אינטגרלים על יריעות - טענות בלבד

80416 - אנליזה על יריעות

מרצה: אור הרשקוביץ

מתרגל: או קדר

סוכם ע"י שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ד, האוניברסיטה העברית

אינטגרלים על יריעות - טענות בלבד

תוכן העניינים

1	יריעות פרמטריות	3
2	\mathbb{R}^n -ממדיות ב- k	4
3	מושגים פיזיקליים	5

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות), אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל); אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

> : לסיכומים נוספים היכנסו אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה https://srayaa.wixsite.com/math

1 יריעות פרמטריות

1 יריעות פרמטריות

X איריעה פרמטריזציה פרמטריזציה של ו- $\phi:U o\mathbb{R}^n$ יריעה איריעה איריעה יריעה איריעה איריעה

טענה 1.1. לכל העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^k o \mathbb{R}^n$ כך ש- $V(T)=\sqrt{\det{(T^*\circ T)}}$ מתקיים מסריצה 1.1 מענה איניארית 1.1 לכל מטריצה 1.1 מתקיים 1.1 מתקיים 1.1 מתקיים 1.1 מתקיים 1.1 מתקיים 1.1 מענה איניארית בייט מענה וכמו ליניארית הערכה מענה איניארית בייט מענה וכמו ליניארית בייט מתקיים וכמו ליניארית בייט מענה וכמו ליניארית בייט מענה וכמו ליניארית בייט מענה בייט מענה וכמו ליניארית בייט מענה בייט

: מתקיים ; $f:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$ ותהא ותהא $\psi:V o U$ יהי .1.2 מסקנה .1.2 מסקנה

$$\int_{U} f(\phi(x)) \cdot V(D\phi_{x}) dx = \int_{V} f(\phi(\psi(y))) \cdot V(D(\phi \circ \psi)_{y}) dy$$

כלומר אם אחד האינטגרלים מוגדר אז גם האחר מוגדר והם שווים.

 $x_0\in U$, במקרה כזה קיימים (X,ϕ) - משפט 1.3. נניח ש

- $(x_0 \in U)$ של $V \subseteq U$ מביבה פתוחה.
- $^{2}\psi:B_{arepsilon}\left(p
 ight)
 ightarrow V$ נקודה $0< r\in\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{R}^{k}$ נקודה .2
 - $h:B_{arepsilon}(p)
 ightarrow\mathbb{R}^{n-k}$ חלקה חלקה .3
 - $A:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}^n$ העתקה ליניארית אורתוגונלית .4

 $x\in B_{arepsilon}(p)$ לכל $(x,h(x))=A\left(\left(\phi\circ\psi
ight)(x)
ight)$ ר ו- $A\left(\left(\phi\circ\psi
ight)(x_0)
ight)=p$ לכל

. כלומר X נראית כמו גרף של פונקציה חלקה בסביבת $\phi\left(x\right)$, זהו האפיון הכי ברור לכך ש-X "חלקה" בסביבה זו.

ההעתקה הצמודה של T^* (הוגדרה בליניארית 2), אין שום עניין לזכור זאת כאן - מי שלא זוכר יכול להסתפק בעובדה ש- T^* היא ההעתקה הצמודה של T^* (הוגדרה בליניארית בסיסים \mathcal{B} ו- \mathcal{R}^k שום עניין לזכור זאת בהתאמה. T^* לכל בחירת בסיסים \mathcal{B} ו- \mathcal{R}^k בהתאמה.

 $p,q\in\mathbb{R}^k$ נקודה ב' אפני שיש נקודות מפני שיש דיפאומורפיזם בין $B_{arepsilon}(p)$ לכל שתי נקודות מפני שיש דיפאומורפיזם בין

\mathbb{R}^n -ממדיות ב- 2

המשפטים הבאים מראים שלמרות שההגדרה של יריעה \mathbb{R}^n -ממדית ב- \mathbb{R}^n הזכירה פרמטריזציה מקומית, ההגדרה אינה תלויה בה מפני שכל הפרמטריזציות המקומיות שקולות זו לזו.

:משפט 2.1. תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ היא יריעה חלקה k-ממדית אם"ם לכל נקודה M

- $(p\in W)$ p של $W\subseteq M$ פתוחה.
- $h:B_{arepsilon}(x_0) o \mathbb{R}^{n-k}$ חלקה ופונקציה $0 < r \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^k$.2
 - $A:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}^n$ העתקה ליניארית אורתוגונלית .3

 $lpha\left(B_{r}\left(x_{0}
ight)
ight)=W$ מקיימת ($x\in B_{r}\left(x_{0}
ight)$ (לכל ($\alpha\left(x
ight):=A\left(x,h\left(x
ight)
ight)$ המוגדרת ע"י $lpha:B_{r}\left(x_{0}
ight) o \mathbb{R}^{n}$ מקיימת ($a:B_{r}\left(x_{0}
ight) o \mathbb{R}^{n}$ מקיימת (תהא $a:B_{r}\left(x_{0}
ight)$ אוריעה חלקה - $a:B_{r}\left(x_{0}
ight)$

p בסביבת M בסביבת M שתי פרמטריזציות מקומיות של $B:U_2 \to W_2$ ו- $\alpha:U_1 \to W_1$ משפט 2.2. תהיינה $\alpha:U_1 \to W_1$ ו- $\alpha:U_1 \to W_2$ שתי פרמטריזציות מקומיות של $\alpha:U_1 \to W_1$ ו- $\alpha:U_1 \to W_2$ הן קבוצות $\alpha:U_1 \to W_1$ ו- $\alpha:U_1 \to W_2$ ו- $\alpha:U_1 \to W_2$ ו- $\alpha:U_1 \to W_1$ ו- $\alpha:U_1 \to W_2$ היא סביבה פתוחות ב- $\alpha:U_1 \to W_1$ היא דיפאומורפיזם בין $\alpha:U_1 \to W_2$. בפרט $\alpha:U_1 \to W_1$ היא רה-פרמטריזציה של $\alpha:U_1 \to W_2$ ולהפך. פתוחות ב- $\alpha:U_1 \to W_1$ היא דיפאומורפיזם בין $\alpha:U_1 \to W_2$. בפרט $\alpha:U_1 \to W_1$ היא רה-פרמטריזציה של $\alpha:U_1 \to W_2$ ולהפך.

 $x:=lpha^{-1}\left(p
ight)$ ונסמן p בסביבת m בסביבת מקומיות של $\beta:U_2 o W_2$ ו- $lpha:U_1 o W_1$ ונסמן $\beta:U_1 o W_1$ משקנה $y:=eta^{-1}\left(p
ight)$ משקנה $y:=eta^{-1}\left(p
ight)$

$$\operatorname{Im}\left(D\alpha_x\right) = \operatorname{Im}\left(D\beta_y\right)$$

מסקנה 2.4. תהא W של q ב- α (כאן W פתוחה M פתוחה M של $\alpha:U\to W$ מסקנה 2.4. תהא $\alpha:U\to W$ מחקיים $\alpha:U\to W$ מתקיים ב- $\alpha:U\to W$ (כלומר ב- $\alpha:U\to W$ מתקיים ב- $\alpha:U\to W$ והעתקה חלקה חלקה $\alpha:W\to W$ (כלומר ב- $\alpha:U\to W$ מתקיים $\alpha:W\to W$).

. יריעה חלקה יריעה $N \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא

טענה 2.5. תהיינה $\beta:A\to B$, פרמטריזציה מקומית של $\alpha:U\to W$ פרמטריזציה פרמטריזציה $f:M\to N$ פרמטריזציה מקומית של $f:M\to R$ בסביבת פרמטריזציה מקומית של מ

. העתקה העתקה העתקה $\beta^{-1}\circ f\circ \alpha\mid_{U'}$ הפונקציה כך שהפונקציה של $U'\subseteq U$ היא העתקה העתקה היא p חלקה ב-p חלקה העתקה של של היא העתקה העתקה העתקה העתקה היא העתקה הע

חשיבות של טענה זו בכך שהיא נותנת אפיון להיותה של פונקציה חלקה בין יריעות מבלי להזדקק להרחבה מקומית שלה.

p, בסביבת f מקומיות של f:M o N הרחבות $h:W o \mathbb{R}^n$ ותהיינה p, ותהיינה ב-p, ותהיינה f:M o N הרחבות מקומיות של מתקיים:

$$Dg\mid_{T_p(M)} = Dh\mid_{T_p(M)}$$

 $T_{f(p)}\left(N
ight)$ ל-ל $T_{p}\left(M
ight)$ הצמצום ליניארית הוא העתקה ליניארית ל-Dh ו- Dg ל-

.($q\in {
m Im} f$ כלומר $f^{-1}\left(\{q\}
ight)
eq 0$ כך ש- \emptyset כך ש-f (כלומר f:M o N תהא f:M o N משפט 2.7. תהא g היא ערך רגולרי של g אז g אז g היא יריעה g היא יריעה g היא ערך רגולרי של g

אני מנחש שלכל יריעה $f^{-1}(N')$ -ש איי אוי ב-N' היא ערך היא ערך אולרי, נקבל $N'\subseteq N\subseteq \mathbb{R}^n$ היא יריעה אני מנחש שלכל יריעה -(k-l+d)

 $W=U\cap M$ כך פתוחה ב- $W=U\cap M$ כך שוב נזכיר ש- $W=U\cap M$ קואר דווקא ב-M קה משמעות היא שקיימת קבוצה פתוחה ב-

3 מושגים פיזיקליים

3 מושגים פיזיקליים

צריך להוסיף כאן את המושגים "מרכז מסה" ו-"מומנט אינרציה" (תרגול 4).