הקדמה לאלגברה ליניארית

אלגברה ליניארית (1) - 80134

מרצה: ערן נבו

מתרגלים: איתמר ישראלי ושני שלומי

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 הנושא האמיתי של האלגברה הליניארית

שאל אותי פעם חבר טוב "מהו הנושא של אלגברה ליניארית? על מה אנחנו מדברים בכלל? בחשבון אינפיניטסימלי זה ברור שאנחנו מדברים על המספרים הממשיים, מנסים לזקק את המחשבות שלנו אודותיהם ולהציג בצורה פורמלית את כל הידע האנושי בנושא; אבל מהו האובייקט המרכזי של אלגברה ליניארית? הרי יש יותר ממרחב וקטורי אחד..."

תשובתי הייתה שהאובייקט המרכזי של אלגברה ליניארית הוא המרחב התלת-ממדי שבו אנו חיים; דקארט לימד אותנו שניתן לייצג כל נקודה במישור ע"י זוג סדור של מספרים ממשיים וכמו כן כל נקודה במרחב התלת-ממדי ניתנת להצגה כשלשה סדורה של ממשיים[1], א"כ מבחינה מתמטית תשובה זו רוצה לומר שהאובייקט המרכזי של האלגברה הליניארית הוא $\mathbb{R}^3$. נכון, אנחנו נראה עוד הרבה מרחבים וקטוריים אחרים אך המוטיבציה לעסוק בנושא באה מרצוננו להבין את המציאות שסביבנו, וכמו תמיד במתמטיקה ההגדרה המופשטת הגיעה מתוך רצון לדייק אובייקטים שלפני כן נתפסו רק בצורה אינטואיטיבית וכך ההגדרה של מרחב וקטורי מבוססת כולה על המרחב התלת-ממדי. יתרה מזאת, לדעתי האישית כדי להוכיח משפט בליניארית עלינו לשכנע את עצמנו מדוע הוא נכון במרחב התלת-ממדי ואז לפרמל את ההוכחה כך שתחול גם במרחבים וקטוריים אחרים; את השיטה הזו ביצעתי כשלמדתי את הקורס הזה והבא אחריו ולעולם לא התאכזבתי - לכל משפט באלגברה ליניארית יש משמעות שאינה טריוויאלית ב-$\mathbb{R}^3$ ודרך ההוכחה זהה תמיד. בסיכומים לא תמיד אכתוב בפירוש את האינטואיציה ב-$\mathbb{R}^3$ אך אני מבקש מן הקורא שיחפש אותה בכל פעם.

כשלומדים אלגברה ליניארית בתיכון[2] מבדילים בין נקודות לווקטורים: נקודה היא מיקום במרחב בעוד שווקטור הוא "חץ" בעל גודל וכיוון אך אינו במוגבל למיקום מסוים, באוניברסיטה לא נבדיל ביניהם משום שהם איזומורפיים זה לזה - כל נקודה והווקטור היוצא מראשית הצירים אליה מיוצגים באותה צורה: זוג סדור או שלשה סדורה של מספרים ממשיים.

♣ כאן אני רוצה להמליץ על ערוץ YouTube נהדר שמסביר בין השאר את הקשר הנ"ל בין וקטור לנקודה: לערוץ קוראים "3blue1brown" ואת העניין הזה הוא מסביר בסרטון הזה[3] שהוא חלק מהפלייליסט שלו על המהות של האלגברה הליניארית (מומלץ לראות את כל הפלייליסט במקביל ללמידת שני הקורסים של האלגברה הליניארית). בנוסף, יש בערוץ זה סרטונים רבים אחרים שמסבירים את המתמטיקה (לאו דווקא ליניארית) באופן ויזואלי ובכך תורמים מאד להבנה.

---

[1] על שמו של דקארט נקראת המכפלה הקרטזית משום שהוא תיאר את המישור כ-$\mathbb{R}^2$ ואת המרחב כ-$\mathbb{R}^3$.

[2] כן, שמעתם נכון - לומדים אלגברה ליניארית בתיכון!

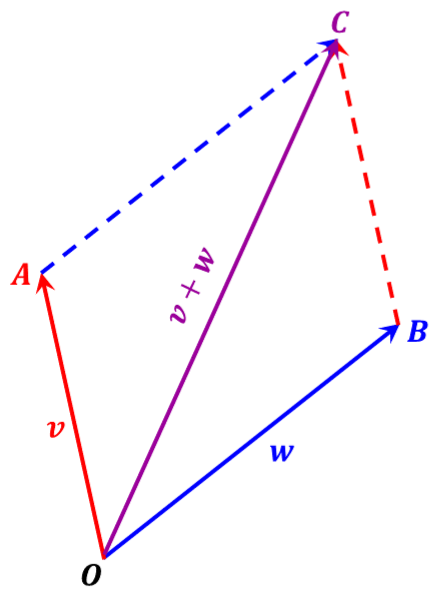
ב-5 יחידות מתמטיקה לומדים נושא שנקרא "וקטורים" ובו מאפיינים ישר ע"י וקטור כיוון של הישר ונקודה שעליו וכמו כן מייצגים מישור ע"י שני וקטורי כיוון הפורשים את המישור ונקודה שעליו, אנחנו ניתקל במושגים דומים גם בקורס זה. בנוסף, מי שלמד פיזיקה בתיכון ראה את המשמעות הפיזיקלית של חיבור וקטורי והמכפלה הסקלרית (שעליה נלמד בקורס הבא).

[3] קצת אחרי האמצע, אבל כדאי בכל מקרה לראות את כל הסרטון.

2 חיבור וקטורי וכפל בסקלר

2.1 חיבור וקטורי וחוק החילוף

ניתן להסתכל על וקטור כהדרכה כיצד להגיע מראשית הצירים אל הנקודה, אינטואיטיבי מאד לדבר על "חיבור" של הדרכות כאלה: לך עד לנקודה A ע"פ הוראת הווקטור v ואז התייחס אליה כאילו היא ראשית הצירים ולך ע"פ הוראת הווקטור w עד לנקודה C שהיחס בינה לבין A הוא כמו היחס בין B לראשית הצירים. מבחינה גרפית חיבור הווקטורים נעשה ע"י הצבת "זנבו" של הווקטור האחד על "ראשו" של הווקטור האחר, והגדרת הווקטור היוצא מראשית הצירים אל הנקודה המהווה את ראשו של הראשון לאחר שהוזז (C) כסכומם של החיצים.

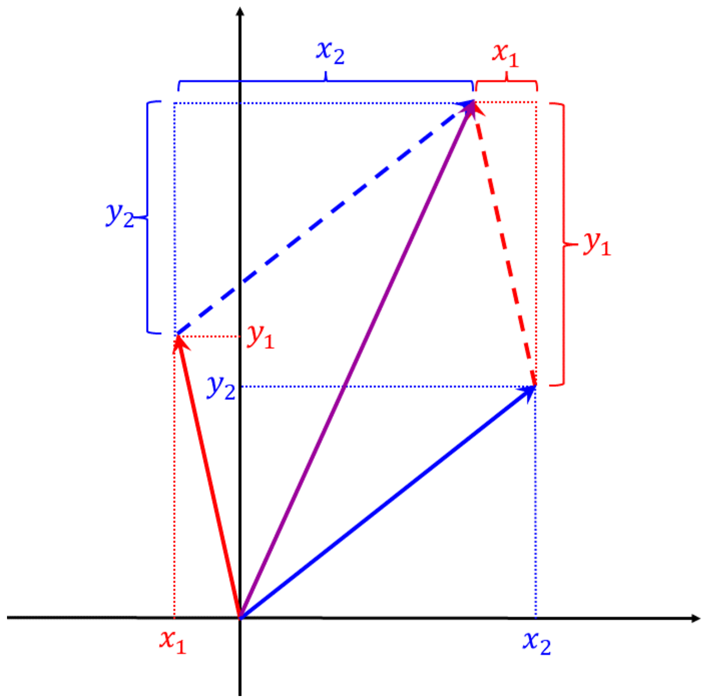


איור 1: חיבור וקטורי

באיור שלעיל רואים את הווקטורים v ו-w כששניהם יוצאים מראשית הצירים (למטה) והעתקים של שניהם כשכל אחד מההעתקים מוצב כשזנבו על המקור של רעהו, כבר כעת ניתן לראות שהסדר אינו משנה והחיבור הווקטורי הוא חילופי (קומוטטיבי).

2.2 פירוק לרכיבים

באיור הבא ניתן לראות שאם $\boldsymbol{A} = (x_1, y_1)$ ו-$\boldsymbol{B} = (x_2, y_2)$ אז $\boldsymbol{C} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$[4], כלומר התיאור שלנו את המישור כקבוצת כל הזוגות הסדורים של מספרים ממשיים נותן לנו דרך נוחה מבחינה אלגברית לתאר את החיבור הווקטורי.



איור 2: פירוק לרכיבים

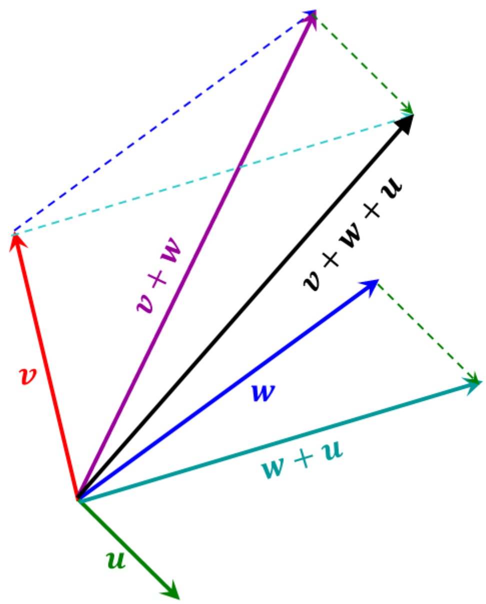
- ♣ קצת קשה להראות זאת על דף אך אותו הדבר מתרחש במרחב התלת-ממדי.
- ♣ שימו לב: למרות שאולי מבחינה רעיונית נקודות וחיצים נראים שונים למדי הם מתנהגים באותה צורה מבחינה מתמטית ולכן אנחנו עומדים "לזגזג" ביניהם מבלי לאותת.

האינטואיציה מאחורי התיאור האלגברי היא שניתן לפרק כל וקטור במישור לשני רכיבים ניצבים: אחד בכיוון ציר ה-x והשני בכיוון ציר ה-y (ובמרחב יהיה רכיב נוסף בכיוון ציר ה-z), וכל פעולה שנעשית על הווקטור פועלת על כל אחד משני הרכיבים בנפרד, כך החיבור של שני וקטורים הוא בעצם חיבור של כל אחת מהקואורדינטות שלהם בנפרד.
מי שהרעיונות האלה נראים לו מוכרים מהתיכון אינו טועה, ב-5 יחידות מתמטיקה למדנו נושא שנקרא פשוט "וקטורים" שעסק בדיוק בזה, שם למדנו לאפיין מישורים וישרים במרחב ע"י נקודה וזוג וקטורים (מישורים) או וקטור בודד (ישרים) וגם כאן נפגוש במושגים הללו רק בשמות אחרים (תתי-מרחבים וקטוריים וישריות). מי שלמד פיזיקה בתיכון יודע שמהירות ותאוצה גם הן מאופיינות ע"י גודל וכיוון ולפיכך ניתנות לאפיון ע"י וקטורים, והיכולת שלנו לפרק את הווקטורים שלהן לרכיבים מאפשרת לנו לפשט חישובים רבים, מה שמראה (לדעתי) שהתפיסה הזו לא רק פשוטה מבחינה אלגברית אלא גם מייצגת באמת את המציאות.

[4] שימו לב לכך ש-x_1 שלילי ולכן להוסיף אותו פירושו לזוז שמאלה ב-$|x_1|$.

2.3 חיבור וקטורי וחוק הקיבוץ

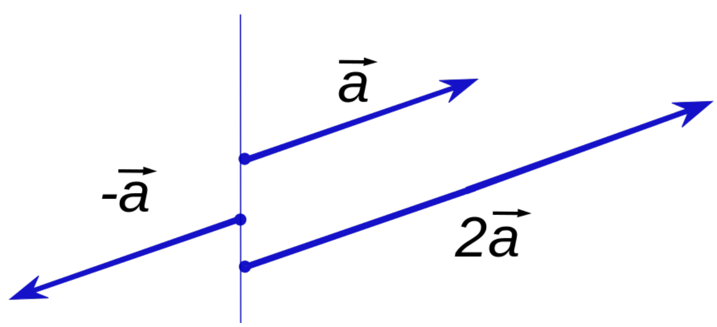
לא מצאתי דרך לצייר את האיור הבא מבלי שהוא יהיה עמוס מדי, למרות זאת אני מקווה שברור ממנו שחיבור וקטורים במישור מקיים את חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) ועם קצת דמיון ניתן לראות שזהו המצב גם במרחב התלת-ממדי.



איור 3: החיבור הווקטורי מקיים את חוק הקיבוץ

2.4 כפל בסקלר

בתיכון למדנו גם על פעולת הכפל בסקלר, מבחינה גאומטרית כפל בסקלר הוא מתיחה/כיווץ ע"פ הסקלר המתאים ואם הוא שלילי אז גם היפוך הכיוון שלו, מבחינה אלגברית אני חושב שקל להשתכנע שהכפלת כל קואורדינטה בנפרד עושה את אותה פעולה.



איור 4: כפל בסקלר

3 סיום

לפני שנסיים הייתי רוצה שנשתכנע בעוד כמה נקודות[5]:

1. וקטור האפס, הווקטור שנותן את ההדרכה כיצד להגיע מראשית הצירים לראשית הצירים (גאומטרית) וזה שכל הקואורדינטות שלו הן אפסים (אלגברית) הוא איבר אדיש לחיבור הווקטורי משתי הבחינות.
2. לכל וקטור יש וקטור נגדי - זהו הווקטור באותו האורך רק בכיוון ההפוך (גאומטרית) וזה שכל הקואורדינטות שלו הן בדיוק הנגדיות של המתאימות להן בווקטור המקורי (אלגברית).
3. הכפלה של וקטור בסקלר 1 משאירה אותו על כנו.
4. הכפל בסקלר והכפל בממשיים מקיימים יחד את חוק הקיבוץ, כלומר לכל וקטור v במישור/במרחב מתקיים $(a \cdot b)\cdot v = a\cdot(b \cdot v)$ עבור $a, b \in \mathbb{R}$ (שימו לב שהכפל השמאלי הוא כפל ב-$\mathbb{R}$ ואילו הכפל הימני הוא כפל וקטור בסקלר).
5. הכפל בסקלר מקיים את חוק הפילוג (דיסטריבוטיביות) ביחס לחיבור הווקטורי - לכל שני וקטורים v ו-w במישור/במרחב מתקיים $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$ עבור $a \in \mathbb{R}$.
6. הכפל בסקלר מקיים את חוק הפילוג ביחס לחיבור ב-$\mathbb{R}$ לכל וקטור v במישור/במרחב מתקיים $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$ עבור $a, b \in \mathbb{R}$.

שש התכונות הללו, יחד עם החילוף והקיבוץ של החיבור הווקטורי, הן ההגדרה של מרחב וקטורי.

♣ יש כאן כמה דברים שלא נגענו בהם: במרחב התלת-ממדי ניתן למדוד זוויות בין ישרים ומישורים - נעסוק בזה בקורס הבא ובאותה הזדמנות נפרמל את מושג האורך של וקטור והמרחק בין נקודות[6] (מי שמכיר את המכפלה הסקלרית כבר יודע למה לצפות), דבר נוסף שלא הזכרנו הוא צורות שאינן ישרות או מישוריות (עיגולים למשל) - התיאור האלגברי שלהן אינו ליניארי ולכן גם לא נראה אותן בשני הקורסים הללו, הלא השם שהם הוא "אלגברה ליניארית".

[5] שלוש הנקודות הראשונות הן ברורות מאליהן ולצייר את שלוש האחרות כבר היה יותר מדי בשבילי...
[6] אמנם כאן הוא נקרא פשוט למדי אך ישנם מרחבים וקטוריים שבהם זה פחות פשוט מאשר במרחב התלת-ממדי.