיים (לכל $n\geq k\in\mathbb{N}$):

$$\det A^{(k)}=(\det A)\cdot x_k$$

♣ כדי שנוכל להסביר את האינטואיציה הגאומטרית מאחורי הלמה נשים לב לשלוש נקודות:

- $\det A$ הוא הפקטור שבו A מותחת/מכווצת **כל** צורה בעלת נפח n-ממדי.
- $A^{(k)}$ היא סדרת התמונות של איברי הבסיס הסטנדרטי מלבד העמודה ה-k שמוחלפת ב-b שהוא תמונה של x.
- הנפח של המקבילון הנוצר ע"י וקטורי הבסיס הסטנדרטי כאשר e_k מוחלף ב-x הוא בדיוק x_k.

לפיכך $\det A^{(k)}$ הוא הנפח של המקבילון הנ"ל כשהוא מוכפל בפקטור המתיחה/הכיווץ שהוא $\det A$.

♣ את האינטואיציה הזו למדתי מסרטון של 3blue1brown, אמנם הוא מדבר שם דווקא על מצב שבו A הפיכה אך היא תקפה בכל מצב שבו יש ל-b מקור.

מסקנה 3.2. כלל קרמר[6]
תהא $P\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה, יהי $b\in\mathbb{F}^n$ ונסמן ב-$P^{(i)}$ את המטריצה המתקבלת מ-P ע"י החלפת העמודה ה-i ב-b (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$).
הפתרון היחיד למע"ל $P\cdot x=b$ הוא:

$$x:=\frac{1}{\det P}\cdot\begin{bmatrix}\det P^{(1)}\\ \det P^{(2)}\\ \vdots\\ \det P^{(n)}\end{bmatrix}$$

כלומר הקואורדינטה ה-i של הפתרון היא $\frac{1}{\det P}\cdot\det P^{(i)}$.

♣ כלל קרמר אינו יעיל במיוחד לחישובים (אפילו לא כדי להשיג קואורדינטה בודדת של הפתרון) וזאת משום שהחישוב הישיר של הדטרמיננטה ארוך ומייגע, ואם אנחנו כבר מדרגים את המטריצה כדי לחשב את הדטרמיננטה נוכל למצוא בקלות את כל הפתרון כפי שעשינו בעבר. כוחו של כלל קרמר הוא ביכולת שלו להראות את קיום הפתרון ע"פ הדטרמיננטה.

[6] ערך בוויקיפדיה: גבריאל קרמר.

3.2 המטריצה המצורפת

תזכורת: המטריצה המצורפת מוגדרת רק עבור $n>1$ ולכן כל הטענות בסעיף זה מניחות ש-$n>1$.

טענה 3.3. תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ ויהי $b\in\mathbb{F}^{n}$, מתקיים:

$$\left(\text{adj}A\right)\cdot b=\begin{bmatrix}\det A^{(1)}\\ \det A^{(2)}\\ \vdots\\ \det A^{(n)}\end{bmatrix}$$

כאשר $A^{(i)}$ היא המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת העמודה ה-i ב-b (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$).

♣ ראינו את ההסבר לטענה זו בקובץ ההגדרות.

למה 3.4. תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה, יהי $b\in\mathbb{F}^{n}$ ונסמן ב-$A_{(j)}$ את המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת השורה ה-j ב-b (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$).

אם קיים $x\in\mathbb{F}^{n}$ כך ש-$x^{t}\cdot A=b^{t}$[7] אז עבור אותו x מתקיים (לכל $n\geq j\in\mathbb{N}$):

$$\det A_{(j)}=\left(\det A\right)\cdot x_{j}$$

טענה 3.5. תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ ויהי $b\in\mathbb{F}^{n}$, מתקיים:

$$b^{t}\cdot\text{adj}A=\begin{bmatrix}\det A_{(1)}\\ \det A_{(2)}\\ \vdots\\ \det A_{(n)}\end{bmatrix}$$

כאשר $A_{(j)}$ היא המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת השורה ה-j ב-b (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$).

מסקנה 3.6. תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ ויהי $b\in\mathbb{F}^{n}$,

- אם קיים $x\in\mathbb{F}^{n}$ כך ש-$A\cdot x=b$ אז עבור אותו x מתקיים $\left(\text{adj}A\right)\cdot b=\left(\det A\right)\cdot x$.
- אם קיים $x\in\mathbb{F}^{n}$ כך ש-$x^{t}\cdot A=b^{t}$ אז עבור אותו x מתקיים $b^{t}\cdot\text{adj}A=\left(\det A\right)\cdot x^{t}$.

מסקנה 3.7. המשפט המרכזי של המטריצה המצורפת
לכל מטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מתקיים:

$$\left(\text{adj}A\right)\cdot A=\left(\det A\right)\cdot I_{n}=A\cdot\text{adj}A$$

[7] אנו משתמשים כאן באיזומורפיזם שבין $\mathbb{F}^{n}$ ל-$M_{n\times1}\left(\mathbb{F}\right)$.

מסקנה 3.8. לכל מטריצה הפיכה $P\in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים:

$$P^{-1}=\frac{1}{\det P}\cdot\text{adj}P$$
$$\text{adj}P=(\det P)\cdot P^{-1}$$

♣ מסקנה זו מאפשרת לנו לחשב קואורדינטה בודדת במטריצה ההופכית באמצעות המטריצה המצורפת, למרות זאת מסקנה זו אינה מועילה במיוחד לחישובים מפני שהרבה יותר פשוט לדרג את המטריצה מאשר לחשב את הדטרמיננטה של המינור המתאים (פעמים רבות גם חישוב הדטרמיננטה דורש את הדירוג).

מסקנה 3.9. לכל שתי מטריצות הפיכות $P,Q\in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים $\text{adj}(PQ)=\text{adj}Q\cdot\text{adj}P$.

♣ למעשה מסקנה זו נכונה גם עבור מטריצות שאינן הפיכות אך טרם למדנו את הכלים הנדרשים בשביל להוכיח זאת.

מסקנה 3.10. מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ היא הפיכה אם"ם $\text{adj}A$ הפיכה, ובמקרה כזה מתקיים $(\text{adj}A)^{-1}=\text{adj}\left(A^{-1}\right)$.

מסקנה 3.11. לכל מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים:

$$\det(\text{adj}A)=(\det A)^{n-1}$$

מסקנה 3.12. לכל מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ ולכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\det\left(\underbrace{\text{adj}\left(\text{adj}\left(\ldots\left(\text{adj}A\right)\right)\right)}_{\text{פעמים } k}\right)=(\det A)^{(n-1)^k}$$

טענה 3.13. תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה, מתקיים אחד משלושת הפסוקים הבאים:

1. אם $\text{rk}A=n$ אז $\text{rk}(\text{adj}A)=n$.
2. אם $\text{rk}A=n-1$ אז $\text{rk}(\text{adj}A)=1$.
3. אם $\text{rk}A<n-1$ אז $\text{rk}(\text{adj}A)=0$ (כלומר $\text{adj}A=0_n$).

טענה 3.14. לכל מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים $\text{adj}A^t=(\text{adj}A)^t$.

3.3 מטריצת ונדרמונד

משפט 3.15. תהא $V\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצת ונדרמונד עבור ערכים $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{F}$, כלומר:

$$V:=\begin{bmatrix}1 & x_1 & \left(x_1\right)^2 & \ldots & \left(x_1\right)^{n-1}\\ 1 & x_2 & \left(x_2\right)^2 & \ldots & \left(x_2\right)^{n-1}\\ 1 & x_3 & \left(x_3\right)^2 & \ldots & \left(x_3\right)^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & \left(x_n\right)^2 & \ldots & \left(x_n\right)^{n-1}\end{bmatrix}$$

מתקיים:

$$\det V=\prod_{n\geq i,j\in\mathbb{N}\ \ i<j}\left(x_j-x_i\right)$$

מסקנה 3.16. מטריצת ונדרמונד $V\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ עבור ערכים $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{F}$ היא הפיכה אם"ם $x_i\neq x_j$ לכל $n\geq i,j\in\mathbb{N}$ כך ש-$i\neq j$.

♣ אנחנו יודעים ששתי נקודות מגדירות ישר יחיד (כלומר פולינום ממעלה 1) ואילו שלוש נקודות מגדירות פרבולה יחידה (כלומר פולינום ממעלה 2), מה לגבי פולינומים ממעלה גבוהה יותר?

מסקנה 3.17. לכל $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{F}$ כך שלכל $n\geq i,j\in\mathbb{N}$ כך ש-$i\neq j$ ולכל $y_1,y_2.\ldots,y_n\in\mathbb{F}$ קיים פולינום יחיד $P\in\mathbb{F}_{\leq n-1}\left[x\right]$ כך ש-$y_i=P\left(x_i\right)$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$.

♣ כלומר $n+1$ נקודות במישור שערכי ה-x שלהן שונים מגדירות פולינום יחיד ממעלה n שעובר בכולן.