מכניקה קלאסית

מכניקה ויחסות פרטית - 77101

מרצה: סיוון גינזבורג

מתרגל: גיא פרדו

סוכם ע"י שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ה, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על גבי המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 חוקי ניוטון

1. **חוק ההתמדה** - גוף שלא פועלים עליו כוחות כלשהם ינוע במהירות קבועה[1].

2. **חוק התאוצה** - שקול הכוחות של גוף עומד ביחס ישר לתאוצתו ויחס זה הוא מסת הגוף. כלומר שקול הכוחות של גוף בעל מסה m הנע בתאוצה $\vec{a}$ הוא $\vec{F}_{\text{tot}} = m \cdot \vec{a}$.

3. **חוק הפעולה והתגובה** - כאשר גוף ראשון מפעיל כוח על גוף שני, יפעיל הגוף השני על הגוף הראשון כוח זהה בגודלו ומנוגד בכיוונו. כלומר, אם נסמן ב-$\vec{F}_{1,2}$ את הכוח שמפעיל הגוף הראשון על השני וב-$\vec{F}_{2,1}$ את הכוח שמפעיל הגוף השני על הראשון, אז מתקיים $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$.

♣ כל שלושת החוקים של ניוטון הם חוקים **וקטוריים**, כלומר:

1. המשמעות של המונח "מהירות קבועה" שהוזכר בחוק הראשון היא שווקטור המהירות (velocity) קבוע ולא רק הגודל שלו (speed), בפרט נובע מזה שהמשמעות של מהירות קבועה היא תנועה **בקו ישר**.
2. השוויון המופיע בחוק השני הוא שוויון וקטורי - לא רק שגודל הכוח שווה למסה כפול גודל התאוצה, אלא שגם הכיוונים של הכוח והתאוצה זהים.
3. השוויון המופיע בחוק השלישי הוא שוויון וקטורי - הגדלים של הכוחות שמפעילים שני הגופים זה על זה שווים, וכיווני הכוחות מנוגדים.

♣ החוק הראשון נובע מהחוק השני: אם שקול הכוחות הוא $\vec{0}$ נקבל שהתאוצה היא $\vec{a} = m^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0}$ (אנו מניחים כאן שאין באמת גופים שמסתם היא 0).

♣ פעמים רבות ניתקל בניסוחים המזניחים את המסה של גופים קטנים (כגון חבלים), כלומר אנו מתייחסים אליהם כאילו מסתם היא 0. לפיכך ע"פ החוק השני שקול הכוחות עליהם מוכרח להיות $\vec{0}$ (כמובן שבפועל אין זה בהכרח המצב אך מכיוון שמסתם זניחה גם שקול הכוחות עליהם יהיה זניח).

♣ מהחוק השלישי נובע באופן מיידי שהכוח שמפעיל גוף על עצמו הוא בהכרח $\vec{0}$.

---

[1] מנוחה נחשבת תנועה במהירות קבועה $\vec{0}$.

2 חוק שימור התנע

נניח שיש לנו n גופים ואנו מסמנים ב-$\vec{F}_{i,j}$ את הכוח שמפעיל הגוף ה-i על הגוף ה-j וב-$\vec{F}_{i,\text{ext}}$ את סכום הכוחות החיצוניים הפולעים על הגוף ה-i. ט״כ שקול הכוחות על כל גוף i הוא בדיוק:

$$\vec{F}_{i,\text{tot}} = \vec{F}_{i,\text{ext}} + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{i,j}$$

מכאן שסכום כל הכוחות הפועלים על כלל n הגופים הוא[2]:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i,\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_{i,\text{ext}} + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{j,i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i,\text{ext}} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \left(\vec{F}_{i,j} + \vec{F}_{j,i} \right)$$

מחוק הפעולה והתגובה נקבל:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i,\text{ext}} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \left(\vec{F}_{i,j} + \left(-\vec{F}_{i,j} \right) \right) = \vec{F}_{\text{ext,tot}} + \vec{0} = \vec{F}_{\text{ext,tot}}$$

מכאן שבמערכת סגורה[3] סכום כלל הכוחות הפועלים על הגופים במערכת הוא בדיוק $\vec{0}$!

לכל גוף j נסמן $\vec{P}_j(t) = m_j \cdot \vec{v}_j(t)$ (כאשר m_j היא המסה של הגוף ו-$\vec{v}_j(t)$ היא תאוצתו בזמן t), ונקרא ל-$\vec{P}_j(t)$ התנע של גוף j בזמן t. למה הווקטור הזה מעניין אותנו בכלל? מפני שע״פ כללי גזירה, וע״פ חוק התאוצה של ניוטון, הנגזרת של התנע כתלות בזמן היא בדיוק שקול הכוחות על הגוף - ע״פ חוק התאוצה, לכל גוף j מתקיים:

$$\frac{d\vec{P}_j}{dt} = m_j \cdot \frac{d\vec{v}_j}{dt} = m_j \cdot \vec{a}_j = \vec{F}_{j,\text{tot}}$$

מכאן שאם נסמן:

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \sum_{j=1}^{n} \vec{P}_j$$

נקבל במערכת סגורה:

$$\frac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d\vec{P}_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{j,\text{tot}} = \vec{F}_{\text{tot}} = \vec{0}$$

כלומר במערכת סגורה, הנגזרת של התנע הכולל כתלות בזמן היא פונקציית האפס ולכן זוהי פונקציה קבועה! התנע הכולל נשמר - זהו חוק שימור התנע.

[2] כזכור הכוח שמפעיל גוף על עצמו הוא $\vec{0}$, ולכן אין שום בעיה בכך שסכמנו את הכוחות הללו.

[3] נאמר שאנו נמצאים במערכת סגורה אם לכל אחד מן הגופים, לא פועלים עליו כוחות שמקורם בגופים שאינם ב-n הגופים הנ״ל.

3 תנועה מעגלית קצובה

לכל תנועה מחזורית יש זמן מחזור - פרק הזמן שבו כלל הגופים הנעים בתנועה מחזורית זו חוזרים לאותו מצב שבו היו לפני כן. לדוגמה, תנועת מטוטלת היא תנועה מחזורית ואורך המחזור שלה הוא הזמן שלוקח למטוטלת לנוע מצד אחד לצד שני ובחזרה.
בפרק זה נעסוק בסוג מסוים מאוד של תנועה מחזורית והוא תנועה מעגלית קצובה - גוף נע במעגל מושלם סביב נקודה כלשהי ובמהירות שגודלה קבוע (כלומר $|\vec{v}|$ קבוע אך $\vec{v}$ משתנה כמובן). כעת ניתן לדבר גם על המהירות הזוויתית של הגוף - מהו גודל הזווית שהוא מספיק ביחידת זמן, כך לדוגמה אם הגוף מבצע הקפה אחת ב-π שניות המהירות הזוויתית שלו תהיה $2\frac{1}{s}$ (קרי 2 רדיאנים בשנייה), וכבר אנו יכולים לראות שתמיד מתקיים $P\cdot\omega=2\pi$ כאשר P הוא זמן המחזור של הגוף הנע בתנועה מעגלית קצובה ו-ω היא המהירות הזוויתית שלו.
כעת ננתח את התנועה של גוף בעל מסה m, הנע במעגל מושלם בעל רדיוס r, במהירות זוויתית קבועה ω.
נעבוד במישור המכיל את המעגל, נקבע את ראשית הצירים במרכז המעגל, ונגדיר את נקודת הזמן שבה היה הגוף בנקודה $(0,1)$ כ-$t=0$.

- המיקום של הגוף בזמן t הוא:

$$\vec{r}\left(t\right)=\begin{pmatrix}r\cdot\cos\left(\omega t\right)\\ r\cdot\sin\left(\omega t\right)\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}\cos\left(\omega t\right)\\ \sin\left(\omega t\right)\end{pmatrix}$$

- המהירות של הגוף בזמן t היא:

$$\vec{v}\left(t\right)=\dot{\vec{r}}\left(t\right)=r\cdot\begin{pmatrix}-\omega\cdot\sin\left(\omega t\right)\\ \omega\cdot\cos\left(\omega t\right)\end{pmatrix}=\omega r\cdot\begin{pmatrix}-\sin\left(\omega t\right)\\ \cos\left(\omega t\right)\end{pmatrix}$$

- התאוצה של הגוף בזמן t היא:

$$\vec{a}\left(t\right)=\dot{\vec{v}}\left(t\right)=\omega r\cdot\begin{pmatrix}-\omega\cdot\cos\left(\omega t\right)\\ -\omega\cdot\sin\left(\omega t\right)\end{pmatrix}=-\omega^{2}r\cdot\begin{pmatrix}\cos\left(\omega t\right)\\ \sin\left(\omega t\right)\end{pmatrix}=-\omega^{2}\cdot\vec{r}\left(t\right)$$

  נשים לב לכך שמתקיים $\vec{v}\left(t\right)\cdot\vec{a}\left(t\right)=0$, כלומר **התאוצה של גוף הנע במהירות זוויתית קבועה מאונכת למהירותו**.

- ע"פ החוק השני של ניוטון נקבל שהכוח הפועל על הגוף בזמן t הוא:

$$\vec{F}\left(t\right)=-m\omega^{2}\cdot\vec{r}\left(t\right)=-m\omega^{2}r\cdot\begin{pmatrix}\cos\left(\omega t\right)\\ \sin\left(\omega t\right)\end{pmatrix}$$

  ולכן גודל הכוח הוא $m\omega^{2}r$.

- זמן המחזור של תנועת הגוף הוא $P=\frac{2\pi}{\omega}$, ומכאן ש-$\omega=\frac{2\pi}{P}$. לפיכך ניתן לכתוב את הכוח הפועל על הגוף באופן הבא:

$$\vec{F}\left(t\right)=-m\cdot\frac{4\pi^{2}}{P^{2}}\cdot r\cdot\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right)\\ \sin\left(\frac{2\pi t}{P}\right)\end{pmatrix}$$

4 הכוחות שיופיעו בקורס

4.1 כוח הכבידה

כוכב לכת בעל מסה m_P סובב סביב השמש בזמן מחזור T. בפרק הקודם ראינו שהמהירות הזוויתית שלו היא $\omega = \frac{2\pi}{T}$, ולכן **גודל** כוח המשיכה שמפעילה השמש על כוכב הלכת הוא:

$$F = m\omega^2 r = \frac{4\pi^2 m \cdot r}{T^2}$$

בזמנו של ניוטון כבר ידעו (על בסיס תצפיות) שריבוע זמן המחזור של תנועת כוכב לכת סביב השמש עומד ביחס ישר למרחק כוכב הלכת מהשמש בשלישית, ויחס זה קבוע לכל כוכבי הלכת. כלומר קיים קבוע K, כך שגודל הכוח שמפעילה השמש על כוכב הלכת מוכרח לקיים:

$$F = \frac{4\pi^2 m \cdot r}{K \cdot r^3} = \frac{4\pi^2 m}{K \cdot r^2}$$

כלומר קיים קבוע K' כך שמתקיים:

$$F = \frac{K' \cdot m}{r^2}$$

כעת נהפוך את התפקידים: נניח שכוכבי לכת רבים בעלי מסה זהה מקיפים שמשות בעלי מסות שונות, א״כ לכל שמש S קיים קבוע $K(S)$ כך שהכוח שמפעילה אותה שמש על כוכב הלכת שלה הוא:

$$F(S) = \frac{K_S \cdot m}{r^2}$$

מצד שני, ע״פ חוק הפעולה והתגובה זהו בדיוק גודל הכוח שמפעיל כוכב הלכת על השמש שלו, ולכן מתקיים:

$$F(S) = M_S \cdot a_S$$

כאשר M_S היא מסת השמש ו-a_S הוא גודל התאוצה שלה כתוצאה מהכבידה שמפעיל כוכב הלכת. ניסויים על כדור הארץ הראו שאם מנטרלים את ההשפעה התנגדות האוויר[4], כל הגופים נופלים באותה תאוצה. לכן יש להניח שתאוצת כל השמשות הללו זהה, שהרי לא אמור להיות הבדל בין כדור הארץ לשאר כוכבי הלכת, וכמו כן אין סיבה לחשוב שהשמשות תהיינה שונות מגופים אחרים. א״כ קיבלנו שכאשר מקבעים את מסת כוכב הלכת ואת מרחקו מן השמש, גודל כוח המשיכה הפועל בין כוכב הלכת לשמש שלו עומד ביחס ישר למסת השמש. מצד שני, ראינו לעיל שכאשר מקבעים את מסת השמש (אין סיבה לחשוב שהשמש שלנו שונה משמשות אחרות), גודל כוח המשיכה הפועל ביניהם עומד ביחס ישר למסת כוכב הלכת חלקי ריבוע מרחקו מן השמש. הדרך היחידה שבה זה יכול לקרות היא שקיים קבוע G כך שלכל כוכב לכת בעל מסה m_P ושמש בעלת מסה M_S שמרחק זה מזה הוא r, גודל כוח הכבידה שמפעילים השמש וכוכב הלכת זה על זה הוא:

$$F = \frac{GM_S m_P}{r^2}$$

אין שום סיבה להניח שכוכבי הלכת והשמשות שונים מגופים אחרים ולכן קיבלנו שגודל כוח הכבידה שמפעילים שני גופים בעלי מסות m_1 ו-m_2 הנמצאים במרחק r זה מזה הוא:

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$$

G הנ״ל נקרא <u>קבוע הכבידה של ניוטון</u>.

♣ ניוטון אמנם יכול היה להוכיח שקיים קבוע G כזה, אך מכיוון שהנתונים היחידים שהיו בידו היו משוואות התנועה של כוכבי הלכת, לא יכול היה להסיק מהם את הערך של G שכן לא הייתה בידו מסת השמש![5]

[4] דרך פשוטה לנטרל את השפעת האוויר היא להפיל שתי תיבות העשויות מאותו חומר ובעלות גובה זהה, את ההבדל בין המסות של התיבות נוכל להשיג ע״י החופש שיש לנו בבחירת גודל הבסיס של התיבות.

[5] משוואות התנועה מאפשרות למצוא את התאוצות של כוכבי הלכת ואת מרחקיהם מן השמש, ע״פ חוק התאוצה - גודל התאוצה של כוכב לכת בעל מסה m ובמרחק r הוא (נסמן את מסת השמש ב-M):

$$a = \frac{F}{m} = \frac{1}{m} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = \frac{G \cdot M}{r^2}$$

כוח הכבידה - גוף עם סימטריה כדורית וניסוי קוונדיש

סיכום קצר של כוח הכבידה

- באילו מקרים פועל הכוח?

כל שני גופים מפעילים זה על זה כוחות כבידה.

- מהו הגודל של הכוח?

הגודל של כוח הכבידה בין שני גופים בעלי מסות m_1 ו-m_2 ובמרחק r זה מזה הוא:

$$F = \frac{Gm_1m_1}{r^2}$$

כאשר G הוא קבוע הכבידה של ניוטון השווה בקירוב ל-$6.67384 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2kg}$.

- מהו כיוון הכוח?

כוח הכבידה הוא כוח משיכה, כלומר הכוחות הנורמליים שמפעילים שני הגופים מכוונים בכיוון הישר שהם מגדירים במרחב, ופועלים לקרבם זה לזה. א"כ הכוח שמפעיל גוף 1 על גוף 2 פועל בכיוון הווקטור $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$, והכוח שמפעיל גוף 2 כל גוף 1 פועל בכיוון הווקטור $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (כאשר $\vec{r}_1$ ו-$\vec{r}_2$ הם וקטורי המיקום של גופים 1 ו-2 בהתאמה).

4.2 הכוח הנורמלי

המחשב שעליו אני כותב את הסיכום הזה מונח על השולחן ואינו נע, מכאן (ע"פ חוק התאוצה) ששקול הכוחות עליו הוא $\vec{0}$. אבל אנחנו יודעים שפועל עליו כוח הכבידה שמפעיל כדור הארץ, ולכן בהכרח קיימים כוחות נוספים הפועלים על המחשב, כך שסכום הרכיבים שלהם בכיוון הכבידה שווה בגודלו לכוח הכבידה ומנוגד בכיוונו לכוח זה. במערכת שלנו יש בדיוק שלושה גופים: המחשב, השולחן וכדור הארץ; לכן יש רק גוף אחד שיכול להפעיל את הכוח זה והוא השולחן. משטח המגע של המחשב והשולחן מאונך לכיוון הכבידה, מכאן שגם הכוח שמפעיל השולחן על המחשב מאונך לכיוון משטח המגע.

מבחינה אינטואיטיבית מה שקורה כאן הוא כזה: על המחשב פועל כוח הכבידה ולכן המחשב "רוצה" לנוע כלפי מטה, השולחן אינו מאפשר זאת ולכן ה"התנגשות" ביניהם גורמת לכך שהמחשב מפעיל על השולחן את אותו כוח שמפעיל עליו כדור הארץ, ובתגובה (חוק הפעולה והתגובה) מפעיל השולחן את אותו כוח על המחשב. כעת נתאר לעצמנו שהשולחן נמצא בשיפוע, שוב פועל כוח הכבידה על המחשב, ושוב "רוצה" המחשב לנוע כלפי מטה. אלא שהפעם השולחן אינו מונע זאת לחלוטין, שכן ה"התנגשות" בין המחשב לשולחן מתרחשת אך ורק בציר המאונך למשטח המגע שלהם. לפיכך יפעיל המחשב על השולחן את הרכיב המתאים של הכוח שמפעיל עליו כדור הארץ, ובתגובה (שוב חוק הפעולה והתגובה) יפעיל השולחן על המחשב את אותו כוח בכיוון ההפוך. כלומר הרכיב של כוח הכבידה על המחשב מתבטל ע"י הכוח הנורמלי שמפעיל השולחן ולכן נשאר רק הרכיב שמקביל למשטח השולחן - זו הסיבה שהמחשב מחליק למטה במקביל לשולחן (אוי ואבוי!). בעצם, אני יכול להירגע - אנחנו יודעים שבזוויות מסוימות המחשב אינו מחליק, שכן השולחן מפעיל עליו גם חיכוך (על כך בסעיף הבא).

♣ הכוח הנורמלי נקרא כך מפני שהוא מאונך למשטח המגע של הגופים, "normal" באנגלית הוא לא רק "רגיל" אלא גם "אנך" - ראו כאן (מילון קיימברידג') וכאן (הרחבה על האטימולוגיה של המילה במילון וובסטר).

♣ הכוח הנורמלי אינו כוח התגובה של כבידת כדור הארץ! - כוח התגובה של כבידה זו הוא הכבידה שמפעיל המחשב על כדור הארץ. הכוח הנורמלי שמפעיל השולחן הוא כוח התגובה של הכוח הנורמלי שמפעיל המחשב על השולחן.

ולכן קיבלנו:

$$G = \frac{ar^2}{M}$$

סיכום קצר של הכוח הנורמלי

- באילו מקרים פועל הכוח?

בכל מצב שבו גוף 1 מפעיל כוח $\vec{F}_{1,2}$ על גוף 2, ואילו גוף 3 מונע זאת בכך שהוא "תופס" את המקום שאליו היה אמור גוף 2 לנוע ע"פ הכוח $\vec{F}_{1,2}$[6]. או אז מפעיל גוף 2 כוח נורמלי על גוף 3, ובתגובה (חוק הפעולה והתגובה) מפעיל גוף 3 כוח זהה בגודלו ומנוגד בכיוונו על גוף 2.

- מהו הגודל של הכוח?

הגודל של הכוח הנורמלי שווה לגודל הרכיב של $\vec{F}_{1,2}$ בכיוון הציר המאונך למשטח המגע של גופים 2 ו-3.

- מהו כיוון הכוח?

הכוח הנורמלי הוא כוח דחייה, כלומר הכוחות הנורמליים שמפעילים גופים 2 ו-3 מכוונים בכיוון הישר שמגדירים שני הגופים במרחב (שהוא מאונך למשטח המגע שלהם), ופועלים להרחיקם זה מזה. א"כ הכוח שמפעיל גוף 2 על גוף 3 פועל בכיוון הווקטור $\vec{r}_3 - \vec{r}_2$, והכוח שמפעיל גוף 3 כל גוף 2 פועל בכיוון הווקטור $\vec{r}_2 - \vec{r}_3$ (כאשר $\vec{r}_2$ ו-$\vec{r}_3$ הם וקטורי המיקום של גופים 2 ו-3 בהתאמה).

♣ לכל גוף יש "נקודת שבירה" - ערך מרבי של גודל הכוח הנורמלי שהוא מסוגל להפעיל ובכך לנוע מגופים אחרים "לתפוס" את מקומו. נקודת השבירה תלויה בחומרים שהם מורכב הגוף (אם החומרים "חלשים" מדי הגוף עלול להישבר תחת הלחץ), ובטיב הכוחות הפועלים עליו להשאירו במקומו (כשאנו דוחפים עגלה היא אמנם מפעילה עלינו כוח נורמלי אך הוא חלש מכפי שהיה יכול להיות לו הייתה נשארת במקומה).

4.3 חיכוך (סטטי ודינמי)

השולחן של המרצה באולם פלדמן א' עקום כך שפלטת השולחן מהווה מישור משופע, למרות זאת כאשר סיוון מניח את המחק על השולחן זה האחרון אינו מחליק אלא נשאר במקומו, מדוע? הרי פועל עליו כוח הכבידה של כדור הארץ?

♣ נשים לב: כעת, אי אפשר לתלות שוב את האשמה בכוח הנורמלי לבדו, שכן הוא אינו פועל בכיוון מנוגד לכבידה אלא נטוי מעט.

התשובה שפני השולחן ופני המחק אינם חלקים אלא מחוספסים, אם נתבונן ברזולוציה גבוהה מספיק ניווכח שהם מלאים שקעים ובליטות, ולכן ככל שיותר שקעים באחד הגופים יתאימו לבליטות בגוף האחר כך יפריעו הגופים זה לזה בתנועה שבמקביל למישור המגע. לכוח זה שמפעילים השולחן והמחק זה על זה אנו קוראים כוח החיכוך, והדרך המתמטית שלנו לחשב אותו היא כזו: לכל שני גופים יש מקדם חיכוך סטטי שמסומן ב-μ_s ומקדם חיכוך קינטי שמסומן ב-μ_k ($\mu_k < \mu_s$), הכוח המרבי[7] שהשולחן יכול להפעיל על המחק כדי שלא ינוע (זהו חיכוך סטטי) הוא $\left|\vec{N}\right| \cdot \mu_s$ כאשר $\vec{N}$ הוא הכוח הנורמלי שמפעילים השולחן והמחק זה על זה, וברגע שנדרש כוח רב מזה (זוהי כעין "נקודת השבירה" שראינו בכוח הנורמלי) המחק מתחיל לנוע והחיכוך עובר להיות חיכוך קינטי שבו הכוח שהשולחן מפעיל על המחק הוא תמיד $\left|\vec{N}\right| \cdot \mu_k$.

[6] הכיוון שאליו אמור לנוע גוף 2 נקבע ע"י חוק התאוצה של ניוטון.

[7] אם יספיק כוח קטן יותר גם השולחן יפעיל כוח קטן יותר. ולא, זה לא שהשולחן "יודע" כמה כוח עליו להפעיל אלא שאם יש צורך בכוח קטן יותר ע"מ להחזיק את המחק במקומו הרי שזה בגלל שהמחק מפעיל כוח חיכוך חלש יותר על השולחן (כוח זה נובע מ"רצונו" של המחק לנוע מטה בהשפעת כוח הכבידה, ממש כפי שראינו בכוח הנורמלי).

סיכום קצר של כוח החיכוך

- באילו מקרים פועל הכוח?

בכל מצב שבו שני גופים מפעילים כוח נורמלי זה על זה, ולולא כוח החיכוך היו נעים זה ביחס לזה בכיוון המקביל למישור המגע שלהם[8].

- מהו הגודל של הכוח?

כשאין תנועה גודלו של כוח החיכוך הוא $\left|\vec{N}\right| \cdot \mu_s$ וכשיש תנועה גודלו הוא $\left|\vec{N}\right| \cdot \mu_k$; כאשר $\left|\vec{N}\right|$ הוא גודל הכוח הנורמלי שמפעילים הגופים זה על זה, ואילו μ_s ו-μ_k הם מקדמי החיכוך הסטטי והקינטי בהתאמה (מתקיים $\mu_s < \mu_k < 1$).

- מהו כיוון הכוח?

כוח החיכוך פועל תמיד בכיוון המנוגד לתנועה שהייתה מתרחשת לולא היה פועל.

4.4 מתיחות

מיתר מתוח מפעיל כוח על הגופים המותחים אותו, על כל גוף מפעיל המיתר כוח בכיוון שמן הגוף אל המיתר. כך לדוגמה כדור התלוי על חוט מותח את החוט בהשפעת כוח הכבידה, ולכן בתגובה החוט מפעיל עליו כוח המונע ממנו ליפול.

סיכום קצר של כוח המתיחות

- באילו מקרים פועל הכוח?

כאשר גוף מותח מיתר כלשהו, בפרט מיתר רפוי אינו יכול להפעיל כוח.

- מהו הגודל של הכוח?

את הגודל של הכוח ניתן להסיק ע״פ חוק התאוצה מן הכוחות האחרים שפועלים על הגוף (בדוגמה של הכדור התלוי על החוט זהו גודלו של כוח הכבידה שפועל על הכדור).

- מהו כיוון הכוח?

כיוון הכוח הוא מן הגוף לכיוון המיתר, בפרט מיתר המתוח אופקית אינו יכול להפעיל מתיחות בכיוון האנכי ולהפך.

4.5 כוח מחזיר

אנחנו מחזיקים בידנו קצה של קפיץ המחובר לקיר בקצהו האחר, כעת הקפיץ רפוי ולכן אינו מפעיל עלינו כוח. כעת נמתח את הקפיץ ולכן הקפיץ יפעיל עלינו כוח בכיוון המנוגד למתיחה, אם נמתח את הקפיץ עוד יופעל עלינו כוח חזק יותר, ואם נכווץ את הקפיץ כך שאורכו יהיה קצר יותר מאורכו המקורי יופעל עלינו כוח בכיוון ההפוך. א״כ הכוח שמפעיל הקפיץ הוא פונקציה מונוטונית התלויה במיקום בלבד כאשר בנקודה שבה הקפיץ רפוי ערך הפונקציה הוא 0, ולכן קירוב שלה באמצעות נגזרתה הוא פונקציה מהצורה $k \cdot (x - x_0)$ כאשר x_0 היא הנקודה שבה הגוף רפוי ו-k היא הנגזרת של הפונקציה ב-x_0. כלומר לכל קפיץ יש קבוע k (מכונה קבוע הקפיץ), וככל שקבוע זה גדול יותר כך ״קשה״ יותר למתוח/לכווץ את הקפיץ מעבר לאורכו הרפוי.

♣ הקפיץ הוא בסך הכל דוגמה למערכת שבה יש נקודת שיווי משקל - נקודה שבה כלל הכוחות במערכת מתאפסים, ועל כן, באופן תאורטי, היא יכולה להישאר בנקודה זו לנצח.

צריך להמשיך

[8] ייתכן כמובן שגם למרות כוח החיכוך ינועו הגופים, הניסוח ״לולא כוח החיכוך...״ בא לומר שגם כאשר הגופים נמצאים במנוחה יכול לפעול כוח חיכוך ביניהם.

5 עבודה ואנרגיה

5.1 עבודה

גוף נע במרחב לאורך מסלול כלשהו, כעת נרצה לומר שהכוחות הפועלים על הגוף מבצעים עליו "עבודה" (במובן האינטואיטיבי של המילה) בכך שהם גורמים לו לזוז (כשאני דוחף מקרר אני מבצע "עבודה"), והשאלה המתבקשת היא כמה "עבודה" נעשתה על הגוף? - כמובן, כרגע אין לשאלה הזו משמעות מוגדרת ולמעשה אנחנו פשוט נגדיר את התשובה באופן שיהיה תואם לאינטואיציה שלנו. נניח לרגע שהגוף נע בקו ישר ללא חזרות לאחור ושקול הכוחות עליו קבוע.

- נרצה שככל שהרכיב של שקול הכוחות בכיוון התנועה יהיה גדול יותר כך תהיה העבודה גדולה יותר.
- נרצה גם שככל שהגוף עבר מרחק רב יותר כך תגדל גם העבודה.

לכן הגדרה טובה לכמות העבודה שהושקעה היא $\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$ - המכפלה הסקלרית בין שקול הכוחות לבין וקטור ההעתק של הגוף.

♣ לכאורה היינו להתחשב גם במסה של הגוף ובזמן שלקח לו לעבור את המרחק. הסיבה שאיננו מחשבים במסה היא שגודל שקול הכוחות עומד ביחס ישר למסה, ולכן מבחינה מתמטית כבר קיבלנו את האפקט המבוקש (ככל שהמסה גדולה יותר כך העבודה רבה יותר)[9]. לעומת זאת בזמן אנחנו מתחשבים פעמיים: מצד אחד, ככל ששקול הכוחות הופעל זמן רב יותר היינו רוצים לומר שנעשתה עבודה רבה יותר, אך מצד שני, ככל שהגוף עבר את המרחק בזמן ארוך יותר כך נרצה שהעבודה תהיה קטנה יותר; לכן הזמן אינו מופיע בנוסחה.

כעת נטפל במקרה שבו הגוף נע במסלול שאינו ישר או שהוא חוזר לאחור, וכן נטפל במקרה שבו שקול הכוחות אינו קבוע. הדרך לחשב את אורך המסלול היא לקרב את המסלול ע"י קטעים ישרים, ככל שנקרב ע"י קטעים קטנים יותר נקבל קירוב טוב יותר ובגבול נקבל ממש את אורך המסלול. נשים לב שבמרחקים קטנים לאין-סוף ניתן להניח ששקול הכוחות קבוע, ושהגוף אינו חוזר לאחור, ולכן בכך שטיפלנו בבעיית האורך פתרנו גם את שתי הבעיות האחרות. א"כ אנו לוקחים גבול על סכום מהצורה:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}\left(t_i\right)\cdot\left(\vec{\gamma}\left(t_i\right)-\vec{\gamma}\left(t_{i-1}\right)\right)$$

כאשר γ היא פונקציה מקטע סגור $[x,y]$ כלשהו אל המרחב שתמונתה היא המסלול של הגוף, ו-$t_0,t_1,\ldots,t_n$ הן נקודות בקטע הסגור המקיימות $x=t_0<t_1<\ldots<t_n=y$. הגבול נלקח כאשר המקסימום מבין ההפרשים t_i-t_{i-1} שואף ל-0, שימו לב שזה יחייב אותנו לחלק את הקטע $[x,y]$ ע"י נקודות רבות יותר ויותר, כלומר n אינו קבוע.
סימון מקובל לתהליך הגבול שביצענו הוא $\int_x^y\vec{F}\cdot d\vec{\gamma}$, ואם נבחר $\gamma=\vec{r}$[10], נקבל:

$$\int_x^y\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

[9] ניתן אולי להתחשב בה שוב (למשל ע"י הנוסחה $m\cdot\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$) אבל לא נראה לי שזה משנה משהו.
[10] כלומר γ היא פשוט פונקציית המיקום של הגוף.

5.2 אנרגיה קינטית

יופי, מצאנו דרך מכוערת לחישוב העבודה ונתנו לה סימון יפה, מה עם משהו קצת יותר שימושי?

דרך אחרת לכתוב את האינטגרל $\int_x^y \vec{F}\cdot d\vec{r}$ היא לשים לב לכך שבבחירה $\gamma=\vec{r}$ $t_0,t_1,\ldots,t_n$ הן נקודות בזמן בין x ל-y, ולכן כשמקטינים את המרווחים יותר ויותר מקבלים:

$$\vec{r}\left(t_i\right)-\vec{r}\left(t_{i-1}\right)\approx\vec{v}\left(t_i\right)\cdot\left(t_i-t_{i-1}\right)$$

ומכאן שהנוסחה שלנו עבור העבודה שנעשתה על גוף בין זמן x לזמן y היא:

$$\int\limits_x^y \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_x^y \vec{F}\left(t\right)\cdot\vec{v}\left(t\right)dt$$

או בצורה אחרת:

$$\int\limits_x^y \vec{F}\left(t\right)\cdot\vec{v}\left(t\right)dt=\int\limits_x^y m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\ dt=\int\limits_{\vec{v}(x)}^{\vec{v}(y)} m\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

הפונקציה הקדומה של $m\vec{v}$ היא $\frac{1}{2}m\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)=\frac{1}{2}mv^2$ (כאשר $v=\left|\vec{v}\right|$), ולכן העבודה שנעשתה בין זמן x לזמן y היא:

$$\frac{1}{2}mv^2\left(y\right)-\frac{1}{2}mv^2\left(x\right)$$

לפונקציה זו נקרא <u>האנרגיה הקינטית</u> של הגוף.

5.3 כוח משמר ואנרגיה פוטנציאלית

כוח משמר ואנרגיה פוטנציאלית

כל כוח שהוא פונקציה של המיקום בממד אחד הוא כוח משמר

כל כוח מרכזי הוא כוח משמר

בהתנגשות אלסטית יש שימור אנרגיה ולכן היא מאפשרת לחשב את המהירויות של שני גופים לאחר ההתנגשות, בהינתן מהירויותיהם לפניה.

6 תנע זוויתי

עבור חלקיק בודד נגדיר את התנע הזוויתי של החלקיק ע"י:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v})$$

כאשר $\vec{r}$ הוא מיקום החלקיק, $\vec{P}$ הוא התנע שלו ו-$\vec{v}$ היא מהירותו.

- התנע הזוויתי תלוי במערכת הייחוס שכן הוא תלוי ב-$\vec{r}$.
- ע"פ הגדרה $\vec{r} \times (m \cdot \vec{v})$ מאונך ל-$\vec{r}$ ול-$\vec{v}$, א"כ נוכל לדמיין זאת כאילו התנע הזוויתי הוא ציר הסיבוב[11] של הגוף, כיוונו מספר לנו את כיוון הסיבוב ע"פ כלל יד ימין (אם הוא "יוצא" מן הלוח מדובר בסיבוב נגד כיוון השעון), וגודלו מראה עד כמה הסיבוב "חזק".

ע"פ כללי גזירה וחוק התאוצה מתקיים:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{v} \times (m \cdot \vec{v}) + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

כאשר $\vec{F}$ הוא שקול הכוחות הפועל על החלקיק. $\vec{r} \times \vec{F}$ נקרא המומנט / מומנט הסיבוב / מומנט הכוח של הגוף והוא מסומן בד"כ ב-$\vec{N}$.

- אם נזכור ש-$r \cdot \dot{\theta} = |\vec{v}| \cdot \sin\theta$ היא המהירות הזוויתית נקבל:

$$\left|\vec{L}\right| = m \cdot |\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\theta = m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}$$

- אם $\vec{F}$ הוא כוח מרכזי אז $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$, כלומר התנע הזוויתי קבוע. ניתן להסיק מכאן שהמהירות הזוויתית של גוף תחת השפעת כוח מרכזי עומדת ביחס הפוך לריבוע המרחק שלו מנקודת המרכז (שביחס אליה הכוח אכן כוח מרכזי).

עבור כמה חלקיקים נקבל שהמומנט הכולל שלהם הוא:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,\text{ext}} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \\
&= \vec{N}_{\text{tot,ext}} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}\right) \\
&= \vec{N}_{\text{tot,ext}} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}\right) \\
&= \vec{N}_{\text{tot,ext}} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \left((\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}\right)
\end{aligned}$$

כעת, מכיוון שכל כוח שמפעילים שני חלקיקים זה על זה פועל בכיוון הישר המחבר ביניהם, מתקיים $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$, וא"כ קיבלנו שגם עבור תנע זוויתי מתקיים:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{N}_{\text{tot,ext}}$$

ולכן במערכת סגורה התנע הזוויתי נשמר - זהו חוק שימור התנע הזוויתי.

[11] אם הגוף נע באותו כיוון של $\vec{r}$ אז הזווית שבין $\vec{v}$ ל-$\vec{r}$ היא 0 ולכן גם המכפלה הווקטורית שלהן תתאפס וזה מראה שהחלקיק אכן לא מסתובב.

7 מרכז המסה

בהינתן n גופים בעלי מסות $m_1, m_2, \ldots, m_n$, מרכז המסה שלהם מוגדר ע"י:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

כאשר $\vec{r}_i$ הוא המיקום של הגוף בעל מסה m_i. כלומר מרכז המסה הוא ממוצע משוקלל של מיקומי הגופים כאשר המשקל של כל גוף בממוצע נקבע ע"פ המסה שלו.

נשים לב לכמה נקודות:

- ע"פ הגדרה התנע הכולל של n הגופים הוא:

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \cdot \dot{\vec{R}}_{cm}$$

כלומר לעניין התנע ניתן להתייחס ל-n הגופים כגוף אחד שמסתו היא סכום מסות הגופים ומיקומו במרכז המסה.

- כתוצאה מהנקודה הקודמת, וממה שראינו כשעסקנו בשימור התנע, מתקיים:

$$\vec{F}_{\text{ext,tot}} = \frac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \cdot \ddot{\vec{R}}_{cm}$$

כלומר גם עבור החוק השני של ניוטון ניתן להתייחס ל-n הגופים כגוף אחד שמסתו היא סכום מסות הגופים ומיקומו במרכז המסה.

- עבור האנרגיה התמונה קצת מסובכת יותר, נסמן ב-$\vec{r}_i'$ את המיקום של הגוף בעל מסה m_i ביחס למרכז המסה ($\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}_{cm}$). א"כ נקבל שהאנרגיה הקינטית של n הגופים יחד היא[12]:

$$\begin{aligned} E_k &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \left(\dot{\vec{r}}_i\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(\dot{\vec{R}}_{cm} + \dot{\vec{r}}_i'\right) \cdot \left(\dot{\vec{R}}_{cm} + \dot{\vec{r}}_i'\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(\dot{\vec{R}}_{cm} \cdot \dot{\vec{R}}_{cm} + 2 \cdot \dot{\vec{R}}_{cm} \cdot \dot{\vec{r}}_i' + \dot{\vec{r}}_i' \cdot \dot{\vec{r}}_i'\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{\vec{R}}_{cm} \cdot \dot{\vec{R}}_{cm} + \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{\vec{R}}_{cm} \cdot \dot{\vec{r}}_i' + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i' \cdot \dot{\vec{r}}_i' \end{aligned}$$

אם נעבוד במערכת הייחוס של מרכז המסה נקבל ש-$\dot{\vec{R}}_{cm} = \vec{0}$ ולכן:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \cdot |\vec{v}_{cm}|^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot |\vec{v}_i'|^2$$

האיבר השמאלי הוא ממש מה שהיינו מקבלים לו היינו מתייחסים ל-n הגופים כגוף אחד שמסתו היא סכום מסות הגופים ומיקומו במרכז המסה, והאיבר הימני הוא התיקון הנדרש עבור התנועות של הגופים ביחס למרכז המסה.

[12] כל המכפלות שאינן כוללות מסה הן מכפלות סקלריות!

• גם עבור התנע הזוויתי התמונה מסובכת מעט, התנע הזוויתי הכולל הוא:

$$\begin{aligned}\vec{L}_{\text{tot}} &= \sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\left(\vec{R}_{cm}+\vec{r}_i'\right)\times\left(\dot{\vec{R}}_{cm}+\dot{\vec{r}}_i'\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(m_i\cdot\left(\vec{R}_{cm}\times\dot{\vec{R}}_{cm}+\vec{r}_i'\times\dot{\vec{R}}_{cm}+\vec{R}_{cm}\times\dot{\vec{r}}_i'+\vec{r}_i'\times\dot{\vec{r}}_i'\right)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\vec{R}_{cm}\times\dot{\vec{R}}_{cm}+\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\vec{r}_i'\times\dot{\vec{R}}_{cm}+\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\vec{R}_{cm}\times\dot{\vec{r}}_i'+\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\vec{r}_i'\times\dot{\vec{r}}_i'\end{aligned}$$

ושוב, אם נעבוד במערכת הייחוס של מרכז המסה נקבל $\dot{\vec{R}}_{cm}=\vec{R}_{cm}=\vec{0}$ ולכן:

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\cdot\vec{R}_{cm}\times\dot{\vec{R}}_{cm}+\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\vec{r}_i'\times\dot{\vec{r}}_i'$$

ושוב, האיבר השמאלי הוא ממש מה שהיינו מקבלים לו היינו מתייחסים ל-n הגופים כגוף אחד שמסתו היא סכום מסות הגופים ומיקומו במרכז המסה, והאיבר הימני הוא התיקון הנדרש עבור התנועות של הגופים ביחס למרכז המסה.

8 מתנד הרמוני

8.1 ללא חיכוך

קפיץ מחובר לקיר בקצהו האחד, ובקצהו השני הוא מחובר לגוף בעל מסה m. נרצה למצוא את המשוואות המתארות את תנועת הגוף בהשפעת הקפיץ (נניח שאין כבידה או חיכוך), א״כ נסמן ב-k את קבוע הקפיץ, וב-$\xi(t)$ נסמן את המרחק של הגוף מנקודת שיווי המשקל בזמן t. א״כ הכוח שפועל על הגוף בזמן t הוא $k\cdot\xi(t)$, ולכן ע״פ חוק התאוצה מתקיים $m\ddot{\xi}=-k\xi$ - כלומר קיבלנו משוואה שבה הנעלם הוא **פונקציה** (ξ) והמשוואה קושרת בינה לבין הנגזרת השנייה שלה.

♣ כפי שראינו כשעסקנו בכוח מחזיר, הקפיץ הוא בסך הכל דוגמה אחת לכוח מחזיר, אך הוא מתאר היטב גם הרבה תנועות אחרות, ולכן כל מה שנכתוב כאן יהיה תקף גם עבורן.

♣ משוואות כאלה (שבהן הנעלם הוא פונקציה והמשוואה קושרת בן הפונקציה לנגזרותיה) נקראות <u>משוואות דיפרנציאליות</u>, במקרה הזה מדובר במשוואה דיפרנציאלית <u>מסדר שני</u> (כי הנגזרת הגבוהה ביותר שמופיעה במשוואה היא הנגזרת השנייה).

♣ נשים לב לכך שלא ציינו מה היה המיקום או מה הייתה המהירות של הגוף בזמן $t=0$, כלומר המשוואה הנ״ל תקפה בכל המקרים הללו. מצד שני, בהינתן המיקום והמהירות ההתחלתיים צריכה להיות רק פונקציה אחת המתארת את תנועת הגוף. לכן נצפה שלפתרונות תהיינה בדיוק שתי דרגות חופש[13] כדי שיוכלו לתאר את כל המצבים האפשריים.

[13] כדי להבין את המשמעות המתמטית של המילים ״שתי דרגות חופש״ נשים לב לכך שמליניאריות פעולת הגזירה נובע שקבוצת הפתרונות היא מרחב וקטורי, א״כ כשאנו אומרים ״שתי דרגות חופש״ כוונתנו לכך שהממד של מרחב זה הוא 2.

קל לראות ש-$\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)$ ו-$\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)$ הם פתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית[14], ולכן גם $A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)+B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)$ הוא פתרון של המשוואה (לכל A ו-B). א״כ קיימים A ו-B כך שפונקציית המיקום של הגוף היא $\xi\left(t\right)=A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)+B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)$, כצפוי זוהי תנועה מחזורית, והתדירות שלה היא $\sqrt{-\frac{k}{m}}$.

- ♣ את A ו-B ניתן למצוא בקלות ע״י הצבת תנאי ההתחלה.
- ♣ דרך טובה יותר לתאר את התנועה היא באמצעות הנוסחה $A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t+\phi\right)$[15] - A יהיה המשרעת של התנועה, ו-ϕ נקבע ע״י תנאי ההתחלה כך שבזמן $-\frac{\phi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$ הגוף יהיה בנקודת שיווי המשקל.
- ♣ אמנם מבחינה מתמטית לא ראינו הוכחה שאין למשוואה פתרונות אחרים, ולכן ייתכן ש אך כפי שהזכרנו, אנחנו מצפים שלפתרונות המשוואה תהיינה בדיוק שתי דרגות חופש כנגד שתי דרגות החופש בבחירת תנאי ההתחלה, ולכן מבחינה פיזיקלית לא ייתכן שישנם פתרונות נוספים.

8.2 עם חיכוך

הבעיה שפתרנו לא הייתה מציאותית, נכון? לא היה שם כוח חיכוך... לו היה כוח חיכוך עם האוויר[16] היינו מקבלים שהמשוואה הדיפרנציאלית היא (עבור α כלשהו):

$$m\ddot{\xi}=-k\xi-\alpha\dot{\xi}$$

- ♣ שוב, בתנאי ההתחלה יש בדיוק שתי דרגות חופש (מיקום ומהירות התחלתיים), ולכן נצפה שגם לפתרונות תהיינה בדיוק שתי דרגות חופש.

כעת קשה יותר לנחש את הפתרונות ולכן נשתמש ברעיון אחר: הפונקציה שעובדת באופן הטוב ביותר עם נגזרות היא האקספוננט, לכן נבדוק פונקציות מהצורה $e^{\lambda t}$ **מעל המרוכבים**[17]. אם פונקציה כזו אכן מקיימת את המשוואה נקבל:

$$m\lambda^{2}e^{\lambda t}+\alpha\lambda e^{\lambda t}+ke^{\lambda t}=0$$

$$\Rightarrow m\lambda^{2}+\alpha\lambda+k=0$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^{2}-4mk}}{2m}=-\frac{\alpha}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^{2}-\frac{k}{m}}$$

את $\frac{k}{m}$ אנחנו מכירים כבר מהמקרה הקודם - זהו הריבוע של התדירות לו לא היה חיכוך ולכן זוהי התדירות ההתחלתית, א״כ נסמן $\omega_{0}=\sqrt{\frac{k}{m}}$; הביטוי $\frac{2m}{\alpha}$ יהיה גדול יותר ככל שדעיכת המשרעת של התנועה תימשך זמן רב יותר, א״כ נסמן $\tau=\frac{2m}{\alpha}$. נסמן גם $\omega=\sqrt{\frac{1}{\tau^{2}}-\left(\omega_{0}\right)^{2}}$ ונקבל:

$$\lambda=-\frac{1}{\tau}\pm\omega$$

א״כ, כפי שציפינו, **מעל המרוכבים** קיבלנו שני פתרונות בלתי תלויים למשוואה הדיפרנציאלית.

- אם $\frac{1}{\tau^{2}}-\left(\omega_{0}\right)^{2}<0$ אז שני הפתרונות שמצאנו מרוכבים, ולכן החלק הממשי של כל פתרון ייתן לנו פתרון מעל הממשיים, וכמוהו גם החלק המדומה (עדיין נקבל רק שני פתרונות בלתי תלויים כפי שנראה בהמשך). א״כ נחשב:

$$e^{\left(-\frac{1}{\tau}\pm\sqrt{\frac{1}{\tau^{2}}-\left(\omega_{0}\right)^{2}}\right)\cdot t}=e^{-\frac{t}{\tau}\pm i\omega t}=e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\left(\cos\left(\pm\omega t\right)+i\cdot\sin\left(\pm\omega t\right)\right)=e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\left(\cos\left(\omega t\right)\pm i\cdot\sin\left(\omega t\right)\right)$$

[14] איך הגענו לפתרונות הללו? ניחשנו! המשוואה הנ״ל שקולה למשוואה $\ddot{\xi}=-\frac{k}{m}\cdot\xi$, כלומר הפונקציה שווה לנגזרת השנייה שלה עד כדי כפל בקבוע, אילו פונקציות אנחנו מכירים שמקיימות זאת?

[15]
$$A\sin\left(\sqrt{-\frac{k}{m}}\cdot t+\phi\right)=A\cos\left(\phi\right)\cdot\sin\left(\sqrt{-\frac{k}{m}}\cdot t\right)+A\sin\left(\phi\right)\cdot\cos\left(\sqrt{-\frac{k}{m}}\cdot t\right)$$

[16] חיכוך עם המשטח שעליו מונח הגוף אינו ניתן לביטוי כ-$\alpha\dot{\xi}$.

[17] את הסיבה לעבודה מעל המרוכבים נראה בהמשך.

ומכאן שפתרונות המשוואה מעל הממשיים נראים כך:

$$e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega t\right)+B\cdot\sin\left(\omega t\right)\right)$$

כלומר קיבלנו שוב תנועה מחזורית (מבחינת הכיוון של הגוף ביחס לנקודת שיווי המשקל), אלא שהפעם התדירות שלה היא ω ולא ω_0, ובנוסף המשרעת של התנועה דועכת בקצב אקספוננציאלי.

- אם $\frac{1}{\tau^2}-\left(\omega_0\right)^2>0$ שני הפתרונות שמצאנו ממשיים, ולכן הפתרונות של המשוואה מעל הממשיים נראים כך:

$$e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\left(A\cdot e^{\omega t}+B\cdot e^{-\omega t}\right)$$

נשים לב לכך ש-$\omega<\frac{1}{\tau}$ ולכן המשרעת של התנועה דועכת במהירות.

- אם $\frac{1}{\tau^2}-\left(\omega_0\right)^2=0$ אז קיבלנו רק פתרון אחד למרות שאנחנו יודעים שצריכים להיות שניים בלתי תלויים. הפתרון שפספסנו הוא $t\cdot e^{\lambda t}=t\cdot e^{\frac{t}{\tau}}$[18], ואו"כ הפתרונות מעל הממשיים ייראו כך:

$$e^{\frac{t}{\tau}}\cdot\left(A+Bt\right)$$

גם כאן אנחנו רואים שהמשרעת של התנועה דועכת במהירות שכן הפונקציה האקספוננציאלית היא הדומיננטית במכפלה.

♣ המשמעות של הא"ש $\frac{1}{\tau^2}-\left(\omega_0\right)^2<0$ הוא שדעיכת המשרעת של התנועה אורכת זמן ארוך יחסית, כלומר החיכוך חלש, ובאופן דומה המשעות של הא"ש $\frac{1}{\tau^2}-\left(\omega_0\right)^2>0$ היא שהחיכוך חזק.

8.3 עם אילוץ נוסף

נניח כעת בנוסף לחיכוך עם האוויר אנו מפעילים על הגוף כוח מחזורי $F_0\cos\left(\omega_e t\right)$[19], א"כ כעת המשוואה הדיפרנציאלית שעלינו לפתור היא:

$$m\ddot{\xi}\left(t\right)=-k\xi\left(t\right)-\alpha\dot{\xi}\left(t\right)+F_0\cos\left(\omega_e t\right)$$

המשוואה הזו שונה מהמשוואות הדיפרנציאליות שפתרנו עד כה בכך שהיא <u>אינה הומוגנית</u>, כלומר היא קושרת בין שתי פונקציות שאינן נגזרות זו של זו מכל סדר שהוא. הדרך לפתור משוואות כאלה היא כזו:

1. נמצא את הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה - במקרה הזה מדובר במשוואה $m\ddot{\xi}\left(t\right)=-k\xi\left(t\right)-\alpha\dot{\xi}\left(t\right)$ שאותה פתרנו קודם.
2. נמצא פתרון פרטי של משוואה המבוקשת.
3. הפתרון הכללי של המשוואה המבוקשת הוא סכום הפתרונות שמצאנו בשלבים הקודמים[20], כאשר את המקדמים הדרושים בפתרון הכללי נמצא שוב ע"פ תנאי ההתחלה.

א"כ במקרה שלנו כבר עשינו את השלב הראשון ולכן נעבור ישירות לשלב השני. לפני שננחש פתרון מסוים נתבונן בבעיה שבגללה הדרך שבה פתרנו את הבעיה הקודמת לא תעבוד כאן: לעיל ניחשנו ש-$e^{\lambda t}$ הוא פתרון של המשוואה עבור λ כלשהו, ולאחר שהצבנו במשוואה קיבלנו שמתקיים $m\lambda^2e^{\lambda t}+\alpha\lambda e^{\lambda t}+ke^{\lambda t}=0$, ולכן יכולנו לחלק ב-$e^{\lambda t}$ ולקבל את המשוואה האלגברית $m\lambda^2+\alpha\lambda+k=0$. במקרה הנוכחי, אם נציב $e^{\lambda t}$ במשוואה נקבל $m\lambda^2e^{\lambda t}+\alpha\lambda e^{\lambda t}+ke^{\lambda t}=F_0\cos\left(\omega_e t\right)$, ולכן לא נוכל לחלק ב-$e^{\lambda t}$.
אז מה עושים? מוצאים דרך לחלק בכל זאת! נשים לב לכך שמתקיים:

$$\frac{e^{i\omega_e t}+e^{-i\omega_e t}}{2}=\frac{\left(\cos\left(\omega_e t\right)+i\cdot\sin\left(\omega_e t\right)\right)+\left(\cos\left(\omega_e t\right)-i\cdot\sin\left(\omega_e t\right)\right)}{2}=\cos\left(\omega_e t\right)$$

ולכן המשוואה המבוקשת שקולה למשוואה:

$$m\ddot{\xi}\left(t\right)+\alpha\dot{\xi}\left(t\right)+k\xi\left(t\right)=F_0\cdot\frac{e^{i\omega_e t}+e^{-i\omega_e t}}{2}$$

[18] **איך מגיעים אליו?**
[19] המקרה הזה אינו שולי כפי שהוא נראה, מי שמכיר טורי פורייה יודע שניתן להציג כל פונקציה (סבירה) כטור של קוסינוסים וסינוסים עם תדירויות שונות.
[20] **צריך להסביר למה**

כעת קל להבין מדוע ננחש שאחד הפתרונות של המשוואה הוא מהצורה $Ae^{i\omega_e t}+Be^{-i\omega_e t}$, כדי למצוא A ו-B מתאימים נניח שקיים פתרון כזה ונבדוק מה הערך של A ו-B עבורו. המשוואה שלנו היא:

$$m\left(i\omega_e\right)^2\left(Ae^{i\omega_e t}+Be^{-i\omega_e t}\right)+\alpha i\omega_e\left(Ae^{i\omega_e t}-Be^{-i\omega_e t}\right)+k\left(Ae^{i\omega_e t}+Be^{-i\omega_e t}\right)=F_0\cdot\frac{e^{i\omega_e t}+e^{-i\omega_e t}}{2}$$

נפרק אותה לשתי משוואות[21]:

$$\begin{aligned}m\left(i\omega_e\right)^2Ae^{i\omega_e t}+\alpha i\omega_e Ae^{i\omega_e t}+kAe^{i\omega_e t}&=\frac{F_0}{2}\cdot e^{i\omega_e t}\\ m\left(i\omega_e\right)^2Be^{i\omega_e t}+\alpha i\omega_e Be^{i\omega_e t}+kBe^{i\omega_e t}&=\frac{F_0}{2}\cdot e^{i\omega_e t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow A\cdot\left(-m\left(\omega_e\right)^2+\alpha i\omega_e+k\right)=\frac{F_0}{2}\\ &\Rightarrow B\cdot\left(-m\left(\omega_e\right)^2+\alpha i\omega_e+k\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow A=\frac{F_0}{2\cdot\left(k-m\left(\omega_e\right)^2+\alpha i\omega_e\right)}=\frac{F_0\cdot\left(k-m\left(\omega_e\right)^2-\alpha i\omega_e\right)}{2\left(\left(k-m\left(\omega_e\right)^2\right)^2+\left(\alpha\omega_e\right)^2\right)}\\ &\Rightarrow B=\frac{F_0}{2\cdot\left(k-m\left(\omega_e\right)^2-\alpha i\omega_e\right)}=\frac{F_0\cdot\left(k-m\left(\omega_e\right)^2+\alpha i\omega_e\right)}{2\left(\left(k-m\left(\omega_e\right)^2\right)^2+\left(\alpha\omega_e\right)^2\right)}\end{aligned}$$

מכאן ש-$B=\bar{A}$ ולכן $Ae^{i\omega_e t}+Be^{-i\omega_e t}$ היא פונקציה ממשית ומצאנו את הפתרון המיוחל. אם נרצה לכתוב את הפתרון כך שיהיה ברור שהוא ממשי נקבל:

$$\begin{aligned}Ae^{i\omega_e t}+Be^{-i\omega_e t}&=\mathrm{Re}\left(B\right)\cdot\left(e^{i\omega_e t}+e^{-i\omega_e t}\right)+\mathrm{Im}\left(B\right)\cdot\left(e^{i\omega_e t}-e^{-i\omega_e t}\right)\\ &=2\cdot\mathrm{Re}\left(B\right)\cdot\cos\left(\omega_e t\right)+2\cdot\mathrm{Im}\left(B\right)\cdot\sin\left(\omega_e t\right)\\ &=F_0\cdot\frac{\left(k-m\left(\omega_e\right)^2\right)\cdot\cos\left(\omega_e t\right)+\alpha\omega_e\cdot\sin\left(\omega_e t\right)}{\left(k-m\left(\omega_e\right)^2\right)^2+\left(\alpha\omega_e\right)^2}\end{aligned}$$

מכאן שכאשר החיכוך חלש הפתרון הכללי הוא:

$$F_0\cdot\frac{\left(k-m\left(\omega_e\right)^2\right)\cdot\cos\left(\omega_e t\right)+\alpha\omega_e\cdot\sin\left(\omega_e t\right)}{\left(k-m\left(\omega_e\right)^2\right)^2+\left(\alpha\omega_e\right)^2}+e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\left(C\cdot\cos\left(\omega t\right)+D\cdot\sin\left(\omega t\right)\right)$$

כאשר שוב $\tau=\frac{2m}{\alpha}$, $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ ו-$\omega=\sqrt{\frac{1}{\tau^2}-\left(\omega_0\right)^2}$, ואת C,D נמצא לפי תנאי ההתחלה. כפי שהזכרנו האיבר הימני דועך ככל שהזמן עובר ולכן בזמנים ארוכים האיבר השמאלי הוא ששולט בתנועה, כלומר בזמנים ארוכים תנאי ההתחלה אינם משפיעים כמעט.

כעת, לאחר שסיימנו את פתרון המשוואה, נתבונן מעט בתוצאה וננסה להסיק איזו תדירות ω_e תניב את את המשרעת הגדולה ביותר. נשים לב לכך שבמכנה של האיבר הימני מופיעים אותם גורמים הכופלים את $\cos\left(\omega_e t\right)$ ו-$\sin\left(\omega_e t\right)$ כשהם מועלים בריבוע, מכאן שככל שהמכנה יהיה קטן יותר כך תהיה המשרעת גדולה יותר, א״כ נרצה למצוא את נקודת המינימום של הפונקציה $\left(k-mx^2\right)^2+\left(\alpha x\right)^2$[22].

[21] זה לא מוכרח לעבוד אבל אם כן זה יהיה נהדר.

[22] יש לה נקודת מינימום שכן זהו פולינום מדרגה זוגית שהמקדם של החזקה הגדולה ביותר שלו חיובי.

נגזור את הפונקציה ונקבל $-4mx\left(k-mx^2\right)+2\alpha^2x$, מתקיים:

$$\begin{aligned}-4mx\left(k-mx^2\right)+2\alpha^2x=0 &\iff x=0\vee -4m\left(k-mx^2\right)+2\alpha^2=0\\ &\iff x=0\vee 4m^2x^2+2\alpha^2-4mk=0\\ &\iff x=0\vee 4m^2x^2=4mk-2\alpha^2\\ &\iff x=0\vee x^2=\frac{k}{m}-\frac{\alpha^2}{2m^2}\\ &\iff x=0\vee x=\pm\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\alpha^2}{2m^2}}\end{aligned}$$

נציב:

$$\left(k-m0^2\right)^2+(\alpha\cdot 0)^2=k^2$$

$$\begin{aligned}\left(k-m\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\alpha^2}{2m^2}}\right)^2\right)^2+\left(\alpha\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\alpha^2}{2m^2}}\right)\right)^2 &=\left(k-m\cdot\left(\frac{k}{m}-\frac{\alpha^2}{2m^2}\right)\right)^2+\alpha^2\cdot\left(\frac{k}{m}-\frac{\alpha^2}{2m^2}\right)\\ &=\left(\frac{\alpha^2}{2m}\right)^2+\alpha^2\cdot\left(\frac{k}{m}-\frac{\alpha^2}{2m^2}\right)\\ &=\frac{\alpha^4}{4m^2}+\alpha^2\cdot\left(\frac{k}{m}-\frac{\alpha^2}{2m^2}\right)\\ &=\alpha^2\cdot\left(\frac{\alpha^2}{4m^2}+\frac{k}{m}-\frac{\alpha^2}{2m^2}\right)\\ &=\alpha^2\cdot\left(\frac{k}{m}-\frac{\alpha^2}{4m^2}\right)\end{aligned}$$

נזכור שאנו עוסקים במקרה שבו החיכוך חלש ולכן כאשר $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\gg\frac{\alpha}{2m}=\tau^{-1}$ המינימום נמצא בנקודה $\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\alpha^2}{2m^2}}\approx$ $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$. כלומר כאשר הכוח המחזורי פועל בתדירות קרובה לתדירות הבסיסית של הקפיץ הוא ישיג את המשרעת הגדולה ביותר, ולמעשה עבור כש-τ ישאף ל-∞ (כלומר ככל שזמן הדעיכה של התנועה גדול יותר) הכוח המחזורי ישיג משרעת שואפת ל-∞ אם יפעל בתדירות דומה לתדירות הבסיסית של הקפיץ.