מרחבים וקטוריים - טענות בלבד

אלגברה ליניארית (1) - 80134

מרצה: ערן נבו

מתרגלים: איתמר ישראלי ושני שלומי

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

יהי V מ"ו מעל לשדה $\mathbb{F}$.

משפט 1.1. תכונות בסיסיות של מ"ו

1. יחידות האיבר האדיש לחיבור - יהיו $v, w \in V$, אם $v + w = v$ אז $w = 0_V$.
2. יחידות הנגדי - יהיו $v, w, u \in V$, אם $v + w = 0_V$ וגם $v + u = 0_V$ אז $w = u$.
3. כפל בסקלר "אפס" - לכל $v \in V$ מתקיים $0 \cdot v = 0_V$.
4. כפל בווקטור האפס - לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $a \cdot 0_V = 0_V$.
5. כפל בסקלר "-1" - לכל $v \in V$ מתקיים $(-1) \cdot v = -v$.

טענה 1.2. יהיו $v \in V$ ו-$a \in \mathbb{F}$, מתקיים $a \cdot v = 0_V$ אם"ם $v = 0_V$ ו/או $a = 0$.

טענה 1.3. תהא X קבוצת תתי-מרחבים וקטוריים של V, החיתוך של כל תתי-המרחבים ב-X הוא תת-מרחב של V.

♣ נשים לב לכך שיש כאן כמה אפשרויות:

- X יכולה להיות סופית ואז קיימים תתי-מרחבים וקטוריים $W_1, W_2, \ldots, W_r \subseteq V$ כך ש-$X = \{W_1, W_2, \ldots, W_r\}$, ואז החיתוך של כל תתי-המרחבים בה הוא הקבוצה:
$$\bigcap_{i=1}^{r} W_i$$
- X יכולה להיות אין-סופית בת-מנייה, כלומר ניתן לסדר את איבריה בסדרה אינסופית: $X = \{W_1, W_2, \ldots\}$ ואז החיתוך של כל תתי-המרחבים בה הוא הקבוצה:
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$$
- X יכולה להיות אין-סופית שאינה בת-מנייה, כלומר א"א לסדר את איבריה בסדרה אינסופית, ואז החיתוך של כל תתי-המרחבים בה הוא הקבוצה:
$$\bigcap_{W \in X} W$$

בכל מקרה החיתוך של כל תתי-המרחבים ב-X הוא הקבוצה:
$$\left\{ v \;\middle|\; \forall W \in X : v \in W \right\}$$

2 תלות ליניארית ופרישה

יהי V מ"ו מעל לשדה $\mathbb{F}$.

משפט 2.1. תכונות של הפרוש

- לכל תמ"ו $W\subseteq V$ מתקיים $\text{span}W=W$.
- $\text{span}\left(\emptyset\right)=\left\{0_V\right\}$.
- תהיינה $S,T\subseteq V$ תתי-קבוצות כך ש-$S\subseteq T$, מתקיים $\text{span}S\subseteq\text{span}T$.

טענה 2.2. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו ויהיו $v_1,...,v_n\in W$, לכל $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{F}$ מתקיים $a_1\cdot v_1+a_2\cdot v_2+\ldots+a_n\cdot v_n\in W$.

טענה 2.3. תהא $S\subseteq V$ תת-קבוצה, הקבוצה:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i\;\middle|\;n\in\mathbb{N},\ \forall n\geq i\in\mathbb{N}:a_i\in\mathbb{F}\wedge v_i\in S \right\}$$

(שהיא אוסף כל הצר"ל של איברי S) היא תמ"ו של V.

♣ שימו לב שוב לכך ש-S אינה מוכרחת להיות סופית.

♣ אם S היא הקבוצה הריקה אז קבוצת הצר"ל שלה היא מרחב האפס.

♣ כשלמדנו על וקטורים בתיכון ראינו שניתן לאפיין ישר ע"י נקודה שעליו ווקטור יחיד הקובע את כיוונו של הישר, כל נקודה אחרת על הישר ניתנת לביטוי בתור אותה נקודה ועוד סקלר כפול אותו וקטור, כך למשל הקבוצה:

$$\left\{ \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+x\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\;\middle|\;x\in\mathbb{R} \right\}$$

היא ציר ה-x במישור; ראינו גם שניתן לאפיין כל מישור על נקודה שעליו ועוד **צר"ל** של שני וקטורים, כך הקבוצה:

$$\left\{ \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+x\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+y\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\;\middle|\;x,y\in\mathbb{R} \right\}$$

היא המישור הנפרש ע"י צירי ה-x וה-y יחדיו. כדי שישר או מישור כזה יהיו תתי-מרחבים וקטוריים הם מוכרחים להכיל את וקטור האפס ולכן נוח יותר לייצג אותם כקבוצת צר"ל בלבד ללא הוספת וקטור האפס בתחילה, א"כ כל קבוצת צר"ל כנ"ל היא כעין ישר או מישור במרחב שבו היא נמצאת, אין הבדל מהותי בשאלה אם יש בצר"ל שני וקטורים או עשרה.

מסקנה 2.4.

- תהא $S\subseteq V$ תת-קבוצה, מתקיים:

$$\text{span}S=\left\{ \left.\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i\ \right|\ n\in\mathbb{N},\ \forall n\geq i\in\mathbb{N}:a_i\in\mathbb{F}\wedge v_i\in S \right\}$$

- תהא $(v_i)_{i=1}^{n}$ סדרת וקטורים סופית ב-V מתקיים:

$$\text{span}\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)=\left\{ \left.\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i\ \right|\ \forall n\geq i\in\mathbb{N}:a_i\in\mathbb{F} \right\}$$

♣ מכאן שאם קבוצה/סדרה פורשת את המרחב כולו אז ניתן להציג כל וקטור במרחב כצר"ל שלה.

♣ מסקנה זו היא הסיבה לשם "פרוש" - הפרוש של קבוצה/סדרה הוא התמ"ו **הנפרש**[1] ע"י איבריה ממש כפי שמישור **נפרש** ע"י שני וקטורים במרחב.

מסקנה 2.5. תת-קבוצה $S\subseteq V$ היא תלויה ליניארית אם"ם קיים $v\in S$ כך ש-$v\in\text{span}\left(S\setminus\{v\}\right)$.

טענה 2.6. תהא $S\subseteq V$ תת-קבוצה.

- אם $0_V\in S$ אז S תלויה ליניארית (אפילו אם $S=\{0_V\}$[2]).
- אם S היא יחידון והיא תלויה ליניארית אז $S=\{0_V\}$.
- תהא $T\subseteq V$ כך ש-$S\subseteq T$,
  - אם S תלויה ליניארית אז גם T תלויה ליניארית.
  - אם T בת"ל אז גם S בת"ל.

מסקנה 2.7.

- כל סדרה המכילה את וקטור האפס היא סדרה תלויה ליניארית.
- אם סדרה תלויה ליניארית היא באורך 1 אז היא הסדרה (0_V).
- אם סדרה אחת מכילה את כל האיברים של סדרה אחרת וזו הראשונה תלויה ליניארית אז גם השנייה התלויה ליניארית.

טענה 2.8. יהיו $v,w\in V$ אם הקבוצה $\{v,w\}$ ו/או הסדרה (v,w) תלויות ליניארית וגם $v\neq 0_V$ אז קיים $c\in\mathbb{F}$ כך ש-$c\cdot v=w$.

טענה 2.9. קבוצת וקטורים ב-V היא תלויה ליניארית אם"ם יש לה צר"ל מתאפס לא טריוויאלי של וקטורים שונים זה מזה.

מסקנה 2.10. סדרת וקטורים סופית ב-V היא תלויה ליניארית אם"ם יש לה צר"ל מתאפס לא טריוויאלי.

♣ מכאן שכדי להוכיח שקבוצה/סדרה אינה תלויה ליניארית נוכל להוכיח שהצר"ל המתאפס היחיד שלה הוא הטריוויאלי.

טענה 2.11. תהא $S\subseteq V$ תת-קבוצה בת"ל, אם קיים $v\in V$ כך ש-$v\notin\text{span}S$ אז עבור אותו v מתקיים גם ש-$S\cup\{v\}$ בת"ל.

טענה 2.12. תהא $S\subseteq V$, אם קיים $v\in S$ כך ש-$v\in\text{span}\left(S\setminus\{v\}\right)$ אז עבור אותו v מתקיים גם $\text{span}\left(S\setminus\{v\}\right)=\text{span}S$.

---

[1] בעברית התנ"כית יש הבדל בכתיבה בין "לפרוש מפה", "לפרוש כנפיים" לבין "לפרוס לחם"; לדוגמה "וּפָרְשׂוּ עָלָיו בֶּגֶד אַרְגָּמָן" (במדבר, ד', י"ג) ו-"יִפְרֹשׂ כְּנָפָיו יִקָּחֵהוּ" (דברים, ל"ב, י"ג), ומצד שני "הֲלוֹא פָרֹס לָרָעֵב לַחְמֶךָ" (ישעיהו, נ"ח, ז') ו-"וְלֹא יִפְרְסוּ לָהֶם... וְלֹא יַשְׁקוּ אוֹתָם כּוֹס תַּנְחוּמִים" (ירמיהו, ט"ז, י"ז).

[2] נזכיר: מקובל להגדיר סכום ריק כאפס של החיבור המדובר (במקרה שלנו זהו וקטור האפס) ולכן ניתן לבטא את וקטור האפס באמצעות צר"ל של הקבוצה הריקה.

3 בסיסים וממדים

יהי V מ"ו נ"ס מעל לשדה $\mathbb{F}$.

♣ בפרק זה נעסוק בעיקר בקבוצות אך כל הטענות תהיינה תקפות גם עבור סדרות וקטורים ב-V.

משפט 3.1. למת ההחלפה של שטייניץ (Steinitz)[3]

תהיינה $S,T\subseteq V$ תתי-קבוצות סופיות כך ש-S פורשת את V ו-T בת"ל, מתקיימים שני הפסוקים הבאים[4]:

1. $|S|\geq|T|$.
2. קיימת תת-קבוצה $S'\subseteq S$ כך ש-$|S'|=|S|-|T|$ ו-$V=\text{span}\left(T\cup S'\right)$.

מסקנה 3.2. כל תת-קבוצה אין-סופית של V היא קבוצה תלויה ליניארית.

משפט 3.3. תהא $S\subseteq V$ תת-קבוצה סופית.

- אם S פורשת את V אז קיימת תת-קבוצה $\mathcal{B}\subseteq S$ המהווה בסיס של V.
- אם S בת"ל אז קיימת תת-קבוצה $\mathcal{B}\subseteq V$ המהווה בסיס של V כך ש-$S\subseteq\mathcal{B}$.

♣ ההוכחה של משפט זה נותנת לנו גם את הכלים למצוא בסיסים כאלה (ראו בקובץ ההוכחות), כלומר אנחנו יכולים לדלל כל קבוצה פורשת לבסיס ולהרחיב כל קבוצה בת"ל לבסיס.

♣ בפרט לכל מרחב וקטורי נוצר סופית יש בסיס וע"פ מסקנה 3.2 כל בסיס של כזה הוא סופי.

משפט 3.4. תהא $\mathcal{B}:=\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)$ סדרת וקטורים ב-V, $\mathcal{B}$ הוא בסיס של V אם"ם לכל $v\in V$ קיימים סקלרים $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ יחידים כך שמתקיים:

$$v=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i$$

כלומר ניתן להציג כל וקטור במרחב כצר"ל של בסיס סדור במרחב באופן יחיד.

♣ מכאן שגם קבוצת וקטורים היא בסיס אם"ם כל וקטור במרחב ניתן להצגה כצר"ל שלה באופן יחיד.

משפט 3.5. יהי $\mathcal{B}$ בסיס של V ותהא $S\subseteq V$ תת-קבוצה סופית.

- אם $|S|>|\mathcal{B}|$ אז S תלויה ליניארית.
- אם $|S|<|\mathcal{B}|$ אז S אינה פורשת את V.

♣ כלומר בסיס הוא קבוצה בלתי תלויה מקסימלית - אם מוסיפים לה עוד וקטור אחד היא הופכת לתלויה ליניארית, וכמו כן בסיס הוא קבוצה פורשת מינימלית - אם מסירים ממנה ולו וקטור אחד היא כבר לא פורשת את V.

מסקנה 3.6. יהיו $\mathcal{B},\mathcal{C}\subseteq V$ בסיסים של V, מתקיים $|\mathcal{B}|=|\mathcal{C}|$.

♣ כלומר כל הבסיסים של V הם באותו הגודל ולכן ניתן לדבר על גודל זה כתכונה של V, לתת לו שם - <u>הממד</u> של V - ולסמן אותו ב-$\dim V$.

---

[3] ערך בוויקיפדיה האנגלית: Ernst Steinitz.

[4] למעשה הפסוק הראשון נובע משני שכן $|S'|\geq0$, למרות זאת הבאנו אותו בנפרד כדי להדגיש שכל קבוצה פורשת גדולה מכל קבוצה בת"ל.

מסקנה 3.7. תהא $S \subseteq V$ תת-קבוצה סופית, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

- אם $|S| > \dim V$ אז S תלויה ליניארית.
- אם $|S| < \dim V$ אז S אינה פורשת את V.

משפט 3.8. תהא $S \subseteq V$ תת-קבוצה סופית, כל שניים משלושת הפסוקים הבאים גוררים את השלישי:

1. S פורשת את V
2. S בת"ל
3. $|S| = \dim V$

♣ בפרט אם $|S| = \dim V$ ובנוסף ידוע ש-S בת"ל **או** פורשת אז S בסיס (כלומר בת"ל **וגם** פורשת).

טענה 3.9. יהי $W \subseteq V$ תמ"ו, גם W הוא מרחב וקטורי נוצר סופית.

מסקנה 3.10. יהי $W \subseteq V$ תמ"ו, מתקיים $\dim W \leq \dim V$ ובמקרה של שוויון ($\dim W = \dim V$) מתקיים $W = V$.

4 חיבור קבוצות במרחב וקטורי

יהי V מ"ו מעל לשדה $\mathbb{F}$.

4.1 סכומים של תתי-מרחבים וקטוריים

טענה 4.1. לכל $S,T\subseteq V$ מתקיים $\text{span}S+\text{span}T=\text{span}\left(S\cup T\right)$.

מסקנה 4.2. יהיו $W,U\subseteq V$ תתי-מרחבים וקטוריים, מתקיים $W+U=\text{span}\left(W\cup U\right)$.

♣ בפרט נובע מכאן שסכום של תתי-מרחבים וקטוריים הוא תמ"ו בעצמו.

משפט 4.3. משפט הממדים

נניח ש-V נ"ס ויהיו $W,U\subseteq V$ תתי-מרחבים וקטוריים, מתקיים:

$$\dim\left(W+U\right)=\dim W+\dim U-\dim\left(W\cap U\right)$$

♣ המשפט הזה מזכיר את עיקרון ההכלה וההדחה, זה לא מקרי, אנחנו נשתמש בו בהוכחה.

משפט 4.4. אפיונים שקולים לסכום ישר

נניח ש-V נ"ס ויהיו $V_1,V_2,\ldots,V_n\subseteq V$ תמ"וים כך ש-$V=V_1+V_2+\ldots+V_n$.
כל אחד מהתנאים הבאים שקול לכך ש-$V=V_1\oplus V_2\oplus\ldots\oplus V_n$:

1. איחוד בסיסים של כל תתי-המרחבים הוא בת"ל.
2. לכל $v\in V$ קיימת הצגה יחידה מהצורה $\sum_{i=1}^{n}v_i$ כך ש-$v_i\in V_i$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$.
3. שרשור[5] בסיסים סדורים של כל תתי-המרחבים בסדרה הוא בת"ל.
4. מתקיים $\dim V=\sum_{i=1}^{n}\dim V_i$.

4.2 ישריות

טענה 4.5. תהא $S\subseteq V$ ישריה ויהיו $W,U\subseteq V$ תתי-מרחבים ו-$v_1,v_2\in V$ כך ש-$S=\{v_1\}+W$ וגם $S=\{v_2\}+U$, מתקיים $W=U$.

טענה 4.6. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו ויהיו $v_1,v_2\in V$, מתקיים $\{v_1\}+W=\{v_2\}+W$ אם"ם $v_1-v_2\in W$.

טענה 4.7. תהא $S\subseteq V$ ישריה ויהיו $W\subseteq V$ ו-$v\in V$ כך ש-$S=\{v\}+W$, לכל $u\in S$ מתקיים $S=\{u\}+W$.

מסקנה 4.8. ישריה $S\subseteq V$ היא תמ"ו אם"ם $0_V\in S$.

מסקנה 4.9. תהיינה $S_1,S_2\subseteq V$ ישריות בעלות מרחב כיוונים זהה, אם $S_1\neq S_2$ אז $S_1\cap S_2=\emptyset$.

♣ מבחינה אינטואיטיבית זה ברור שישריות בעלות מרחב כיוונים זהה תהיינה שוות או זרות - אלו ישרים/מישורים מקבילים

טענה 4.10. תהיינה $S_1,S_2\subseteq V$ ישריות ויהיו W ו-U מרחבי הכיוונים שלהן (בהתאמה), אם $S_1\cap S_2\neq\emptyset$ אז גם $S_1\cap S_2$ היא ישריה ומרחב הכיוונים שלה הוא $W\cap U$.

[5] שרשור של סדרות $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$, $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ ו-$(c_1,c_2,\ldots,c_m)$ הוא סדרה כגון $(a_1,a_2,\ldots,a_k,b_1,b_2,\ldots,b_n,c_1,c_2,\ldots,c_m)$.