אופרטורים - טענות בלבד

אלגברה ליניארית (2) - 80135

מרצה: איתמר צביק

מתרגלים: גיל לבנה ויואב כהן

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

תודתי נתונה לגלעד שרם על סיכומיו המצוינים שהיו לי לעזר רב עד כדי כך שניתן לומר שהסיכום הזה מבוסס על סיכומיו.

סיכומי קורס זה מוקדשים לאהרון כהן;
אהרון, הידיעה שתקרא את הסיכומים הללו דרבנה אותי לאורך כל הדרך.
בהצלחה!

* * *

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 דינמיקה של אופרטור

תהא (V,f) מערכת ליניארית מעל לשדה $\mathbb{F}$.

טענה 1.1. יהי $v\in V$, מתקיים $Z_f(v)=\{[P(f)](v)\mid P\in\mathbb{F}[x]\}$.

למה 1.2. יהי $v\in V$, $O_f(v)$ ו-$Z_f(v)$ שמורים תחת f.

משפט 1.3. יהי $v\in V$ ויהי $W\subseteq V$ תמ"ו שמור תחת f כך ש-$v\in W$, מתקיים $Z_f(v)\subseteq W$; כלומר התמ"ו הציקלי של וקטור הוא התמ"ו השמור המינימלי ביחס להכלה.

טענה 1.4. יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"וים שמורים תחת f, $U\cap W$ ו-$U+W$ גם הם שמורים תחת f.

טענה 1.5. אם V נ"ס ו-$\mathcal{B}$ הוא בסיס סדור שלו אז לכל פולינום $P\in\mathbb{F}[x]$ מתקיים $P([f]_{\mathcal{B}})=[P(f)]_{\mathcal{B}}$.

♣ כדי להוכיח את הטענה נזכר שלכל $T_1,T_2:V\to W$, $T_3:W\to U$ ולכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים:

$$[T_1+T_2]_C^B=[T_1]_C^B+[T_2]_C^B$$
$$[\lambda\cdot T_1]_C^B=\lambda\cdot[T_1]_C^B$$
$$[T_3\circ T_1]_D^B=[T_3]_D^C\cdot[T_1]_C^B$$

כאשר V, W ו-U הם מ"ו נ"ס מעל לשדה $\mathbb{F}$, B, C ו-D הם בסיסים סדורים שלהם ו-T_1, T_2 ו-T_3 הן העתקות ליניאריות.

טענה 1.6. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו, W שמור תחת f אם"ם W שמור תחת $P(f)$ לכל פולינום $P\in\mathbb{F}[x]$.

♣ קל לראות שהטענה נכונה עבור מונומים ואז מהליניאריות של $c\cdot f^n$ (הצבה של f במונום) תנבע הטענה עבור פולינומים.

משפט 1.7. יהיו $P,G\in\mathbb{F}[x]$, מתקיים $P(f)\circ G(f)=(P\cdot Q)(f)$.

מסקנה 1.8. יהיו $P,G\in\mathbb{F}[x]$, מתקיים $P(f)\circ G(f)=G(f)\circ P(f)$.

משפט 1.9. יהיו $v_1,v_2\in V$, תת-המרחב $Z_f(v_1)\cap Z_f(v_2)$ הוא מרחב ציקלי ביחס ל-f.

2 פולינום מינימלי של וקטור ושל קבוצת וקטורים

יהי V מ"ו נ"ס[1] מעל לשדה $\mathbb{F}$ ויהי f אופרטור על V.

2.1 פולינום מינימלי של וקטור

טענה 2.1. יהי $v\in V$ ויהיו $P,G\in\mathbb{F}[x]$, מתקיים:

1. אם אחד משני הפולינומים הללו מאפס את v תחת f אז גם $P\cdot G$ מאפס את v תחת f.
2. אם שניהם מאפסים את v תחת f אז גם $P+G$ מאפס את v תחת f.

מסקנה 2.2. לכל $v\in V$ ולכל $w\in Z_f(v)$ מתקיים $\min_v(f)\,w=0_V$.

[1]למעשה הסיבה היחידה לדרישה ש-V נ"ס היא כדי שיהיה ברור שהפולינום המינימלי קיים, ניתן להחליף את הדרישה הזו בדרישה שהמסלול של של הווקטור יהיה תלוי ליניארית (כשמדובר בפולינום מינימלי של וקטור) או בדרישה זו על כל הווקטורים בקבוצה/הבסיס שלה (כשמדובר בפולינום מינימלי של קבוצה).

טענה 2.3. לכל $v\in V$ מתקיים $\dim Z_f\left(v\right)=\deg\left(\min_v\right)$.

משפט 2.4. לכל $v\in V$, לא קיים פולינום שדרגתו נמוכה מזו של $\min_v$ והוא מאפס את v תחת f מלבד פולינום האפס, ובנוסף $\min_v$ הוא הפולינום המתוקן היחיד המקיים זאת.

מסקנה 2.5. יהי $v\in V$ ויהי $P\in\mathbb{F}\left[x\right]$ פולינום המאפס את v תחת f, מתקיים $\min_v\mid P$.

♣ כדי להוכיח את הטענה נחלק את P ב-$\min_v$ עם שארית (נסמן ב-Q את המנה וב-R את השארית), ומכאן שגם $R=P-Q\cdot\min_v$ מאפס את v תחת f ולכן ממינימליות הדרגה של $\min_v$ נקבל ש-$R=0$; עוד נחזור לרעיון ההוכחה הזה בהמשך.

מסקנה 2.6. לכל $v\in V$ ולכל $w\in Z_f\left(v\right)$ מתקיים $\min_w\mid\min_v$.

מסקנה 2.7. יהי $v\in V$, אם $\min_v$ אי-פריק (וממילא $v\neq 0_V$) אז לכל $0_V\neq w\in Z_f\left(v\right)$ מתקיים $Z_f\left(w\right)=Z_f\left(v\right)$.

טענה 2.8. יהי $v\in V$ כך ש-$\min_v$ הוא פולינום פריק ויהיו $P,Q\in\mathbb{F}\left[x\right]$ פולינומים מתוקנים שאינם קבועים כך ש-$\min_v=P\cdot Q$, נגדיר $w:=P\left(f\right)v$; מתקיים $w\neq 0_V$ ו-$\min_w=Q$.

משפט 2.9. יהי $v\in V$ כך ש-$\min_v$ הוא פולינום פריק ויהיו $P,Q\in\mathbb{F}\left[x\right]$ פולינומים מתוקנים שאינם קבועים וזרים זה לזה כך ש-$\min_v=P\cdot Q$, נגדיר $w:=P\left(f\right)v$ ו-$u:=Q\left(f\right)v$; מתקיים:
$$Z_f\left(v\right)=Z_f\left(w\right)\oplus Z_f\left(u\right)$$

מסקנה 2.10. יהי $v\in V$ ויהיו $P_1,P_2,\ldots,P_r\in\mathbb{F}\left[x\right]$, $n_1,n_2,\ldots,n_r\in\mathbb{N}_0$ ו-$c\in\mathbb{F}$ כך שהפירוק של $\min_v$ לאי-פריקים הוא:
$$\min_v=c\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(P_i\right)^{n_i}$$
נגדיר (לכל $r\geq i\in\mathbb{N}$):
$$Q_i:=\frac{\prod_{i=1}^{r}\left(P_i\right)^{n_i}}{\left(\left(P_i\right)^{n_i}\right)\left(f\right)}$$
$$w_i:=Q_i\left(f\right)v$$
ואז מתקיים:
$$Z_f\left(v\right)=Z_f\left(w_1\right)\oplus Z_f\left(w_2\right)\oplus\ldots\oplus Z_f\left(w_r\right)$$

טענה 2.11. יהיו $w,u\in V$ כך ש-$Z_f\left(w\right)\cap Z_f\left(u\right)=\left\{0_V\right\}$ (כלומר $Z_f\left(w\right)+Z_f\left(u\right)$ הוא סכום ישר) ונסמן $v:=w+u$, מתקיים:

1. $\min_v=\mathrm{lcm}\left(\min_w,\min_u\right)$.
2. אם $\gcd\left(\min_w,\min_u\right)=1$ (כלומר $\min_w$ ו-$\min_u$ זרים זה לזה) אז $Z_f\left(v\right)=Z_f\left(w\right)\oplus Z_f\left(u\right)$.

טענה 2.12. יהיו $w,u\in V$ כך שהמרחב $Z_f\left(w\right)+Z_f\left(u\right)$ הוא ציקלי ויהיו $v_1,v_2\in V$ כך שמתקיים[2]:

$$Z_f\left(v_1\right)=Z_f\left(w\right)+Z_f\left(u\right)$$
$$Z_f\left(v_2\right)=Z_f\left(w\right)\cap Z_f\left(u\right)$$

מתקיים גם:

$$\min_{v_1}=\text{lcm}\left(\min_w,\min_u\right)$$
$$\min_{v_2}=\text{gcd}\left(\min_w,\min_u\right)$$

2.2 פולינום מינימלי של קבוצה

טענה 2.13. נניח ש-V נ"ס ותהא $S\subseteq V$ קבוצת וקטורים, קיים פולינום מתוקן $P\in\mathbb{F}\left[x\right]$ יחיד המאפס את S תחת f ומקיים שלכל פולינום $G\in\mathbb{F}\left[x\right]$ המאפס את S תחת f מתקיים $P\mid G$.

טענה 2.14. נניח ש-V נ"ס ויהיו $S,T\subseteq V$ ו-$P\in\mathbb{F}\left[x\right]$, מתקיים:

1. $\min_v\mid\min_S$ לכל $v\in S$.
2. אם P מאפס את V תחת f אז $P\mid\min_S$.
3. אם $S\subseteq T$ אז $\min_S\mid\min_T$.
4. $\min_v=\min_{Z_f(v)}$ לכל $v\in V$.
5. $\min_S=\min_{\text{span}(S)}$.

משפט 2.15. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו שמור תחת אופרטור f ויהיו $P,G\in\mathbb{F}\left[x\right]$ פולינומים זרים כך ש-G מאפס את W תחת f, האופרטור $P\left(f\right)|_W$ הפיך.

3 פולינום מינימלי של אופרטור, ערכים עצמיים ואופרטורים הניתנים ללכסון

תהא $\left(V,f\right)$ מערכת ליניארית מעל לשדה $\mathbb{F}$.

טענה 3.1. המרחבים העצמיים של f והמרחבים העצמיים המוכללים שלו הם תמ"וים שמורים תחתיו.

טענה 3.2. נניח ש-f הפיך (מהגדרה $0\notin\sigma\left(f\right)$), לכל $0\neq\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים $\lambda\in\sigma\left(f\right)\iff\lambda^{-1}\in\sigma\left(f^{-1}\right)$.

טענה 3.3. קבוצת וקטורים שונים מ-0_V שכל אחד מהם שייך למרחב עצמי מוכלל שונה מזה של האחרים היא קבוצה בת"ל, בפרט קבוצת וקטורים עצמיים בעלי ערכים עצמיים שונים זה מזה היא קבוצה בת"ל.

טענה 3.4. יהי $0_V\neq v\in V$, כל שורש של $\min_v$ הוא ערך עצמי של f.

♣ כמובן שכל ערך עצמי של f הוא שורש של פולינום מינימלי של וקטור כלשהו (למשל וקטור עצמי מתאים).

מסקנה 3.5. אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז יש ל-f ערך עצמי ומכאן ש-$\sigma\left(f\right)\neq\emptyset$ ושל-f יש תת-מרחב שמור ממימד 1.

[2] ממשפט ?? נובע שאכן קיים v_2 כך ש-$Z_f\left(v_2\right)=Z_f\left(w\right)\cap Z_f\left(u\right)$.

מסקנה 3.6. אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז יש ל-f תת-מרחב שמור מממד 1 ו/או תת-מרחב שמור מממד 2.

נניח ש-V נ"ס.

טענה 3.7. יהי $\mathcal{B}:=\left(b_1,b_2,\ldots,b_n\right)$ בסיס של V, מתקיים:

$$\mu_f=\operatorname{lcm}\left(\min_{b_1},\min_{b_2},\ldots,\min_{b_n}\right)$$

טענה 3.8. קיים וקטור $u\in V$ כך ש-$\mu_f=\min_u$.

מסקנה 3.9. סקלר $\lambda\in\mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של f אמ"ם λ הוא שורש של μ_f, במילים אחרות קבוצת השורשים של μ_f היא בדיוק $\sigma\left(f\right)$.

מסקנה 3.10. אם μ_f מתפרק לגורמים ליניאריים אז ניתן להציג את V כסכום ישר של מרחבים עצמיים מוכללים.

♣ מכאן שלכל אופרטור על מ"ו מעל $\mathbb{C}$ ניתן להציג את המרחב כסכום ישר של מרחבים עצמיים מוכללים.

טענה 3.11. התנאים הבאים שקולים:

1. f לכסין.
2. קיים בסיס $\mathcal{B}$ של V שבו כל וקטור הוא וקטור עצמי.
3. לכל $0_V\neq v\in V$ הפולינום $\min_v$ מתפרק לגורמים ליניאריים שונים (ללא חזקות גדולות מ-1).
4. הפולינום המינימלי של f (μ_f) מתפרק לגורמים ליניאריים שונים.
5. ניתן להציג את V כסכום של מרחבים עצמיים מוכללים ובנוסף לכל $\lambda\in\sigma\left(f\right)$ מתקיים $V_\lambda=V^\lambda$.

♣ בהמשך נראה תנאי חמישי: ניתן להציג את V כסכום של מרחבים עצמיים מוכללים ובנוסף לכל ערך עצמי $\lambda\in\sigma\left(f\right)$ של f הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי.

♣ מעל $\mathbb{C}$ ניתן "לוותר" על התנאי שהפולינומים מתפרקים לגורמים ליניאריים / שניתן להציג את V כסכום של מרחבים עצמיים מוכללים מפני שכפי שראינו תנאים אלו מתקיימים תמיד מעל המרוכבים.

טענה 3.12. יהי $P\in\mathbb{F}\left[x\right]$ פולינום מתוקן ותהא $C_P\in M_{\deg P}\left(\mathbb{F}\right)$ המטריצה המלווה של P, מתקיים $\mu_{C_P}=P$.

4 צורת ז'ורדן

יהי V מ"ו מעל לשדה $\mathbb{F}$.

♣ לפני שנתחיל נסביר את הרעיון מאחורי צורת ז'ורדן: אנו רוצים לייצג כל אופרטור במטריצה פשוטה ככל האפשר כדי שיהיה ברור כיצד הוא פועל על המרחב, ובצורה יחידה כדי שנוכל לקבוע באופן מוחלט אם שתי מטריצות דומות זו לזו. הדרך לעשות זאת היא לפרק את המרחב לסכום ישר של תמ"וים שבכל אחד מהם אנו יודעים כיצד לייצג את האופרטור[3] ע"י מטריצה פשוטה, ואז מכיוון שמדובר בסכום ישר נוכל לשרשר את הבסיסים ולקבל בסיס של המרחב כולו כך שהמטריצה המייצגת של האופרטור בבסיס זה היא מטריצה אלכסונית לפי בלוקים[4] שבה כל בלוק הוא אחת המטריצות הפשוטות שכבר מצאנו; הצורה הפשוטה הזו היא מה שקראנו לו בקובץ ההגדרות בשם "צורת ז'ורדן" של האופרטור וכל בלוק במטריצה הזו הוא מה שקראנו לו "בלוק ז'ורדן אלמנטרי".

4.1 קיום של בסיס מז'רדן וצורת ז'ורדן

יהי g אופרטור נילפוטנטי על V.

טענה 4.1. יהי $0_V \neq v \in V$, המטריצה המייצגת של $g\mid_{Z_g(v)}$ בבסיס $\mathcal{C}_g(v)$ היא $J_h(0)$ כאשר $h := \text{height}(v)$.

♣ כלומר המטריצה המייצגת של $g\mid_{Z_g(v)}$ בבסיס $\mathcal{C}_g(v)$ היא מטריצה מהצורה:

$$\left[g\mid_{Z_g(v)}\right]_{\mathcal{C}_g(v)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

במטריצה כזו ברור מאד כיצד g פועלת על $Z_g(v)$: האיבר הראשון בבסיס מועתק אל האיבר השני, השני מועתק לשלישי וכך הלאה עד שהאחרון מועתק אל וקטור האפס.

מסקנה 4.2. יהיו $0_V \neq v \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$ ו-$f \in \text{End}(V)$ כך ש-$g = f - \lambda$, המטריצה המייצגת של $f\mid_{Z_g(v)}$ בבסיס $\mathcal{C}_g(v)$ היא $J_h(\lambda)$ כאשר $h := \text{height}(v)$.

♣ כלומר המטריצה המייצגת של $g\mid_{Z_g(v)}$ בבסיס $\mathcal{C}_g(v)$ היא מטריצה מהצורה:

$$\left[f\mid_{Z_g(v)}\right]_{\mathcal{C}_g(v)} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

גם במטריצה כזו ברור מאד כיצד f פועלת על $Z_g(v)$: כל וקטור v_i בבסיס מועתק אל הווקטור $\lambda \cdot v_i + v_{i+1}$ (כשאר v_{i+1} הוא הווקטור הבא בבסיס) מלבד הווקטור האחרון בבסיס שמוכפל ב-λ מבלי להוסיף לו וקטור אחר.

[3] כשהו מצומצם לאותו תמ"ו.

[4] חשוב מאד להבין למה העובדה שמדובר בסכום ישר אומרת שהמטריצה המייצגת אלכסונית לפי בלוקים, זהו לב העניין.

משפט 4.3. תהא $(v_1, v_2, \ldots, v_s)$ סדרת וקטורים שונים מאפס ב-V ותהא $(h_1, h_2, \ldots, h_s)$ סדרת הגבהים המתאימים, הסדרה $(\mathcal{C}_g(v_1); \mathcal{C}_g(v_2); \ldots; \mathcal{C}_g(v_s))$[5] בת"ל אם"ם הסדרה $\left(g^{h_1-1}(v_1), g^{h_2-1}(v_2), \ldots, g^{h_s-1}(v_s)\right)$ בת"ל, כלומר סדרת השרשראות בת"ל אם"ם סדרת האיברים האחרונים בכל שרשרת בת"ל.

משפט 4.4. תהא $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ סדרת וקטורים שונים מאפס, קיימת סדרת שרשראות $(\mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2; \ldots; \mathcal{B}_s)$ בת"ל כך שמתקיים:

$$\text{span}(\mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2; \ldots; \mathcal{B}_s) = \text{span}(\mathcal{C}_g(v_1); \mathcal{C}_g(v_2); \ldots; \mathcal{C}_g(v_n))$$

♣ מכאן שאם V נ"ס אז יש לו בסיס שרשראות משום שאם $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ הוא בסיס של V אז מתקיים:

$$V = \text{span}(\mathcal{C}_g(v_1); \mathcal{C}_g(v_2); \ldots; \mathcal{C}_g(v_n))$$

נניח ש-V נ"ס ותהא $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ סדרת וקטורים שונים מאפס כך ששרשור הבסיסים הציקליים שלהם הוא בסיס של V וסדרת הגבהים המתאימה $(h_1, h_2, \ldots, h_r)$ מקיימת $h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_r$[6].

נסמן:

$$\mathcal{B} := (\mathcal{C}_g(v_1); \mathcal{C}_g(v_2); \ldots; \mathcal{C}_g(v_r))$$

מסקנה 4.5. מתקיים[7]:

$$[g]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{h_1}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{h_2}(0) & \ddots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & J_{h_r}(0) \end{array}\right]$$

וזוהי צורת ז'ורדן של g.

♣ סדרת הגבהים $(h_1, h_2, \ldots, h_r)$ (כשהיא מסודרת בסדר יורד) נקראת <u>המציין</u> (Segre) של g.

מסקנה 4.6. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ויהי f אופרטור על V כך ש-$f = g - \lambda$ מתקיים:

$$[f]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{h_1}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{h_2}(\lambda) & \ddots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & J_{h_r}(\lambda) \end{array}\right]$$

וזוהי צורת ז'ורדן של f.

מסקנה 4.7. יהי f אופרטור על V כך ש-μ_f מתפרק לגורמים ליניאריים, ויהיו $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{F}$ כל הערכים העצמיים של f. נסמן ב-g_i את $f - \lambda_i$ (לכל $r \geq i \in \mathbb{N}$), מהגדרה g_i הוא אופרטור נילפוטנטי על V^{λ_i} ולכן לכל $r \geq i \in \mathbb{N}$ יש ל-f_i בסיס מז'ורדן עבור V^{λ_i} (וכל זה לכל $r \geq i \in \mathbb{N}$).

שרשור הבסיסים הללו מהווה בסיס של V ולכן הוא מהווה בסיס מז'ורדן של f, כלומר יש ל-f צורת ז'ורדן.

[5] הסימן "נקודה ופסיק" (";") משמש לציון שמדובר בשרשור של סדרות, כלומר זוהי סדרת וקטורים ולא סדרה של סדרות וקטורים.

[6] מהגדרה מתקיים $h_1 + h_2 + \ldots + h_r = \dim V$.

[7] כאשר האפסים מציינים בלוקים שהם מטריצת האפס מהגודל המתאים.

♣ בהמשך נראה שאם μ_f אינו מתפרק לגורמים ליניאריים אז אין ל-f צורת ז'ורדן.

מסקנה 4.8. לכל מטריצה מעל $\mathbb{C}$ יש צורת ז'ורדן, וכמו כן לכל אופרטור על מ"ו מעל $\mathbb{C}$ יש צורת ז'ורדן.

♣ תהא $A \in M_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$ ותהא $J \in M_n(\mathbb{C})$ צורת ז'ורדן של A ונניח שכל הקואורדינטות של J ממשיות ($J \in M_n(\mathbb{R})$), האם זה אומר שיש ל-A צורת ז'ורדן מעל הממשיים?
לכאורה התשובה שלילית: העובדה ש-J דומה ל-A ב-$M_n(\mathbb{C})$ (איננו יודעים יותר מזה) אומרת רק שקיימת מטריצה $P \in M_n(\mathbb{C})$ כך ש-$P^{-1}AP = J$, היא לא אומרת שאותה P ממשית גם היא - אפילו אם J ממשית; הסיבה לכך שבמפתיע התשובה חיובית נעוצה במתמטיקה גבוהה מזו שלמדנו, אין לי מושג למה זה נכון אבל מצאתי את המשפט הזה בערך "דמיון מטריצות" בוויקיפדיה.

4.2 אלגוריתם למציאת בסיס מז'רדן וצורת ז'ורדן

נניח ש-V נ"ס.

אלגוריתם 1 אלגוריתם למציאת צורת ז'ורדן במרחב ציקלי

יהי $0_V \neq v \in V$ ויהי f אופרטור על V כך ש-$\min_v^f$ מתפרק לגורמים ליניאריים.
יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{F}$ ו-$h_1, h_2, \ldots, h_r \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים:

$$\min_v^f(x) = \prod_{i=1}^{r} (x-\lambda_i)^{h_i}$$

- לכל $r \geq i \in \mathbb{N}$ נסמן:

$$\begin{aligned} g_i &:= f - \lambda_i \\ Q_i(x) &:= \frac{\min_v(x)}{(x-\lambda_i)^{h_i}} \\ w_i &:= Q_i(f)\, v \end{aligned}$$

- נסמן $\mathcal{B} := (\mathcal{C}_{g_1}(w_1); \mathcal{C}_{g_2}(w_2); \ldots; \mathcal{C}_{g_s}(w_r))$, $\mathcal{B}$ הוא בסיס שרשראות של $Z_f(v)$ המקיים (לכל $r \geq i \in \mathbb{N}$):

$$\left[g_i \mid_{Z_{g_i}(w_i)}\right]_{\mathcal{C}_{g_i}(w_i)} = J_{h_i}(\lambda_i)$$

ולכן גם:

$$\left[f \mid_{Z_f(v)}\right]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{h_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{h_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \hline & & & \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & J_{h_r}(\lambda_r) \end{array}\right]$$

כלומר $\mathcal{B}$ הוא בסיס מז'רדן של $f\mid_{Z_f(v)}$ וזוהי צורת ז'ורדן שלה.

♣ נשים לב לכך ש-$Z_{g_i}(w_i) = V^{\lambda_i}$ לכל $r \geq i \in \mathbb{N}$, נקודה זו חשובה להבנת האלגוריתם הכללי של מציאת צורת ז'ורדן (לאו דווקא במרחבים ציקליים).

אלגוריתם 2 אלגוריתם כללי למציאת צורת ז'ורדן

יהי f אופרטור על V ויהי $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ בסיס של V.

- נמצא את הפולינום המינימלי של v_i לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.
  - אם בפירוק לגורמים של אחד מהם מופיע פולינום שאינו ליניארי אז μ_f אינו מתפרק לגורמים ליניאריים ולכן אין ל-f צורת ז'ורדן (עוד לא הוכחנו זאת).
  - אחרת נוכל למצוא בסיס שרשראות של $Z_f(v_i)$ (לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$) ע"י האלגוריתם הקודם.
- כעת אנו יודעים בדיוק כיצד נראה μ_f ולכן גם $\sigma(f)$ ידועה לנו, יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{F}$ כל הערכים העצמיים של f.
  - נסמן $V_i := Z_f(v_i)$ (לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$), וכמו כן נסמן ב-$V_i^{\lambda_j}$ את המרחב העצמי המוכלל בעל ערך עצמי λ_j של $f|_{V_i}$ (לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ ולכל $r \geq j \in \mathbb{N}$).
  - לכל $r \geq j \in \mathbb{N}$ מתקיים $V^{\lambda_j} = V_1^{\lambda_j} + V_2^{\lambda_j} + \ldots + V_n^{\lambda_j}$ שכן $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$.
  - בשלב הקודם ראינו ש-$V_i^{\lambda_j}$ מהווה מרחב ציקלי ביחס לאופרטור $f - \lambda_j$ ומצאנו בסיס ציקלי מתאים (לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ ולכל $r \geq j \in \mathbb{N}$), כעת יש בידינו קבוצת שרשראות שאיבריהן פורשים את V^{λ_j} ולכן נוכל להשתמש בדרך ההוכחה של משפט **??** כדי למצוא בסיס שרשראות של V^{λ_j} (לכל $r \geq j \in \mathbb{N}$).
  - האופרטור $f - \lambda_j$ הוא אופרטור נילפוטנטי ב-V^{λ_j} ולכן ההצגה של $f|_{V^{\lambda_j}}$ בבסיס השרשראות הנ"ל היא מטריצה אלכסונית לפי בלוקים שבה כל בלוק הוא בלוק ז'ורדן עם ערך עצמי λ_j (לכל $r \geq j \in \mathbb{N}$).
  - נסדר את השרשראות בכל בסיס כזה לפי גודל השרשראות בסדר יורד ונשרשר את הבסיסים זה לזה, מכיוון ש-V הוא סכום ישר של המרחבים העצמיים שלו התוצאה היא בסיס שרשראות של V שכאשר מייצגים בו את f מקבלים מטריצה בצורת ז'ורדן שלה.

4.3 חזקות של בלוקי ז'ורדן אלמנטריים

טענה 4.9. יהיו $r \in \mathbb{N}$ ו-$\lambda \in \mathbb{F}$, מתקיים (לכל $n \in \mathbb{N}$):

$$(J_r(\lambda))^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n \cdot \lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{n}{2} \cdot \lambda^{n-2} & n \cdot \lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{3} \cdot \lambda^{n-3} & \binom{n}{2} \cdot \lambda^{n-2} & n \cdot \lambda^{n-1} & \lambda^n & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{n}{r-1} \cdot \lambda^{n-(r-1)} & \binom{n}{r-1} \cdot \lambda^{n-(r-2)} & \cdots & \binom{n}{2} \cdot \lambda^{n-2} & n \cdot \lambda^{n-1} & \lambda^n \end{bmatrix}$$

או באופן פורמלי יותר וברור פחות: האיבר בשורה ה-i ובעמודה ה-j הוא:

$$\binom{n}{i-j} \cdot \lambda^{n-(i-j)}$$

כאשר בכל מקום שהביטוי אינו מוגדר[8] האיבר המדובר הוא 0.

♣ טענה זו מאפשרת לנו לחשב חזקות של מטריצות בעלות צורות ז'ורדן במהירות יחסית ע"י מעבר לבסיס מז'רדן, העלאה בחזקה של מטריצת ז'ורדן[9] המתאימה וחזרה לבסיס המקורי, ממש כפי שעשינו עם מטריצות הניתנות ללכסון.

[8] המקדם הבינומי אינו מוגדר כאשר $i - j < 0$ או כאשר $i - j > n$, ואם $i - j > n$ ובנוסף $\lambda = 0$ אז הביטוי אינו מוגדר מסיבה נוספת: לאפס אין הופכי ולכן אי אפשר להגדיר עליו חזקה שלילית.

[9] מכיוון שמטריצת ז'ורדן היא מטריצה אלכסונית לפי בלוקים העלאתה בחזקה נעשית ע"י העלאת כל אחד מן הבלוקים באותה חזקה בנפרד.

5 הפולינום האופייני והריבויים הגאומטריים והאלגבריים

יהי V מ"ו נ"ס ממםד n מעל לשדה $\mathbb{F}$ ויהא f אופרטור על V.

טענה 5.1. לכל שתי מטריצות דומות $A,B\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ ולכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים:

$$\det\left(\lambda\cdot I_{n}-A\right)=\det\left(\lambda\cdot I_{n}-B\right)$$

טענה 5.2. קבוצת השורשים של χ_{f} היא הספקטרום של f.

משפט 5.3. יהי $P\in\mathbb{F}\left[x\right]$ פולינום מתוקן ותהא $C_{P}\in M_{\deg P}\left(\mathbb{F}\right)$ המטריצה המלווה של P, מתקיים $\chi_{C_{P}}=P$.

משפט 5.4. יהי $V\supseteq W\neq\left\{ 0_{V}\right\}$ תמ"ו שמור תחת f ונגדיר $g:=f\mid_{W}$, מתקיים $\chi_{g}\mid\chi_{f}$.

טענה 5.5. יהי $0_{V}\neq v\in V$ ונסמן $W:=Z_{f}\left(v\right)$ ו-$g:=f\mid_{W}$, מתקיים $\chi_{g}=\min_{v}^{f}$.

מסקנה 5.6. משפט קיילי-המילטון[10]

מתקיים $\chi_{f}\left(f\right)=0$ ו-$\chi_{A}\left(A\right)=0$ (לכל $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$).

טענה 5.7. יהי $J:=J_{h}\left(\lambda\right)\in M_{h}\left(\mathbb{F}\right)$ בלוק ז'ורדן אלמנטרי מסדר h בעל ערך עצמי $\lambda\in\mathbb{F}$, מתקיים $\chi_{J}\left(x\right)=\left(x-\lambda\right)^{h}$.

נניח של-f יש צורת ז'ורדן.

מסקנה 5.8. אם J היא צורת ז'ורדן של f כאשר:

$$J=\left[\begin{array}{c|c|c|c}
J\left(\lambda_{1}\right) & 0 & \cdots & 0\\
\hline 0 & J\left(\lambda_{2}\right) & \cdots & 0\\
\hline 0 & 0 & \ddots & 0\\
\hline 0 & 0 & \cdots & J\left(\lambda_{r}\right)
\end{array}\right]$$

ו-$J\left(\lambda_{i}\right)\in M_{h_{i}}\left(\mathbb{F}\right)$ לכל $r\geq i\in\mathbb{N}$, אז:

$$\chi_{f}\left(x\right)=\prod_{i=1}^{r}\left(x-\lambda_{i}\right)^{h_{i}}$$

♣ כלומר אם לאופרטור יש צורת ז'ורדן אז הפולינום האופייני שלו מתפרק לגורמים ליניאריים.

מסקנה 5.9. לכל $\lambda\in\sigma\left(f\right)$ הגודל של $J\left(\lambda\right)$ (ששווה לריבוי האלגברי של λ) הוא $\dim V^{\lambda}$.

♣ נשים לב שלכל ערך עצמי $\lambda\in\mathbb{F}$ של f החזקה של $x-\lambda$ בפירוק של μ_{f} לגורמים היא אורך השרשרת הארוכה ביותר בבסיס השרשראות של V^{λ} (ששווה לגודל בלוק ז'ורדן האלמנטרי הגדול ביותר בעל ערך עצמי λ).

מסקנה 5.10. מתקיים $\mu_{f}\mid\chi_{f}$ וקבוצות השורשים שלהם שוות.

♣ מכאן שגם הפולינום המינימלי של f מתפרק לגורמים ליניאריים, והדבר נכון לכל אופרטור שיש לו צורת ז'ורדן.

[10] ערכים בוויקיפדיה: ארתור קיילי וויליאם רואן המילטון.

טענה 5.11. קבוצת האיברים האחרונים בכל שרשרת בבסיס שרשראות של V^{λ} היא בסיס של V_{λ} וזאת לכל ערך עצמי $\lambda\in\mathbb{F}$ של f.

מסקנה 5.12. לכל ערך עצמי $\lambda\in\mathbb{F}$ של f הריבוי הגאומטרי שווה למספר השרשראות בבסיס שרשראות של V^{λ}.

מסקנה 5.13. לכל ערך עצמי $\lambda\in\mathbb{F}$ של f הריבוי הגאומטרי שלו קטן או שווה מזה האלגברי ומתקיים שוויון אם"ם $V_{\lambda}=V^{\lambda}$.

- ♣ מכאן נובע ש-f לכסין אם"ם יש ל-f צורת ז'ורדן (כלומר ניתן להציג את V כסכום ישר של מרחבים עצמיים מוכללים) ובנוסף לכל $\lambda\in\sigma\left(f\right)$ הריבוי האלגברי של λ שווה לזה הגאומטרי.

- ♣ נניח של-f יש צורת ז'ורדן, כפי שראינו ניתן לקבוע אם f לכסין ומהם הערכים העצמיים שלו ע"י μ_f ו-χ_f; נניח ש-f לכסין ונרצה למצוא את הצורה האלכסונית שלו ו/או בסיס מלכסן, כדי לבצע זאת נפעל ע"פ השלבים הבאים:

1. יש לנו כבר את χ_f שכן על פיו קבענו ש-f לכסין (אם קבענו בדרך אחרת אז יש לחשב אותו), א"כ אנחנו יודעים מהם הערכים העצמיים של f אך יותר מזה - מספר ההופעות של כל אחד מהם בצורה האלכסונית הוא הריבוי האלגברי שלו ב-χ_f - לכן כבר עכשיו אנחנו יודעים בדיוק איך נראית הצורה האלכסונית של f (עוד לפני שמצאנו בסיס מלכסן), נסמן אותה ב-D.
2. לכל $\lambda\in\sigma\left(f\right)$ נמצא בסיס ל-$V_{\lambda}=\ker\left(f-\lambda\right)$ ע"י מציאת בסיס למרחב הפתרונות של הממ"ל:

$$0=\left(\left[f\right]_{\mathcal{B}}-\lambda\cdot I_n\right)\cdot x$$

(כאשר $\mathcal{B}$ הוא בסיס כלשהו של V) וחילוץ הווקטורים המתאימים ב-V (כל וקטור בבסיס של מרחב הפתרונות הוא וקטור קואורדינטות של וקטור ב-V ע"פ הבסיס $\mathcal{B}$).

3. נשרשר את הבסיסים זה לזה ונקבל בסיס מלכסן.

5.1 ניתוח אופרטור ע"פ צורת ז'ורדן, הפולינום המינימלי והפולינום האופייני

תהא J צורת ז'ורדן של אופרטור f ויהי $\lambda\in\sigma\left(f\right)$ ונניח שהמטריצה הבאה היא הבלוק המתאים ל-λ ב-J:

$$J\left(\lambda\right)=\left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{h_1}\left(\lambda\right) & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & J_{h_2}\left(\lambda\right) & \cdots & 0\\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0\\ \hline 0 & 0 & \cdots & J_{h_s}\left(\lambda\right) \end{array}\right]$$

מאחורי צורת ז'ורדן מסתתר בסיס שרשראות המורכב מבסיסי שרשראות של המרחבים העצמיים המוכללים, כל בלוק ז'ורדן אלמנטרי מייצג שרשרת אחת ולכן:

- מספר השרשראות של λ שווה למספר הבלוקים האלמנטריים בעלי ע"ע λ המופיעים בצורת ז'ורדן, במקרה שלנו זה אומר שמספר השרשראות הוא s.
- מכיוון שכל שרשרת מכילה בסופה וקטור עצמי ואלו פורשים את V_{λ} נדע ש-$\dim V_{\lambda}=s$ (וזהו גם הריבוי הגאומטרי של λ).
- מכיוון שכל שרשרת היא בגודל של הבלוק המתאים לה ואיחוד השרשראות של λ הוא בסיס של V^{λ} נדע שמתקיים $\dim V^{\lambda}=h_1+h_2+\ldots+h_s$, כלומר הממד של המרחב העצמי המוכלל שווה לסכום אורכי הבלוקים האלמנטריים (ששווה לגודל של $J\left(\lambda\right)$).
- מהגדרה, החזקה של $x-\lambda$ בפירוק של μ_f לגורמים היא אורך השרשרת הארוכה ביותר בבסיס השרשראות של V^{λ} ולכן זהו גם הגודל הגדול ביותר של בלוק אלמנטרי בעל ערך עצמי λ.
- ראינו לעיל שהחזקה של $x-\lambda$ בפירוק של χ_f לגורמים (הריבוי האלגברי של λ) היא $\dim V^{\lambda}$ ולכן היא שווה לסכום אורכי הבלוקים האלמנטריים (ששווה לגודל של $J\left(\lambda\right)$).

ובכיוון ההפוך:

- אם נתון לנו μ_f אנחנו יכולים לדעת מהו הבלוק האלמנטרי הגדול ביותר עבור כל ערך עצמי (כמובן שאנחנו יודעים גם מהו הספקטרום).
- אם נתון לנו χ_f אנחנו יכולים לדעת מהו סכום הגדלים של הבלוקים האלמנטריים של כל ערך עצמי (כמובן שאנחנו יודעים גם מהו הספקטרום).
- הממד של $V_\lambda = \ker(f-\lambda)$ הוא מספר הבלוקים האלמנטריים של λ.
- מספר הבלוקים האלמנטריים של λ שגודלם הוא גדול או שווה ל-k הוא $\dim\left(\ker(f-\lambda)^k\right) - \dim\left(\ker(f-\lambda)^{k-1}\right)$[11] ולכן מספר הבלוקים שגודלם הוא בדיוק k לכל $k \in \mathbb{N}$ הוא:
$$2\cdot\dim\left(\ker(f-\lambda)^k\right) - \dim\left(\ker(f-\lambda)^{k-1}\right) - \dim\left(\ker(f-\lambda)^{k+1}\right)$$
זו הסיבה לכך ששתי מטריצות ז'ורדן דומות זו לזו אס"ם הן זהות עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

ארבעת האחרונים יכולים לעזור לנו לקבוע האם מטריצות נתונות דומות זו לזו גם מבלי למצוא את צורת ז'ורדן שלהן, או להפך: ארבעת אלה יכולים לעזור לנו למצוא את צורת ז'ורדן של מטריצה נתונה גם מבלי להפעיל את כל האלגוריתם (שלושת הראשונים מביניהם מגבילים את הקומבינציות האפשריות והאחרון משמש לקביעה מוחלטת במקרה שעוד נותר ספק).

לסיכום:

מרחבים	ריבויים	שרשראות בבסיס של V^λ	צורת ז'ורדן	פולינומים
$\dim V_\lambda$	הריבוי הגאומטרי	מספר השרשראות	מספר הבלוקים	-
$\dim V^\lambda$	הריבוי האלגברי	סכום אורכי השרשראות	הגודל של $J(\lambda)$ וסכום אורכי הבלוקים	החזקה ב-χ_f
-	-	אורך השרשרת הארוכה ביותר	גודל הבלוק האלמנטרי הגדול ביותר	החזקה ב-μ_f

[11] מכל שרשרת שאורכה גדול או שווה ל-k ישנם k וקטורים בבסיס של $\ker(f-\lambda)^k$ ומכל שרשרת שאורכה קצר יותר כל השרשרת מופיעה בבסיס של $\ker(f-\lambda)^k$, באופן דומה כל שרשרת שאורכה קצר יותר מופיעה בשלמותה בבסיס של $\ker(f-\lambda)^{k-1}$ ולכן היא מחוסרת מן החשבון ומכל שרשת שאורכה גדול או שווה ל-k אנו מחסרים $k-1$ וקטורים, א"כ נשארנו עם וקטור אחד מכל שרשרת שאורכה גדול או שווה ל-k.