מרחבי מכפלה פנימית - טענות בלבד

אלגברה ליניארית (2) - 80135

מרצה: איתמר צביק

מתרגלים: גיל לבנה ויואב כהן

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

תודתי נתונה לגלעד שרם על סיכומיו המצוינים שהיו לי לעזר רב עד כדי כך שניתן לומר שהסיכום הזה מבוסס על סיכומיו.

סיכומי קורס זה מוקדשים לאהרון כהן;
אהרון, הידיעה שתקרא את הסיכומים הללו דרבנה אותי לאורך כל הדרך.
בהצלחה!

* * *

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 מכפלות פנימיות

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל לשדה $\mathbb{F}$ (מהגדרה $\mathbb{F}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$).

1.1 התחלה

טענה 1.1. יהי $v\in V$, אם $\langle v\mid w\rangle=0$ לכל $w\in V$ אז $v=0_V$.

מסקנה 1.2. יהיו $v_1,v_2\in V$, אם מתקיים $\langle v_1\mid w\rangle=\langle v_2\mid w\rangle$ לכל $w\in V$ אז $v_1=v_2$.

טענה 1.3. יהי $0_V\neq w\in V$, לכל $v\in V$ קיים $c\in\mathbb{F}$ יחיד כך שמתקיים $(v-c\cdot w)\perp w$, את אותו c ניתן לחשב ע"י:

$$c=\frac{\langle w\mid v\rangle}{\langle w\mid w\rangle}$$

♣ נשים לב: $v=(v-c\cdot w)+c\cdot w$, כלומר $c\cdot w$ הוא הרכיב של v בכיוון של w ו-$v-c\cdot w$ הוא הרכיב של v בכיוון המאונך על המישור שפורשים שניהם.

1.2 נורמה ומרחק

משפט 1.4. משפט הקוסינוסים
לכל $v,w\in V$ מתקיים:

$$\|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2+2\cdot\mathrm{Re}\,\langle v\mid w\rangle$$

♣ בקובץ ההקדמה ראינו שעבור המכפלה הסקלרית מעל הממשיים מתקיים $\langle v\mid w\rangle=\|v\|\cdot\|w\|\cdot\cos\theta$ כאשר θ היא הזווית שבין v ל-w.

מסקנה 1.5. משפט פיתגורס
לכל $v,w\in V$ מתקיימים שני הפסוקים הבאים:

- אם $v\perp w$ אז $\|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2$.
- אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז $v\perp w \iff \|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2$.

♣ למי שתהה לעצמו: המשפט והמסקנה האחרונים אינם מאפשרים להוכיח את משפט פיתגורס הגאומטרי ואת משפט הקוסינוסים הטריגונומטרי, הרי הגדרנו את הנורמה ע"פ משפט פיתגורס ($\|v\|:=\sqrt{\langle v\mid v\rangle}$).

מסקנה 1.6. יהי $0_V\neq w\in V$, לכל $v\in V$ מתקיים $\|v\|^2=\|v-p_w(v)\|^2+\|p_w(v)\|^2$.

משפט 1.7. אי-שוויון קושי-שוורץ[1]
לכל $v,w\in V$ מתקיים $|\langle v\mid w\rangle|\leq\|v\|\cdot\|w\|$ ומתקיים שוויון אם"ם v ו-w תלויים ליניארית.

♣ א"ש קושי-שוורץ הוא בעצם ההכללה של השוויון $v\cdot w=\|v\|\cdot\|w\|\cdot\cos\theta$ ב-$\mathbb{R}^n$ (כאשר θ היא הזווית הקטנה בין v ל-w)[2], והוא מאפשר לנו להגדיר זווית בממ"פ כללי (לא עשינו זאת בכיתה):

$$\theta:=\arccos\left(\frac{\langle v\mid w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}\right)$$

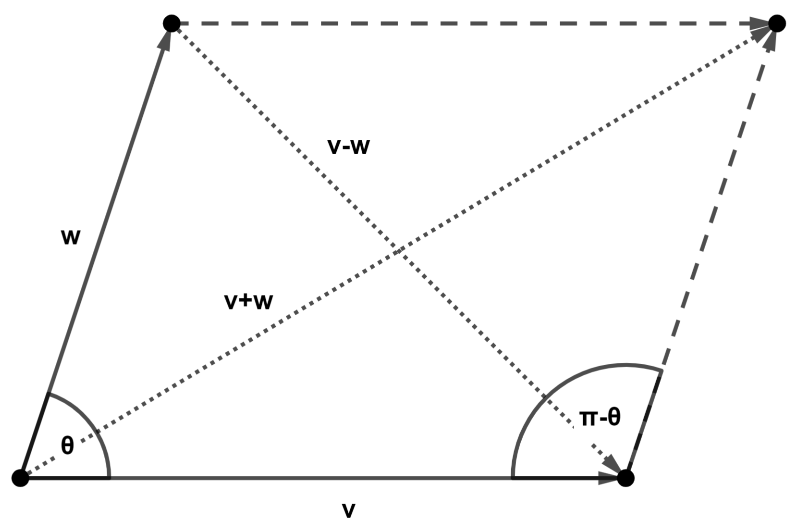
[1] ערך בוויקיפדיה: הרמן שוורץ.
[2] וזאת מכיוון ש-$|\cos\theta|\leq 1$ ו-$\theta>\frac{\pi}{2}$ (מה שגורר את $\cos\theta<0$) אם"ם $v\cdot w<0$.

משפט 1.8. חוק המקבילית

לכל $v,w\in V$ מתקיים:

$$\|v+w\|^{2}+\|v-w\|^{2}=2\cdot\left(\|v\|^{2}+\|w\|^{2}\right)$$

♣ כמו שמשפט פיתגורס הוא משפט בגאומטריה אוקלידית גם חוק המקבילית הוא משפט כזה, נוכיח אותו במישור[3]:



איור 1: חוק המקבילית

ממשפט הקוסינוסים נובע שמתקיים (כאשר θ היא הזווית הקטנה שבין v ו-w):

$$\begin{aligned}\|v-w\|^{2}&=\|v\|+\|w\|-2\cdot\|v\|\cdot\|w\|\cdot\cos\left(\theta\right)\\ \|v+w\|^{2}&=\|v\|+\|w\|-2\cdot\|v\|\cdot\|w\|\cdot\cos\left(\pi-\theta\right)\\ &=\|v\|+\|w\|+2\cdot\|v\|\cdot\|w\|\cdot\cos\left(\theta\right)\end{aligned}$$

ולכן $\|v+w\|^{2}+\|v-w\|^{2}=2\cdot\left(\|v\|^{2}+\|w\|^{2}\right)$.

משפט 1.9. אי-שוויון המשולש

לכל $v,w\in V$ מתקיים $\|v+w\|\leq\|v\|+\|w\|$ ומתקיים שוויון אם"ם קיים $0\leq c\in\mathbb{R}$ כך ש-$v=c\cdot w$.

[3] נשתמש בסימונים v ו-w כווקטורים ב-$\mathbb{R}^{2}$ אך ההוכחה לא תעשה שום שימוש בתכונות של מרחבים וקטוריים אלא בטריגונומטריה בלבד.

1.3 ניצבות

טענה 1.10. וקטור האפס הוא הווקטור היחיד שניצב לעצמו והיחיד שניצב לכל וקטור אחר.

טענה 1.11. יהיו $v\in V$ ו-$S,T\subseteq V$, מתקיים:

1. $S\perp v$ אם"ם $v\perp \text{span}S$.
2. $S\perp T$ אם"ם $\text{span}S\perp\text{span}T$.
3. אם $S\subseteq T$ אז $T^{\perp}\subseteq S^{\perp}$.

משפט 1.12. תהא $U:=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ סדרה אורתונורמלית של וקטורים ב-V, מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. U בת"ל.
2. לכל $v\in V$ ולכל $n\geq r\in\mathbb{N}$ מתקיים:
$$\left(v-\sum_{i=1}^{r}\langle u_i\mid v\rangle\cdot u_i\right)\perp\text{span}\left(u_1,u_2,\ldots,u_r\right)$$
3. אם V נ"ס ו-$n=\dim V$ (כלומר U הוא בסיס סדור אורתונורמלי) אז לכל $v\in V$ מתקיים:
$$v=\sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid v\rangle\cdot u_i$$

מסקנה 1.13. תהא $\mathcal{B}:=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ סדרה אורתוגונלית של וקטורים ב-V כך ש-$b_i\neq 0_V$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$, מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. $\mathcal{B}$ בת"ל.
2. לכל $v\in V$ ולכל $n\geq r\in\mathbb{N}$ מתקיים:
$$\left(v-\sum_{i=1}^{r}\frac{\langle b_i\mid v\rangle}{\langle b_i\mid b_i\rangle}\cdot b_i\right)\perp\text{span}\left(b_1,b_2,\ldots,b_r\right)$$
כלומר:
$$\left(v-\sum_{i=1}^{r}p_{b_i}\left(v\right)\right)\perp\text{span}\left(b_1,b_2,\ldots,b_r\right)$$
3. אם V נ"ס ו-$n=\dim V$ (כלומר $\mathcal{B}$ הוא בסיס סדור אורתוגונלי) אז לכל $v\in V$ מתקיים:
$$v=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle b_i\mid v\rangle}{\langle b_i\mid b_i\rangle}\cdot b_i=\sum_{i=1}^{n}p_{b_i}\left(v\right)$$

אלגוריתם 1 תהליך גרם-שמידט (Gram–Schmidt)

תהא $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ סדרת וקטורים בת"ל ב-V, נרצה למצוא סדרה אורתונורמלית $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ כך שלכל $m \geq r \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\text{span}\left(v_1, v_2, \ldots, v_r\right) = \text{span}\left(u_1, u_2, \ldots, u_r\right)$$

יהי $m \geq r \in \mathbb{N}$, נסמן $u_1 := \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1$ (מהגדרה $v_1 \neq 0_V$ ולכן $\|v_1\| \neq 0$) ו-$k := 2$.
כל עוד $k \leq r$:

- נסמן:

$$v'_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k \mid u_i \rangle \cdot u_i$$
$$u_k := \frac{1}{\|v'_k\|} \cdot v'_k$$

כעת $u_i \perp v'_k$ לכל $k-1 \geq i \in \mathbb{N}$ ולכן u_k הוא וקטור יחידה המאונך ל-u_i לכל $k-1 \geq i \in \mathbb{N}$ ולכן $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ היא סדרה אורתונורמלית.
בנוסף, מכיוון שבשלב הקודם התקיים $\text{span}\left(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\right) = \text{span}\left(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\right)$ ו-u_k הוא צר"ל של $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ **שאינו** צר"ל של $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ נדע שמתקיים $\text{span}\left(u_1, u_2, \ldots, u_k\right) = \text{span}\left(v_1, v_2, \ldots, v_k\right)$.

♣ אם אנחנו רוצים רק סדרה אורתוגונלית שאינה בהכרח אורתונורמלית ניתן לוותר על הנרמול להמשיך עם v'_k.

- נסמן $k := k+1$ ונעבור לשלב הבא בלולאה.

לאחר שנסתיימה ריצת הלולאה נקבל ש-$(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ היא סדרה אורתונורמלית המקיימת את הנדרש.

מסקנה 1.14. לכל ממ"פ נ"ס (אוקלידי או הרמיטי) יש בסיס אורתונורמלי.

משפט 1.15. נניח ש-V נ"ס ויהי $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ בסיס אורתונורמלי של V, לכל $v, w \in V$ ולכל $n \geq m \in \mathbb{N}$ מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. זהות פרסבל[4]:

$$\langle v \mid w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle u_i \mid v \rangle} \cdot \langle u_i \mid w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v \mid u_i \rangle \cdot \langle u_i \mid w \rangle$$

2. זהות בסל (Bessel)[5]:

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\langle u_i \mid v \rangle\right|^2 = \|v\|^2$$

3. א"ש בסל:

$$\sum_{i=1}^{m} \left|\langle u_i \mid v \rangle\right|^2 \leq \|v\|^2$$

[4] ערך בוויקיפדיה: מארק אנטואן פרסבל.
[5] ערך בוויקיפדיה: פרידריך בסל.

♣ הפסוק השלישי במשפט 1.12 והראשון במשפט זה (זהות בסל) מראים לנו שאם V נ"ס אז לכל בסיס של V קיימת מכפלה פנימית יחידה כך שאותו בסיס יהיה אורתונורמלי:
נניח ש-$(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ הוא בסיס כלשהו של V ואנו רוצים להגדיר מכפלה פנימית $\langle\cdot\mid\cdot\rangle:V\times V\to V$ כך שהוא בסיס אורתונורמלי, יהיו $v,w\in V$ ויהיו $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n\in\mathbb{F}$ כך שמתקיים:

$$v=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot u_i,\ \ w=\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot u_i$$

ממשפט 1.12 נובע שאם קיימת מכפלה פנימית כזו אז היא צריכה לקיים $\langle u_i\mid v\rangle=a_i$ ו-$\langle u_i\mid w\rangle=b_i$ ואז מזהות פרסבל נובע שהיא מוכרחת לקיים גם:

$$\langle v\mid w\rangle=\sum_{i=1}^{n}\overline{\langle u_i\mid v\rangle}\cdot\langle u_i\mid w\rangle=\sum_{i=1}^{n}\overline{a_i}\cdot b_i$$

ולכן אם היא קיימת אז היא יחידה, מצד שני ברור שזוהי מכפלה פנימית מאותן סיבות שהמכפלה הסקלרית היא מכפלה פנימית.

מסקנה 1.16. נניח ש-V נ"ס, לכל בסיס אורתונורמלי U של V ולכל $v,w\in V$ מתקיים[6]:

$$\langle v\mid w\rangle=[v]_U\cdot[w]_U$$

1.4 הטלות על תתי-מרחבים וקטוריים

נניח ש-V נ"ס.

טענה 1.17. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו, מתקיים $V=W\oplus W^{\perp}$.

מסקנה 1.18. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו, מתקיים $\left(W^{\perp}\right)^{\perp}=W$.

משפט 1.19. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו, בהינתן בסיס אורתוגונלי $(w_1,w_2,\ldots,w_k)$ של W מתקיים (לכל $v\in V$):

$$p_W(v)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\langle w_i\mid v\rangle}{\langle w_i\mid w_i\rangle}\cdot w_i=\sum_{i=1}^{k}p_{w_i}(v)$$

♣ אם $(w_1,w_2,\ldots,w_k)$ אורתונורמלי נקבל:

$$p_W(v)=\sum_{i=1}^{k}\langle w_i\mid v\rangle\cdot w_i$$

משפט 1.20. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו, לכל $v\in V$ מתקיים $d(v,W)=\left\|p_{W^{\perp}}(v)\right\|$.

[6] הכפל באגף ימין הוא המכפלה הסקלרית.

2 מרחבים דואליים וההעתקה הצמודה

♣ אנחנו לוקחים כעת הפסקה מנושא המכפלה הפנימית ועוברים לעסוק במרחב הדואלי של מרחב וקטורי - שהוא מרחב ההעתקות הליניאריות מהמרחב לשדה, בהמשך נראה כיצד נושא מתקשר למרחבי מכפלה פנימית.
רוב מה שנכתב בפרק זה לא היה חלק מהקורס כשלמדתי אותו - החלק הפשוט של מרחבים דואליים נלמד אצל ערן נבו בקורס הקודם ואת השאר מצאתי ברשת או גיליתי בעצמי, למרות זאת ראיתי לנכון להביא את הפרק במלואו מפני שהוא ענה על שאלה שהציקה לי במשך יותר משנה: מהי המשמעות הגאומטרית של שיחלוף מטריצה?!?

יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים מעל לשדה $\mathbb{F}$.

2.1 במרחבים וקטוריים כלליים

משפט 2.1. נניח ש-V נ"ס, לכל $0 \neq f \in V^*$ מתקיים $\dim(\ker f) = \dim V - 1$.

טענה 2.2. נניח ש-W הוא תמ"ו של V ($W \subseteq V$), W^0 הוא תמ"ו של V^*.

משפט 2.3. נניח ש-V נ"ס ו-W הוא תמ"ו של V ($W \subseteq V$), מתקיים $\dim W + \dim W^0 = \dim V$.

משפט 2.4. נניח ש-V נ"ס ותהא $\varphi : V \to V^{**}$ **העתקת ההצבה** המוגדרת ע"י $\varphi(v) := f_v$ (לכל $v \in V$), φ היא איזומורפיזם בין V ל-V^{**}.

♣ מבלבל למדי, נכון? שימו לב: φ לוקחת וקטור ב-V וצריכה להחזיר וקטור ב-V^{**}, אבל וקטור ב-V^{**} הוא העתקה ליניארית המקבלת העתקה ליניארית ב-V^* ומחזירה סקלר ב-$\mathbb{F}$, כעת נזכור שגם וקטור ב-V^* הוא העתקה ליניארית המקבלת וקטור ב-V ומחזירה סקלר ב-$\mathbb{F}$ - לכן טבעי מאד ש-φ תחזיר העתקה ליניארית ב-V^{**} שפעולתה היא להציב את הווקטור המתקבל מ-V בכל ה"ל ב-V^*.
כן, אני מודע לכך שגם ההסבר המפורט יותר מבלבל, אין מה לעשות, קחו נשימה ארוכה וקראו את הכל לאט לאט.

משפט 2.5. נניח ש-V ו-W נ"ס ותהא $\varphi : W \to W^{**}$ העתקת ההצבה כפי שהוגדרה לעיל, מתקיים $\varphi(T(v)) = T^{**}(f_v)$ לכל $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$ ולכל $v \in V$.

♣ כלומר T^{**} (שהיא העתקה מ-V^{**} ל-W^{**}) איזומורפית ל-T (שהיא העתקה מ-V ל-W) בדיוק ע"י אותו איזומורפיזם שבין V ל-V^{**} ובין W ל-W^{**}.

משפט 2.6. תכונות של ההעתקה הצמודה
תהא $T : V \to W$ העתקה ליניארית.

1. מתקיים $\mathrm{Id}_V^* = \mathrm{Id}_{V^*}$.
2. יהיו $S : V \to W$ העתקה ליניארית ו-$\lambda \in \mathbb{F}$, מתקיים:
$$(S+T)^* = S^* + T^*$$
$$(\lambda \cdot T)^* = \lambda \cdot T^*$$
3. יהי U גם הוא ממ"פ מעל ל-$\mathbb{F}$ ותהא $S : W \to U$ העתקה ליניארית, מתקיים:
$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$$
4. אם T הפיכה אז גם T^* הפיכה ומתקיים $(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$.

2.2 במרחבי מכפלה פנימית

נניח ש-V ו-W הם מרחבי מכפלה פנימית ($\mathbb{F}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$) ונסמן ב-$\langle\cdot\mid\cdot\rangle_{V}$ וב-$\langle\cdot\mid\cdot\rangle_{W}$ את המכפלות הפנימיות שלהם[7].

משפט 2.7. משפט ההצגה של ריס[8]

נניח ש-V נ"ס, לכל $l\in V^{*}$ קיים $v\in V$ יחיד כך ש-$l\left(w\right)=\left\langle v\mid w\right\rangle$ לכל $w\in V$ (כלומר $l=l_{v}$).

♣ זה לא כל כך מפתיע כשזוכרים שפונקציונל $f:\mathbb{F}^{n}\to\mathbb{F}$ הוא בעצם כפל במטריצה מגודל $1\times n$ (וקטור שורה) וכפל מטריצות כזה שקול לחלוטין למכפלה הסקלרית עם המשוחלפת שלה (כווקטור עמודה), כלומר כל פונקציונל הוא בעצם הטלה על הכיוון של וקטור מסוים (כדי לקבל איבר ב-$\mathbb{F}$) ואז כפל בגודל של אותו וקטור (ראו בקובץ ההקדמה).

מסקנה 2.8. נניח ש-V נ"ס ותהא $\varphi:V\to V^{*}$ פונקציה המוגדרת ע"י $\varphi\left(v\right):=l_{v}$ (לכל $v\in V$), אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז φ היא איזומורפיזם בין V ל-V^{*} ואם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז φ היא אנטי-איזומורפיזם בין V ל-V^{*}.

♣ זהו איזומורפיזם / אנטי-איזומורפיזם טבעי מאד, ממש כשם שהאיזומורפיזם בין V ל-V^{**} היה טבעי, אך מכיוון שהוא טבעי רק **אחרי** הגדרת מכפלה פנימית על V אין בו שום דבר קנוני משום שכפי שראינו כבר הגדרת מכפלה פנימית שקולה לבחירת בסיס - לכל בסיס של V קיימת מכפלה פנימית המגדירה אותו כאורתונורמלי.

♣ נשים לב: לכל בסיס אורתונורמלי $\mathcal{B}:=\left(u_{1},u_{2},\ldots,u_{n}\right)$ של V מתקיים (לכל $n\geq i,j\in\mathbb{N}$):

$$l_{u_{i}}\left(v_{j}\right)=\left\langle u_{i}\mid u_{j}\right\rangle =\delta_{ij}$$

ולכן $\mathcal{B}^{*}=\left(l_{u_{1}},l_{u_{2}},\ldots,l_{u_{n}}\right)$, כלומר φ מעתיקה כל בסיס אורתונורמלי של V לבסיס הדואלי שלו ב-V^{*}; ניתן היה להסיק מכאן ש-φ הפיכה אך מכיוון ש-φ עלולה להיות אנטי-ליניארית זה היה דורש מעט עבודה.

משפט 2.9. יהיו V ממ"פ נ"ס ו-$W\subseteq V$ תמ"ו ותהא φ אותה פונקציה שהוגדרה במסקנה הקודמת (2.8), אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז הצמצום של φ ל-$W^{\perp}$ ($\varphi\mid_{W^{\perp}}$) הוא איזומורפיזם בין $W^{\perp}$ ל-W^{0} ואם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז $\varphi\mid_{W^{\perp}}$ הוא אנטי-איזומורפיזם בין $W^{\perp}$ ל-W^{0}.

תהא $T:V\to W$ העתקה ליניארית.

טענה 2.10. תהיינה $T:V\to W$ ו-$S:W\to V$ העתקות לינאריות, אם מתקיים $\left\langle S\left(w\right)\mid v\right\rangle _{V}=\left\langle w\mid T\left(v\right)\right\rangle _{W}$ לכל $v\in V$ ולכל $w\in W$ אז $S=T^{*}$.

[7] את המכפלה הפנימית של V נסמן גם ב-$\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ כשנעסוק בו בלבד.

[8] ערך בוויקיפדיה: פרידיש ריס.

משפט 2.11. תכונות של ההעתקה הצמודה מעל מרחבי מכפלה פנימית

1. מתקיים $\text{Id}_V^* = \text{Id}_V$.
2. יהיו $S : V \to W$ העתקה ליניארית ו-$\lambda \in \mathbb{F}$, מתקיים:

$$(S+T)^* = S^* + T^*$$
$$(\lambda \cdot T)^* = \lambda \cdot T^*$$

3. יהי U גם הוא ממ"פ מעל ל-$\mathbb{F}$ ותהא $S : W \to U$ העתקה ליניארית, מתקיים:

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$$

4. אם T הפיכה אז גם T^* הפיכה ומתקיים $(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$.
5. תהא $S : W \to V$ העתקה ליניארית, מתקיים $S = T^*$ אם"ם $\langle v \mid S(w)\rangle_V = \langle T(v) \mid w\rangle_W$.
6. מתקיים $(T^*)^* = T$.
7. אם V נ"ס אז $\text{Im}T^* = (\ker T)^\perp$.
8. נניח ש-V נ"ס ויהי $f : V \to V$ אופרטור כך ש-$U \subseteq V$ הוא תמ"ו שמור תחת f, $U^\perp$ שמור תחת f^*.

מסקנה 2.12. הצמצום של T ל-$\text{Im}T^*$ ($T|_{\text{Im}T^*} : \text{Im}T^* \to \text{Im}T$) הוא העתקה חח"ע ועל.

♣ למעשה רק הצמצום הזה מעניין אותנו משום ש-$\ker T = (\text{Im}T^*)^\perp$.

מסקנה 2.13. נוסחה מפורשת להעתקה הצמודה

נניח ש-V נ"ס ויהי $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ בסיס אורתונורמלי של V, לכל $w \in W$ מתקיים:

$$T^*(w) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(u_i) \mid w\rangle_W \cdot u_i$$

מסקנה 2.14. נניח ש-V ו-W נ"ס ויהיו $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ בסיסים אורתונורמליים של V ו-U בהתאמה, מתקיים:

$$[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^*$$

♣ במובן מסוים אני הופך כאן את היוצרות כשאני מציג את השקילות בין הצמדת מטריצה להצמדת ה"ל כמסקנה מהנוסחה המפורשת של ההעתקה הצמודה, לפני שאסביר זאת הרשו לי לספר סיפור קטן.
כשלמדנו על מטריצות בקורס הקודם מצאנו כמעט לכל הגדרה בעולם המטריצות $M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ קשר ישיר להעתקות ליניאריות מ-$\mathbb{F}^{m}$ ל-$\mathbb{F}^{n}$: מטריצת היחידה היא העתקת הזהות, כפל מטריצות הוא הרכבה, מטריצה הפיכה היא ה"ל הפיכה וההופכית שלה היא ההעתקה ההופכית, העמודות של כל מטריצה הן האיברים אליהם נשלחים איברי הבסיס הסטנדרטי, מטריצות דומות מייצגות את אותן ה"ל אך בבסיסים שונים, למטריצות אלכסוניות ולמטריצות משולשיות יש אינטואיציה גאומטרית חזקה ועוד (שכחתי משהו?).
רק הגדרה אחת יצאה מן הכלל הזה: המטריצה המשוחלפת (ומטריצות סימטריות/אנטי-סימטריות שתלויות בה), מהרגע שלמדנו עליה ועד ליום שבו גיליתי את הנוסחה המפורשת להעתקה הצמודה (יותר משנה) "שברתי" את הראש כדי להבין מה הקשר בין מטריצה למשוחלפת שלה. כשלמדתי את הקורס אצל איתמר צביק הגדרנו את האופרטור הצמוד בתור האופרטור היחיד המקיים $\langle f^{*}\left(v\right)\mid w\rangle=\langle v\mid f\left(w\right)\rangle$ (לכל $v,w\in V$)[9], בצורה זו היה קל להוכיח שבבסיס אורתונורמלי U מתקיים $\left[f^{*}\right]_{U}=\left(\left[f\right]_{U}\right)^{*}$[10] אך לא הייתה לזה שום משמעות גאומטרית.
יום אחד קראתי בוויקיפדיה על האופרטור הצמוד במרחבים כלליים שם הוא הוגדר על המרחבים הדואליים ופעולתו הייתה להרכיב את האופרטור המקורי מימין, הסיכוי לכך שלא יהיה שום קשר בין שני הצמודים הללו אחרי שמסמנים אותם באופן זהה נראה לי אפסי וכך הבנתי שבמרחבי מכפלה פנימית T^{*} מעתיק את הווקטור w לווקטור שהמכפלה הפנימית איתו תהיה שקולה למכפלה הפנימית עם w **כאשר לפני הפעלת המכפלה הפנימית מפעילים את** T. נרעש מן ההבנה הזו הבנתי שזה בדיוק מה שקורה בהצמדת מטריצות, הקואורדינטה ה-i של הווקטור $A^{*}\cdot v$ היא המכפלה הסקלרית $\langle A\cdot e_{i}\mid v\rangle$ ולכן:

$$A^{*}\cdot v=\sum_{i=1}^{n}\langle A\cdot e_{i}\mid v\rangle\cdot e_{i}$$

ואם המטריצה הצמודה אכן מייצגת את האופרטור הצמוד הנוסחה הזו צריכה להתקיים גם עבורו.
לנוסחה הזו יש כמובן פירוש גאומטרי פשוט מאד: אנו מבצעים מכפלה פנימית עם כל אחת מהתמונות של וקטורי הבסיס האורתונורמלי (כבר ראינו מה זה אומר מבחינה גאומטרית), כופלים בווקטור הבסיס המתאים בכל פעם וסוכמים את הכל.

[9] שימו לב שזה אומר שהצמוד מוגדר רק אופרטורים מעל מרחב מכפלה פנימית ולא עבור העתקות ליניאריות כלליות או אופרטורים על מרחבים אחרים.
[10] יהי $g:V\to V$ אופרטור כך ש-$\left[g\right]_{U}=\left(\left[f\right]_{U}\right)^{*}$, מתקיים (נשתמש באיזומרפיזם בין $M_{1}\left(\mathbb{F}\right)$ ל-$\mathbb{F}$):

$$\begin{aligned}\langle g\left(v\right)\mid w\rangle&=\left(\left[g\left(v\right)\right]_{U}\right)^{*}\cdot\left[w\right]_{U}\\&=\left(\left[g\right]_{U}\cdot\left[v\right]_{U}\right)^{*}\cdot\left[w\right]_{U}\\&=\left(\left(\left[f\right]_{U}\right)^{*}\cdot\left[v\right]_{U}\right)^{*}\cdot\left[w\right]_{U}\\&=\left(\left(\left[v\right]_{U}\right)^{*}\cdot\left[f\right]_{U}\right)\cdot\left[w\right]_{U}\\&=\left(\left[v\right]_{U}\right)^{*}\cdot\left(\left[f\right]_{U}\cdot\left[w\right]_{U}\right)\\&=\left(\left[v\right]_{U}\right)^{*}\cdot\left[f\left(w\right)\right]_{U}=\langle v\mid f\left(w\right)\rangle\end{aligned}$$

3 העתקות אוניטריות

יהיו V ו-W מרחבי מכפלה פנימית מעל לשדה $\mathbb{F}$ ונסמן ב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$ וב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_W$ את המכפלות הפנימיות שלהם[11].

3.1 העתקות אוניטריות שאינן בהכרח אופרטורים

תהא $T : V \to W$ העתקה אוניטרית.

משפט 3.1. אם T הפיכה אז $T^{-1} = T^*$ וזוהי העתקה אוניטרית.

טענה 3.2. T חח"ע.

מסקנה 3.3. אם T על אז T הפיכה, מתקיים $T^{-1} = T^*$ וזוהי העתקה אוניטרית.

♣ בפרט, אם V ו-W נ"ס בעלי ממד זהה אז T הפיכה ו-$T^{-1} = T^*$ אוניטרית.

מסקנה 3.4. לכל אופרטור $f : V \to V$ מתקיים f אוניטרי אם"ם $f^* \circ f = \mathrm{Id}_V = f \circ f^*$.

טענה 3.5. תהא $S : V \to W$ העתקה ליניארית, אם $S^* \circ S = \mathrm{Id}_V$ אז S אוניטרית.

טענה 3.6. יהי U גם הוא ממ"פ מעל ל-$\mathbb{F}$ ותהא $S : W \to U$ העתקה אוניטרית, גם $S \circ T$ היא העתקה אוניטרית.

משפט 3.7. נוסחת הפולריזציה
אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז לכל $v, w \in V$ מתקיים:

$$\langle v \mid w \rangle = \frac{\|v + w\|^2 - \left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)}{2}$$
$$\langle v \mid w \rangle = \frac{\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2}{4}$$

ואם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז לכל $v, w \in V$ מתקיים:

$$\langle v \mid w \rangle = \frac{\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 - i \cdot \left(\|v + i \cdot w\|^2 - \|v - i \cdot w\|^2\right)}{4}$$

♣ כל האלגברה הזו לא באמת מעניינת, הנקודה שצריך לקחת בכאן היא שהעתקה ליניארית היא אוניטרית (כלומר שומרת על המכפלה הפנימית) אם"ם היא שומרת על הנורמה.

מסקנה 3.8. תהא $S : V \to W$ ונסמן ב-$\|\cdot\|_V$ וב-$\|\cdot\|_W$ את הנורמות של V ו-W.
שלושת התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1. S אוניטרית.
2. לכל $v \in V$ מתקיים $\|S(v)\|_W = \|v\|_V$.
3. לכל $v_1, v_2 \in V$ מתקיים $\|S(v_1 - v_2)\|_W = \|v_1 - v_2\|_V$.

[11] את המכפלה הפנימית של V נסמן גם ב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ כשנעסוק בו בלבד.

משפט 3.9. תהא $S:V\to W$ ונניח ש-V נ"ס, שלושת התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1. S אוניטרית.
2. לכל בסיס אורתונורמלי $U:=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ של V גם $S(U)=\{S(u_1),S(u_2),\ldots,S(u_n)\}$ היא קבוצה אורתונורמלית ב-W.
3. קיים בסיס אורתונורמלי $U:=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ של V כך ש-$S(U)=\{S(u_1),S(u_2),\ldots,S(u_n)\}$ היא קבוצה אורתונורמלית ב-W.

משפט 3.10. נניח ש-V ו-W נ"ס בעלי ממד זהה ותהא $f:V\to W$ **פונקציה**.
אם f מקיימת את שני התנאים הבאים אז f היא **העתקה ליניארית** אוניטרית הפיכה, שני התנאים הם:

1. קיים בסיס אורתונורמלי $U:=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ של V כך ש-$f(U)=\{f(u_1),f(u_2),\ldots,f(u_n)\}$ היא בסיס אורתונורמלי של W.
2. לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים $\langle f(v_1)\mid f(v_2)\rangle_W=\langle v_1\mid v_2\rangle_V$.

3.2 אופרטורים אוניטריים

יהי $f:V\to V$ אופרטור אוניטרי.

טענה 3.11. מתקיים $\sigma(f)\subseteq\{z\in\mathbb{F}:|z|=1\}$.

♣ כלומר אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ו-$\lambda\in\sigma(f)$ אז $\lambda=\pm1$, ואם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז הספקטרום של f מוכל במעגל היחידה המרוכב.

♣ חשוב לזכור שאם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז ייתכן ש-$\sigma(f)=\emptyset$.

משפט 3.12. לכל $\lambda,\mu\in\sigma(f)$ כך ש-$\lambda\neq\mu$ מתקיים $V_\lambda\perp V_\mu$.

♣ אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז המשפט יכול להתקיים רק כאשר $\sigma(f)=\{-1,1\}$ ואז $V_1\perp V_{-1}$.

נניח ש-V נ"ס.

משפט 3.13. יהי $U\subseteq V$ תמ"ו, אם U שמור תחת f אז גם $U^\perp$ שמור תחת f.

משפט 3.14. קיימת סדרת תתי-מרחבים $(W_1,W_2,\ldots,W_r)$ שמורים תחת f כך שמתקיים:

1. $W_i\perp W_j$ לכל $r\geq i,j\in\mathbb{N}$ כך ש-$i\neq j$.
2. $V=W_1\oplus W_2\oplus\ldots\oplus W_r$.
3. תלוי במקרה:
   - אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז $\dim(W_i)=1$ או ש-$\dim(W_i)=2$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$.
   - אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז $\dim(W_i)=1$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$.

מסקנה 3.15. אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז f לכסין אוניטרית.

משפט 3.16. יהי $g:V\to V$ אופרטור, g אוניטרי אם"ם לכל בסיס אורתונורמלי U של V המטריצה $[g]_U$ היא מטריצה אוניטרית.

משפט 3.17. תכונות של מטריצות אוניטריות
תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. A אוניטרית אם"ם סדרת עמודותיה היא בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ עם המכפלה הסקלרית.
2. A אוניטרית אם"ם A^* אוניטרית.
3. A אוניטרית אם"ם A הפיכה ובנוסף $A^{-1} = A^*$.
4. I_n אוניטרית.
5. תהא $B \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה אוניטרית, גם $A \cdot B$ אוניטרית; כלומר קבוצת המטריצות האוניטריות מסדר n סגורה לכפל מטריצות.
6. קבוצת המטריצות האוניטריות מסדר n, שתסומן ב-$\mathrm{O}(n)$, היא חבורה כאשר פעולת הכפל המתאימה היא כפל מטריצות.
7. אם A אוניטרית אז $\det A^* = \overline{\det A}$.
8. אם A אוניטרית אז $|\det A| = 1$.
כלומר: אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז $\det A = \pm 1$, ואם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז $\det A$ נמצא על מעגל היחידה המרוכב.
9. $\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det A = 1\}$ היא תת-חבורה של $\mathrm{O}(n)$.
10. אם A אוניטרית אז $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{F} : |z| = 1\}$.
כלומר: אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ו-$\lambda \in \sigma(A)$ אז $\lambda = \pm 1$, ואם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז הספקטרום של A מוכל במעגל היחידה המרוכב.
11. אם A אוניטרית אז לכל $\lambda, \mu \in \sigma(A)$ כך ש-$\lambda \neq \mu$ מתקיים $V_\lambda \perp V_\mu$.

♣ ממשפט 3.14 ומהעובדה שהדטרמיננטה של מטריצה אורתוגונלית היא ± 1 נובע שניתן למיין את האופרטורים האורתוגונליים על מרחבים אוקלידיים ע"פ פעולתם על מרחבים מממד 1 או 2, כלומר ע"פ המטריצות המייצגות שלהם על מרחבים כאלו.
נניח ש-f אורתוגונלי ו-V מממד 1 או 2.

- נניח ש-$\dim V = 1$ ויהי $0_V \neq v \in V$ ($\{v\}$ הוא בסיס של V), ראינו ש-$\sigma(f) \subseteq \{-1, 1\}$ ומכיוון שבממד 1 אופרטור הוא פשוט כפל בסקלר נובע מכאן ש-$f(v) = \pm v$, כלומר $f = \mathrm{Id}_V$ או ש-$f = -\mathrm{Id}_V$ (שיקוף דרך הראשית).
- נניח ש-$\dim V = 2$ ויהי U בסיס אורתונורמלי של V, נגדיר:

$$A := \begin{bmatrix} c & a \\ s & b \end{bmatrix} := [f]_U$$

מכיוון שסדרת העמודות של A היא אורתונורמלית נדע שמתקיים:

$$1 = c^2 + s^2$$
$$1 = a^2 + b^2$$
$$0 = ac + bs$$

נניח בהג"כ ש-$c\neq0$,

$$\begin{aligned}&\Rightarrow a=-\frac{bs}{c}\\&\Rightarrow 1=\left(-\frac{bs}{c}\right)^2+b^2\\&\Rightarrow 1=b^2\cdot\left(1+\frac{s^2}{c^2}\right)=b^2\cdot\frac{c^2+s^2}{c^2}=b^2\cdot\frac{1}{c^2}\\&\Rightarrow b^2=c^2\Rightarrow b=\pm c\Rightarrow a=\mp s\end{aligned}$$

א"כ ישנן שתי אפשרויות:

$$A=\begin{bmatrix}c&-s\\s&c\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}c&s\\s&-c\end{bmatrix}$$

נזכור ש-$\det A=\pm1$ ונשים לב שהאפשרות הראשונה מתאימה עבור $\det A=1$:

$$\det A=c^2-(-s)\cdot s=c^2+s^2=1$$

ואילו השנייה מתאימה עבור $\det A=-1$:

$$\det A=c\cdot(-c)-s^2=-\left(c^2+s^2\right)=-1$$

על כל פנים מהשוויון $1=c^2+s^2$ נובע שקיימת $\theta\in[0,2\pi)$ כך ש-$c=\cos\theta$ ו-$s=\sin\theta$[12], כלומר נקבל את אחת משתי האפשרויות:

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

האפשרות הראשונה היא סיבוב ב-θ רדיאנים נגד כיוון השעון והשנייה היא שיקוף ביחס לציר ה-x ואז סיבוב ב-θ רדיאנים נגד כיוון השעון (נזכור שהכפלת מטריצות שקולה להרכבה), למעשה ניתן להציג את השנייה כשיקוף דרך הישר $y=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot x=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot x$ (אם $\theta=\pi$ אז מדובר בשיקוף דרך ציר ה-y).

לסיכום: כל האופרטורים האורתוגונליים על מרחבים אוקלידיים מתפרקים לסיבובים (אם הדטרמיננטה היא 1) ושיקופים (אם הדטרמיננטה היא -1) על תתי-מרחבים שמורים מממד 1 או 2.

♣ אם A היא מטריצת סיבוב אז אין לה ערכים עצמיים אלא אם $\theta=0$ (מדובר במטריצת היחידה ולכן $\sigma(A)=\{1\}$) או ש-$\theta=\pi$ (מדובר במטריצה הנגדית של מטריצה היחידה ולכן $\sigma(A)=\{-1\}$);
אם A היא מטריצת שיקוף אז $\sigma(A)=\{-1,1\}$ משום שציר השיקוף מועתק לעצמו והציר המאונך מועתק לנגדי שלו:

$$\begin{bmatrix}\cos(\theta)&\sin(\theta)\\\sin(\theta)&-\cos(\theta)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin(\theta)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\\sin(\theta)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-\cos(\theta)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right)\\\sin\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\cos(\theta)&\sin(\theta)\\\sin(\theta)&-\cos(\theta)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin(\theta)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\\sin(\theta)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos(\theta)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right)\\\cos\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}$$

---

[12] הגרירה נובעת ממשפט פיתגורס ההפוך: אם משולש מקיים את השוויון $a^2+b^2=c^2$ (כאשר a,b,c הן אורכי הצלעות של המשולש) אז הוא ישר זווית (ו-c הוא אורך היתר), העובדה שניתן לבנות מצלעות באורכים אלו משולש כלשהו נובעת מזה שהשוויון גורר את $c+a>b$, את $c+b>a$ ואת $a+b>c$ (ראו מה שכתבתי על כך בהסבר על שמו של א"ש המשולש בסיכום הקורס אינפי' 1).

מסקנה 3.18. אם f אופרטור אורתוגונלי אז קיים בסיס אורתונורמלי U של V כך שמתקיים:

$$[f]_U = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}$$

כאשר $A_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}$ עבור $\theta_i \in (0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ לכל $r \geq i \in \mathbb{N}$, $p = \dim V_1$, $q = \dim V_{-1}$[13] ו-$p+q+2r = \dim V$.

4 אופרטורים נורמליים ואופרטורים הרמיטיים

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל לשדה $\mathbb{F}$ ויהי $f : V \to V$ אופרטור.

4.1 התחלה

משפט 4.1. שקילויות של אופרטורים נורמליים, הרמיטיים ואנטי-הרמיטיים

1. f נורמלי אם"ם לכל $v,w \in V$ מתקיים $\langle f^*(v) \mid f^*(w)\rangle = \langle f(v) \mid f(w)\rangle$.
2. f הרמיטי אם"ם לכל $v,w \in V$ מתקיים $\langle f(v) \mid w\rangle = \langle v \mid f(w)\rangle$.
3. f הרמיטי אם"ם לכל $v,w \in V$ מתקיים $\langle v \mid f(w)\rangle = \langle f(v) \mid w\rangle$.
4. f אנטי-הרמיטי אם"ם לכל $v,w \in V$ מתקיים $\langle -f(v) \mid w\rangle = \langle v \mid f(w)\rangle$.
5. f אנטי-הרמיטי אם"ם לכל $v,w \in V$ מתקיים $\langle v \mid -f(w)\rangle = \langle f(v) \mid w\rangle$.
6. נניח ש-V נ"ס,

- f נורמלי אם"ם לכל בסיס אורתונורמלי U של V המטריצה $[f]_U$ היא מטריצה נורמלית.
- f הרמיטי אם"ם לכל בסיס אורתונורמלי U של V המטריצה $[f]_U$ היא מטריצה הרמיטית.
- f אנטי-הרמיטי אם"ם לכל בסיס אורתונורמלי U של V המטריצה $[f]_U$ היא מטריצה אנטי-הרמיטית.

[13] בכל שיקוף ציר השיקוף כלול ב-V_1 והציר המאונך לו כלול ב-V_{-1}, בסיבוב ב-0 רדיאנים כל התמ"ו השמור כלול ב-V_1.

משפט 4.2. תכונות של אופרטורים נורמליים

נניח ש-f נורמלי, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. לכל $v \in V$ מתקיים $\|f^{*}(v)\| = \|f(v)\|$.
2. לכל $j,k \in \mathbb{N}$ מתקיים $f^{k} \circ (f^{*})^{j} = (f^{*})^{j} \circ f^{k}$.
3. לכל $P \in \mathbb{F}[x]$ גם $P(f)$ הוא אופרטור נורמלי.
4. לכל $v \in V$ ולכל $\lambda \in \mathbb{F}$ מתקיים

$$f(v) = \lambda \cdot v \iff f^{*}(v) = \overline{\lambda} \cdot v$$

ובפרט $\overline{\lambda} \in \sigma(f^{*}) \iff \lambda \in \sigma(f)$.

5. לכל $\lambda, \mu \in \sigma(f)$ כך ש-$\lambda \neq \mu$ מתקיים $V_{\lambda} \perp V_{\mu}$.

♣ נזכיר שוב שאופרטורים הרמיטיים ואופרטורים אוניטריים הם בפרט אופרטורים נורמליים ולכן אלו גם תכונות שלהם.

♣ אפילו אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אין זה מוכרח שקיימים $\lambda, \mu \in \sigma(f)$ כך ש-$\lambda \neq \mu$, במקרה כזה סעיף 4 מתקיים באופן ריק (כמובן שאם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז יכול להיות של-f אין ערכים עצמיים בכלל).

מסקנה 4.3. אם f הרמיטי אז כל הערכים העצמיים שלו ממשיים, ואם f אנטי-הרמיטי אז כל הערכים העצמיים שלו מדומים.

משפט 4.4. נניח ש-V נ"ס, מתקיימים שני הפסוקים הבאים:

1. אם f הרמיטי או אנטי-הרמיטי אז $\mathrm{Im} f = (\ker f)^{\perp}$.
2. אם f הרמיטי או אנטי-הרמיטי אז לכל תמ"ו $W \subseteq V$ שמור תחת f גם $W^{\perp}$ שמור תחת f.

טענה 4.5. נניח ש-V נ"ס ונביא לטענה זו שני ניסוחים שקולים:

- כל הטלה אורתוגונלית על תמ"ו היא אופרטור הרמיטי.
- אם $f^{2} = f$ ו-$\mathrm{Im} f = (\ker f)^{\perp}$ אז f הרמיטי.

♣ העובדה ש-$f^{2} = f$ אומרת ש-f הוא אופרטור הטלה ואילו העובדה ש-$\mathrm{Im} f = (\ker f)^{\perp}$ אומרת שזוהי ההטלה האורתוגונלית על התמ"ו $\mathrm{Im} f$.

טענה 4.6. אם f נורמלי אז לכל $\lambda \in \sigma(f)$ התמ"ויים V_{λ} ו-$(V_{\lambda})^{\perp}$ שמורים הן תחת f והן תחת f^{*}.

4.2 המשפט הספקטרלי

4.2.1 במרחבים הרמיטיים

נניח ש-V הרמיטי, כלומר V נ"ס ו-$\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

משפט 4.7. המשפט הספקטרלי

- f נורמלי אם"ם f לכסין אוניטרית.
- מטריצה $A \in M_{n}(\mathbb{C})$ היא נורמלית אם"ם היא לכסינה אוניטרית.

מסקנה 4.8. אם f נורמלי אז $f = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{i} \cdot p_{i}$, כאשר p_{i} היא ההטלה האורתוגונלית על $V_{\lambda_{i}}$ לכל $r \geq i \in \mathbb{N}$ ו-$\sigma(f) = \{\lambda_{1}, \lambda_{2}, \ldots, \lambda_{r}\}$.

מסקנה 4.9.

- באופרטורים ומטריצות הרמיטיים:
  - f הרמיטי אם"ם קיים בסיס אורתונורמלי שכל איבריו הם וקטורים עצמיים של f עם ערכים עצמיים ממשיים.
  - מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ היא הרמיטית אם"ם קיימת מטריצה אוניטרית $U \in M_n(\mathbb{C})$ כך ש-$U^{-1}AU$ אלכסונית וממשית.
- באופרטורים ומטריצות אנטי-הרמיטיים:
  - f אנטי-הרמיטי אם"ם קיים בסיס אורתונורמלי שכל איבריו הם וקטורים עצמיים של f עם ערכים עצמיים מדומים.
  - מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ היא אנטי-הרמיטית אם"ם קיימת מטריצה אוניטרית $U \in M_n(\mathbb{C})$ כך ש-$U^{-1}AU$ אלכסונית ומדומה[14].
- באופרטורים ומטריצות אוניטריים:
  - f אוניטרי אם"ם קיים בסיס אורתונורמלי שכל איבריו הם וקטורים עצמיים של f בעלי ערכים עצמיים שערכם המוחלט הוא 1 (כלומר נמצאים על מעגל היחידה במישור המרוכב).
  - מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ היא אוניטרית אם"ם קיימת מטריצה אוניטרית $U \in M_n(\mathbb{C})$ כך ש-$U^{-1}AU$ אלכסונית שאיבריה על האלכסון בעלי ערך מוחלט 1 (כלומר נמצאים על מעגל היחידה במישור המרוכב).

♣ **שימו לב (!):** בלבול נפוץ מאד (לא תאמינו כמה פעמים טעיתי בזה...) הוא לחשוב שהעובדה שהערך המוחלט של ערך עצמי הוא 1 אומרת שמדובר ב-± 1, זה לא נכון וכפי שהזכרנו כל המספרים המרוכבים שעל מעגל היחידה במישור המרוכב מקיימים זאת; כמובן שהסיבה לבלבול היא שאנו רגילים לעבוד בממשיים...

מסקנה 4.10.

1. f נורמלי אם"ם קיים בסיס U אורתונורמלי המטריצה $[f]_U$ אלכסונית.
2. f הרמיטי אם"ם קיים בסיס U אורתונורמלי המטריצה $[f]_U$ אלכסונית וממשית.
3. f אנטי-הרמיטי אם"ם קיים בסיס U אורתונורמלי המטריצה $[f]_U$ אלכסונית ומדומה.
4. f אוניטרי אם"ם קיים בסיס U אורתונורמלי המטריצה $[f]_U$ אלכסונית שאיבריה על האלכסון הם בעלי ערך מוחלט 1 (כלומר נמצאים על מעגל היחידה במישור המרוכב).

---

[14] כלומר בכל הקואורדינטות שלה יש מספרים מדומים.

4.2.2 במרחבים אוקלידיים

נניח ש-V אוקלידי, כלומר V נ"ס ו-$\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

♣ ההוכחה של המשפט הספקטרלי מעל המרוכבים הסתמכה על שלוש נקודות חשובות:

1. לכל תמ"ו $W\subseteq V$ שמור תחת f יש ל-$f\mid_{W}$ ערך עצמי, כלומר קיים $\lambda\in\mathbb{F}$ כך ש-V_{λ} אינו טריוויאלי (ראינו בחלק שעסק באופרטורים שא"א לומר זאת בוודאות מעל $\mathbb{R}$).
2. אם f נורמלי אז מרחבים עצמיים שונים מאונכים זה לזה (סעיף 5 במשפט 4.2).
3. אם f נורמלי אז תתי המרחבים הווקטוריים V_{λ} ו-$\left(V_{\lambda}\right)^{\perp}$ שמורים תחת f ותחת f^{*} (טענה 4.6).

כשאנו רוצים להעתיק את המשפט לאופרטורים נורמליים מעל הממשיים אנחנו נתקלים בבעיה בנקודה הראשונה, ואכן ישנם אופרטורים נורמליים מעל הממשיים שאין להם ערכים עצמיים כלל ולכן אינם לכסינים - הדוגמה הקלאסית היא אופרטור הסיבוב בזווית ישרה נגד כיוון השעון (שהיא מטריצה אורתוגונלית):

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\in M_{2}\left(\mathbb{R}\right)$$

זו הסיבה לכך שהמשפט יהיה נכון אך ורק עבור אופרטורים ומטריצות סימטריים משום שרק אצלם כל הערכים העצמיים ממשיים.

טעות נפוצה בניסיון להוכיח שלמטריצות סימטריות יש ערכים עצמיים היא לומר שכל מטריצה סימטרית מעל הממשיים היא גם מטריצה הרמיטית מעל המרוכבים ואז כפי שראינו יש לה ערך עצמי ממשי ולכן גם כמטריצה מעל הממשיים יש לה את אותו ערך עצמי; **זה פשוט לא נכון!**

בואו ננתח את זה ביסודיות: העובדה שלמטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ יש ערך עצמי $\lambda\in\mathbb{R}$ אומרת שקיים וקטור $\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^{n}$ כך ש-$A\cdot v=\lambda\cdot v$ אבל ייתכן ש-$\boldsymbol{v}\notin\mathbb{R}^{n}$ ולכן לא הצלחנו להוכיח שום דבר לגבי A כמטריצה מעל הממשיים.

למעשה רימיתי מעט כאמרתי שנימוק זה אינו נכון, האמת היא (כפי שהזכרתי בחלק שעסק באופרטורים) שאם למטריצה ממשית יש צורת ז'ורדן ממשית אז יש לה גם בסיס מז'רדן ממשי[15], מסיבה זו ורק מסיבה זו הנימוק הנ"ל דווקא תקף: ניקח את הבסיס המז'רדן של המטריצה הסימטרית שהוא למעשה בסיס מלכסן ונפעיל על כל מרחב עצמי את אלגוריתם גרם-שמידט[16]. הבעיה בנימוק הזה היא שהוא מסתמך על מתמטיקה גבוהה יותר שלא למדנו עדיין ולכן העדפתי הוכחה אחרת.

משפט 4.11.

- f סימטרי אם"ם f לכסין אורתוגונלית.
- מטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ היא סימטרית אם"ם היא לכסינה אורתוגונלית.

[15] את המשפט הזה ראיתי בוויקיפדיה בערך "דמיון מטריצות" וכפי שניתן לראות שם עדיין לא למדנו את המתמטיקה הדרושה להוכחתו.

[16] הנה לכם עוד נימוק לעובדה שמטריצה הרמיטית מעל המרוכבים היא לכסינה אוניטרית מבלי להסתמך על ההוכחה שהבאנו לעיל בשביל אופרטורים נורמליים.

4.3 אלגוריתם ללכסון אורתוגונלי/אוניטרי

אלגוריתם 2 אלגוריתם ללכסון אורתוגונלי/אוניטרי

נתון אופרטור f על ממ"פ V מעל לשדה $\mathbb{F}$, עלינו לקבוע אם f לכסין אורתוגונלית/אוניטרית ואם כן אז גם למצוא את הצורה האלכסונית של f ובסיס אורתונורמלי מלכסן.
כדי לבדוק אם f לכסין אורתוגונלית/אוניטרית ניקח בסיס $\mathcal{B}$ של V ונסמן $A := [f]_{\mathcal{B}}$, כעת:

- אם $A^* = A$ אז f לכסין אורתוגונלית/אוניטרית.
- אחרת:
  - אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז f אינו לכסין אורתוגונלית.
  - אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ וגם $A^*A = I_n$ ו/או $A^*A = AA^*$ אז f לכסין אוניטרית, אחרת f אינו לכסין אוניטרית.

אם f לכסין אורתוגונלית/אוניטרית נפעל ע"פ השלבים הבאים:

1. נחשב את χ_f, כעת אנחנו יודעים מהם הערכים העצמיים של f אך יותר מזה - מספר ההופעות של כל אחד מהם בצורה האלכסונית הוא הריבוי האלגברי שלו ב-χ_f - לכן כבר עכשיו אנחנו יודעים בדיוק איך נראית הצורה האלכסונית של f (עוד לפני שמצאנו בסיס מלכסן), נסמן אותה ב-D.
2. לכל $\lambda \in \sigma(f)$:
   - נמצא בסיס ל-$V_\lambda = \ker(f - \lambda)$ ע"י מציאת בסיס למרחב הפתרונות של הממ"ל:
   $$([f]_{\mathcal{B}} - \lambda \cdot I_n) \cdot x = 0$$
   וחילוץ הווקטורים המתאימים ב-V (כל וקטור בבסיס של מרחב הפתרונות הוא וקטור קואורדינטות של וקטור ב-V ע"פ הבסיס $\mathcal{B}$).
   - נפעיל את אלגוריתם גרם-שמידט למציאת בסיס אורתונורמלי של V_λ.
3. נשרשר את הבסיסים זה לזה לבסיס אחד U, מסעיף 5 במשפט 4.2 נובע ש-U הוא בסיס אורתונורמלי.

5 רשימות לזיכרון

יהי f אופרטור על ממ"פ V מעל לשדה $\mathbb{F}$.

- **אופרטור אוניטרי (מעל הממשיים גם: "אורתוגונלי")**
  - הגדרה: לכל $v,w\in V$ מתקיים $\langle f(v)\mid f(w)\rangle=\langle v\mid w\rangle$.
  - שקילויות
    * f הפיך ו-$f^{*}=f^{-1}$.
    * נניח ש-V הרמיטי, f לכסין אוניטרית וכל הערכים העצמיים שלו נמצאים על מעגל היחידה המרוכב.

♣ בניגוד לאופרטורים נורמליים ואופרטורים הרמיטיים, התחום והטווח של העתקה אוניטרית לא מוכרחים להיות זהים.

♣ אם V אוקלידי ו-f אורתוגונלי ניתן לפרק את V לתתי-מרחבים שמורים תחת f מגודל 1 או 2, ובתוך כל תת-מרחב כזה f פועל כסיבוב או שיקוף[17] ללא שינוי גודל המרחב.

- **אופרטור הרמיטי/צמוד לעצמו (מעל הממשיים גם: "סימטרי")**
  - הגדרה: מתקיים $f^{*}=f$.
  - שקילויות
    * לכל $v,w\in V$ מתקיים: $\langle f(v)\mid w\rangle=\langle v\mid f(w)\rangle$.
    * לכל $v,w\in V$ מתקיים: $\langle v\mid f(w)\rangle=\langle f(v)\mid w\rangle$.
    * נניח ש-V נ"ס, f לכסין אוניטרית וכל הערכים העצמיים שלו ממשיים.

- **אופרטור אנטי-הרמיטי (מעל הממשיים גם: "אנטי-סימטרי")**
  - הגדרה: מתקיים $f^{*}=f$.
  - שקילויות
    * לכל $v,w\in V$ מתקיים: $\langle -f(v)\mid w\rangle=\langle v\mid f(w)\rangle$.
    * לכל $v,w\in V$ מתקיים: $\langle v\mid -f(w)\rangle=\langle f(v)\mid w\rangle$.
    * נניח ש-V הרמיטי, f לכסין אוניטרית וכל הערכים העצמיים שלו מדומים.

- **אופרטור נורמלי**
  - הגדרה: מתקיים $f\circ f^{*}=f^{*}\circ f$.
  - שקילויות
    * לכל $v,w\in V$ מתקיים: $\langle f(v)\mid f(w)\rangle=\langle f^{*}(v)\mid f^{*}(w)\rangle$.
    * נניח ש-V הרמיטי, f לכסין אוניטרית.
  - ערכים עצמיים
    * לכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים $\overline{\lambda}\in\sigma(f^{*})\iff\lambda\in\sigma(f)$.
    * לכל $\lambda,\mu\in\sigma(f)$ מתקיים $V_{\lambda}\perp V_{\mu}$.
    * נניח ש-V הרמיטי, מתקיים $f=\sum_{i=1}^{r}\lambda_{i}\cdot p_{i}$, כאשר p_i היא ההטלה האורתוגונלית על V_{λ_i} לכל $r\geq i\in\mathbb{N}$ ו-$\sigma(f)=\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r\}$.

♣ אופרטורים הרמיטיים, אנטי-הרמיטיים ואוניטריים הם בפרט אופרטורים נורמליים.

♣ נניח ש-V נ"ס, f נורמלי / הרמיטי / אנטי-הרמיטי / אוניטרי אם"ם לכל בסיס אורתונורמלי U של V המטריצה $[f]_{U}$ נורמלית / הרמיטית / אנטי-הרמיטית / אוניטרית.

[17] בתמ"ו ממימד 1 אין הבדל בין סיבוב ב-π רדיאנים לשיקוף דרך הראשית.