המספרים הממשיים - הוכחות נבחרות

חשבון אינפיניטסימלי (1) - 80131

מרצה: רז קופרמן

מתרגלים: אור יער ודניאל רוזנבלט

סוכם ע״י: שריה אנסבכר

סמסטר ב׳ תשפ״ב, האונ׳ העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 שדה סדור

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

טענה 1.1. קבוצת המספרים החיוביים סגורה לחיבור ולכפל, כלומר לכל $0 < a, b \in \mathbb{F}$ מתקיים $0 < a + b$ וגם $0 < a \cdot b$.

הוכחה.

$$0 < b \Rightarrow a = a + 0 < a + b$$
$$0 < a \Rightarrow 0 < a + b$$

מהלימת היחס "קטן מ-" לכפל בחיובי נובע ש-$a \cdot 0 < a \cdot b$ (שהרי $0 < a$ ולכן ניתן להחיל עליו את ההלימה ביחס ל-$0 < b$) ומכיוון ש-$a \cdot 0 = 0$ מתקיים $0 < a \cdot b$ כנדרש. ■

טענה 1.2. יהי $a \in \mathbb{F}$, מתקיים $0 < a$ אם"ם $-a < 0$, כלומר מספר הוא חיובי אם"ם הנגדי שלו שלילי.

הוכחה.

$$0 < a \Rightarrow -a = 0 + (-a) < a + (-a) = 0$$
$$-a < 0 \Rightarrow 0 = a + (-a) < 0 + a = a$$

■

מסקנה 1.3. קבוצת המספרים החיוביים אינה ריקה.

טענה 1.4. האיבר האדיש לכפל הוא מספר חיובי, כלומר $0 < 1$.

הוכחה. מהמסקנה הקודמת נובע שקיים $a \in \mathbb{F}$ חיובי, יהי a כנ"ל ונניח בשלילה ש-$1 < 0$[1], א"כ מהלימת השוויון לכפל בחיובי נובע ש-$a = a \cdot 1 < a \cdot 0 = 0$ בסתירה להגדרת a; מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$0 < 1$. ■

טענה 1.5. יהיו $a, b \in \mathbb{F}$ כך ש-$a < b$, מתקיים $-b < -a$.

הוכחה.

$$\begin{aligned} a < b &\Rightarrow 0 = a + (-a) < a + b \\ &\Rightarrow 0 + (-b) < (a + b) + (-b) \\ &\Rightarrow -b < a + (b + (-b)) \\ &\Rightarrow -b < a + 0 = a \end{aligned}$$

■

[1] לא ייתכן ש-$0 = 1$ ולכן מטריכוטומיה זו האפשרות היחידה שאינה $0 < 1$.

טענה 1.6. יהיו $a,b,c\in\mathbb{F}$ כך ש-$a<b$ ו-$c<0$, מתקיים $b\cdot c<a\cdot c$

הוכחה. נשים לב לכך ש-$-c>0$ (טענה 1.2), שמהלימה של א"ש חזק לכפל בחיובי נובע שמתקיים $-(a\cdot c)=a\cdot(-c)<b\cdot(-c)=-(b\cdot c)$ ולכן מטענה 1.5 נקבל את המבוקש. ■

טענה 1.7. יהי $0\neq a\in\mathbb{F}$, מתקיים $0<a$ אם"ם $0<a^{-1}$.

הוכחה.

- $\Leftarrow$

  נניח ש-$0<a$ ונניח בשלילה ש-$a^{-1}\leq 0$.

  לא ייתכן ש-$a^{-1}=0$ משום שאז נקבל $1=a\cdot a^{-1}=a\cdot 0=0$, מכאן ש-$a^{-1}<0$.

  מהלימת היחס "קטן מ-" לכפל בחיובי נובע ש-$1=a\cdot a^{-1}<a\cdot 0=0$ ($0<a$) ולכן ניתן להחיל עליו את ההלימה ביחס ל-$0<a^{-1}$) בסתירה לכך שהוכחנו כי $0<1$ (טריכוטומיה).

- $\Rightarrow$

  נניח ש-$0<a^{-1}$, מהחלק הקודם של ההוכחה נובע ש-$a=\left(a^{-1}\right)^{-1}>0$.

■

טענה 1.8. יהיו $a,b\in\mathbb{F}$ $0>a,b$, מתקיים $0<a\cdot b$.

הוכחה. מטענה 1.5 נובע ש-$-a,-b>0$, לכן מטענה 1.1 נובע ש-$a\cdot b=(-a)(-b)>0$. ■

מסקנה 1.9. יהי $0\neq a\in\mathbb{F}$, מתקיים $a\cdot a>0$.

טענה 1.10. יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{F}$, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. אם $a<b$ ו-$c<d$ אז $a+c<b+d$
2. טרנזיטיביות א"ש חלש: אם $a\leq b$ ו-$b\leq c$ אז $a\leq c$
3. הלימת א"ש חלש לחיבור: אם $a\leq b$ אז $a+c\leq b+c$
4. אם $a\leq b$ ו-$c\leq d$ אז $a+c\leq b+d$
5. $a\cdot b>0$ אם"ם $a,b<0$ או ש-$a,b>0$
6. אם $0<a<b$ אז $0<b^{-1}<a^{-1}$
7. אם $0<a<b$ ו-$0<c<d$ אז $0<a\cdot c<b\cdot d$
8. לא קיים שדה סדור בעל איבר מקסימלי ו/או מינימלי, כלומר לא קיים $M\in\mathbb{F}$ כך שלכל $x\in\mathbb{F}$ מתקיים $x\leq M$ ולא קיים $m\in\mathbb{F}$ כך שלכל $x\in\mathbb{F}$ מתקיים $m\leq x$.

הוכחה.

1.

$$
\begin{aligned}
a < b &\Rightarrow a + c < b + c \\
c < d &\Rightarrow b + c < b + d \\
&\Rightarrow a + c < b + d
\end{aligned}
$$

2. נובע מטרנזיטיביות של א"ש חזק ושל שוויון.
3. נובע מהלימה לחיבור של א"ש חזק ושל שוויון.
4. ההוכחה זהה לזו של סעיף 1 ומשתמשת בסעיף 3.
5. את הגרירה משמאל לימין כבר ראינו, הגרירה ההפוכה נובעת מהעובדה שלו היו הסימנים של a ו-b שונים אז מהגרירה הראשונה נובע שמתקיים $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b > 0$ ואז מטענה 1.2 נקבל ש-$a \cdot b < 0$ בסתירה לנתון.
6. נניח ש-$0 < a < b$, א"כ $0 < a$ וגם $0 < b$ ולכן $0 < a^{-1}$ וגם $0 < b^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow 0 = \left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) \cdot 0 < \left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) \cdot a < \left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) \cdot b \\
&\Rightarrow 0 < \left(b^{-1} \cdot a^{-1}\right) \cdot a < \left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) \cdot b \\
&\Rightarrow 0 < b^{-1} \cdot \left(a^{-1} \cdot a\right) < a^{-1} \cdot \left(b^{-1} \cdot b\right) \\
&\Rightarrow 0 < b^{-1} \cdot 1 < a^{-1} \cdot 1 \\
&\Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}
\end{aligned}
$$

7. ההוכחה זהה לזו של סעיף 1 ומשתמשת בהלימת הא"ש החזק לכפל החיובי.
8. נשים לב שלכל $m, M \in \mathbb{F}$ מתקיים $M < M + 1$ ו-$m - 1 < m$.

■

2 הערך המוחלט

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

למה 2.1. לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $|a| = |-a|$.

למה 2.2. לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $|a| \geq 0$, יתרה מזאת, $|a| = 0$ אם"ם $a = 0$.

למה 2.3. לכל $p \in \mathbb{F}$ ו-$0 \le q \in \mathbb{F}$ מתקיים $|p| \le q$ אס"ם $-q \le p \le q$.

הוכחה.

- $\Leftarrow$

  נניח ש-$|p| \le q$.

  אם $0 \le p$ אז $p = |p| \le q$, ואם $p < 0$ אז $0 < -p$ וממילא $p < 0 < -p = |p| \le q$; א"כ קיבלנו $p \le q$ בכל מקרה.

  אם $0 \le p$ אז $p = |p| \le q$ וממילא $-q \le -p \le 0 \le p$, ואם $p < 0$ אז $-p = |p| \le q$ וממילא $-q \le p$; א"כ קיבלנו $-q \le p$ בכל מקרה וביחד $-q \le p \le q$.

- $\Rightarrow$

  נניח ש-$-q \le p \le q$.

  אם $0 \le p$ אז $|p| = p \le q$, נשים לב ש-$-p \le q$ (בגלל ש-$-q \le p$) ולכן אם $p < 0$ אז $|p| = -p \le q$; א"כ קיבלנו $|p| \le q$ בכל מקרה.

■

מסקנה 2.4. לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $-|a| \le a \le |a|$.

משפט 2.5. אי-שוויון המשולש

לכל $a, b \in \mathbb{F}$ מתקיים $|a + b| \le |a| + |b|$.

ובגרסה אחרת (נציב $-b$ במקום b): $|a - b| \le |a| + |b|$.

♣ מה הקשר למשולש?
נשאל שאלה אחרת, גאומטרית: בהינתן שלושה קטעים כיצד נדע אם ניתן לבנות מהם משולש? (לדוגמה: מהקטעים באורך $5, 1, 1$ אי אפשר לבנות משולש).
התשובה היא שניתן לבנות מהקטעים משולש אס"ם סכום אורכיהם של כל שניים מהקטעים גדול מאורך השלישי...

♣ א"ש המשולש הוא אחת משלוש התכונות שנדרשות מכל פונקציית מרחק[2].

הוכחה. מהמסקנה הקודמת נובע ש-$-|a| \le a \le |a|$ ו-$-|b| \le b \le |b|$,

$$\Rightarrow -|a| - |b| \le a + b \le |a| + |b|$$
$$\Rightarrow -(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b|$$

ולכן מהלמה האחרונה נובע ש-$|a + b| \le |a| + |b|$. ■

משפט 2.6. אי-שוויון המשולש ההפוך[3]

לכל $a, b \in \mathbb{F}$ מתקיים $||a| - |b|| \le |a + b|$.

הוכחה. נגדיר $c := b + a$ וע"פ הגרסה השנייה של א"ש המשולש נקבל:

$$|a| = |b - (b + a)| = |a - c| \le |a| + |c| = |a| + |b + a|$$

$$\Rightarrow |a| - |b| \le |b + a| = |a + b|$$

מכאן שגם $|b| - |a| \le |a + b|$, כלומר $-|a + b| \le |a| - |b|$ ולכן מהלמה האחרונה נובע ש-$||a| - |b|| \le |a + b|$. ■

[2] שתי האחרות הן סימטריה וחיוביות בהחלט.

[3] זהו שם אומלל מעט משום שאין זה המשפט ההפוך למשפט א"ש המשולש במובן המתמטי השכיח: המשפט ההפוך למשפט פיתגורס אומר שכל משולש המקיים את המשוואה $a^2 + b^2 = c^2$ (כאשר a, b, c הם אורכי הצלעות שלו) הוא משולש ישר זווית, כלומר המשפט ההפוך הוא זה האומר שהגרירה ההפוכה נכונה (לא תמיד זה קורה).

טענה 2.7. לכל $a,b,c,x,y\in\mathbb{F}$ מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $a+b\geq a-|b|$
2. $|a+b+c|\leq|a|+|b|+|c|$
3. $||a|-|b||\leq|a-b|$
4. $\max\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$
5. $\min\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$

3 קבוצות מיוחדות בשדה סדור

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

3.1 המספרים הטבעיים

טענה 3.1. $\mathbb{F}$ מכיל קבוצות אינדוקטיביות (לדוגמה $\{x\in\mathbb{R}:1\leq x\}$).

טענה 3.2. יהא A אוסף של קבוצות אינדוקטיביות המוכלות ב-$\mathbb{F}$, החיתוך של כל איברי A (שהם קבוצות אינדוקטיביות) הוא קבוצה אינדוקטיבית.

מסקנה 3.3. $\mathbb{N}$ היא קבוצה אינדוקטיבית.

טענה 3.4. לכל קבוצה אינדוקטיבית $I\subseteq\mathbb{F}$ מתקיים $\mathbb{N}\subseteq I$.

מסקנה 3.5. תהא I קבוצה אינדוקטיבית, אם $I\subseteq\mathbb{N}$ אז $I=\mathbb{N}$.

משפט 3.6. הוכחה באינדוקציה
לכל $n\in\mathbb{N}$ יהי $P(n)$ פסוק לוגי, אם $P(1)=\text{True}$ וגם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $P(n)\to P(n+1)$ אז $P(n)=\text{True}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

♣ זהו הסוג הקלאסי של הוכחה באינדוקציה אך ישנם סוגים נוספים, ראו בערך "אינדוקציה מתמטית" בוויקיפדיה.

הוכחה. נגדיר $I:=\{n\in\mathbb{N}\mid P(n)=\text{True}\}$ (מהגדרה $I\subseteq\mathbb{N}$), נתון ש-$P(1)=\text{True}$ ולכן $1\in I$; יהי $n\in I$, נתון שאם $P(n)=\text{True}$ אז גם $P(n+1)=\text{True}$, כלומר אם $n\in I$ אז גם $n+1\in I$. מכאן ש-I היא קבוצה אינדוקטיבית ומכיוון ש-$I\subseteq\mathbb{N}$ נדע ש-$I=\mathbb{N}$, כלומר לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $P(n)=\text{True}$. ■

טענה 3.7. המספר 1 הוא האיבר הקטן ביותר ב-$\mathbb{N}$, במילים אחרות: לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $1\leq n$ (וגם כמובן ש-$1\in\mathbb{N}$).

הוכחה. $[1,\infty)$ היא קבוצה אינדוקטיבית ולכן $\mathbb{N}\subseteq[1,\infty)$, מכאן שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $n\in[1,\infty)$ ומהגדרה $1\leq n$. ■

♣ את ארבע הטענות הבאות קל להוכיח באינדוקציה.

טענה 3.8. קבוצת המספרים הטבעיים סגורה לחיבור, במילים אחרות: לכל $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $n+m\in\mathbb{N}$.

טענה 3.9. קבוצת המספרים הטבעיים סגורה לכפל, לכל $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $n\cdot m\in\mathbb{N}$.

טענה 3.10. לכל $1\neq n\in\mathbb{N}$ מתקיים $n-1\in\mathbb{N}$, לכל מספר טבעי שאינו 1 יש מספר טבעי קודם.

♣ רז הוכיח ע"י הגדרת הקבוצה $\mathbb{N}\setminus\{n\}$ עבור $n\in\mathbb{N}$ מסוים, הנחה בשלילה ש-$n-1\notin\mathbb{N}\setminus\{n\}$ והוכחה שקבוצה זו היא אינדוקטיבית.

טענה 3.11. לכל $n,m\in\mathbb{N}$ המקיימים $n>m$ מתקיים $n-m\in\mathbb{N}$.

טענה 3.12. יהי $m\in\mathbb{N}$, לא קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $m<n<m+1$.

הוכחה. נניח בשלילה שקיים n כנ"ל ומכאן ש-$0<n-m<1$, מטענה 3.11 נובע ש-$n-m\in\mathbb{N}$ בסתירה לכך שאם $n-m\in\mathbb{N}$ אז $1\leq n-m$ (טענה 3.7); מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ולא קיים n כזה. ■

משפט 3.13. עיקרון הסדר הטוב[4]

לכל תת-קבוצה של $\mathbb{N}$ שאינה ריקה יש איבר מינימלי[5], כלומר לכל $\emptyset\neq A\subseteq\mathbb{N}$ קיים $m\in A$ כך ש-$m\leq a$ לכל $a\in A$.

הוכחה. נניח בשלילה שאין ל-A איבר מינימלי ונגדיר $I:=\{n\in\mathbb{N}\mid\forall a\in A:n<a\}$.
מטענה 3.7 נובע ש-$1\leq a$ לכל $a\in\mathbb{N}$ ובפרט לכל $a\in A$ ולכן מהנחת השלילה נובע ש-$1\notin A$ וממילא $1<a$ לכל $a\in A$ ומהגדרה $1\in I$.
יהי $m\in I$, מהנחת השלילה נובע ש-$m+1\notin A$ משום שאחרת מטענה 3.12 ינבע שלא קיים $a\in\mathbb{N}$ כך ש-$m<a<m+1$ ובפרט לא קיים $a\in A$ כזה והרי מהעובדה ש-$m\in I$ נובע שלא קיים $a\in A$ כך ש-$a\leq m$ ומכאן ש-$m+1$ הוא איבר מינימלי של A.
m הנ"ל היה שרירותי ולכן לכל $m\in I$ מתקיים $m+1\notin A$ וממילא $m+1\in I$ ומכאן ש-I אינדוקטיבית ו-$I=\mathbb{N}$, מהגדרה $I\cap A=\emptyset$ ומכיוון ש-$I=\mathbb{N}\supseteq A$ נקבל ש-$A=\emptyset$ בסתירה לנתון. מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ויש ל-A איבר מינימלי. ■

---

[4] סדר טוב על קבוצה הוא יחס סדר מלא המקיים שלכל תת-קבוצה לא ריקה יש מינימום (ויקיפדיה).
[5] לאחר שנגדיר מינימום נוכל לומר שהוא המינימום של הקבוצה.

3.2 המספרים השלמים והמספרים הרציונליים

טענה 3.14. קבוצת המספרים השלמים ($\mathbb{Z}$) סגורה לחיבור, לחיסור ולכפל[6].

♣ שימו לב: $\mathbb{Z}$ אינה סגורה לחילוק, וזאת למרות שהחילוק הוגדר ע"י הכפל.

טענה 3.15. המספר 2^{-1} אינו שלם.

הוכחה. הוא קטן מ-1 וגדול מ-0. ■

טענה 3.16. לכל $n \in \mathbb{Z}$ מתקיים:

$$n \in \text{Odd} \longleftrightarrow n \pm 1 \in \text{Even} \qquad n \in \text{Even} \longleftrightarrow n \pm 1 \in \text{Odd}$$
$$n \in \text{Odd} \longleftrightarrow n \pm 2 \in \text{Odd} \qquad n \in \text{Even} \longleftrightarrow n \pm 2 \in \text{Even}$$

מסקנה 3.17. מתקיים $\text{Odd} = \{n \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z} : 2k - 1 = n\} = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

טענה 3.18. $\mathbb{Q}$ הוא תת-שדה[7] של $\mathbb{F}$, כלומר הוא שדה ביחס לאותן פעולות חיבור וכפל של $\mathbb{F}$[8] והוא תת-קבוצה של $\mathbb{F}$.

הוכחה. יש להוכיח ש-$0, 1 \in \mathbb{Q}$ (נובע מהגדרת $\mathbb{Q}$) וש-$\mathbb{Q}$ סגור לחיבור ולכפל[9], 9 האקסיומות תנבענה ישירות מהעובדה ש-$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F}$. ■

4 חסמים וארכימדיות

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

טענה 4.1. קבוצה $A \subseteq \mathbb{F}$ היא חסומה אם"ם קיים $M \in \mathbb{F}$ כך ש-$|a| < M$ לכל $a \in A$.

טענה 4.2. קבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלעיל ע"י מספר טבעי, לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש-$n < m$.

מסקנה 4.3. קבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלעיל ע"י מספר רציונלי.

♣ מכאן ש-$\mathbb{Q}$ הוא שדה ארכימדי.

נניח ש-$\mathbb{F}$ ארכימדי.

משפט 4.4. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{F}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\frac{1}{n} < \varepsilon$.

מסקנה 4.5. לכל $0 < x, y \in \mathbb{F}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$n \cdot x > y$.

---

[6] ומכיוון ש-$0, 1 \in \mathbb{Z}$ נובע מזה ש-$\mathbb{Z}$ הוא חוג חילופי - כלומר הוא מקיים את כל אקסיומות השדה מלבד קיום הופכי לכל איבר שונה מ-0 (בחוג סתם הכפל אינו מוכרח לקיים את חוק החילוף, לכן אמרנו ש-$\mathbb{Z}$ הוא חוג **חילופי**)

[7] $\mathbb{Q}$ הוא גם שדה סדור.

[8] כולל האיברים האדישים.

[9] כלומר לכל $q, r \in \mathbb{Q}$ מתקיים $q + r \in \mathbb{Q}$ ו-$q \cdot r \in \mathbb{Q}$.

5 השדה הסדור השלם (המספרים הממשיים)

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

למה 5.1. נסמן $4 := 2+2$, מתקיים:

- לכל $m,n\in \text{Even}$ קיים $k\in\mathbb{Z}$ כך ש-$m\cdot n=4k$.
- אם $m,n\in \text{Odd}$ אז $m\cdot n\in \text{Odd}$.

טענה 5.2. לא קיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש-$q^2=2$[10].

♣ זהו המובן שבו שדה הרציונליים "מלא חורים", אם ניקח את ההמחשה שהבאנו בקובץ ההגדרות, ניתן לחלק את הקרש שאנו רוצים להפוך ליתר של המשולש לשני חלקים: החלק שאנו רוצים להפוך ליתר והאחר שאנו רוצים להיפטר ממנו, אם נשאר עם מספרים רציונליים בלבד לא נוכל להצביע על הנקודה שבין שני החלקים כדי שנוכל להעביר בה את המסור.

הוכחה. נניח בשלילה שקיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש-$q^2=2$, נשים לב לכך ש-$q^2=2$ אם"ם $(-q)^2=2$ ולכן ניתן להניח בהג"כ ש-q חיובי. יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ כך ש-$q=\frac{m}{n}$ ו-$\frac{m}{n}$ היא ההצגה המצומצמת של q.

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \frac{m^2}{n^2}=\left(\frac{m}{n}\right)^2=q^2=2\\&\Rightarrow m^2=2n^2\\&\Rightarrow m^2\in \text{Even}\\&\Rightarrow m\in\text{Even}\end{aligned}$$

מכאן שקיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש-$m^2=4k$.

$$\begin{aligned}&\Rightarrow 4k=2n^2\\&\Rightarrow 2k=n^2\\&\Rightarrow n^2\in\text{Even}\\&\Rightarrow n\in\text{Even}\end{aligned}$$

מכאן ש-2 מחלק הן את n והן את m בסתירה לכך ש-$\frac{m}{n}$ היא ההצגה המצומצמת של q, א"כ הנחת השלילה אינה נכונה ולא קיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש-$q^2=2$. ■

♣ ניתן להכליל את ההוכחה לכל שורש של מספר טבעי שאינו ריבוע ולהראות שכל שורש של טבעי שאינו טבעי הוא אי-רציונלי (כדוגמת $\sqrt{3}$).

טענה 5.3. כל קטע (מכל סוג) מכיל קטע מכל סוג.

טענה 5.4. כל קרן (מכל סוג) מכילה קטע מכל סוג.

טענה 5.5. יהי $a\in\mathbb{R}$, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. החיתוך של כל שתי סביבות של a הוא סביבה של a.
2. החיתוך של שתי סביבות מנוקבות של a הוא סביבה מנוקבת של a.
3. כל סביבה של a מכילה סביבה **סימטרית** של a, כלומר לכל סביבה U של a קיים $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_r(a)\subseteq U$.
4. כל סביבה מנוקבת של a מכילה סביבה **סימטרית** מנוקבת של a, כלומר לכל סביבה מנוקבת U של a קיים $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_r^{\circ}(a)\subseteq U$.

[10] לכל $x\in\mathbb{R}$ נסמן $x^2:=x\cdot x$.

6 חסם עליון וחסם תחתון

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

משפט 6.1. יחידות החסם העליון ויחידות החסם התחתון

- תהא $A \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה שיש לה חסם עליון ויהי $M \in \mathbb{F}$ חסם עליון של A, אם $M' \in \mathbb{F}$ הוא חסם עליון של A אז $M = M'$.
- תהא $B \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה שיש לה חסם תחתון ויהי $m \in \mathbb{F}$ חסם תחתון של B, אם $m' \in \mathbb{F}$ הוא חסם תחתון של B אז $m = m'$.

משפט 6.2. אפיון נוסף לחסם עליון ולחסם תחתון

- תהא $A \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה, מספר $M \in \mathbb{F}$ הוא החסם העליון של A אס"ם מתקיימים שני התנאים הבאים:
  1. M הוא חסם מלעיל של A
  2. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{F}$ קיים $a \in A$ כך ש-$M - \varepsilon < a$
- תהא $B \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה, מספר $m \in \mathbb{F}$ הוא החסם התחתון של B אס"ם מתקיימים שני התנאים הבאים:
  1. m הוא חסם מלרע של B
  2. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{F}$ קיים $b \in B$ כך ש-$m + \varepsilon > b$

הוכחה. נוכיח את יחידות החסם העליון, ההוכחה עבור החסם התחתון דומה מאד.

- $\Leftarrow$

  נניח ש-$M \in \mathbb{F}$ הוא החסם העליון של A, בפרט M הוא חסם מלעיל של A; יהי $0 < \varepsilon \in \mathbb{F}$ ונגדיר $M' := M - \varepsilon < M$, אם לא קיים $a \in A$ כך ש-$M' = M - \varepsilon < a$ אז לכל $a \in A$ מתקיים $a \leq M'$ ומכאן ש-M' הוא חסם מלעיל של A בסתירה לכך ש-$M' < M$ ו-M הוא החסם העליון, מכאן שקיים a כנ"ל.

- $\Rightarrow$

  נניח ש-$M \in \mathbb{F}$ מקיים את שני הפסוקים הנ"ל ויהי $M \neq M' \in \mathbb{F}$ חסם מלעיל של A ונגדיר $\varepsilon := |M - M'|$, כעת, אם $M' < M$ אז $\varepsilon = M - M'$ ומההנחה נובע שקיים $a \in A$ כך ש-$M' = M - \varepsilon < a \leq M$ בסתירה להיות M' חסם מלעיל של A; מכאן ש-$M < M'$ ומכיוון ש-M' היה שרירותי נדע שלכל חסם מלעיל $M' \in \mathbb{F}$ של A מתקיים $M \leq M'$, כלומר M הוא החסם העליון של A.

■

משפט 6.3.

- תהא $A \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה שיש לה מקסימום, ל-A יש חסם עליון (יחיד) ואותו מקסימום שווה לו (כלומר גם הוא יחיד).
- תהא $B \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה שיש לה מקסימום, ל-A יש חסם תחתון (יחיד) ואותו מינימום שווה לו (כלומר גם הוא יחיד).

טענה 6.4. לכל קבוצה סופית (שאינה ריקה) המוכלת בשדה סדור יש מקסימום ומינימום.

משפט 6.5.

- בשדה הסדור השלם ($\mathbb{R}$), לכל קבוצה החסומה מלעיל יש חסם עליון.
- בשדה הסדור השלם ($\mathbb{R}$), לכל קבוצה החסומה מלרע יש חסם תחתון.

♣ יש הלוקחים את החלק הראשון של משפט זה כאקסיומת השלמות (אלו טענות שקולות), כמובן שניתן היה גם לקחת את החלק השני.

הוכחה. נוכיח את המשפט עבור החסם העליון, ההוכחה עבור החסם התחתון דומה מאד.
תהא $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל, יהי $M \in \mathbb{R}$ חסם מלעיל של A ונגדיר $B := \{b \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : b \geq a\}$, B אינה ריקה שכן $M \in B$ ולכן מאקסיומת השלמות נובע שקיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש-$a \leq c \leq b$ לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$. מהגדרה c הוא חסם מלעיל של A ומכיוון ש-B היא קבוצת החסמים מלעיל של A נקבל ש-c הוא החסם העליון של A. ■

משפט 6.6. ארכימדיות של $\mathbb{R}$
בשדה הסדור השלם ($\mathbb{R}$), $\mathbb{N}$ אינה חסומה מלעיל; כלומר $\mathbb{R}$ הוא שדה ארכימדי.

הוכחה. נניח בשלילה ש-$\mathbb{N}$ חסומה מלעיל ויהי $M \in \mathbb{R}$ החסם העליון של $\mathbb{N}$ (קיים כזה ממשפט 6.3), מהאפיון הנוסף של החסם העליון נובע שקיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$M - 1 < n$, אותו n מקיים ש-$M < n+1$ והרי $n+1 \in \mathbb{N}$ בסתירה להיותו של M חסם מלעיל של $\mathbb{N}$, מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$\mathbb{N}$ אינה חסומה מלעיל. ■

מסקנה 6.7. בשדה הסדור השלם ($\mathbb{R}$), $\mathbb{Z}$ אינה חסומה מלרע.

משפט 6.8. הרציונליים צפופים בממשיים
לכל $x, y \in \mathbb{R}$ המקיימים $x < y$ קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש-$x < q < y$.

הוכחה. יהי $x > m \in \mathbb{Z}$ (קיים כזה מהמסקנה הקודמת) ויהי $\frac{1}{y-x} < n \in \mathbb{N}$ ומכאן ש-$0 < \frac{1}{n} < y - x$ כעת נתבונן ב-$\left\{k \in \mathbb{N} : x < m + \frac{k}{n}\right\}$, זוהי קבוצה לא ריקה של טבעיים ומעקרון הסדר יש לה איבר מינימלי $k \in \mathbb{N}$ המקיים (מהגדרתו) $m + \frac{k-1}{n} \leq x < m + \frac{k}{n}$[11] ומכאן ש-$m + \frac{k}{n} < y$. ■

למה 6.9. תהיינה $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ כך ש-$a \leq b$ לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$, מתקיים $\sup A \leq \inf B$.

משפט 6.10. למת החתכים
תהיינה $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ כך ש-$a \leq b$ לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$, הפסוקים הבאים שקולים:

1. קיים $M \in \mathbb{R}$ יחיד כך ש-$a \leq M \leq b$ לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$.
2. $\sup A = \inf B$.
3. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיימים $a \in A$ ו-$b \in B$ כך ש-$b - a < \varepsilon$.
4. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש-$0 \leq \inf B - a < \varepsilon$.
5. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $b \in B$ כך ש-$0 \leq b - \sup A < \varepsilon$.

[11] אם $k = 0$ אז $m + \frac{k-1}{n} = m < x$.

טענה 6.11. תהיינה $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$, מתקיים:

- אם A ו-B חסומות מלעיל אז $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$, ואם A ו-B חסומות מלרע אז $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.
- יהי $0 \leq \beta \in \mathbb{R}$; אם A חסומה מלעיל אז $\sup(\beta \cdot A) = \beta \cdot \sup(A)$, ואם A חסומה מלרע אז $\inf(\beta \cdot A) = \beta \cdot \inf(A)$.
- אם $A, B \subseteq [0, \infty)$ אז $\inf(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B)$, ואם (בנוסף) A ו-B חסומות מלעיל אז $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$.
- אם $A, B \subseteq (-\infty, 0]$ אז $\inf(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$, ואם (בנוסף) A ו-B חסומות מלרע אז $\sup(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B)$.

7 חזקות

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

טענה 7.1. יהיו $0 < a, b \in \mathbb{F}$ ו-$n \in \mathbb{N}$, $a < b$ אם"ם $a^n < b^n$.

♣ הטענה נכונה גם עבור א"ש חלש.

הוכחה. טענה 1.10 סעיף 7 ואינדוקציה (גם בשביל הכיוון שמשמאל לימין ע"י הנחה בשלילה ש-$a \geq b$). ∎

משפט 7.2. חוקי חזקות כשהמעריך טבעי

יהיו $0 \neq x, y \in \mathbb{F}$ ו-$n, m \in \mathbb{N}$, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.
2. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$.
3. $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.
4. אם $0 < x < y$ אז $x^n < y^n$.[12]
5. אם $1 < x$ ו-$n < m$ אז $x^n < x^m$.
6. אם $0 < x < 1$ ו-$n < m$ אז $x^n > x^m$.

♣ שלושת חוקי החזקות הראשונים נכונים עבור כל פעולת כפל (על קבוצה כלשהי) המקיימת חילוף וקיבוץ.

♣ אם $x < 0$ אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$x^n = \begin{cases} (-x)^n & n \in \text{Even} \\ -(-x)^n & n \in \text{Odd} \end{cases}$$

ואם $x = 0$ אז $x^n = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

הוכחה. את כל הסעיפים ניתן להוכיח בפשטות ע"י אינדוקציה. ∎

[12] סעיף זה נובע ישירות מטענה 7.1.

משפט 7.3. חוקי חזקות כשהמעריך שלם

יהיו $0 \neq x, y \in \mathbb{F}$ ו-$n, m \in \mathbb{Z}$, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.
2. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$.
3. $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.
4. אם $0 < x < y$ ו-$0 < n$ אז $x^n < y^n$.
5. אם $0 < x < y$ ו-$0 > n$ אז $x^n > y^n$.
6. אם $1 < x$ ו-$n < m$ אז $x^n < x^m$.
7. אם $0 < x < 1$ ו-$n < m$ אז $x^n > x^m$.

♣ שלושת חוקי החזקות הראשונים נכונים עבור כל פעולת כפל (על קבוצה כלשהי) המקיימת חילוף וקיבוץ ובתנאי שלאיברים המדוברים יש איבר הופכי ביחס לפעולת הכפל.

♣ אם $x < 0$ אז לכל $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ מתקיים:

$$x^n = \begin{cases} (-x)^n & |n| \in \text{Even} \\ -(-x)^n & |n| \in \text{Odd} \end{cases}$$

♣ ראינו בקובץ ההגדרות שניתן להגדיר $0^0 := 0$ או $0^0 := 1$ כרצוננו מבלי לקבל סתירה.

הוכחה. סעיפים 3-5 נובעים ישירות מההגדרה והסעיפים המקבילים (3-4) עבור מעריך טבעי[13], סעיפים 1-2 ו-6-7 נובעים ישירות מהסעיפים המקבילים עבור מעריך טבעי (אם $n, m \in \mathbb{N}$ או $n, m \notin \mathbb{N}$[14]) או מאינדוקציה על המעריך הטבעי מבין n, m (אם אחד מהם טבעי והשני אינו כזה). ■

משפט 7.4. אי-שוויון ברנולי[15]

לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $-1 < x \in \mathbb{F}$ מתקיים $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

הוכחה. יהי $-1 < x \in \mathbb{F}$, נוכיח את הטענה באינדוקציה.

בסיס האינדוקציה טריוויאלי: $(1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x$.

יהי $n \in \mathbb{N}$, נניח ש-$(1+x)^n \geq 1 + nx$ונשים לב שמהגדרה $0 < 1 + x$.

$$\Rightarrow (1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

■

משפט 7.5. קיום ויחידות השורש

לכל $0 < x \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $0 < y \in \mathbb{R}$ יחיד כך ש-$y^n = x$.

הוכחה. יהיו $0 < x \in \mathbb{R}$ ו-$n \in \mathbb{N}$.

מטענה 7.1 (ומטריכוטומיה) נובע שאם קיים y כזה אז הוא יחיד.

נגדיר $S := \{0 \leq z \in \mathbb{R} \mid z^n < x\}$, קבוצה זו אינה ריקה שכן $0 \in S$ והיא חסומה מלעיל מפני שלכל $z \in S$ מתקיים $z^n < (1+x)^n$ ולכן מטענה 7.1 גם $z < 1 + x$, מכאן שיש ל-S חסם עליון, א"כ נגדיר $y := \sup S$.

נוכיח ש-$0 < y$: נשים לב לכך ש-$1 > \frac{x}{1+x} > 0$ ולכן גם $\left(\frac{x}{1+x}\right)^n < \frac{x}{1+x} < x$ ומכאן ש-$\frac{x}{1+x} \in S$ וממילא $0 < \frac{x}{1+x} \leq y$.

נשלול את $y^n < x$ ואת $y^n > x$ ומטריכוטומיה נקבל ש-$y^n = x$.

---

[13] בשביל סעיף 5 יש להשתמש גם בסעיף 6 של טענה 1.10.

[14] בסעיפים 5-6 יש להשתמש גם בטענה 1.10 סעיף 6.

[15] ערך בוויקיפדיה: יאקוב ברנולי.

- נניח בשלילה ש-x < y^n, מכאן ש-$0 < \frac{y^n}{x} < 1$ ולכן גם:

$$0 < \frac{1-\frac{y^n}{x}}{n}$$

יהי $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$\varepsilon < 1,\ \varepsilon < \frac{1-\frac{y^n}{x}}{n}$$

$$\Rightarrow n\varepsilon < 1 - \frac{y^n}{x}$$
$$\Rightarrow \frac{y^n}{x} < 1 + n\cdot(-\varepsilon)$$

נשים לב לכך ש-$-\varepsilon > -1$ (וגם $0 < 1-\varepsilon$) ולכן מא"ש ברנולי נובע שמתקיים:

$$\frac{y^n}{x} < 1 + n\cdot(-\varepsilon) \le (1-\varepsilon)^n$$

$$\Rightarrow 0 \le \left(\frac{y}{1-\varepsilon}\right)^n = \frac{y^n}{(1-\varepsilon)^n} < x$$
$$\Rightarrow \frac{y}{1-\varepsilon} \in S$$

אבל $\frac{y}{1-\varepsilon} > y$ בסתירה להיות y חסם מלעיל של S, מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$x \ge y^n$.

- כעת נניח בשלילה ש-x > y^n, מכאן ש-$0 < \frac{x}{y^n} < 1$ ולכן גם:

$$0 < \frac{1-\frac{x}{y^n}}{n}$$

יהי $0 < \varepsilon' \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$\varepsilon' < 1,\ \varepsilon' < \frac{1-\frac{x}{y^n}}{n}$$

$$\Rightarrow n\varepsilon < 1 - \frac{x}{y^n}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{y^n} < 1 + n\cdot(-\varepsilon)$$

נשים לב לכך ש-$-\varepsilon' > -1$ (וגם $0 < 1-\varepsilon'$) ולכן מא"ש ברנולי נובע שמתקיים:

$$\frac{x}{y^n} < 1 + n\cdot(-\varepsilon) \le (1-\varepsilon)^n$$

$$\Rightarrow x < y^n\cdot(1-\varepsilon)^n = [y\cdot(1-\varepsilon)]^n$$

מטענה 7.1 נובע שלכל $z \in S$ מתקיים $z < y\cdot(1-\varepsilon)$ ומכאן ש-$y\cdot(1-\varepsilon)$ הוא חסם מלעיל של S, אבל $y\cdot(1-\varepsilon) < y$ בסתירה לכך ש-y הוא החסם העליון של S; מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$x \le y^n$.

$$\Rightarrow y^n = x$$

■

משפט 7.6. האי-רציונליים צפופים בממשיים

לכל $x,y\in\mathbb{R}$ כך ש-$x<y$ קיים $\gamma\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ כך ש-$x<\gamma<y$.

הוכחה. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ כך ש-$x<y$.
מצפיפות הרציונליים בממשיים נובע שקיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש-$x<q<y$, יהי q כנ"ל.
מהארכימדיות של $\mathbb{R}$ נובע שקיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$n>\frac{\sqrt{2}}{y-q}$

$$\Rightarrow x<q<q+\frac{\sqrt{2}}{n}<y$$

מהיות $\mathbb{Q}$ שדה נובע ש-$q+\frac{\sqrt{2}}{n}\notin\mathbb{Q}$, א"כ $q+\frac{\sqrt{2}}{n}$ מקיים את המבוקש. ■

למה 7.7. יהי $0<x\in\mathbb{N}$, לכל $n,k\in\mathbb{N}$ ו-$m,j\in\mathbb{Z}$ המקיימים $\frac{m}{n}=\frac{k}{j}$ מתקיים $(x^m)^{\frac{1}{n}}=\left(x^j\right)^{\frac{1}{k}}$.

הוכחה. יהיו $a,c\in\mathbb{Z}$ ו-$b,d\in\mathbb{N}$ כך ש-$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

$$\Rightarrow \left((x^a)^{\frac{1}{b}}\right)^{bd}=\left(\left((x^a)^{\frac{1}{b}}\right)^b\right)^d=(x^a)^d=x^{ad}=x^{bc}=(x^c)^b=\left(\left((x^c)^{\frac{1}{d}}\right)^d\right)^b=\left((x^c)^{\frac{1}{d}}\right)^{bd}$$

מיחידות השורש נובע ש-$(x^a)^{\frac{1}{b}}=(x^c)^{\frac{1}{d}}$. ■

משפט 7.8. חוקי חזקות כשהמעריך רציונלי

יהיו $0<x,y\in\mathbb{F}$ ו-$q,r\in\mathbb{Q}$, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $x^q\cdot x^r=x^{q+r}$.
2. $(x^q)^r=x^{q\cdot r}$.
3. $(x\cdot y)^q=x^q\cdot y^q$.
4. אם $0<x<y$ ו-$0<q$ אז $x^q<y^q$, כמו כן אם $0<x<y$ ו-$0>q$ אז $x^q>y^q$.
5. אם $1<x$ ו-$q<r$ אז $x^q<x^r$.
6. אם $0<x<1$ ו-$q<r$ אז $x^q>x^r$.

♣ חוקי חזקות אלו נכונים גם כשהמעריך ממשי.

הוכחה. יהיו $a,c\in\mathbb{Z}$ ו-$b,d\in\mathbb{N}$ כך ש-$q=\frac{a}{b}$ ו-$r=\frac{c}{d}$, ההוכחות לסעיפים 1-3 משתמשו ביחידות השורש.

.1

$$(x^q\cdot x^r)^{bd}=(x^q)^{bd}\cdot(x^r)^{bd}=\left((x^a)^{\frac{1}{b}}\right)^{bd}\cdot\left((x^c)^{\frac{1}{d}}\right)^{bd}=\left(\left((x^a)^{\frac{1}{b}}\right)^b\right)^d\cdot\left(\left((x^c)^{\frac{1}{d}}\right)^d\right)^b=(x^a)^d\cdot(x^c)^b$$
$$=x^{ad}\cdot x^{bc}=x^{ad+bc}=\left(\left(x^{ad+bc}\right)^{\frac{1}{bd}}\right)^{bd}=\left(x^{\frac{ad+bc}{bd}}\right)^{bd}=\left(x^{\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)}\right)^{bd}=\left(x^{q+r}\right)^{bd}$$

$$\Rightarrow x^q\cdot x^r=x^{q+r}$$

.2

$$((x^q)^r)^{bd} = \left(((x^q)^c)^{\frac{1}{d}}\right)^{bd} = \left(\left(((x^q)^c)^{\frac{1}{d}}\right)^d\right)^b = ((x^q)^c)^b = \left((x^a)^{\frac{1}{b}}\right)^{bc} = \left(\left((x^a)^{\frac{1}{b}}\right)^b\right)^c$$
$$= (x^a)^c = x^{ac} = \left((x^{ac})^{\frac{1}{bd}}\right)^{bd} = \left(x^{\left(\frac{ac}{bd}\right)}\right)^{bd} = \left(x^{\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)}\right)^{bd} = (x^{q\cdot r})^{bd}$$

$$\Rightarrow (x^q)^r = x^{q\cdot r}$$

.3

$$((x\cdot y)^q)^b = \left(((x\cdot y)^a)^{\frac{1}{b}}\right)^b = (x\cdot y)^a = x^a\cdot y^a = \left((x^a)^{\frac{1}{b}}\right)^b\cdot\left((y^a)^{\frac{1}{b}}\right)^b = (x^q)^b\cdot(y^q)^b = (x^q\cdot y^q)^b$$

$$\Rightarrow (x\cdot y)^q = x^q\cdot y^q$$

4. נניח ש-$0<x<y$ ו-$0<q$.

$$(x^q)^b = \left((x^a)^{\frac{1}{b}}\right)^b = x^a < y^a = \left((y^a)^{\frac{1}{b}}\right)^b = (y^q)^b$$

מהסעיפים המקבילים עבור מעריך שלם נקבל ש-$x^q<y^q$. אם $q<0$ אז $0<-q$ ולכן מהחלק הקודם של ההוכחה ומטענה 1.10 סעיף 6 נקבל את המבוקש.

5. נתון $q<r$, מכאן ש-$q=\frac{ad}{bd}<\frac{cb}{bd}=r$ ומכאן $ad<bc$.

$$\Rightarrow x^{ad}<x^{bc}$$
$$\Rightarrow \left((x^{ad})^{\frac{1}{bd}}\right)^{bd} < \left((x^{cb})^{\frac{1}{bd}}\right)^{bd}$$
$$\Rightarrow x^q = \left(x^{ad}\right)^{\frac{1}{bd}} < \left(x^{bc}\right)^{\frac{1}{bd}} = x^r$$

6. נתון ש-$0<x<1$ ומכאן ש-$0<1<x^{-1}$, מהסעיף הקודם נובע שמתקיים:

$$0<\left(x^{-1}\right)^q<\left(x^{-1}\right)^r$$

$$\Rightarrow 0<(x^q)^{-1}<(x^r)^{-1}$$
$$\Rightarrow 0<x^r<x^q$$

■

משפט 7.9. לכל $a,b\in\mathbb{F}$ ולכל $n\in\mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$a^n-b^n=(a-b)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}\cdot b^k$$

♣ משפט זה הוא הכללה של נוסחת הכפל המקוצר $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

הוכחה. יהיו $a,b\in\mathbb{F}$, לכל $n-1\geq k\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$a^{n-k}\cdot b^k=a^{n-1-(k-1)}\cdot b^{k+1-1}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n-1}a^{n-k}\cdot b^k=\sum_{k=1}^{n-1}a^{n-1-(k-1)}\cdot b^{k+1-1}=\sum_{k=0}^{n-2}a^{n-1-k}\cdot b^{k+1}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow(a-b)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}\cdot b^k&=a\cdot\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}\cdot b^k-b\cdot\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}\cdot b^k\\&=\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-k}\cdot b^k-\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}\cdot b^{k+1}\\&=a^n+\sum_{k=1}^{n-1}a^{n-k}\cdot b^k-\sum_{k=0}^{n-2}a^{n-1-k}\cdot b^{k+1}+b^n\end{aligned}$$

■