פונקציות אנליטיות - הגדרות בלבד

פונקציות מרוכבות - 80519

מרצה: אילון לינדנשטראוס

מתרגל: שאול (שאולי) רגימוב

סוכם ע"י שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ד, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 נוסחת קושי ומסקנותיה

הגדרה 1.1. נאמר שקבוצה $S\subseteq\mathbb{C}$ היא קבוצה כוכבית אם קיים $z\in S$ כך שלכל $w\in S$ התמונה של המסילה $I\left(w,z\right)$ מוכלת ב-S, ובמקרה כזה נאמר ש-S כוכבית ביחס ל-z.

הגדרה 1.2. נקודת הצטברות

נאמר שנקודה $z\in\mathbb{C}$ היא נקודת הצטברות של קבוצה $A\subseteq\mathbb{C}$ אם לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת נקודה $a\in A$ כך ש-$a\in B_{\varepsilon}\left(z\right)$.

טענה. תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ שאינה פונקציית האפס, לכל $z\in\Omega$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$f^{(n)}\left(z\right)\neq0$.

הגדרה 1.3. תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ שאינה פונקציית האפס. נאמר של-f יש אפס מסדר $n\in\mathbb{N}$ בנקודה $z\in\Omega$ אם $f^{(n)}\left(z\right)\neq0$ ולכל $n>k\in\mathbb{N}$ מתקיים $f^{(k)}\left(z\right)=0$, כמו כן נאמר של-f יש אפס פשוט בנקודה $z\in\Omega$ אם יש לה אפס מסדר 1 ב-z.

הגדרה 1.4. קבוצת האפסים של פונקציה

לכל פונקציה $f:\Omega\to\mathbb{C}$ נסמן $Z\left(f\right):=\left\{ z\in\Omega:f\left(z\right)=0\right\}$ ונקרא ל-$Z\left(f\right)$ קבוצת האפסים של f.

הגדרה 1.5. הרחבה רציפה של פונקציה

תהא $f:A\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה ותהא $\Omega\subseteq A$ תת-קבוצה חסומה, נאמר ש-f ניתנת להרחבה רציפה על $\overline{\Omega}$ אם קיימת פונקציה רציפה $\overline{f}:\overline{\Omega}\to\mathbb{C}$ כך שלכל $z\in\Omega$ מתקיים $\overline{f}\left(z\right)=f\left(z\right)$.

♣ אני אסמן ב-$\overline{f}$ את ההרחבה הרציפה של פונקציה f, אני לא יודע אם זה סימון מקובל או לא.

הגדרה 1.6. תהא $f:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה. נאמר של-f יש מקסימום מקומי חלש בנקודה $z_{0}\in\Omega$ אם קיים $0<r\in\mathbb{R}$ כך שלכל $z\in B_{r}\left(z_{0}\right)$ מתקיים $\left|f\left(z_{0}\right)\right|\geq\left|f\left(z\right)\right|$,
כמו כן נאמר של-f יש מינימום מקומי חלש בנקודה $z_{0}\in\Omega$ אם קיים $0<r\in\mathbb{R}$ כך שלכל $z\in B_{r}\left(z_{0}\right)$ מתקיים $\left|f\left(z_{0}\right)\right|\geq\left|f\left(z\right)\right|$.

2 לוגריתמים וארגומנטים

♣ כפי שראינו האקספוננט המרוכב אינו חח"ע ולכן אינו הפיך וממילא נוכל להגדיר את הלוגריתם הטבעי, כמו במקרים דומים שראינו בעבר[1] הפתרון הוא לצמצם את תחום ההגדרה של האקספוננט וכך למצוא הופכית מקומית.

סימון: לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ ולכל $z\in\mathbb{C}^{*}$ נסמן ב-$\arg_{\alpha}\left(z\right)$ את המספר היחיד ב-$\left[\alpha,\alpha+2\pi\right)$ המקיים:
$$\frac{z}{\left|z\right|}=\text{cis}\left(\arg_{\alpha}\left(z\right)\right)$$
וכמו כן נסמן $\log_{\alpha}\left(z\right):=\ln\left|z\right|+i\cdot\arg_{\alpha}\left(z\right)$.

מסקנה 2.1. לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ ולכל $z\in\mathbb{C}^{*}$ מתקיים:
$$z=e^{\log_{\alpha}\left(z\right)}$$

כלומר $\log_{\alpha}$ היא פונקציה חח"ע ועל מ-$\mathbb{C}^{*}$ ל-$\left\{ z\in\mathbb{C}\mid\alpha\leq\text{Im}\left(z\right)<\alpha+2\pi\right\}$, ו-$\arg_{\alpha}$ היא פונקציה חח"ע ועל מ-$\mathbb{C}^{*}$ ל-$\left[\alpha,\alpha+2\pi\right)$.

סימון: לכל $\theta\in\mathbb{R}$ נסמן $R_{\theta}:=\left\{ r\cdot\text{cis}\left(\theta\right)\mid0\leq r\in\mathbb{R}\right\}$, זוהי הקרן היוצאת מן הראשית בזווית θ.

מסקנה 2.2. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$, $\arg_{\alpha}$ ו-$\log_{\alpha}$ הן פונקציות רציפות על $\mathbb{C}\setminus R_{\alpha}$.

[1] כדי להגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות ההופכיות צמצמנו את $\sin$ ל-$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, את $\cos$ ל-$\left[0,\pi\right]$ ואת $\tan$ ל-$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

הגדרה 2.3. לוגריתם רציף וארגומנט רציף (של פונקציה)

תהא $A\subseteq\mathbb{C}$ ותהא $f:A\to\mathbb{C}^{*}$ פונקציה רציפה; פונקציה $g:A\to\mathbb{C}$ תיקרא לוגריתם רציף של f אם היא רציפה ולכל $z\in A$ מתקיים $f(z)=e^{g(z)}$, כמו כן פונקציה $\theta:A\to\mathbb{R}$ תיקרא ארגומנט רציף של g אם היא רציפה ולכל $z\in A$ מתקיים $f(z)=|f(z)|\cdot\text{cis}(\theta(z))$.

מסקנה 2.4. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$, יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ותהא $f:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה, אם $f(z)\notin R_{\alpha}$ לכל $z\in\Omega$ אז $\log_{\alpha}\circ f$ ו-$\arg_{\alpha}\circ f$ הם לוגריתם רציף וארגומנט רציף של f (בהתאמה).

הגדרה 2.5. לוגריתם אנליטי

תהא $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה פתוחה ותהא $f:\Omega\to\mathbb{C}^{*}$ פונקציה אנליטית, נאמר שפונקציה $g:\Omega\to\mathbb{C}$ היא לוגריתם אנליטי של f אם g אנליטית ולכל $z\in\Omega$ מתקיים $f(z)=e^{g(z)}$.

מסקנה 2.6. לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ הפונקציה $\log_{\alpha}$ היא לוגריתם אנליטי של פונקציית הזהות על $\mathbb{C}\setminus R_{\alpha}$.

סימון: יהי $\alpha\in\mathbb{R}$, לכל $z\in\mathbb{C}\setminus R_{\alpha}$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר את השורש ה-n-י האנליטי של z (ביחס ל-α) ע"י:

$$\sqrt[n]{z}:=e^{\frac{1}{n}\cdot\log_{\alpha}(z)}$$

נסמן גם $\sqrt[n]{0}:=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

כעת ניתן גם להגדיר חזקה רציונלית של מספר מרוכב $z\in\mathbb{C}^{*}$ ע"י (לכל $\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$):

$$z^{\frac{m}{n}}:=e^{\frac{m}{n}\cdot\log_{\alpha}(z)}$$

♣ למי שתהה לעצמו: אין דרך אחרת לעשות זאת משום שאין סיבה להעדיף את אחד השורשים על פני האחרים (בממשיים העדפנו את החיובי), חוסר תשומת לב לנקודה זו מובילה ל"פרדוקסים" כגון:

$$-1=i^{2}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$$

הגדרה 2.7. תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ייקרא פשוט קשר אנליטית אם לכל פונקציה אנליטית $f:\Omega\to\mathbb{C}$ יש קדומה.

♣ זהו מונח לא סטנדרטי אך בהמשך נגדיר מושג בשם תחום פשוט קשר ונראה שהם שקולים.

♣ הסקנו ממשפט מוררה שפונקציה רציפה היא אנליטית על תחום אם"ם לכל מסילה סגורה בתחום האינטגרל המסילתי של הפונקציה לאורך המסילה הוא 0, מכאן שתחום הוא פשוט קשר אנליטית אם"ם לכל מסילה סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין שתמונתה מוכלת בתחום ולכל פונקציה מרוכבת מוגדרת בתחום האינטגרל של הפונקציה לאורך המסילה הוא 0.

3 אינדקסים של מסילות

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$.

♣ החיסרון שביכולת לקבוע מהו הארגומנט של נקודה במישור המרוכב באופן רציף מהווה יתרון בתחום אחר: בהינתן מסילה סגורה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ ונקודה $z_0\in\mathbb{C}$ שאינה בתמונה של γ היינו רוצים להגדיר את מספר הפעמים ש-γ "מקיפה" את z_0, ראינו בקובץ הטענות שלמסילה $\gamma-z_0$ יש ארגומנט רציף ולכן נוכל להשתמש בו כדי לקבוע את מספר הסיבובים - הערכים שהארגומנט מחזיר עבור a ו-b צריכים לייצג את אותה זווית (כי $\gamma\left(a\right)=\gamma\left(b\right)$) ולכן ההפרש ביניהם צריך להיות כפולה שלמה של 2π! כדי להבין מדוע אותה כפולה של 2π היא מספר הסיבובים המבוקש נניח ש-$z_0=0$, הארגומנט מחזיר ערכים עבור נקודות ב-$[a,b]$, כאשר γ מסתובבת נגד כיוון השעון הערכים הולכים וגדלים ואם פתאום תחזור γ בכיוון ההפוך הם ילכו ויקטנו; אבל מתי הארגומנט יחזיר את 2π? בדיוק כאשר נגיע לנקודה שנמצאת על אותה קרן שמכילה את $\gamma\left(a\right)$ ולאחר שסיימנו הקפה שלמה סביב הראשית.

משפט. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה סגורה, יהי $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש-$z_0\notin\gamma^{*}$[2] ויהיו θ_1 ו-θ_2 ארגומנטים רציפים של המסילה $\gamma-z_0$. מתקיים:

$$\frac{\theta_1\left(b\right)-\theta_1\left(a\right)}{2\pi}=\frac{\theta_2\left(b\right)-\theta_2\left(a\right)}{2\pi}\in\mathbb{Z}$$

הגדרה 3.1. אינדקס של מסילה סביב נקודה

תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה סגורה, <u>האינדקס</u> של γ <u>סביב</u> נקודה $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש-$z_0\notin\gamma^{*}$ הוא:

$$\text{Ind}\left(\gamma,z_0\right):=n\left(\gamma,z_0\right):=\frac{\theta\left(b\right)-\theta\left(a\right)}{2\pi}$$

כאשר θ הוא ארגומנט רציף של המסילה $\gamma-z_0$.

הגדרה 3.2. הומוטופיה

תהא $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה פתוחה, יהיו a_0,b_0,a_1,b_1 כך ש-$a_0<b_0$ ו-$a_1<b_1$, ותהיינה $\gamma_0:[a_0,b_0]\to\Omega$ ו-$\gamma_1:[a_1,b_1]\to\Omega$ מסילות סגורות.

נאמר ש-γ_0 ו-γ_1 <u>הומוטופיות</u> ב-Ω אם קיימת פונקציה רציפה $H:[0,1]\times[0,1]\to\Omega$ (שתיקרא <u>הומוטופיה</u>), כך שלכל $t,s\in[0,1]$ מתקיים:

$$\begin{aligned}H\left(t,0\right)&=H\left(t,1\right)\\H\left(0,s\right)&=\gamma_0\left(\left(1-s\right)\cdot a_0+s\cdot b_0\right)\\H\left(1,s\right)&=\gamma_1\left(\left(1-s\right)\cdot a_1+s\cdot b_1\right)\end{aligned}$$

כלומר לכל $t\in[0,1]$ הפונקציה המעתיקה את s ל-$H\left(t,s\right)$ היא מסילה סגורה, ובנוסף הפונקציות המעתיקות את s ל-$H\left(0,s\right)$ ול-$H\left(1,s\right)$ הן γ_0 ו-γ_1 בהתאמה.

♣ הומוטופיות הוא יחס שקילות.

♣ הדרך הכי פשוטה לבנות הומוטופיה על שתי מסילות היא ע"י (לכל $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$):

$$H\left(t,s\right):=\left(1-t\right)\cdot\gamma_0\left(\left(1-s\right)\cdot a_0+s\cdot b_0\right)+t\cdot\gamma_1\left(\left(1-s\right)\cdot a_1+s\cdot b_1\right)$$

[2] התמונה של γ היא קבוצה קומפקטית ובפרט חסומה.

הגדרה 3.3. תחום פשוט קשר (טופולוגית)
נאמר שתחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ הוא פשוט קשר אם כל מסילה $\gamma:[a,b]\to\Omega$ הומוטופית ב-Ω למסילה קבועה.

♣ מבחינה אינטואיטיבית זה אומר שאין ב-Ω "חורים" - אם יש נקודה שאינה ב-Ω ו-Ω "מקיף" אותה אז יש ב-Ω מסילה שמקיפה את אותה נקודה, ומסילה כזו אינה ניתנת ל"כיווץ" לכדי נקודה.

4 הכללת משפט קושי ונוסחת קושי

הגדרה 4.1. מולטי-מסילה היא קבוצה מהצורה $\left\{\left(n_{1},\gamma_{1}\right),\left(n_{2},\gamma_{2}\right),\ldots,\left(n_{k},\gamma_{k}\right)\right\}$ כך ש-$n_i\in\mathbb{Z}$[3] ו-γ_i היא מסילה סגורה לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$.

♣ אינטואיטיבית מולטי-מסילה $\left\{\left(n_{1},\gamma_{1}\right),\left(n_{2},\gamma_{2}\right),\ldots,\left(n_{k},\gamma_{k}\right)\right\}$ היא חיבור של k מסילות כשלכל $k\geq i\in\mathbb{N}$ המסילה $\left(n_{i},\gamma_{i}\right)$ היא המסילה γ_i כשהיא מחוברת לעצמה n_i פעמים (אם $n_i<0$ הכוונה היא לחיבור של המסילה ההפוכה לעצמה $-n_i$ פעמים). מסיבה זו נסמן מולטי-מסילה כנ"ל ע"י:

$$\sum_{i=1}^{k}n_{i}\cdot\gamma_{i}$$

זהו סימון בלבד! בפרט לא מדובר בפונקציה המוגדרת ע"י סכום המסילות.

♣ לו היינו רוצים ממש לפרמל את הרעיון הזה היינו צריכים לקשר בין המסילות ע"י מתיחת קווים ישרים מאחת לאחרת כדי להפוך אותן למסילה סגורה אחת, במקום לעשות זאת אנחנו מגדירים מושג חדש ומגדירים עבורו את כל המושגים המתייחסים למסילות כך שיתאימו לרעיון האינטואיטיבי.

לא מצאתי שום אזכור של מולטי-מסילות ברשת, אם מישהו מצא אשמח לשמוע על כך.

הגדרה 4.2. תהא $\gamma:=\sum_{i=1}^{k}n_{i}\cdot\gamma_{i}$ מולטי-מסילה.

- התמונה של γ היא $\gamma^{*}:=\bigcup_{i=1}^{k}\gamma_{i}^{*}$.
- האינדקס של γ עבור נקודה $w\in\mathbb{C}\setminus\gamma^{*}$ הוא:

$$\text{Ind}\left(\gamma,w\right):=n\left(\gamma,w\right):=\sum_{i=1}^{k}n_{i}\cdot\text{Ind}\left(\gamma_{i},w\right)$$

- נאמר ש-γ גזירה ברציפות למקוטעין אם γ_i גזירה ברציפות למקוטעין לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$
- נניח ש-γ גזירה ברציפות למקוטעין, תהא $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה פתוחה כך ש-$\gamma^{*}\subseteq\Omega$, ותהא f פונקציה רציפה על Ω. האינטגרל של f לאורך γ הוא:

$$\int\limits_{\gamma}f\left(z\right)dz:=\sum_{i=1}^{k}n_{i}\cdot\int\limits_{\gamma_{i}}f\left(z\right)dz$$

אילון לא הגדיר תמונה של מולטי-מסילה ואת היותה גזירה ברציפות למקוטעין אך המינוח הזה יהיה שימושי בעתיד וסביר להניח שכולנו מבינים למה הכוונה.

[3] האם ייתכן ש-$n_i=0$?

5 טורי לורן

סימון: לכל $0 \le r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r_2$ ולכל $z_0 \in \mathbb{C}$ נסמן $A(z_0, r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, קבוצה מצורה זו תיקרא טבעת.

♣ במקרה שבו $r_1 = 0$ נקבל ש-$A(z_0, r_1, r_2)$ היא הסביבה המנוקבת $B'_{r_2}(z_0)$.

למה. יהי $z_0 \in \mathbb{C}$, יהיו $0 \le r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r_2$, ותהא f פונקציה אנליטית על $A(z_0, r_1, r_2)$.
לכל $R, \tilde{R} \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < R < \tilde{R} < r_2$ ולכל $w \in A\left(z_0, R, \tilde{R}\right)$ מתקיים:

$$f(w) = \int\limits_{C\left(z_0, \tilde{R}\right)} \frac{f(z)}{z - w}\, dz - \int\limits_{C(z_0, R)} \frac{f(z)}{z - w}\, dz$$

סימון: תהא $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$[4] סדרת מספרים מרוכבים, נסמן:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$$

משפט. יהי $z_0 \in \mathbb{C}$, יהיו $0 \le r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r_2$, ותהא f פונקציה אנליטית על $A(z_0, r_1, r_2)$.
קיימת סדרת מספרים מרוכבים $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ יחידה כך שמתקיים (לכל $z \in A(z_0, r_1, r_2)$):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

"טור" זה מתכנס בהחלט במ"ש[5] על תתי-קבוצות קומפקטיות של $A(z_0, r_1, r_2)$, והמקדמים בטור הם (לכל $n \in \mathbb{Z}$ ולכל $r \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r < r_2$):

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

הגדרה 5.1. טורי לורן[6]
ההצגה הנ"ל של פונקציה אנליטית על טבעת נקראת הפיתוח של הפונקציה לטור לורן סביב מרכז הטבעת[7]

♣ אם הפונקציה אנליטית על כל הדיסק ולא רק בטבעת אז טור לורן של הפונקציה הוא פשוט טור טיילור שלה (כל המקדמים בעלי אינדקס שלילי הם אפסים).

---

[4] נזכיר שסימון מעין זה מבטא סדרה אין-סופית בשני הכיוונים, או באופן פורמלי פונקציה שתחום ההגדרה שלה הוא $\mathbb{Z}$ (תחום ההגדרה של סדרות אין-סופיות רגילות הוא $\mathbb{N}$).

[5] כלומר הטורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \cdot (z - z_0)^{-n}$ מתכנסים בהחלט במ"ש.

[6] ערך בוויקיפדיה: פייר אלפונס לורן.

[7] כלומר במקרה הנ"ל זהו הפיתוח של f לטור לורן סביב z_0.

הגדרה 5.2. יהיו $z_0 \in \mathbb{C}$ ו-$0 < r \in \mathbb{R}$, תהא f פונקציה אנליטית ב-$B'_r(z_0)$ ותהא $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ סדרת המקדמים בפיתוח של f לטור לורן ב-$B'_r(z_0)$.
נאמר של-f יש סינגולריות מבודדת ב-z_0 אם f אינה אנליטית ב-z_0, ובנוסף:

- נאמר ש-z_0 היא נקודת סינגולריות סליקה של f אם הגבול $\lim_{z \to z_0} f(z)$ קיים (במובן הצר).
- נאמר ש-z_0 היא קוטב של f אם קיים $0 > k \in \mathbb{Z}$ כך ש-$a_k \neq 0$ ו-$a_l = 0$ לכל $k > l \in \mathbb{Z}$, במקרה כזה נאמר ש-z_0 קוטב מסדר k של f, ואם $k = 1$ נאמר גם ש-z_0 היא קוטב פשוט של f.
- נאמר ש-z_0 היא נקודת סינגולריות עיקרית/מהותית של f אם לכל $k \in \mathbb{Z}$ קיים $k > l \in \mathbb{Z}$ כך ש-$a_l \neq 0$.

הגדרה 5.3. תהא $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה, פונקציה f תיקרא מרומורפית על Ω אם f אנליטית על $\Omega \setminus S$ כאשר $S \subseteq \Omega$ היא קבוצה סופית או בת-מנייה ללא נקודת הצטברות וכל $s \in S$ אינה נקודת סינגולריות עיקרית של f.

♣ ניתן להסתכל על פונקציה מרומורפית כפונקציה אנליטית בספירה של רימן, שאז ∞ הוא ערך לגיטימי שהפונקציה תקבל ולכן קוטב "הופך" לסינגולריות סליקה.

הגדרה 5.4. יהי $0 < r \in \mathbb{R}$, נסמן $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$[8] ותהא f פונקציה אנליטית ב-Ω.
נתבונן ב-f כפונקציה על הספירה של רימן ונאמר של-f יש סינגולריות מבודדת ב-∞ אם f אינה אנליטית ב-∞, בנוסף נסמן ב-g את הפונקציה המוגדרת ע"י $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ (לכל $z \in B_{r^{-1}}(0)$), ואז:

- נאמר ש-∞ היא נקודת סינגולריות סליקה של f אם 0 היא נקודת סינגולריות סליקה של g.
- נאמר ש-∞ היא נקודת קוטב של f אם 0 היא קוטב של g, ואז נאמר גם שסדר הקוטב של g ב-0 הוא זה של f ב-∞.
- נאמר ש-∞ היא נקודת סינגולריות עיקרית/מהותית של f אם 0 היא נקודת סינגולריות עיקרית/מהותית של g.

הגדרה 5.5. יהי $z_0 \in \mathbb{C}$, יהיו $0 \leq r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r_2$, ותהא f פונקציה אנליטית על $A(z_0, r_1, r_2)$.
תהא $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ סדרה כך שלכל $z \in A(z_0, r_1, r_2)$ מתקיים:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

כלומר זוהי סדרת המקדמים בפיתוח של f לטור לורן סביב z_0.
נסמן $\mathrm{Res}(f, z_0) := a_{-1}$ ונקרא ל-$\mathrm{Res}(f, z_0)$ השארית של f ב-z_0.

♣ העניין שלנו ב-a_{-1} נובע מהעובדה שלכל האיברים האחרים בטור יש פונקציה קדומה על כל המישור המרוכב, ולכן כאשר נחשב אינטגרל לאורך מסילה סגורה של הטור כל האיברים הללו יתאפסו ותוותר השארית.

[8] Ω היא "סביבה מנוקבת" של ∞ בספירה של רימן.

6 הספֵירה של רימן והעתקות מביוס

עבור הגדרת הספֵירה של רימן אין צורך פורמלי בהכרת מרחבים טופולוגיים וקומפקטיפיקציה שלהם, אבל כדי להבין מה באמת קורה כאן אני חושב שראוי להקדיש להם מעט זמן.

הגדרה. מרחב טופולוגי הוא קבוצה X ואוסף תתי-קבוצות שלה $\tau\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימים את שלושת התנאים הבאים:

1. $\emptyset,X\in\tau$.
2. לכל $S\subseteq\tau$ מתקיים:
$$\bigcup_{s\in S}s\in\tau$$
3. לכל $U_{1},U_{2}\in\tau$ מתקיים $U_{1}\cap U_{2}\in\tau$ (מכאן שכל חיתוך סופי של קבוצות ב-τ שייך ל-τ).

τ תיקרא הטופולוגיה של X, תת-קבוצה $U\subseteq X$ תיקרא פתוחה אם $U\in\tau$ ותת-קבוצה $C\subseteq X$ תיקרא סגורה אם $C^{c}=X\setminus C$ היא קבוצה פתוחה.

♣ מרחבים טופולוגיים הם הכללה של המרחבים המטריים, יש בהם קבוצות פתוחות וסגורות אך הן אינן מוגדרות בהכרח ע"פ מטריקה.

הגדרה. תת-קבוצה $K\subseteq X$ במרחב טופולוגי X תיקרא קומפקטית אם לכל כיסוי פתוח שלה קיים תת-כיסוי סופי, כלומר אם לכל אוסף של קבוצות פתוחות S כך שמתקיים (זהו כיסוי פתוח):
$$K\subseteq\bigcup_{s\in S}s$$
קיימת תת-קבוצה סופית $A\subseteq S$ כך שמתקיים (זו תת-כיסוי סופי):
$$K\subseteq\bigcup_{a\in A}a$$

הגדרה. קומפקטיפיקציה חד נקודתית

יהי X מרחב טופולוגי עם טופולוגיה τ_{X}, ניקח נקודה $\infty\notin X$, ונסמן $Y:=X\cup\left\{ \infty\right\}$.
נסמן ב-τ_{Y} את הטופולוגיה של המרחב הטופולוגי Y המוגדרת כך שתת-קבוצה $U\subseteq Y$ תיקרא פתוחה אם מתקיים אחד משני התנאים הבאים:

1. U הייתה קבוצה פתוחה ב-X, כלומר $U\subseteq X$ ו-$U\in\tau_{Y}$.
2. $\infty\in U$ וגם $Y\setminus U$ היא קבוצה קומפקטית (ב-X).

♣ הרעיון הוא שכעת Y הוא מרחב קומפקטי וזה מושג ע"י הסעיף השני שמגדיר "סביבה של ∞".

הגדרה 6.1. ישרים ומעגלים במישור המרוכב

- ישר הוא קבוצה מהצורה $\{cx+w \mid x\in\mathbb{R}\}$ עבור $c,w\in\mathbb{C}$ כך ש-$c\neq 0$.
- מעגל הוא קבוצה מהצורה $\{r\cdot\operatorname{cis}(\theta)+w \mid \theta\in\mathbb{R}\}$[9] עבור $0<r\in\mathbb{R}$ ו-$w\in\mathbb{C}$.

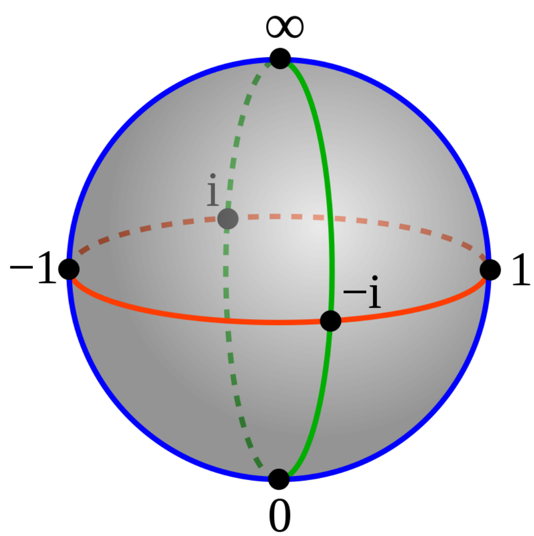
הגדרה 6.2. הספֵירה של רימן[10]

נסמן $\mathbb{P}^1:=\hat{\mathbb{C}}:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ ונאמר שתת-קבוצה $U\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ היא פתוחה אם מתקיים אחד משני התנאים הבאים:

1. U הייתה קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{C}$, כלומר $U\subseteq\mathbb{C}$ ו-U פתוחה ב-$\mathbb{C}$.
2. $U\ni\infty$ וגם $\hat{\mathbb{C}}\setminus U$ היא קבוצה קומפקטית (ב-$\mathbb{C}$) - U כזו תיקרא סביבה של ∞.

♣ הרעיון הוא שכעת $\hat{\mathbb{C}}$ הוא מרחב קומפקטי: כל תת-סדרה שבעבר לא הייתה לה תת-סדרה מתכנסת, הייתה סדרה שהערך המוחלט שלה שאף ל-∞, כלומר היא התרחקה מראשית יותר ויותר; כעת כל סדרה כזו מתכנסת ל-∞.

♣ הדרך האינטואיטיבית להסתכל על הספירה של רימן (וזו גם הסיבה לשמה) היא כעל גלובוס שהקוטב הצפוני שלו הוא ∞, הקוטב הדרומי שלו הוא 0 וקו המשווה הוא מעגל היחידה; כך:



איור 1: הספירה של רימן

מקור: התמונה שלעיל נלקחה מוויקישיתוף ומופיעה כאן ברישיון CC BY-SA 3.0.

אני ממליץ בחום לקרוא את הפוסט של גדי אלסנדרוביץ' בנושא, תמצאו שם תיאור הרבה יותר טוב משנתתי כאן, כמו גם את הרעיון כיצד לפרמל את העתקת המישור המרוכב לספירת היחידה התלת-ממדית.

♣ על הספירה של רימן אין הבדל בין קווים ישרים למעגלים - כולם מעגלים, אם תרצו להמשיך את האינטואיציה הגאוגרפית אז אלו שבעבר קראנו להם מעגלים סביב הראשית הם קווי רוחב והישרים המקבילים לצירים הם קווי אורך; כמובן שישנם מעגלים וישרים שאינם קווי אורך או רוחב, על כל פנים לכל אלו נקרא מעכשיו מעגלים מוכללים.

[9] **האם באמת יש להכניס להגדרה גם מעגלים שמרכזם אינו הראשית?**
[10] ערך בוויקיפדיה: ברנהרד רימן.

הגדרה 6.3. מעגלים מוכללים על הספירה של רימן

מעגל מוכלל הוא תת-קבוצה $A\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ כך שמתקיימת אחת משתי האפשרויות הבאות:

1. $A\subseteq\mathbb{C}$ ו-A היא מעגל כפי הגדרתו לעיל (הגדרה 6.1).
2. קיים ישר $L\subseteq\mathbb{C}$ כך ש-$A=L\cup\{\infty\}$.

♣ באופן כללי גזירות ואנליטיות על הספירה של רימן מוגדרת בדיוק באותה צורה שבה היא מוגדרת על המישור המרוכב, החריגה היחידה הוא גזירות ואנליטיות באין-סוף שאינה מוגדרת על המישור המרוכב אך נרצה שתוגדר על הספירה של רימן.

הגדרה 6.4. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה של ∞.

- נאמר ש-f גזירה ב-∞ אם קיים הגבול:

$$\lim_{w\to0}\frac{f\left(\frac{1}{w}\right)-f\left(\infty\right)}{w-0}$$

ובמקרה כזה נקרא לאותו הגבול הנגזרת של f ב-∞ ונסמן אותו ב-$f'\left(\infty\right)$.

- נאמר ש-f אנליטית ב-∞ אם f גזירה בסביבה כלשהי של ∞.
- נאמר ש-f אנליטית על קבוצה פתוחה $\Omega\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ כך ש-$\infty\in\Omega$ אם f גזירה בכל נקודה ב-Ω.
- נאמר ש-f אנליטית על קבוצה $A\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ (לאו דווקא פתוחה) אם קיימות קבוצה פתוחה $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ כך ש-$A\subseteq\Omega$ ופונקציה $g:\Omega\to\hat{\mathbb{C}}$ אנליטית על Ω, ובנוסף $f\left(z\right)=g\left(z\right)$ לכל $z\in A$.
- נאמר ש-f אנליטית אם היא אנליטית על כל תחום הגדרתה.

הגדרה 6.5. העתקות מביוס[11]

העתקת מביוס היא פונקציה T המוגדרת ע"י (לכל $z\in\mathbb{C}$ כך שהביטוי מוגדר):

$$T\left(z\right):=\frac{az+b}{cz+d}$$

עבור $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ כך ש-$ad-bc\neq0$.

♣ נראה בהמשך שהדרישה $ad-bc\neq0$ באה לומר ש-T הפיכה.

♣ נשים לב לכך שלכל $0\neq\lambda\in\mathbb{C}$ מתקיים:

$$\frac{\lambda a\cdot z+\lambda\cdot b}{\lambda c\cdot z+\lambda\cdot d}=\frac{az+b}{cz+d}$$

כלומר ההצגה של העתקת מביוס באופן הנ"ל אינה יחידה, אנחנו נראה בהמשך שכל ההצגות של העתקת מביוס אחת בצורה זו נבדלות אך ורק בכפל בסקלר.

[11] נקראות על שם אוגוסט פרדיננד מביוס.

7 פונקציות הרמוניות

הגדרה 7.1. פונקציה הרמונית

יהי $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ תחום, נאמר שפונקציה $f : \Omega \to \mathbb{R}$ היא פונקציה הרמונית על Ω אם היא דיפרנציאבילית פעמיים ברציפות (במובן הממשי)[12] ומקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית החלקית הבאה:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

♣ ההגדרה ניתנת להרחבה גם עבור פונקציות מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}$.

הגדרה 7.2. יהי $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהיינה u ו-v שתי פונקציות הרמוניות על Ω, נאמר שהזוג הסדור (u, v) הוא זוג פונקציות משלימות אם מתקיימות המשוואות הדיפרנציאליות החלקיות הבאות:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

♣ לפונקציה הרמונית יש פונקציה משלימה יחידה עד חיבור של קבוע, הסיבה לכך היא שהנגזרות החלקיות של כל פונקציה משלימה נקבעות כבר ע"י הפונקציה הראשונה ולכן השינוי היחיד שאפשר לבצע הוא הוספת קבוע.

♣ במקומות אחרים אומרים ש-v היא צמודה הרמונית של u.

מסקנה 7.3. יהי $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהיינה $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ שתי פונקציות, שלושת הפסוקים הבאים שקולים:

1. הפונקציה $u + iv$ היא פונקציה אנליטית.
2. (u, v) הוא זוג פונקציות משלימות.
3. $(v, -u)$ הוא זוג פונקציות משלימות.

♣ כדי להוכיח את השקילות לפסוק השלישי נכפול את $u + iv$ ב-$-i$, (באותה מידה כל קבוע אחר שאינו 0 ייתן שקילות לפונקציות המתאימות).

[12] דיפרנציאביליות פעמיים ברציפות שקולה לכך שכל הנגזרות החלקיות השניות רציפות.