גאומטריה אוקלידית במישור - הגדרות

נכתב ע״י שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ״ד, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 פונקציית זווית

הגדרה 1.1. יהי $(\mathcal{G},|\cdot|)$ מרחב מטרי[1], נסמן $D_{\mathcal{G}} := \left\{(A,O,B)\in\mathcal{G}^3 \mid O\text{-שונות מ} \ B\text{-ו} \ A\right\}$, ותהא $\measuredangle : D_{\mathcal{G}} \to \mathbb{R}$ פונקציה.
נאמר ש-$\measuredangle$ היא <u>פונקציית זווית</u> על $(\mathcal{G},|\cdot|)$, אם לכל ארבע נקודות $A,B,C,O\in\mathcal{G}$ כך ש-A,B,C שונות מ-O, מתקיימות חמש התכונות הבאות:

1. אי-שליליות ויחידת מידה - $0\le\measuredangle AOB\le\frac{1}{2}$.
2. סימטריה - $\measuredangle AOB=\measuredangle BOA$.
3. משולש מנוון -

$$\measuredangle AOB=\frac{1}{2}\iff|AB|=|AO|+|OB|$$
$$\measuredangle AOB=0\iff|AB|=||AO|-|BO||$$

4. אי-שוויונות הפירמידה -

$$\measuredangle AOC\le\measuredangle AOB+\measuredangle BOC\le 1-\measuredangle AOC$$

5. פירמידה מנוונת -

(א)

$$\measuredangle AOB+\measuredangle BOC=1-\measuredangle AOC\iff\begin{cases}\measuredangle ABC=\measuredangle ABO+\measuredangle OBC\\ \measuredangle ACB=\measuredangle ACO+\measuredangle OCB\\ \measuredangle BAC=\measuredangle BAO+\measuredangle OAC\end{cases}$$

(ב)

$$\measuredangle ABC=\measuredangle ABO+\measuredangle OBC\Rightarrow\begin{cases}\measuredangle AOB+\measuredangle BOC=1-\measuredangle AOC\end{cases}\vee\begin{cases}\measuredangle AOC=\measuredangle AOB+\measuredangle BOC\\ \measuredangle BAO=\measuredangle BAC+\measuredangle CAO\\ \measuredangle BCO=\measuredangle BCA+\measuredangle ACO\end{cases}$$

♣ הערות (לפי מספרי הסעיפים):

1. הזווית תלויה אך ורק בקרניים התוחמות אותה ולא בסדר הנקודות או סדר הקרניים.
2. אנחנו לוקחים תמיד את הזווית הקטנה מבין השתיים שמגדירות הקרניים.
3. זהו בעצם הסעיף החשוב ביותר שמספר לנו מה הקשר בין פונקציית הזווית למבנה של המרחב המטרי.
4. **צריך לתת המחשה לא"ש הפירמידה.**

♣ ניתן להחליף את המספר 1 בכל מספר חיובי אחר, הסיבה לכך שלא בחרתי במקומו את 360 (מעלות) היא שזהו מספר שרירותי, ומאידך לא בחרתי ב-2π (רדיאנים) משום שהגדרת π דורשת דברים שנלמד בהמשך.

♣ נשים לב: בהינתן נקודה $O\in\mathcal{G}$, הפונקציה $(A,B)\mapsto\measuredangle AOB$ היא פסאודו-מטריקה; אנחנו נראה בהמשך שיש דמיון רב בין זווית למרחק, הרבה יותר משניתן היה לחשוב במבט ראשון.

הגדרה 1.2. שלשה $(\mathcal{G},|\cdot|,\measuredangle)$ תיקרא <u>גאומטריה</u> אם $(\mathcal{G},|\cdot|)$ הוא מרחב מטרי ו-$\measuredangle$ היא פונקציית זווית על $(\mathcal{G},|\cdot|)$.

---

[1] בהינתן שתי נקודות $A,B\in\mathcal{G}$, המרחק ביניהן יסומן ב-$|AB|$.

תהא $(\mathcal{G}, |\cdot|, \measuredangle)$ גאומטריה.

הגדרה 1.3. תהיינה $A, B, O \in \mathcal{G}$ שלוש נקודות כך ש-A ו-B שונות מ-O.

- נאמר ש-$\measuredangle AOB$ היא <u>זווית שטוחה</u> אם $\measuredangle AOB = \frac{1}{2}$.
- נאמר ש-$\measuredangle AOB$ היא <u>זווית מנוונת</u> אם $\measuredangle AOB = 0$.

הגדרה 1.4. תהיינה $A, B, O \in \mathcal{G}$ שלוש נקודות, נאמר ש-O <u>נמצאת בין</u> A ל-B אם הזווית $\measuredangle AOB$ היא זווית שטוחה.

♣ זהו יחס תלת-מקומי על $\mathcal{G}$.

2 ישרים ומישורים

תהא $(\mathcal{G}, |\cdot|, \measuredangle)$ גאומטריה.

2.1 ישרים

הגדרה 2.1. תת-קבוצה $S \subseteq \mathcal{G}$ תיקרא קווית אם לכל שלוש נקודות שונות ב-S, אחת משלוש הנקודות נמצאת בין שתי האחרות.

מסקנה 2.2. תת-קבוצה של קבוצה קווית גם היא קווית.

מסקנה 2.3. כל קבוצה בת שני איברים לכל היותר, היא קבוצה קווית.

מסקנה 2.4. תת-קבוצה $S \subseteq \mathcal{G}$ היא קווית אם"ם לכל שלוש נקודות $A, B, C \in S$ מתקיימת לפחות אחת משלוש האפשרויות הבאות:

$$|AC| = |AB| + |BC|$$
$$|AB| = |AC| + |CB|$$
$$|BC| = |BA| + |AC|$$

הגדרה 2.5. קבוצה $L \subseteq \mathcal{G}$ תיקרא ישר אם היא מקיימת את שלושת התנאים הבאים:

1. L קווית.
2. L אינה ריקה.
3. לכל $O \in L$ ולכל $0 < r \in \mathbb{R}$, קיימות שתי נקודות $A, B \in L$ כך ש-O נמצאת בין A ל-B ו-$r = |BO| = |AO|$.

♣ כלומר ישר הוא קבוצה קווית שאין בה "חורים".

הגדרה 2.6. נאמר שקבוצה קווית $S \subseteq \mathcal{G}$ היא קבוצה קווית מרבית (או קבוצה קווית מקסימלית), אם לכל קבוצה קווית $S' \subseteq \mathcal{G}$ המקיימת $S \subseteq S'$ מתקיים $S = S'$.

הגדרה 2.7. נאמר ש-$(\mathcal{G}, |\cdot|, \measuredangle)$ היא גאומטריה קווית אם $\mathcal{G}$ היא ישר.

הגדרה 2.8. נניח שיש ב-$\mathcal{G}$ ישרים, יהיו $L_1, L_2 \subseteq \mathcal{G}$ ישרים שאינם זרים, ותהא O נקודת חיתוך שלהם[2].

- לכל $A, B \in L_1$, כך ש-O נמצאת בין A ל-B ולכל $C, D \in L_2$ כך ש-O נמצאת בין C ל-D, הזוויות $\measuredangle AOC$ ו-$\measuredangle BOD$ תיקראנה זוויות קודקודיות (וכמותן גם $\measuredangle AOD$ ו-$\measuredangle BOC$).
- לכל $A, B \in L_1$, כך ש-O נמצאת בין A ל-B ולכל $C, D \in L_2$ כך ש-C נמצאת בין D ל-O או ש-D נמצאת בין C ל-O, הזוויות $\measuredangle AOC$ ו-$\measuredangle DOB$ תיקראנה צמודות זו לזו (וכמותן גם $\measuredangle AOD$ ו-$\measuredangle COB$).

♣ ההגדרה האחרונה מגדירה יחסים בין זוויות.

[2] נקודה $O \in \mathcal{G}$ תיקרא נקודת חיתוך של תתי-קבוצות $S, T \subseteq \mathcal{G}$ אם $O \in S \cap T$.

2.2 מישורים

הגדרה 2.9. תת-קבוצה $S \subseteq \mathcal{G}$ תיקרא <u>מישורית</u> אם לכל ארבע נקודות $A, B, C, O \in S$ כך ש-A, B, C שונות מ-O, מתקיימת לפחות אחת מארבע האפשרויות הבאות:

$$\begin{aligned} \measuredangle AOB &= \measuredangle AOC + \measuredangle COB \\ \measuredangle AOC &= \measuredangle AOB + \measuredangle BOC \\ \measuredangle BOC &= \measuredangle BOA + \measuredangle AOC \\ 1 &= \measuredangle AOB + \measuredangle BOC + \measuredangle COA \end{aligned}$$

♣ שימו לב להקבלה בין מטריקה לזווית ובין קוויות למישוריות: קבוצה היא קווית אס"ם אחד מאי-שוויונות המשולש הופך בה לשוויון, והיא מישורית אס"ם אחד מאי-שוויונות הפירמידה הוא שוויון.

מסקנה 2.10. תת-קבוצה של קבוצה מישורית גם היא מישורית.

מסקנה 2.11. כל קבוצה בת שלושה איברים לכל היותר, היא קבוצה מישורית.

הגדרה 2.12. תת-קבוצה $M \subseteq \mathcal{G}$ תיקרא <u>מישור</u> אם היא מקיימת את שלושת התנאים הבאים:

1. M מישורית.
2. קיימות שתי נקודות $A, O \in M$ כך ש-$A \neq O$.
3. לכל $A, O \in M$ כך ש-$A \neq O$, לכל $0 < r \in \mathbb{R}$, ולכל $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ קיימות שתי נקודות $B, C \in M$ המקיימות:
   (א) $|BO| = |CO| = r$.
   (ב) $\measuredangle AOB = \measuredangle AOC = \theta$.
   (ג) אם $\theta \neq 0$ וגם $\theta \neq \frac{1}{2}$ אז $B \neq C$.

♣ כלומר מישור הוא קבוצה מישורית שאין בה "חורים".

הגדרה 2.13. נאמר שקבוצה מישורית $S \subseteq \mathcal{G}$ היא <u>קבוצה מישורית מרבית</u> (או <u>קבוצה מישורית מקסימלית</u>), אם לכל קבוצה מישורית $S' \subseteq \mathcal{G}$ המקיימת $S \subseteq S'$ מתקיים $S = S'$.

הגדרה 2.14. נאמר ש-$(\mathcal{G}, |\cdot|, \measuredangle)$ היא <u>גאומטריה מישורית</u> אם $\mathcal{G}$ היא מישור.

2.3 גאומטריה שלמה

הגדרה 2.15. נאמר ש-$(\mathcal{G}, |\cdot|, \measuredangle)$ היא <u>גאומטריה שלמה</u> אם כל קבוצה קווית מרבית היא ישר, וכל קבוצה מישורית מרבית היא מישור.

3 אקסיומת המקבילים

תהא $(\mathcal{G}, |\cdot|, \measuredangle)$ גאומטריה.

הגדרה 3.1. תהיינה $A, B, O \in \mathcal{G}$ שלוש נקודות כך ש-A ו-B שונות מ-O.

- נאמר ש-$\measuredangle AOB$ היא <u>זווית חדה</u> אם $0 < \measuredangle AOB < \frac{1}{4}$.
- נאמר ש-$\measuredangle AOB$ היא <u>זווית ישרה</u> אם $\measuredangle AOB = \frac{1}{4}$.
- נאמר ש-$\measuredangle AOB$ היא <u>זווית קהה</u> אם $\frac{1}{4} < \measuredangle AOB < \frac{1}{2}$.

4 מקטעים ומצולעים

תהא $(\mathcal{G}, |\cdot|, \measuredangle)$ גאומטריה.

הגדרה 4.1. תת-קבוצה קווית $I \subseteq \mathcal{G}$ תיקרא מקטע, אם לכל $A, B \in I$, ולכל נקודה $C \in \mathcal{G}$ הנמצאת בין A ל-B, מתקיים $C \in I$.

מסקנה 4.2. כל ישר $L \subseteq \mathcal{G}$ הוא מקטע.

הגדרה 4.3. קטע הוא מקטע חסום שקוטרו חיובי.

הגדרה 4.4. קרן היא מקטע שאינו חסום אך אינו ישר.