מרחבי מכפלה פנימית - הוכחות נבחרות

אלגברה ליניארית (2) - 80135

מרצה: איתמר צביק

מתרגלים: גיל לבנה ויואב כהן

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

תודתי נתונה לגלעד שרם על סיכומיו המצוינים שהיו לי לעזר רב עד כדי כך שניתן לומר שהסיכום הזה מבוסס על סיכומיו.

סיכומי קורס זה מוקדשים לאהרון כהן;
אהרון, הידיעה שתקרא את הסיכומים הללו דרבנה אותי לאורך כל הדרך.
בהצלחה!

* * *

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 מכפלות פנימיות

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל לשדה $\mathbb{F}$ (מהגדרה $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).

1.1 התחלה

טענה 1.1. יהי $v \in V$, אם $\langle v \mid w \rangle = 0$ לכל $w \in V$ אז $v = 0_V$.

מסקנה 1.2. יהיו $v_1, v_2 \in V$, אם מתקיים $\langle v_1 \mid w \rangle = \langle v_2 \mid w \rangle$ לכל $w \in V$ אז $v_1 = v_2$.

טענה 1.3. יהי $0_V \neq w \in V$, לכל $v \in V$ קיים $c \in \mathbb{F}$ יחיד כך שמתקיים $w \perp (v - c \cdot w)$, את אותו c ניתן לחשב ע"י:

$$c = \frac{\langle w \mid v \rangle}{\langle w \mid w \rangle}$$

♣ נשים לב: $v = (v - c \cdot w) + c \cdot w$, כלומר $c \cdot w$ הוא הרכיב של v בכיוון של w ו-$v - c \cdot w$ הוא הרכיב של v בכיוון המאונך על המישור שפורשים שניהם.

הוכחה. לכל $c \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$0 = \langle w \mid v - c \cdot w \rangle = \langle w \mid v \rangle - c \cdot \langle w \mid w \rangle \iff c = \frac{\langle w \mid v \rangle}{\langle w \mid w \rangle}$$

■

1.2 נורמה ומרחק

משפט 1.4. משפט הקוסינוסים

לכל $v, w \in V$ מתקיים:

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}\, \langle v \mid w \rangle$$

♣ בקובץ ההקדמה ראינו שעבור המכפלה הסקלרית מעל הממשיים מתקיים $\langle v \mid w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta$ כאשר θ היא הזווית שבין v ל-w.

הוכחה. לכל $v, w \in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 &= \left(\sqrt{\langle v + w \mid v + w \rangle}\right)^2 = \langle v + w \mid v + w \rangle \\
&= \langle v \mid v + w \rangle + \langle w \mid v + w \rangle \\
&= \langle v \mid v \rangle + \langle v \mid w \rangle + \overline{\langle v \mid w \rangle} + \langle w \mid w \rangle \\
&= \left(\sqrt{\langle v \mid v \rangle}\right)^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}\, \langle v \mid w \rangle + \left(\sqrt{\langle w \mid w \rangle}\right)^2 \\
&= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}\, \langle v \mid w \rangle
\end{aligned}$$

■

מסקנה 1.5. משפט פיתגורס
לכל $v,w\in V$ מתקיימים שני הפסוקים הבאים:

- אם $v\perp w$ אז $\left\Vert v+w\right\Vert ^{2}=\left\Vert v\right\Vert ^{2}+\left\Vert w\right\Vert ^{2}$.
- אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז $v\perp w\iff\left\Vert v+w\right\Vert ^{2}=\left\Vert v\right\Vert ^{2}+\left\Vert w\right\Vert ^{2}$.

♣ למי שתהה לעצמו: המשפט והמסקנה האחרונים אינם מאפשרים להוכיח את משפט פיתגורס הגאומטרי ואת משפט הקוסינוסים הטריגונומטרי, הרי הגדרנו את הנורמה ע"פ משפט פיתגורס ($\left\Vert v\right\Vert :=\sqrt{\left\langle v\mid v\right\rangle }$).

מסקנה 1.6. יהי $0_{V}\neq w\in V$, לכל $v\in V$ מתקיים $\left\Vert v\right\Vert ^{2}=\left\Vert v-p_{w}\left(v\right)\right\Vert ^{2}+\left\Vert p_{w}\left(v\right)\right\Vert ^{2}$.

משפט 1.7. אי-שוויון קושי-שוורץ[1]
לכל $v,w\in V$ מתקיים $\left|\left\langle v\mid w\right\rangle \right|\leq\left\Vert v\right\Vert \cdot\left\Vert w\right\Vert$ ומתקיים שוויון אם"ם v ו-w תלויים ליניארית.

♣ א"ש קושי-שוורץ הוא בעצם ההכללה של השוויון $v\cdot w=\left\Vert v\right\Vert \cdot\left\Vert w\right\Vert \cdot\cos\theta$ ב-$\mathbb{R}^{n}$ (כאשר θ היא הזווית הקטנה בין v ל-w)[2], והוא מאפשר לנו להגדיר זווית בממ"פ כללי (לא עשינו זאת בכיתה):
$$\theta:=\arccos\left(\frac{\left\langle v\mid w\right\rangle }{\left\Vert v\right\Vert \cdot\left\Vert w\right\Vert }\right)$$

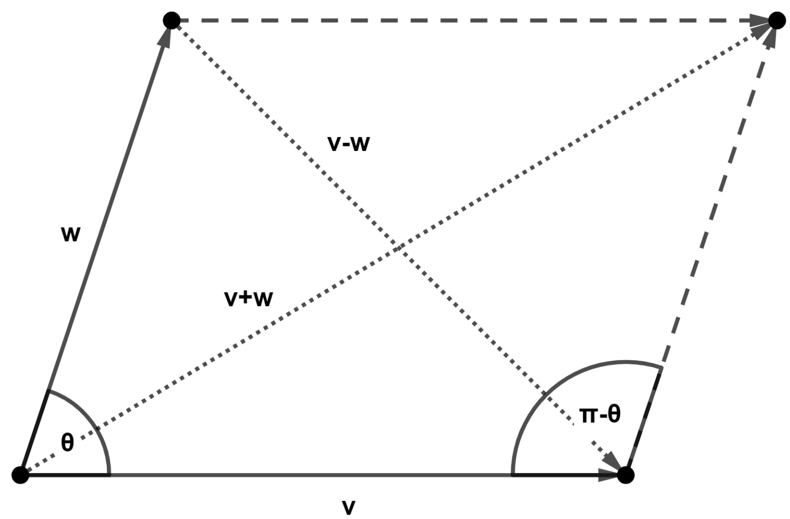
הוכחה. אם $w=0_{V}$ אז המשפט טריוויאלי, אחרת ממסקנה קיים $c\in\mathbb{F}$ כך ש-$\left\Vert v\right\Vert ^{2}=\left\Vert v-c\cdot w\right\Vert ^{2}+\left\Vert c\cdot w\right\Vert ^{2}$,
$$\Rightarrow\left\Vert c\cdot w\right\Vert ^{2}\leq\left\Vert v\right\Vert ^{2}$$
נשים לב שמתקיים $\left\Vert c\cdot w\right\Vert ^{2}=\left\Vert v\right\Vert ^{2}$ אם"ם $\left\Vert v-c\cdot w\right\Vert ^{2}=0$ וזה קורה אם"ם $v-c\cdot w=0_{V}$, כלומר כאשר v ו-w תלויים ליניארית.
$$\begin{aligned}\left\Vert c\cdot w\right\Vert ^{2}=\left|c\right|^{2}\cdot\left\Vert w\right\Vert ^{2} & =\left(\frac{\left\langle w\mid v\right\rangle }{\left\langle w\mid w\right\rangle }\right)^{2}\cdot\left\Vert w\right\Vert ^{2}\\
 & =\left(\frac{\left\langle w\mid v\right\rangle }{\left\Vert w\right\Vert ^{2}}\right)^{2}\cdot\left\Vert w\right\Vert ^{2}=\frac{\left\langle w\mid v\right\rangle ^{2}}{\left\Vert w\right\Vert ^{2}}
\end{aligned}$$
$$\Rightarrow\frac{\left\langle w\mid v\right\rangle ^{2}}{\left\Vert w\right\Vert ^{2}}\leq\left\Vert v\right\Vert ^{2}\Rightarrow\left\langle w\mid v\right\rangle ^{2}\leq\left\Vert v\right\Vert ^{2}\cdot\left\Vert w\right\Vert ^{2}$$
$$\Rightarrow\left|\left\langle v\mid w\right\rangle \right|=\left|\left\langle w\mid v\right\rangle \right|\leq\left\Vert v\right\Vert \cdot\left\Vert w\right\Vert$$
■

[1] ערך בוויקיפדיה: הרמן שוורץ.
[2] וזאת מכיוון ש-$\left|\cos\theta\right|\leq1$ ו-$\theta>\frac{\pi}{2}$ (מה שגורר את $\cos\theta<0$) אם"ם $v\cdot w<0$.

משפט 1.8. חוק המקבילית
לכל $v,w\in V$ מתקיים:

$$\left\Vert v+w\right\Vert ^{2}+\left\Vert v-w\right\Vert ^{2}=2\cdot\left(\left\Vert v\right\Vert ^{2}+\left\Vert w\right\Vert ^{2}\right)$$

♣ כמו שמשפט פיתגורס הוא משפט בגאומטריה אוקלידית גם חוק המקבילית הוא משפט כזה, נוכיח אותו במישור[3]:



איור 1: חוק המקבילית

ממשפט הקוסינוסים נובע שמתקיים (כאשר θ היא הזווית הקטנה שבין v ו-w):

$$\begin{aligned}\left\Vert v-w\right\Vert ^{2} & =\left\Vert v\right\Vert +\left\Vert w\right\Vert -2\cdot\left\Vert v\right\Vert \cdot\left\Vert w\right\Vert \cdot\cos\left(\theta\right)\\
\left\Vert v+w\right\Vert ^{2} & =\left\Vert v\right\Vert +\left\Vert w\right\Vert -2\cdot\left\Vert v\right\Vert \cdot\left\Vert w\right\Vert \cdot\cos\left(\pi-\theta\right)\\
 & =\left\Vert v\right\Vert +\left\Vert w\right\Vert +2\cdot\left\Vert v\right\Vert \cdot\left\Vert w\right\Vert \cdot\cos\left(\theta\right)
\end{aligned}$$

ולכן $\left\Vert v+w\right\Vert ^{2}+\left\Vert v-w\right\Vert ^{2}=2\cdot\left(\left\Vert v\right\Vert ^{2}+\left\Vert w\right\Vert ^{2}\right)$.

הוכחה. מתקיים:

$$\begin{aligned}\left\Vert v+w\right\Vert ^{2}+\left\Vert v-w\right\Vert ^{2} & =\left\langle v+w\mid v+w\right\rangle +\left\langle v-w\mid v-w\right\rangle \\
 & =\left\langle v\mid v\right\rangle +\left\langle v\mid w\right\rangle +\left\langle w\mid v\right\rangle +\left\langle w\mid w\right\rangle +\left\langle v\mid v\right\rangle +\left\langle v\mid -w\right\rangle +\left\langle -w\mid v\right\rangle +\left\langle -w\mid -w\right\rangle \\
 & =\left\langle v\mid v\right\rangle +\left\langle v\mid w\right\rangle +\left\langle w\mid v\right\rangle +\left\langle w\mid w\right\rangle +\left\langle v\mid v\right\rangle -\left\langle v\mid w\right\rangle -\left\langle w\mid v\right\rangle +\left\langle w\mid w\right\rangle \\
 & =\left\langle v\mid v\right\rangle +\left\langle w\mid w\right\rangle +\left\langle v\mid v\right\rangle +\left\langle w\mid w\right\rangle =2\cdot\left(\left\langle v\mid v\right\rangle +\left\langle w\mid w\right\rangle \right)=2\cdot\left(\left\Vert v\right\Vert ^{2}+\left\Vert w\right\Vert ^{2}\right)
\end{aligned}$$

■

משפט 1.9. אי-שוויון המשולש
לכל $v,w\in V$ מתקיים $\left\Vert v+w\right\Vert \leq\left\Vert v\right\Vert +\left\Vert w\right\Vert$ ומתקיים שוויון אם"ם קיים $0\leq c\in\mathbb{R}$ כך ש-$v=c\cdot w$.

[3] נשתמש בסימונים v ו-w כווקטורים ב-$\mathbb{R}^{2}$ אך ההוכחה לא תעשה שום שימוש בתכונות של מרחבים וקטוריים אלא בטריגונומטריה בלבד.

הוכחה. יהיו $v,w\in V$.

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2&=\langle v+w\mid v+w\rangle=\langle v\mid v\rangle+\langle v\mid w\rangle+\langle w\mid v\rangle+\langle w\mid w\rangle\\&=\langle v\mid v\rangle+\langle v\mid w\rangle+\overline{\langle v\mid w\rangle}+\langle w\mid w\rangle\\&=\|v\|^2+2\cdot\mathrm{Re}\langle v\mid w\rangle+\|w\|^2\\&\le\|v\|^2+2\cdot|\langle v\mid w\rangle|+\|w\|^2\\&\le\|v\|^2+2\cdot\|v\|\cdot\|w\|+\|w\|^2\\&=(\|v\|+\|w\|)^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\|v+w\|\le\|v\|+\|w\|$$

נשים לב שמתקיים שוויון אם"ם $\mathrm{Re}\langle v\mid w\rangle=|\langle v\mid w\rangle|=\|v\|\cdot\|w\|$; השוויון הימני מתקיים אם"ם v ו-w תלויים ליניארית (א"ש קושי-שוורץ), והשמאלי מתקיים אם"ם $0\le\mathrm{Re}\langle v\mid w\rangle$ וגם v ו-w תלויים ליניארית (שאז $\langle v\mid w\rangle\in\mathbb{R}$ ולכן $\mathrm{Re}\langle v\mid w\rangle=\langle v\mid w\rangle$), וזה קורה אם"ם קיים $0\le c\in\mathbb{R}$ כך ש-$v=c\cdot w$. ■

1.3 ניצבות

טענה 1.10. וקטור האפס הוא הווקטור היחיד שניצב לעצמו והיחיד שניצב לכל וקטור אחר.

טענה 1.11. יהיו $v\in V$ ו-$S,T\subseteq V$, מתקיים:

1. $S\perp v$ אם"ם $v\perp\mathrm{span}S$.
2. $S\perp T$ אם"ם $\mathrm{span}S\perp\mathrm{span}T$.
3. אם $S\subseteq T$ אז $T^\perp\subseteq S^\perp$.

משפט 1.12 תהא $U:=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ סדרה אורתונורמלית של וקטורים ב-V, מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. U בת"ל.
2. לכל $v\in V$ ולכל $n\ge r\in\mathbb{N}$ מתקיים:
$$\left(v-\sum_{i=1}^{r}\langle u_i\mid v\rangle\cdot u_i\right)\perp\mathrm{span}(u_1,u_2,\ldots,u_r)$$
3. אם V נ"ס ו-$n=\dim V$ (כלומר U הוא בסיס סדור אורתונורמלי) אז לכל $v\in V$ מתקיים:
$$v=\sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid v\rangle\cdot u_i$$

הוכחה. את הפסוק הראשון כבר ראינו בקובץ ההגדרות, הפסוק השני נובע מהשוויון (לכל $r\ge j\in\mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}\left\langle u_j\;\middle|\;v-\sum_{i=1}^{r}\langle u_i\mid v\rangle\cdot u_i\right\rangle&=\langle u_j\mid v\rangle-\sum_{i=1}^{r}\left(\langle u_i\mid v\rangle\cdot\langle u_j\mid u_i\rangle\right)\\&=\langle u_j\mid v\rangle-\sum_{i=1}^{r}\left(\langle u_i\mid v\rangle\cdot\delta_{ij}\right)\\&=\langle u_j\mid v\rangle-\langle u_j\mid v\rangle=0\end{aligned}$$

והשלישי נובע מהעובדה שווקטור האפס הוא היחיד שמאונך לכל המרחב (טענה 1.10). ■

מסקנה 1.13. תהא $\mathcal{B} := (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ סדרה אורתוגונלית של וקטורים ב-V כך ש-$b_i \neq 0_V$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$, מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. $\mathcal{B}$ בת"ל.
2. לכל $v \in V$ ולכל $n \geq r \in \mathbb{N}$ מתקיים:
$$\left(v - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle b_i \mid v \rangle}{\langle b_i \mid b_i \rangle} \cdot b_i\right) \perp \operatorname{span}(b_1, b_2, \ldots, b_r)$$
כלומר:
$$\left(v - \sum_{i=1}^{r} p_{b_i}(v)\right) \perp \operatorname{span}(b_1, b_2, \ldots, b_r)$$
3. אם V נ"ס ו-$n = \dim V$ (כלומר $\mathcal{B}$ הוא בסיס סדור אורתוגונלי) אז לכל $v \in V$ מתקיים:
$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle b_i \mid v \rangle}{\langle b_i \mid b_i \rangle} \cdot b_i = \sum_{i=1}^{n} p_{b_i}(v)$$

הוכחה. את הפסוק הראשון ראינו כבר בקובץ ההגדרות, השני והשלישי נובעים מהעובדה שלכל $v \in V$ ולכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ מתקיים[4]:
$$\left\langle \frac{1}{\|b_i\|} \cdot b_i \;\middle|\; v \right\rangle \cdot \frac{1}{\|b_i\|} \cdot b_i = \frac{1}{\|b_i\|} \cdot \langle b_i \mid v \rangle \cdot \frac{1}{\|b_i\|} \cdot b_i = \frac{\langle b_i \mid v \rangle}{\|b_i\|^2} \cdot b_i = \frac{\langle b_i \mid v \rangle}{\langle b_i \mid b_i \rangle} \cdot b_i$$
והרי $\frac{1}{\|b_i\|} \cdot b_i$ הוא וקטור יחידה. ■

אלגוריתם 1 תהליך גרם-שמידט (Gram–Schmidt)

תהא $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ סדרת וקטורים בת"ל ב-V, נרצה למצוא סדרה אורתונורמלית $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ כך שלכל $m \geq r \in \mathbb{N}$ מתקיים:
$$\operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_r) = \operatorname{span}(u_1, u_2, \ldots, u_r)$$
יהי $m \geq r \in \mathbb{N}$, נסמן $u_1 := \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1$ (מהגדרה $v_1 \neq 0_V$ ולכן $\|v_1\| \neq 0$) ו-$k := 2$.
כל עוד $k \leq r$:

- נסמן:
$$v'_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k \mid u_i \rangle \cdot u_i$$
$$u_k := \frac{1}{\|v'_k\|} \cdot v'_k$$
כעת $v'_k \perp u_i$ לכל $k-1 \geq i \in \mathbb{N}$ ולכן u_k הוא וקטור יחידה המאונך ל-u_i לכל $k-1 \geq i \in \mathbb{N}$ ולכן $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ היא סדרה אורתונורמלית.
בנוסף, מכיוון שבשלב הקודם התקיים $\operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) = \operatorname{span}(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1})$ ו-u_k הוא צר"ל של $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ **שאינו** צר"ל של $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ נדע שמתקיים $\operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \operatorname{span}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$.

♣ אם אנחנו רוצים רק סדרה אורתוגונלית שאינה בהכרח אורתונורמלית ניתן לוותר על הנרמול להמשיך עם v'_k.

- נסמן $k := k + 1$ ונעבור לשלב הבא בלולאה.

לאחר שנסתיימה ריצת הלולאה נקבל ש-$(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ היא סדרה אורתונורמלית המקיימת את הנדרש.

---

[4] אין צורך להצמיד את $\frac{1}{\|b_i\|}$ מפני שהוא מספר ממשי מהגדרתו.

הוכחה. למעשה ההסבר שניתן בגוף האלגוריתם אמור להספיק, מי שמתעקש לקבל הסבר פורמלי מלא מתבקש להמשיך לקרוא.
ע"פ המשפט הקודם (1.12), בכל שלב של הלולאה מתקיים $v'_k \perp \text{span}\left(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\right)$ ולכן גם $u_k \perp \text{span}\left(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\right)$ ומכאן ש-$\left(u_1, u_2, \ldots, u_k\right)$ היא סדרה אורתונורמלית ובפרט בת"ל, אך מהגדרה מתקיים:

$$\begin{aligned}\text{span}\left(u_1, u_2, \ldots, u_k\right) &\subseteq \text{span}\left(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, v_k\right) \subseteq \text{span}\left(u_1, u_2, \ldots u_{k-2}, v_{k-1}, v_k\right)\\ &\subseteq \ldots \subseteq \text{span}\left(u_1, u_2, \ldots u_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k\right) \subseteq \text{span}\left(v_1, v_2, \ldots, v_k\right)\end{aligned}$$

ומכיוון ש-$\dim\left(\text{span}\left(u_1, u_2, \ldots, u_k\right)\right) = k = \dim\left(\text{span}\left(v_1, v_2, \ldots, v_k\right)\right)$
נדע שמתקיים $\text{span}\left(u_1, u_2, \ldots, u_k\right) = \text{span}\left(v_1, v_2, \ldots, v_k\right)$. ■

מסקנה 1.14. לכל ממ"פ נ"ס (אוקלידי או הרמיטי) יש בסיס אורתונורמלי.

משפט 1.15. נניח ש-V נ"ס ויהי $\left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right)$ בסיס אורתונורמלי של V, לכל $v, w \in V$ ולכל $n \geq m \in \mathbb{N}$ מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. זהות פרסבל[5]:

$$\langle v \mid w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle u_i \mid v\rangle} \cdot \langle u_i \mid w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v \mid u_i\rangle \cdot \langle u_i \mid w\rangle$$

2. זהות בסל (Bessel)[6]:

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\langle u_i \mid v\rangle\right|^2 = \|v\|^2$$

3. א"ש בסל:

$$\sum_{i=1}^{m} \left|\langle u_i \mid v\rangle\right|^2 \leq \|v\|^2$$

הוכחה. יהיו $v, w \in V$, ממשפט 1.12 נובע שמתקיים:

$$\begin{aligned}\langle v \mid w\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle u_i \mid v\rangle \cdot u_i \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} \langle u_j \mid w\rangle \cdot u_j \right\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\langle u_i \mid v\rangle} \cdot \langle u_j \mid w\rangle \cdot \langle u_i \mid u_j\rangle \right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\langle u_i \mid v\rangle} \cdot \langle u_j \mid w\rangle \cdot \delta_{ij} \right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle u_i \mid v\rangle} \cdot \langle u_i \mid w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v \mid u_i\rangle \cdot \langle u_i \mid w\rangle\end{aligned}$$

א"כ הוכחנו את זהות פרסבל.

[5] ערך בוויקיפדיה: מארק אנטואן פרסבל.
[6] ערך בוויקיפדיה: פרידריך בסל.

כדי להוכיח את זהות בסל נזכור ש-$|z|^2 = \overline{z} \cdot z$ לכל $z \in \mathbb{F}$ (נזכור ש-$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או ש-$\mathbb{F} = \mathbb{C}$) ולכן מזהות פרסבל נובע שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle v \mid u_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle u_i \mid v \rangle} \cdot \langle u_i \mid v \rangle = \langle v \mid v \rangle = \|v\|^2$$

א"ש בסל נובע מהעובדה שכל המחוברים באגף שמאל הם ממשיים וחיוביים. ■

♣ הפסוק השלישי במשפט 1.12 והראשון במשפט זה (זהות בסל) מראים לנו שאם V נ"ס אז לכל בסיס של V קיימת מכפלה פנימית יחידה כך שאותו בסיס יהיה אורתונורמלי:

נניח ש-$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ הוא בסיס כלשהו של V ואנו רוצים להגדיר מכפלה פנימית $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to V$ כך שהוא בסיס אורתונורמלי, יהיו $v, w \in V$ ויהיו $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים:

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i, \;\; w = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot u_i$$

ממשפט 1.12 נובע שאם קיימת מכפלה פנימית כזו אז היא צריכה לקיים $\langle u_i \mid v \rangle = a_i$ ו-$\langle u_i \mid w \rangle = b_i$ ואז מזהות פרסבל נובע שהיא מוכרחת לקיים גם:

$$\langle v \mid w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle u_i \mid v \rangle} \cdot \langle u_i \mid w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} \cdot b_i$$

ולכן אם היא קיימת אז היא יחידה, מצד שני ברור שזוהי מכפלה פנימית מאותן סיבות שהמכפלה הסקלרית היא מכפלה פנימית.

מסקנה 1.16. נניח ש-V נ"ס, לכל בסיס אורתונורמלי U של V ולכל $v, w \in V$ מתקיים[7]:

$$\langle v \mid w \rangle = [v]_U \cdot [w]_U$$

1.4 הטלות על תתי-מרחבים וקטוריים

נניח ש-V נ"ס.

טענה 1.17. יהי $W \subseteq V$ תמ"ו, מתקיים $V = W \oplus W^\perp$.

הוכחה. ניקח בסיס של W, נרחיב אותו לבסיס של V ונפעיל על הבסיס המורחב את אלגוריתם גרם-שמידט, א"כ קיבלנו סדרה אורתונורמלית $(w_1, w_2, \ldots, w_k; u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n)$ כך ש-$W = \text{span}(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ ו-$V = \text{span}(w_1, w_2, \ldots, w_k, u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n)$; נשים לב לכך שמהגדרה מתקיים $V = \text{span}(w_1, w_2, \ldots, w_k) \oplus \text{span}(u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n)$ ו-$\text{span}(w_1, w_2, \ldots, w_k) \perp \text{span}(u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n)$ ומכאן ש-$\text{span}(u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n) \subseteq W^\perp$, מצד שני לכל $v \in W^\perp$ מתקיים (משפט 1.12):

$$v = \sum_{i=1}^{k} \langle w_i \mid v \rangle \cdot w_i + \sum_{j=k+1}^{n} \langle u_j \mid v \rangle \cdot u_j = \sum_{j=k+1}^{n} \langle u_j \mid v \rangle \cdot u_j \in \text{span}(u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n)$$

ולכן $W^\perp \supseteq \text{span}(u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n)$, כלומר $\text{span}(u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n) = W^\perp$ ו-$V = \text{span}(w_1, w_2, \ldots, w_k) \oplus \text{span}(u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n) = W \oplus W^\perp$. ■

מסקנה 1.18. יהי $W \subseteq V$ תמ"ו, מתקיים $\left(W^\perp\right)^\perp = W$.

[7] הכפל באגף ימין הוא המכפלה הסקלרית.

משפט 1.19. יהי $V \subseteq W$ תמ"ו, בהינתן בסיס אורתוגונלי $(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ של W מתקיים (לכל $v \in V$):

$$p_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w_i \mid v\rangle}{\langle w_i \mid w_i\rangle} \cdot w_i = \sum_{i=1}^{k} p_{w_i}(v)$$

♣ אם $(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ אורתונורמלי נקבל:

$$p_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle w_i \mid v\rangle \cdot w_i$$

הוכחה. יהי $v \in V$ ויהי $(u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_n)$ בסיס אורתוגונלי של $W^{\perp}$, א"כ $(w_1, w_2, \ldots, w_k; u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n)$ הוא בסיס אורתוגונלי של V ולכן מתקיים:

$$\begin{aligned} p_W(v) &= p_W\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w_i \mid v\rangle}{\langle w_i \mid w_i\rangle} \cdot w_i + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\langle u_j \mid v\rangle}{\langle u_j \mid u_j\rangle} \cdot u_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w_i \mid v\rangle}{\langle w_i \mid w_i\rangle} \cdot p_W(w_i) + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\langle u_j \mid v\rangle}{\langle u_j \mid u_j\rangle} \cdot p_W(u_j) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w_i \mid v\rangle}{\langle w_i \mid w_i\rangle} \cdot w_i + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\langle u_j \mid v\rangle}{\langle u_j \mid u_j\rangle} \cdot 0_V = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w_i \mid v\rangle}{\langle w_i \mid w_i\rangle} \cdot w_i \end{aligned}$$

■

משפט 1.20. יהי $V \subseteq W$ תמ"ו, לכל $v \in V$ מתקיים $d(v, W) = \|p_{W^{\perp}}(v)\|$.

הוכחה. יהי $v \in V$, לכל $w \in W$ מתקיים:

$$\begin{aligned} \|v - w\|^2 &= \|p_{W^{\perp}}(v) + p_W(v) - w\|^2 = \langle p_{W^{\perp}}(v) + p_W(v) - w \mid p_{W^{\perp}}(v) + p_W(v) - w\rangle \\ &= \langle p_{W^{\perp}}(v) \mid p_{W^{\perp}}(v)\rangle + \langle p_{W^{\perp}}(v) \mid p_W(v) - w\rangle + \langle p_W(v) - w \mid p_{W^{\perp}}(v)\rangle + \langle p_W(v) - w \mid p_W(v) - w\rangle \\ &= \langle p_{W^{\perp}}(v) \mid p_{W^{\perp}}(v)\rangle + 0 + \langle p_W(v) - w \mid p_W(v) - w\rangle \geq \langle p_{W^{\perp}}(v) \mid p_{W^{\perp}}(v)\rangle = \|p_{W^{\perp}}(v)\|^2 \end{aligned}$$

כלומר לכל $w \in W$ מתקיים $d(v, w) = \|v - w\| \geq \|p_{W^{\perp}}(v)\|$ ולכן $d(v, W) = \inf\{d(v, w) \mid w \in W\} \geq \|p_{W^{\perp}}(v)\|$, מצד שני $d(v, p_W(v)) = \|v - p_W(v)\| = \|p_{W^{\perp}}(v)\|$ ומכאן ש-$d(v, W) = \inf\{d(v, w) \mid w \in W\} = \|p_{W^{\perp}}(v)\|$ (שהרי $p_W(v) \in W$). ■

2 מרחבים דואליים וההעתקה הצמודה

♣ אנחנו לוקחים כעת הפסקה מנושא המכפלה הפנימית ועוברים לעסוק במרחב הדואלי של מרחב וקטורי - שהוא מרחב ההעתקות הליניאריות מהמרחב לשדה, בהמשך נראה כיצד נושא מתקשר למרחבי מכפלה פנימית.
רוב מה שנכתב בפרק זה לא היה חלק מהקורס כשלמדתי אותו - החלק הפשוט של מרחבים דואליים נלמד אצל ערן נבו בקורס הקודם ואת השאר מצאתי ברשת או גיליתי בעצמי, למרות זאת ראיתי לנכון להביא את הפרק במלואו מפני שהוא ענה על שאלה שהציקה לי במשך יותר משנה: מהי המשמעות הגאומטרית של שיחלוף מטריצה?!?

יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים מעל לשדה $\mathbb{F}$.

2.1 במרחבים וקטוריים כלליים

משפט 2.1. נניח ש-V נ"ס, לכל $0 \neq f \in V^*$ מתקיים $\dim(\ker f) = \dim V - 1$.

טענה 2.2. נניח ש-W הוא תמ"ו של V ($W \subseteq V$), W^0 הוא תמ"ו של V^*.

משפט 2.3. נניח ש-V נ"ס ו-W הוא תמ"ו של V ($W \subseteq V$), מתקיים $\dim W + \dim W^0 = \dim V$.

הוכחה. יהי $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ בסיס של W ($k := \dim W$) ויהיו $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n$ כך ש-$\mathcal{B} := (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ הוא בסיס של V ($n := \dim V$).

מהגדרת הבסיס הדואלי לכל $i, j \in \mathbb{N}$ כך ש-$i \leq k < j \leq n$ מתקיים $v_j^*(v_i) = 0$ ולכן $\operatorname{span}\left(v_{k+1}^*, v_{k+2}^*, \ldots, v_n^*\right) \subseteq W^0$, מצד שני יהי $f \in W^0$ ויהיו $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i^*$$

לכל $k \geq j \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$0 = f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i^*(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \delta_{ij} = \lambda_j$$

ומכאן ש-$f \in \operatorname{span}\left(v_{k+1}^*, v_{k+2}^*, \ldots, v_n^*\right)$, כלומר $W^0 \subseteq \operatorname{span}\left(v_{k+1}^*, v_{k+2}^*, \ldots, v_n^*\right)$ ולכן $W^0 = \operatorname{span}\left(v_{k+1}^*, v_{k+2}^*, \ldots, v_n^*\right)$ וממילא $\dim W^0 = n - k = \dim V - \dim W$. ■

משפט 2.4. נניח ש-V נ"ס ותהא $\varphi : V \to V^{**}$ **העתקת ההצבה** המוגדרת ע"י $\varphi(v) := f_v$ (לכל $v \in V$), φ היא איזומורפיזם בין V ל-V^{**}.

♣ מבלבל למדי, נכון? שימו לב: φ לוקחת וקטור ב-V וצריכה להחזיר וקטור ב-V^{**}, אבל וקטור ב-V^{**} הוא העתקה ליניארית המקבלת העתקה ליניארית ב-V^* ומחזירה סקלר ב-$\mathbb{F}$, כעת נזכור שגם וקטור ב-V^* הוא העתקה ליניארית המקבלת וקטור ב-V ומחזירה סקלר ב-$\mathbb{F}$ - לכן טבעי מאד ש-φ תחזיר העתקה ליניארית ב-V^{**} שפעולתה היא להציב את הווקטור המתקבל מ-V בכל ה"ל ב-V^*.
כן, אני מודע לכך שגם ההסבר המפורט יותר מבלבל, אין מה לעשות, קחו נשימה ארוכה וקראו את הכל לאט לאט.

הוכחה. יהיו $v, w \in V$ ו-$\lambda \in \mathbb{F}$, מתקיים:

$$\varphi(v + w) = f_{v+w} = f_v + f_w = \varphi(v) + \varphi(w)$$
$$\varphi(\lambda \cdot v) = f_{\lambda \cdot v} = \lambda \cdot f_v = \lambda \cdot \varphi(v)$$

שהרי לכל $T \in V^*$ מתקיים:

$$f_{v+w}(T) = T(v + w) = T(v) + T(w) = f_v(T) + f_w(T)$$
$$f_{\lambda \cdot v}(T) = T(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot T(v) = \lambda \cdot f_v(T)$$

א"כ φ היא העתקה ליניארית.

בנוסף, φ חח"ע שכן לכל $0_V \neq v \in V$ קיימת ה"ל $T \in V^*$ כך ש-$T(v) = 1$ ולכן לכל $0_V \neq v \in V$ ההעתקה f_v אינה העתקת האפס, כלומר $\ker \varphi = \{0_V\}$; מהעובדה ש-φ חח"ע נובע מיד שהיא על שהרי $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$. ■

משפט 2.5. נניח ש-V ו-W נ"ס ותהא $\varphi : W \to W^{**}$ העתקת ההצבה כפי שהוגדרה לעיל, מתקיים $\varphi(T(v)) = T^{**}(f_v)$ לכל $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$ ולכל $v \in V$.

♣ כלומר T^{**} (שהיא העתקה מ-V^{**} ל-W^{**}) איזומורפית ל-T (שהיא העתקה מ-V ל-W) בדיוק ע"י אותו איזומורפיזם שבין V ל-V^{**} ובין W ל-W^{**}.

הוכחה. לכל $v \in V$, לכל $T \in \operatorname{Hom}(V,W)$ ולכל $g \in W^*$ מתקיים:

$$\varphi(T(v))\,g = f_{T(v)}(g) = g(T(v)) = (g \circ T)(v) = f_v(g \circ T) = f_v(T^*(g)) = (f_v \circ T^*)\,g = T^{**}(f_v)\,g$$

■

משפט 2.6. תכונות של ההעתקה הצמודה

תהא $T : V \to W$ העתקה ליניארית.

1. מתקיים $\mathrm{Id}_V^* = \mathrm{Id}_{V^*}$.
2. יהיו $S : V \to W$ העתקה ליניארית ו-$\lambda \in \mathbb{F}$, מתקיים:

$$(S+T)^* = S^* + T^*$$
$$(\lambda \cdot T)^* = \lambda \cdot T^*$$

3. יהי U גם הוא ממ"פ מעל ל-$\mathbb{F}$ ותהא $S : W \to U$ העתקה ליניארית, מתקיים:

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$$

4. אם T הפיכה אז גם T^* הפיכה ומתקיים $(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$.

הוכחה.

1. לכל $f \in V^*$ מתקיים $\mathrm{Id}_V^*(f) = f \circ \mathrm{Id}_V = \mathrm{Id}_{V^*}(f)$.
2. לכל $f \in W^*$ מתקיים:

$$(S+T)^*(f) = f \circ (S+T) = f \circ S + f \circ T$$
$$(\lambda \cdot T)^*(f) = f \circ (\lambda \cdot T) = \lambda \cdot (f \circ T) = \lambda \cdot T^*(f)$$

3. לכל $f \in U^*$ מתקיים:

$$(T \circ S)^*(f) = f \circ (T \circ S) = (f \circ T) \circ S = S^*(f \circ T) = S^*(T^*(f)) = (S^* \circ T^*)(f)$$

4. נניח ש-T הפיכה, מהסעיף הקודם ומהסעיף הראשון נובע שמתקיים:

$$\left(T^{-1}\right)^* \circ T^* = \left(T \circ T^{-1}\right)^* = \mathrm{Id}_W^* = \mathrm{Id}_{W^*}$$
$$T^* \circ \left(T^{-1}\right)^* = \left(T^{-1} \circ T\right)^* = \mathrm{Id}_V^* = \mathrm{Id}_{V^*}$$

■

2.2 במרחבי מכפלה פנימית

נניח ש-V ו-W הם מרחבי מכפלה פנימית ($\mathbb{F}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$) ונסמן ב-$\langle\cdot\mid\cdot\rangle_V$ וב-$\langle\cdot\mid\cdot\rangle_W$ את המכפלות הפנימיות שלהם[8].

משפט 2.7. משפט ההצגה של ריס[9]

נניח ש-V נ"ס, לכל $l\in V^*$ קיים $v\in V$ יחיד כך ש-$l\left(w\right)=\langle v\mid w\rangle$ לכל $w\in V$ (כלומר $l=l_v$).

♣ זה לא כל כך מפתיע כשזוכרים שפונקציונל $f:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}$ הוא בעצם כפל במטריצה מגודל $1\times n$ (וקטור שורה) וכפל מטריצות כזה שקול לחלוטין למכפלה הסקלרית עם המשוחלפת שלה (כווקטור עמודה), כלומר כל פונקציונל הוא בעצם הטלה על הכיוון של וקטור מסוים (כדי לקבל איבר ב-$\mathbb{F}$) ואז כפל בגודל של אותו וקטור (ראו בקובץ ההקדמה).

הוכחה. יהי $l\in V^*$, יהי $\left(u_1,u_2,\ldots,u_n\right)$ בסיס אורתונורמלי של V ונסמן:

$$v:=\sum_{i=1}^{n}\overline{l\left(u_i\right)}\cdot u_i$$

מכאן שלכל $n\geq j\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\langle v\mid u_j\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}\overline{l\left(u_i\right)}\cdot u_i\;\middle|\;u_j\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}l\left(u_i\right)\cdot\langle u_i\mid u_j\rangle=l\left(u_j\right)$$

מכאן שלכל $w\in V$ מתקיים:

$$l\left(w\right)=l\left(\sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid w\rangle\cdot u_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid w\rangle\cdot l\left(u_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid w\rangle\cdot\langle v\mid u_i\rangle=\langle v\mid w\rangle$$

א"כ הוכחנו את הקיום של v כנ"ל; נוכיח כעת את היחידות, יהיו $v_1,v_2\in V$ כך ש-$l\left(w\right)=\langle v_1\mid w\rangle=\langle v_2\mid w\rangle$ לכל $w\in V$, מכאן שלכל $w\in W$ מתקיים:

$$0=\langle v_1\mid w\rangle-\langle v_2\mid w\rangle=\langle v_1-v_2\mid w\rangle$$

ולכן $v_1-v_2=0_V$, כלומר $v_1=v_2$. ■

מסקנה 2.8. נניח ש-V נ"ס ותהא $\varphi:V\to V^*$ פונקציה המוגדרת ע"י $\varphi\left(v\right):=l_v$ (לכל $v\in V$), אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז φ היא איזומורפיזם בין V ל-V^* ואם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז φ היא אנטי-איזומורפיזם בין V ל-V^*.

♣ זהו איזומורפיזם / אנטי-איזומורפיזם טבעי מאד, ממש כשם שהאיזומורפיזם בין V ל-V^{**} היה טבעי, אך מכיוון שהוא טבעי רק **אחרי** הגדרת מכפלה פנימית על V אין בו שום דבר קנוני משום שכפי שראינו כבר הגדרת מכפלה פנימית שקולה לבחירת בסיס - לכל בסיס של V קיימת מכפלה פנימית המגדירה אותו כאורתונורמלי.

♣ נשים לב: לכל בסיס אורתונורמלי $\mathcal{B}:=\left(u_1,u_2,\ldots,u_n\right)$ של V מתקיים (לכל $n\geq i,j\in\mathbb{N}$):

$$l_{u_i}\left(v_j\right)=\langle u_i\mid u_j\rangle=\delta_{ij}$$

ולכן $\mathcal{B}^*=\left(l_{u_1},l_{u_2},\ldots,l_{u_n}\right)$, כלומר φ מעתיקה כל בסיס אורתונורמלי של V לבסיס הדואלי שלו ב-V^*; ניתן היה להסיק מכאן ש-φ הפיכה אך מכיוון ש-φ עלולה להיות אנטי-ליניארית זה היה דורש מעט עבודה.

[8] את המכפלה הפנימית של V נסמן גם ב-$\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ כשנעסוק בו בלבד.

[9] ערך בוויקיפדיה: פרידיש ריס.

הוכחה. ההפיכות של φ נובעת ישירות ממשפט ההצגה של ריס, א"כ נעבור להוכיח שאם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז φ היא העתקה ליניארית ואם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז היא העתקה אנטי-ליניארית.
לכל $v,w,u\in V$, לכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים:

$$l_{v+w}\left(u\right)=\left\langle v+w\mid u\right\rangle =\left\langle v\mid u\right\rangle +\left\langle w\mid u\right\rangle =l_{v}\left(u\right)+l_{w}\left(u\right)$$
$$l_{\lambda\cdot v}\left(w\right)=\left\langle \lambda\cdot v\mid w\right\rangle =\overline{\lambda}\cdot\left\langle v\mid w\right\rangle =\overline{\lambda}\cdot l_{v}\left(w\right)$$

ומכאן שלכל $v,w\in V$ ולכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים:

$$\varphi\left(v+w\right)=l_{v+w}=l_{v}+l_{w}=\varphi\left(v\right)+\varphi\left(w\right)$$
$$\varphi\left(\lambda\cdot v\right)=l_{\lambda\cdot v}=\overline{\lambda}\cdot l_{v}=\overline{\lambda}\cdot\varphi\left(v\right)$$

■

משפט 2.9. יהיו V ממ"פ נ"ס ו-$W\subseteq V$ תמ"ו ותהא φ אותה פונקציה שהוגדרה במסקנה הקודמת (2.8), אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז הצמצום של φ ל-$W^{\perp}$ ($\varphi\mid_{W^{\perp}}$) הוא איזומורפיזם בין $W^{\perp}$ ל-W^{0} ואם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז $\varphi\mid_{W^{\perp}}$ הוא אנטי-איזומורפיזם בין $W^{\perp}$ ל-W^{0}.

תהא $T:V\to W$ העתקה ליניארית.

טענה 2.10. תהיינה $T:V\to W$ ו-$S:W\to V$ העתקות ליניאריות, אם מתקיים $\left\langle S\left(w\right)\mid v\right\rangle _{V}=\left\langle w\mid T\left(v\right)\right\rangle _{W}$ לכל $v\in V$ ולכל $w\in W$ אז $S=T^{*}$.

הוכחה. לכל $v\in V$ ולכל $w\in W$ מתקיים:

$$\left\langle T^{*}\left(w\right)-S\left(w\right)\mid v\right\rangle _{V}=\left\langle T^{*}\left(w\right)\mid v\right\rangle _{V}-\left\langle S\left(w\right)\mid v\right\rangle _{V}=\left\langle w\mid T\left(v\right)\right\rangle _{W}-\left\langle w\mid T\left(v\right)\right\rangle _{W}=0$$

מכאן שלכל $w\in W$ מתקיים $S\left(w\right)=T^{*}\left(w\right)$, כלומר $S=T^{*}$. ■

משפט 2.11. תכונות של ההעתקה הצמודה מעל מרחבי מכפלה פנימית

1. מתקיים $\mathrm{Id}_{V}^{*}=\mathrm{Id}_{V}$.
2. יהיו $S:V\to W$ העתקה ליניארית ו-$\lambda\in\mathbb{F}$, מתקיים:
$$\left(S+T\right)^{*}=S^{*}+T^{*}$$
$$\left(\lambda\cdot T\right)^{*}=\lambda\cdot T^{*}$$
3. יהי U גם הוא ממ"פ מעל ל-$\mathbb{F}$ ותהא $S:W\to U$ העתקה ליניארית, מתקיים:
$$\left(S\circ T\right)^{*}=T^{*}\circ S^{*}$$
4. אם T הפיכה אז גם T^{*} הפיכה ומתקיים $\left(T^{*}\right)^{-1}=\left(T^{-1}\right)^{*}$.
5. תהא $S:W\to V$ העתקה ליניארית, מתקיים $S=T^{*}$ אם"ם $\left\langle v\mid S\left(w\right)\right\rangle _{V}=\left\langle T\left(v\right)\mid w\right\rangle _{W}$.
6. מתקיים $\left(T^{*}\right)^{*}=T$.
7. אם V נ"ס אז $\mathrm{Im}T^{*}=\left(\ker T\right)^{\perp}$.
8. נניח ש-V נ"ס ויהי $f:V\to V$ אופרטור כך ש-$U\subseteq V$ הוא תמ"ו שמור תחת f, $U^{\perp}$ שמור תחת f^{*}.

הוכחה. יהיו $v,v'\in V$, $w\in W$ ו-$\lambda\in\mathbb{F}$, מתקיים:

.1

$$\left\langle \mathrm{Id}_V^*\left(v\right)\mid v'\right\rangle =\left\langle v\mid\mathrm{Id}_V\left(v'\right)\right\rangle$$

.2

$$\begin{aligned}\left\langle \left(S^*+T^*\right)\left(w\right)\mid v\right\rangle_V &=\left\langle S^*\left(w\right)+T^*\left(w\right)\mid v\right\rangle_V=\left\langle S^*\left(w\right)\mid v\right\rangle_V+\left\langle T^*\left(w\right)\mid v\right\rangle_V\\ &=\left\langle w\mid S\left(v\right)\right\rangle_W+\left\langle w\mid T\left(v\right)\right\rangle_W=\left\langle w\mid S\left(v\right)+T\left(v\right)\right\rangle_W=\left\langle w\mid\left(S+T\right)\left(v\right)\right\rangle_W\\ \left\langle \left(\overline{\lambda}\cdot T^*\right)\left(w\right)\mid v\right\rangle_V &=\left\langle \overline{\lambda}\cdot T^*\left(w\right)\mid v\right\rangle_V=\lambda\cdot\left\langle T^*\mid v\right\rangle_V=\lambda\cdot\left\langle w\mid T\left(v\right)\right\rangle_W\\ &=\left\langle w\mid\lambda\cdot T\left(v\right)\right\rangle_W=\left\langle w\mid\left(\lambda\cdot T\right)\left(v\right)\right\rangle_W\end{aligned}$$

3. נסמן ב-$\left\langle \cdot\mid\cdot\right\rangle_U$ את המכפלה הפנימית של U ויהי $u\in U$,

$$\begin{aligned}\left\langle \left(T^*\circ S^*\right)\left(u\right)\mid v\right\rangle_V &=\left\langle T^*\left(S^*\left(u\right)\right)\mid v\right\rangle_V=\left\langle S^*\left(u\right)\mid T\left(v\right)\right\rangle_W\\ &=\left\langle u\mid S\left(T\left(v\right)\right)\right\rangle_U=\left\langle u\mid\left(S\circ T\right)\left(v\right)\right\rangle_U\end{aligned}$$

4. נניח ש-T הפיכה, מהסעיף הקודם ומהסעיף הראשון נובע שמתקיים:

$$\begin{aligned}\left(T^{-1}\right)^*\circ T^* &=\left(T\circ T^{-1}\right)^*=\mathrm{Id}_W^*=\mathrm{Id}_W\\ T^*\circ\left(T^{-1}\right)^* &=\left(T^{-1}\circ T\right)^*=\mathrm{Id}_V^*=\mathrm{Id}_V\end{aligned}$$

5. מתקיים:

$$\left\langle v\mid T^*\left(w\right)\right\rangle_V=\overline{\left\langle T^*\left(w\right)\mid v\right\rangle_V}=\overline{\left\langle w\mid T\left(v\right)\right\rangle_W}=\left\langle T\left(v\right)\mid w\right\rangle_W$$

ובאופן דומה אם $\left\langle v\mid S\left(w\right)\right\rangle_V=\left\langle T\left(v\right)\mid w\right\rangle_W$ אז $\left\langle S\left(w\right)\mid v\right\rangle_V=\left\langle w\mid T\left(v\right)\right\rangle_W$.

6. מהגדרה מתקיים $\left\langle \left(T^*\right)^*\left(v\right)\mid w\right\rangle_W=\left\langle v\mid T^*\left(w\right)\right\rangle_V$ ולכן מהסעיף הקודם נובע ש-$\left\langle \left(T^*\right)^*\left(v\right)\mid w\right\rangle_W=\left\langle T\left(v\right)\mid w\right\rangle_W$.

7. מהגדרה מתקיים $\left\langle T^*\left(w\right)\mid v\right\rangle_V=\left\langle w\mid T\left(v\right)\right\rangle_W$ ולכן אם $v\in\ker T$ (כלומר $T\left(v\right)=0_W$) אז $\left\langle T^*\left(w\right)\mid v\right\rangle_V=0$, כלומר $T^*\left(w\right)\perp v$.

8. לכל $u\in U$ ולכל $u^{\perp}\in U^{\perp}$ מתקיים:

$$\left\langle f^*\left(u^{\perp}\right)\mid u\right\rangle =\left\langle u^{\perp}\mid f\left(u\right)\right\rangle =0$$

משום ש-$f\left(u\right)\in u$, ומכאן ש-$U^{\perp}$שמור תחת f^*.

בסעיפים 1, 2, 3, ו-5 צריך להוסיף ולהסביר שהמבוקש נובע מטענה 2.10, ובסעיף 6 יש להשתמש במסקנה 1.2; בכל הסעיפים מלבד ב-8 יש להשתמש בעובדה ש-v ו-w (ובסעיף 2 גם v' ו-λ) שרירותיים. ■

מסקנה 2.12. הצמצום של T ל-$\mathrm{Im}T^*$ ($T\mid_{\mathrm{Im}T^*}:\mathrm{Im}T^*\to\mathrm{Im}T$) הוא העתקה חח"ע ועל.

♣ למעשה רק הצמצום הזה מעניין אותנו משום ש-$\ker T=\left(\mathrm{Im}T^*\right)^{\perp}$.

מסקנה 2.13. נוסחה מפורשת להעתקה הצמודה

נניח ש-V נ"ס ויהי $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ בסיס אורתונורמלי של V, לכל $w \in W$ מתקיים:

$$T^*(w) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(u_i) \mid w \rangle_W \cdot u_i$$

הוכחה. יהי $w \in W$, ממשפט 1.12 נובע שמתקיים:

$$T^*(w) = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i \mid T^*(w) \rangle_V \cdot u_i$$

ולכן ע"פ סעיף 5 במשפט 2.11 מתקיים:

$$T^*(w) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(u_i) \mid w \rangle_W \cdot u_i$$

■

מסקנה 2.14. נניח ש-V ו-W נ"ס ויהיו $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ בסיסים אורתונורמליים של V ו-U בהתאמה, מתקיים:

$$[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^*$$

הוכחה. נגדיר $\mathcal{B} := (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ו-$\mathcal{C} := (w_1, w_2, \ldots, w_m)$.
ממשפט 1.12 ומהגדרת המטריצה המייצגת נובע שהשורה ה-i ב-$\left([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^*$ היא (לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
\left([T(v_i)]_{\mathcal{C}}\right)^* &= \left(\begin{bmatrix} \langle w_1 \mid T(v_i) \rangle_W \\ \langle w_2 \mid T(v_i) \rangle_W \\ \vdots \\ \langle w_m \mid T(v_i) \rangle_W \end{bmatrix}\right)^* = \begin{bmatrix} \overline{\langle w_1 \mid T(v_i) \rangle_W} & \overline{\langle w_2 \mid T(v_i) \rangle_W} & \cdots & \overline{\langle w_m \mid T(v_i) \rangle_W} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \langle T(v_i) \mid w_1 \rangle_W & \langle T(v_i) \mid w_2 \rangle_W & \cdots & \langle T(v_i) \mid w_m \rangle_W \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

א"כ הקואורדינטה ה-ij במטריצה $\left([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^*$ היא $\langle T(v_i) \mid w_j \rangle$ (לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ ולכל $m \geq j \in \mathbb{N}$).
מצד שני ע"פ הנוסחה המפורשת של ההעתקה הצמודה ומהגדרת המטריצה המייצגת נובע שהעמודה ה-j ב-$[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ היא (לכל $m \geq j \in \mathbb{N}$):

$$[T^*(w_j)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \langle T(v_1) \mid w_j \rangle_W \\ \langle T(v_2) \mid w_j \rangle_W \\ \vdots \\ \langle T(v_n) \mid w_j \rangle_W \end{bmatrix}$$

ולכן הקואורדינטה ה-ij במטריצה $[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ היא $\langle T(v_i) \mid w_j \rangle_W$ (לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ ולכל $m \geq j \in \mathbb{N}$) ולכן המטריצות שוות. ■

♣ במובן מסוים אני הופך כאן את היוצרות כשאני מציג את השקילות בין הצמדת מטריצה להצמדת ה"ל כמסקנה מהנוסחה המפורשת של ההעתקה הצמודה, לפני שאסביר זאת הרשו לי לספר סיפור קטן.

כשלמדנו על מטריצות בקורס הקודם מצאנו כמעט לכל הגדרה בעולם המטריצות $M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ קשר ישיר להעתקות ליניאריות מ-$\mathbb{F}^{m}$ ל-$\mathbb{F}^{n}$: מטריצת היחידה היא העתקת הזהות, כפל מטריצות הוא הרכבה, מטריצה הפיכה היא ה"ל הפיכה וההופכית שלה היא ההעתקה ההופכית, העמודות של כל מטריצה הן האיברים אליהם נשלחים איברי הבסיס הסטנדרטי, מטריצות דומות מייצגות את אותן ה"ל אך בבסיסים שונים, למטריצות אלכסוניות ולמטריצות משולשיות יש אינטואיציה גאומטרית חזקה ועוד (שכחתי משהו?).

רק הגדרה אחת יצאה מן הכלל הזה: המטריצה המשוחלפת (ומטריצות סימטריות/אנטי-סימטריות שתלויות בה), מהרגע שלמדנו עליה ועד ליום שבו גיליתי את הנוסחה המפורשת להעתקה הצמודה (יותר משנה) "שברתי" את הראש כדי להבין מה הקשר בין מטריצה למשוחלפת שלה. כשלמדתי את הקורס אצל איתמר צביק הגדרנו את האופרטור הצמוד בתור האופרטור היחיד המקיים $\langle f^{*}\left(v\right)\mid w\rangle=\langle v\mid f\left(w\right)\rangle$ (לכל $v,w\in V$)[10], בצורה זו היה קל להוכיח שבבסיס אורתונורמלי U מתקיים $\left[f^{*}\right]_{U}=\left(\left[f\right]_{U}\right)^{*}$[11] אך לא הייתה לזה שום משמעות גאומטרית.

יום אחד קראתי בוויקיפדיה על האופרטור הצמוד במרחבים כלליים שם הוא הוגדר על המרחבים הדואליים ופעולתו הייתה להרכיב את האופרטור המקורי מימין, הסיכוי לכך שלא יהיה שום קשר בין שני הצמודים הללו אחרי שמסמנים אותם באופן זהה נראה לי אפסי וכך הבנתי שבמרחבי מכפלה פנימית T^{*} מעתיק את הווקטור w לווקטור שהמכפלה הפנימית איתו תהיה שקולה למכפלה הפנימית עם w **כאשר לפני הפעלת המכפלה הפנימית מפעילים את** T. נרעש מן ההבנה הזו הבנתי שזה בדיוק מה שקורה בהצמדת מטריצות, הקואורדינטה ה-i של הווקטור $A^{*}\cdot v$ היא המכפלה הסקלרית $\langle A\cdot e_{i}\mid v\rangle$ ולכן:

$$A^{*}\cdot v=\sum_{i=1}^{n}\langle A\cdot e_{i}\mid v\rangle\cdot e_{i}$$

ואם המטריצה הצמודה אכן מייצגת את האופרטור הצמוד הנוסחה הזו צריכה להתקיים גם עבורו.

לנוסחה הזו יש כמובן פירוש גאומטרי פשוט מאד: אנו מבצעים מכפלה פנימית עם כל אחת מהתמונות של וקטורי הבסיס האורתונורמלי (כבר ראינו מה זה אומר מבחינה גאומטרית), כופלים בווקטור הבסיס המתאים בכל פעם וסוכמים את הכל.

---

[10] שימו לב שזה אומר שהצמוד מוגדר רק אופרטורים מעל מרחב מכפלה פנימית ולא עבור העתקות ליניאריות כלליות או אופרטורים על מרחבים אחרים.

[11] יהי $g:V\to V$ אופרטור כך ש-$\left[g\right]_{U}=\left(\left[f\right]_{U}\right)^{*}$מתקיים (נשתמש באיזומרפיזם בין $M_{1}\left(\mathbb{F}\right)$ ל-$\mathbb{F}$):

$$\begin{aligned}\langle g\left(v\right)\mid w\rangle&=\left(\left[g\left(v\right)\right]_{U}\right)^{*}\cdot\left[w\right]_{U}\\&=\left(\left[g\right]_{U}\cdot\left[v\right]_{U}\right)^{*}\cdot\left[w\right]_{U}\\&=\left(\left(\left[f\right]_{U}\right)^{*}\cdot\left[v\right]_{U}\right)^{*}\cdot\left[w\right]_{U}\\&=\left(\left(\left[v\right]_{U}\right)^{*}\cdot\left[f\right]_{U}\right)\cdot\left[w\right]_{U}\\&=\left(\left[v\right]_{U}\right)^{*}\cdot\left(\left[f\right]_{U}\cdot\left[w\right]_{U}\right)\\&=\left(\left[v\right]_{U}\right)^{*}\cdot\left[f\left(w\right)\right]_{U}=\langle v\mid f\left(w\right)\rangle\end{aligned}$$

3 העתקות אוניטריות

יהיו V ו-W מרחבי מכפלה פנימית מעל לשדה $\mathbb{F}$ ונסמן ב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$ וב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_W$ את המכפלות הפנימיות שלהם[12].

3.1 העתקות אוניטריות שאינן בהכרח אופרטורים

תהא $T : V \to W$ העתקה אוניטרית.

משפט 3.1. אם T הפיכה אז $T^{-1} = T^*$ וזוהי העתקה אוניטרית.

♣ בפרט, אם V ו-W נ"ס בעלי ממד זהה אז T הפיכה ו-$T^{-1} = T^*$ אוניטרית.

הוכחה. נניח ש-T הפיכה, מכאן שלכל $w_1, w_2 \in W$ מתקיים:

$$\left\langle T^{-1}(w_1) \mid T^{-1}(w_2) \right\rangle_V = \left\langle T\left(T^{-1}(w_1)\right) \mid T\left(T^{-1}(w_2)\right) \right\rangle_W = \langle w_1 \mid w_2 \rangle_V$$

א"כ T^{-1} אוניטרית. בנוסף, לכל $v \in V$ ולכל $w \in W$ מתקיים:

$$\left\langle T^{-1}(w) \mid v \right\rangle_V = \left\langle T\left(T^{-1}(w)\right) \mid T(v) \right\rangle_W = \langle w \mid T(v) \rangle_W$$

ומכאן ש-$T^{-1} = T^*$. ■

טענה 3.2. T חח"ע.

הוכחה. יהי $v \in V$ כך ש-$T(v) = 0_W$, א"כ לכל $v' \in V$ מתקיים:

$$\langle v \mid v' \rangle_V = \langle T(v) \mid T(v') \rangle_W = \langle 0_W \mid T(v') \rangle_W = 0$$

מכאן ש-$v = 0_V$, כלומר $\ker T = \{0_V\}$ ולכן T חח"ע. ■

מסקנה 3.3. אם T על אז T הפיכה, מתקיים $T^{-1} = T^*$ וזוהי העתקה אוניטרית.

♣ בפרט, אם V ו-W נ"ס בעלי ממד זהה אז T הפיכה ו-$T^{-1} = T^*$ אוניטרית.

מסקנה 3.4. לכל אופרטור $f : V \to V$ מתקיים f אוניטרי אם"ם $f^* \circ f = \mathrm{Id}_V = f \circ f^*$.

טענה 3.5. תהא $S : V \to W$ העתקה ליניארית, אם $S^* \circ S = \mathrm{Id}_V$ אז S אוניטרית.

הוכחה. לכל $v_1, v_2 \in V$ מתקיים:

$$\langle S(v_1) \mid S(v_2) \rangle_W = \langle S^*(S(v_1)) \mid v_2 \rangle_V = \langle v_1 \mid v_2 \rangle_V$$

■

טענה 3.6. יהי U גם הוא ממ"פ מעל ל-$\mathbb{F}$ ותהא $S : W \to U$ העתקה אוניטרית, גם $S \circ T$ היא העתקה אוניטרית.

[12] את המכפלה הפנימית של V נסמן גם ב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ כשנעסוק בו בלבד.

משפט 3.7. נוסחת הפולריזציה

אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז לכל $v,w\in V$ מתקיים:

$$\langle v \mid w\rangle = \frac{\|v+w\|^2-\left(\|v\|^2+\|w\|^2\right)}{2}$$
$$\langle v \mid w\rangle = \frac{\|v+w\|^2-\|v-w\|^2}{4}$$

ואם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז לכל $v,w\in V$ מתקיים:

$$\langle v \mid w\rangle = \frac{\|v+w\|^2-\|v-w\|^2-i\cdot\left(\|v+i\cdot w\|^2-\|v-i\cdot w\|^2\right)}{4}$$

♣ כל האלגברה הזו לא באמת מעניינת, הנקודה שצריך לקחת בכאן היא שהעתקה ליניארית היא אוניטרית (כלומר שומרת על המכפלה הפנימית) אם"ם היא שומרת על הנורמה.

הוכחה. יהיו $v,w\in V$, מחוק המקבילית נובע שמתקיים:

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2-\|v\|^2-\|w\|^2 &= \|v\|^2+\|w\|^2-\|v-w\|^2\\ &= \langle v \mid v\rangle+\langle w \mid w\rangle-\langle v-w \mid v-w\rangle\\ &= \langle v \mid v\rangle+\langle w \mid w\rangle-\left(\langle v \mid v\rangle-\langle v \mid w\rangle-\langle w \mid v\rangle+\langle w \mid w\rangle\right)\\ &= \langle v \mid w\rangle+\langle w \mid v\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \|v+w\|^2-\|v-w\|^2 &= 2\cdot\left(\|v\|^2+\|w\|^2\right)-2\cdot\|v-w\|^2\\ &= 2\cdot\left(\|v\|^2+\|w\|^2-\|v-w\|^2\right)\\ &= 2\cdot\left(\langle v \mid w\rangle+\langle w \mid v\rangle\right)\end{aligned}$$

- נניח ש-$\mathbb{F}=\mathbb{R}$, כלומר $\langle v \mid w\rangle=\langle w \mid v\rangle$ ולכן:

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2-\|v\|^2-\|w\|^2 &= 2\cdot\langle v \mid w\rangle\\ \|v+w\|^2-\|v-w\|^2 &= 4\cdot\langle v \mid w\rangle\end{aligned}$$

וממילא:

$$\langle v \mid w\rangle = \frac{\|v+w\|^2-\|v\|^2-\|w\|^2}{2}$$
$$\langle v \mid w\rangle = \frac{\|v+w\|^2-\|v-w\|^2}{4}$$

- נניח ש-$\mathbb{F}=\mathbb{C}$, א"כ ע"פ מה שהוכחנו לעיל מתקיים:

$$\begin{aligned}-i\cdot\left(\left\|v+i\cdot w\right\|^{2}-\left\|v-i\cdot w\right\|^{2}\right)&=-i\cdot2\cdot\left(\left\langle v\mid i\cdot w\right\rangle+\left\langle i\cdot w\mid v\right\rangle\right)\\&=-i\cdot2\cdot\left(i\cdot\left\langle v\mid w\right\rangle-i\cdot\left\langle w\mid v\right\rangle\right)\\&=2\cdot\left(-i^{2}\cdot\left\langle v\mid w\right\rangle+i^{2}\cdot\left\langle w\mid v\right\rangle\right)\\&=2\cdot\left(\left\langle v\mid w\right\rangle-\left\langle w\mid v\right\rangle\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\left\|v+w\right\|^{2}-\left\|v-w\right\|^{2}-i\cdot\left(\left\|v+i\cdot w\right\|^{2}-\left\|v-i\cdot w\right\|^{2}\right)=2\cdot\left(\left\langle v\mid w\right\rangle+\left\langle w\mid v\right\rangle+\left\langle v\mid w\right\rangle-\left\langle w\mid v\right\rangle\right)=4\cdot\left\langle v\mid w\right\rangle$$

$$\Rightarrow\left\langle v\mid w\right\rangle=\frac{\left\|v+w\right\|^{2}-\left\|v-w\right\|^{2}-i\cdot\left(\left\|v+i\cdot w\right\|^{2}-\left\|v-i\cdot w\right\|^{2}\right)}{4}$$

■

מסקנה 3.8. תהא $S:V\to W$ ונסמן ב-$\left\|\cdot\right\|_{V}$ וב-$\left\|\cdot\right\|_{W}$ את הנורמות של V ו-W.
שלושת התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1. S אוניטרית.
2. לכל $v\in V$ מתקיים $\left\|S\left(v\right)\right\|_{W}=\left\|v\right\|_{V}$.
3. לכל $v_{1},v_{2}\in V$ מתקיים $\left\|S\left(v_{1}-v_{2}\right)\right\|_{W}=\left\|v_{1}-v_{2}\right\|_{V}$.

הוכחה. העובדה שסעיף 1 גורר את סעיף 2 נובעת ישירות מהגדרת העתקה אורתוגונלית ומהגדרת הנורמה, סעיף 2 ו-3 הם מקרים פרטיים זה של זה[13] ולכן כל מה שנותר לנו הוא להוכיח שסעיף 2 גורר את סעיף 1.
נניח שלכל $v\in V$ מתקיים $\left\|S\left(v\right)\right\|_{W}=\left\|v\right\|_{V}$, מנוסחת הפולריזציה נובע שאם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז לכל $v_{1},v_{2}\in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\left\langle v_{1}\mid v_{2}\right\rangle_{V}&=\frac{\left(\left\|v_{1}+v_{2}\right\|_{V}\right)^{2}-\left(\left\|v_{1}\right\|_{V}\right)^{2}-\left(\left\|V_{2}\right\|_{2}\right)^{2}}{2}\\&=\frac{\left(\left\|S\left(v_{1}+v_{2}\right)\right\|_{W}\right)^{2}-\left(\left\|S\left(v_{1}\right)\right\|_{W}\right)^{2}-\left(\left\|S\left(v_{2}\right)\right\|_{W}\right)^{2}}{2}\\&=\frac{\left(\left\|S\left(v_{1}\right)+S\left(v_{2}\right)\right\|_{W}\right)^{2}-\left(\left\|S\left(v_{1}\right)\right\|_{W}\right)^{2}-\left(\left\|S\left(v_{2}\right)\right\|_{W}\right)^{2}}{2}=\left\langle S\left(v_{1}\right)\mid S\left(v_{2}\right)\right\rangle_{W}\end{aligned}$$

ואם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז לכל $v_{1},v_{2}\in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\left\langle v_{1}\mid v_{2}\right\rangle_{V}&=\frac{\left(\left\|v_{1}+v_{2}\right\|_{V}\right)^{2}-\left(\left\|v_{1}-v_{2}\right\|_{V}\right)^{2}-i\cdot\left(\left(\left\|v_{1}+i\cdot v_{2}\right\|_{V}\right)^{2}-\left(\left\|v_{1}-i\cdot v_{2}\right\|_{V}\right)^{2}\right)}{4}\\&=\frac{\left(\left\|S\left(v_{1}+v_{2}\right)\right\|_{W}\right)^{2}-\left(\left\|S\left(v_{1}-v_{2}\right)\right\|_{W}\right)^{2}-i\cdot\left(\left(\left\|S\left(v_{1}+i\cdot v_{2}\right)\right\|_{W}\right)^{2}-\left(\left\|S\left(v_{1}-i\cdot v_{2}\right)\right\|_{W}\right)^{2}\right)}{4}\\&=\frac{\left(\left\|S\left(v_{1}\right)+S\left(v_{2}\right)\right\|_{W}\right)^{2}-\left(\left\|S\left(v_{1}\right)-S\left(v_{2}\right)\right\|_{W}\right)^{2}-i\cdot\left(\left(\left\|S\left(v_{1}\right)+i\cdot S\left(v_{2}\right)\right\|_{W}\right)^{2}-\left(\left\|S\left(v_{1}\right)-i\cdot S\left(v_{2}\right)\right\|_{W}\right)^{2}\right)}{4}\\&=\left\langle S\left(v_{1}\right)\mid S\left(v_{2}\right)\right\rangle_{W}\end{aligned}$$

■

[13] ברור למה 3 הוא מקרה פרטי של 2, כדי לראות את הכיוון ההפוך נציב בסעיף 3 את $v_{2}=0_{V}$.

משפט 3.9. תהא $S:V\to W$ ונניח ש-V נ"ס, שלושת התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1. S אוניטרית.
2. לכל בסיס אורתונורמלי $U:=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ של V גם $S(U)=\{S(u_1),S(u_2),\ldots,S(u_n)\}$ היא קבוצה אורתונורמלית ב-W.
3. קיים בסיס אורתונורמלי $U:=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ של V כך ש-$S(U)=\{S(u_1),S(u_2),\ldots,S(u_n)\}$ היא קבוצה אורתונורמלית ב-W.

הוכחה. סעיף 1 גורר את סעיף 2 ישירות מהגדרת העתקה אורתוגונלית, ומכיוון שיש ל-V בסיס אורתונורמלי גם סעיף 2 גורר את סעיף 3; א"כ נותר לנו להוכיח שסעיף 3 גורר את סעיף 1.

נניח שקיים בסיס אורתונורמלי U של V כך ש-$S(U)$ הוא בסיס אורתונורמלי של W ויהי $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ בסיס כנ"ל, ע"פ משפט 1.12 וזהות פרסבל מתקיים (לכל $v_1,v_2\in V$):

$$\begin{aligned}
\langle S(v_1)\mid S(v_2)\rangle_W &= \left\langle\ S\left(\sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid v_1\rangle_V\cdot u_i\right)\ \middle|\ S\left(\sum_{j=1}^{n}\langle u_j\mid v_2\rangle_V\cdot u_j\right)\ \right\rangle_W\\
&= \left\langle\ \sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid v_1\rangle_V\cdot S(u_i)\ \middle|\ \sum_{j=1}^{n}\langle u_j\mid v_2\rangle_V\cdot S(u_j)\ \right\rangle_W\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{\langle u_i\mid v_1\rangle_V}\cdot\langle u_j\mid v_2\rangle_V\cdot\langle S(u_i)\mid S(u_j)\rangle\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{\langle u_i\mid v_1\rangle_V}\cdot\langle u_j\mid v_2\rangle_V\cdot\delta_{ij}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\overline{\langle u_i\mid v_1\rangle_V}\cdot\langle u_i\mid v_2\rangle_V=\langle v_1\mid v_2\rangle_V
\end{aligned}$$

■

משפט 3.10. נניח ש-V ו-W נ"ס בעלי ממד זהה ותהא $f:V\to W$ **פונקציה**.
אם f מקיימת את שני התנאים הבאים אז f היא **העתקה ליניארית** אוניטרית הפיכה, שני התנאים הם:

1. קיים בסיס אורתונורמלי $U:=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ של V כך ש-$f(U)=\{f(u_1),f(u_2),\ldots,f(u_n)\}$ היא בסיס אורתונורמלי של W.
2. לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים $\langle f(v_1)\mid f(v_2)\rangle_W=\langle v_1\mid v_2\rangle_V$.

הוכחה. נניח ש-f מקיימת את שני התנאים ויהי $U:=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V כך ש-$f(U)$ הוא בסיס אורתונורמלי של W.

מההנחה וממשפט 1.12 נובע שלכל $v\in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
v &= \sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid v\rangle_V\cdot u_i\\
f(v) &= \sum_{i=1}^{n}\langle f(u_i)\mid f(v)\rangle_W\cdot f(u_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid v\rangle_V\cdot f(u_i)
\end{aligned}$$

מכאן שלכל $v, v_0 \in V$ ולכל $\lambda \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$f\left(v+v_0\right)=\sum_{i=1}^{n}\left\langle u_i \mid v+v_0\right\rangle_V \cdot f\left(u_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left\langle u_i \mid v\right\rangle_V+\left\langle u_i \mid v_0\right\rangle_V\right) \cdot f\left(u_i\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left\langle u_i \mid v\right\rangle_V \cdot f\left(u_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\left\langle u_i \mid v_0\right\rangle_V \cdot f\left(u_i\right)=f(v)+f\left(v_0\right)$$
$$f(\lambda \cdot v)=\sum_{i=1}^{n}\left\langle u_i \mid \lambda \cdot v\right\rangle_V \cdot f\left(u_i\right)=\sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot\left\langle u_i \mid v\right\rangle_V \cdot f\left(u_i\right)$$
$$=\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n}\left\langle u_i \mid v\right\rangle_V \cdot f\left(u_i\right)=\lambda \cdot f(v)$$

■

3.2 אופרטורים אוניטריים

יהי $f: V \rightarrow V$ אופרטור אוניטרי.

טענה 3.11. מתקיים $\sigma(f) \subseteq\{z \in \mathbb{F}:|z|=1\}$.

♣ כלומר אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ו-$\lambda \in \sigma(f)$ אז $\lambda=\pm 1$, ואם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז הספקטרום של f מוכל במעגל היחידה המרוכב.

♣ חשוב לזכור שאם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז ייתכן ש-$\sigma(f)=\emptyset$.

הוכחה. נניח ש-$\sigma(f) \neq \emptyset$ (אחרת הטענה טריוויאלית) ויהי $v \in V$ וקטור עצמי של f בעל ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ (מהגדרה $v \neq 0_V$ ולכן $\langle v \mid v\rangle \neq 0$).

$$\Rightarrow\langle v \mid v\rangle=\langle f(v) \mid f(v)\rangle=\langle\lambda \cdot v \mid \lambda \cdot v\rangle=\bar{\lambda} \cdot \lambda \cdot\langle v \mid v\rangle$$

$$\Rightarrow|\lambda|^2=\bar{\lambda} \cdot \lambda=\frac{\langle v \mid v\rangle}{\langle v \mid v\rangle}=1$$

כעת נזכור שמהגדרת הערך המוחלט $\mathbb{R} \ni |\lambda| \geq 0$ ולכן מהעובדה ש-$|\lambda|^2=1$ נובע ש-$|\lambda|=1$. ■

משפט 3.12. לכל $\lambda, \mu \in \sigma(f)$ כך ש-$\lambda \neq \mu$ מתקיים $V_\lambda \perp V_\mu$.

♣ אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז המשפט יכול להתקיים רק כאשר $\sigma(f)=\{-1,1\}$ ואז $V_1 \perp V_{-1}$.

הוכחה. נניח של-f יש שני ערכים עצמיים שונים λ ו-μ ויהיו $v \in V_\lambda$ ו-$w \in V_\mu$.

$$\Rightarrow\langle v \mid w\rangle=\langle f(v) \mid f(w)\rangle=\langle\lambda \cdot v \mid \mu \cdot w\rangle=\bar{\lambda} \cdot \mu \cdot\langle v \mid w\rangle$$

ראינו כבר ש-$\ker f=\{0_V\}$ ולכן $0 \notin \sigma(f)$ - כלומר $\lambda \neq 0$ ו-$\mu \neq 0$ - ומכאן שגם $\bar{\lambda} \cdot \mu \neq 0$.
נניח בשלילה ש-$\langle v \mid w\rangle \neq 0$ וממילא $\bar{\lambda} \cdot \mu=1$.

$$\Rightarrow \mu=\frac{1}{\bar{\lambda}}=\frac{\lambda}{\bar{\lambda} \cdot \lambda}=\frac{\lambda}{|\lambda|^2}=\lambda$$

בסתירה לכך ש-$\mu \neq \lambda$, מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$\langle v \mid w\rangle=0$ כלומר $v \perp w$.
v ו-w הנ"ל היו שרירותיים ולכן $V_\lambda \perp V_\mu$. ■

נניח ש-V נ"ס.

משפט 3.13. יהי $U \subseteq V$ תמ"ו, אם U שמור תחת f אז גם $U^{\perp}$ שמור תחת f.

הוכחה. נניח ש-U שמור תחת f ויהי $v \in U^{\perp}$.
f הפיך ולכן גם $f|_U$ הפיך, מכאן שלכל $u \in U$ קיים $u' \in U$ כך ש-$f(u') = u$ ולכן גם:

$$\langle f(v) \mid u \rangle = \langle f(v) \mid f(u') \rangle = \langle v \mid u' \rangle = 0$$

א"כ $f(v) \in U^{\perp}$ ומהגדרה $U^{\perp}$ שמור תחת f. ■

משפט 3.14. קיימת סדרת תתי-מרחבים $(W_1, W_2, \ldots, W_r)$ שמורים תחת f כך שמתקיים:

1. $W_i \perp W_j$ לכל $r \geq i, j \in \mathbb{N}$ כך ש-$i \neq j$.
2. $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$.
3. תלוי במקרה:
   - אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז $\dim(W_i) = 1$ או ש-$\dim(W_i) = 2$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.
   - אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז $\dim(W_i) = 1$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על הממד של V, אם $\dim V = 1$ הטענה טריוויאלית לכן נעבור ישירות לצעד האינדוקציה.
נניח שהטענה מתקיימת לכל ממ"פ נ"ס מממד קטן ממש מ-$\dim V$, ראינו בחלק שעסק באופרטורים שאם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז יש ל-f תמ"ו שמור מממד 1 ואם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז יש ל-f תמ"ו שמור מממד 1 או 2 - יהי $W \subseteq V$ תמ"ו כזה.
מהעובדה ש-$V = W \oplus W^{\perp}$ נובע ש-$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W \leq \dim V - 1$, א"כ הנחת האינדוקציה מתקיימת עבור $W^{\perp}$.
תהא $(W_1, W_2, \ldots, W_r)$ סדרת תתי-מרחבים המקיימת את הנדרש עבור $W^{\perp}$, מכאן ש-$(W_1, W_2, \ldots, W_r, W)$ היא סדרת תתי-מרחבים המקיימת את הנדרש עבור V:

1. מתקיים $W_i \perp W_j$ לכל $r \geq i, j \in \mathbb{N}$ כך ש-$i \neq j$ מהגדרה ומתקיים $W_i \perp W$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ שכן $W_i \subseteq W^{\perp}$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.
2. מתקיים $V = W \oplus W^{\perp} = W \oplus (W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r) = W \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$.
3. הגדרנו את W כך שיעמוד בתנאי השלישי ו-W_i מקיים את התנאי גם הוא ע"פ הגדרתו (לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$).

■

מסקנה 3.15. אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז f לכסין אוניטרית.

משפט 3.16. יהי $g : V \to V$ אופרטור, g אוניטרי אם"ם לכל בסיס אורתונורמלי U של V המטריצה $[g]_U$ היא מטריצה אוניטרית.

הוכחה. הגרירה מימין לשמאל נובעת ישירות ממסקנה 2.14 ומהקשר בין הרכבת העתקות ליניאריות לכפל מטריצות, לכן נוכיח רק את הגרירה בכיוון ההפוך.
נניח שלכל בסיס אורתונורמלי U של V המטריצה $[g]_U$ היא מטריצה אוניטרית ויהי U בסיס אורתונורמלי.
לכל $v, w \in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
\langle g(v) \mid g(w) \rangle &= \left([g(v)]_U\right)^* \cdot [g(w)]_U \\
&= \left([g]_U \cdot [v]_U\right)^* \cdot [g]_U \cdot [w]_U \\
&= \left([v]_U\right)^* \cdot \left([g]_U\right)^* \cdot [g]_U \cdot [w]_U \\
&= \left([v]_U\right)^* \cdot I_n \cdot [w]_U \\
&= \left([v]_U\right)^* \cdot [w]_U = \langle v \mid w \rangle
\end{aligned}$$

■

משפט 3.17. תכונות של מטריצות אוניטריות

תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$.

1. A אוניטרית אם"ם סדרת עמודותיה היא בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ עם המכפלה הסקלרית.
2. A אוניטרית אם"ם A^* אוניטרית.
3. A אוניטרית אם"ם A הפיכה ובנוסף $A^{-1}=A^*$.
4. I_n אוניטרית.
5. תהא $B\in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה אוניטרית, גם $A\cdot B$ אוניטרית; כלומר קבוצת המטריצות האוניטריות מסדר n סגורה לכפל מטריצות.
6. קבוצת המטריצות האוניטריות מסדר n, שתסומן ב-$\mathrm{O}(n)$, היא חבורה כאשר פעולת הכפל המתאימה היא כפל מטריצות.
7. אם A אוניטרית אז $\det A^*=\overline{\det A}$.
8. אם A אוניטרית אז $|\det A|=1$.
כלומר: אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז $\det A=\pm 1$, ואם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז $\det A$ נמצא על מעגל היחידה המרוכב.
9. $\mathrm{SO}(n):=\{A\in \mathrm{O}(n)\mid \det A=1\}$ היא תת-חבורה של $\mathrm{O}(n)$.
10. אם A אוניטרית אז $\sigma(A)\subseteq\{z\in\mathbb{F}:|z|=1\}$.
כלומר: אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ו-$\lambda\in\sigma(A)$ אז $\lambda=\pm 1$, ואם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז הספקטרום של A מוכל במעגל היחידה המרוכב.
11. אם A אוניטרית אז לכל $\lambda,\mu\in\sigma(A)$ כך ש-$\mu\neq\lambda$ מתקיים $V_\lambda\perp V_\mu$.

הוכחה. נוכיח רק את תכונות 7 ו-8, שאר התכונות נובעות מהתכונות המקבילות עבור אופרטורים אוניטריים או שהוסברו כבר בקובץ ההגדרות.

מתקיים:

$$1=\det(I_n)=\det\left(A^{-1}\cdot A\right)=\det A^{-1}\cdot\det A=\det A^*\cdot\det A=\overline{\det A^t}\cdot\det A=\overline{\det A}\cdot\det A=|\det A|^2$$

וכפי שהזכרנו בעבר נובע מזה ש-$|\det A|=1$. ∎

♣ ממשפט 3.14 ומהעובדה שהדטרמיננטה של מטריצה אורתוגונלית היא ± 1 נובע שניתן למיין את האופרטורים האורתוגונליים על מרחבים אוקלידיים ע"פ פעולתם על מרחבים מממד 1 או 2, כלומר ע"פ המטריצות המייצגות שלהם על מרחבים כאלו.

נניח ש-f אורתוגונלי ו-V מממד 1 או 2.

- נניח ש-$\dim V=1$ ויהי $0_V\neq v\in V$ ($\{v\}$ הוא בסיס של V), ראינו ש-$\sigma(f)\subseteq\{-1,1\}$ ומכיוון שבממד 1 אופרטור הוא פשוט כפל בסקלר נובע מכאן ש-$f(v)=\pm v$, כלומר $f=\mathrm{Id}_V$ או ש-$f=-\mathrm{Id}_V$ (שיקוף דרך הראשית).
- נניח ש-$\dim V=2$ ויהי U בסיס אורתונורמלי של V, נגדיר:

$$A:=\begin{bmatrix} c & a\\ s & b\end{bmatrix}:=[f]_U$$

מכיוון שסדרת העמודות של A היא אורתונורמלית נדע שמתקיים:

$$1=c^2+s^2$$
$$1=a^2+b^2$$
$$0=ac+bs$$

נניח בהג"כ ש-$c\neq0$,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a=-\frac{bs}{c}\\
&\Rightarrow 1=\left(-\frac{bs}{c}\right)^{2}+b^{2}\\
&\Rightarrow 1=b^{2}\cdot\left(1+\frac{s^{2}}{c^{2}}\right)=b^{2}\cdot\frac{c^{2}+s^{2}}{c^{2}}=b^{2}\cdot\frac{1}{c^{2}}\\
&\Rightarrow b^{2}=c^{2}\Rightarrow b=\pm c\Rightarrow a=\mp s
\end{aligned}$$

א"כ ישנן שתי אפשרויות:

$$A=\left[\begin{array}{cc}c & -s\\ s & c\end{array}\right],\ A=\left[\begin{array}{cc}c & s\\ s & -c\end{array}\right]$$

נזכור ש-$\det A=\pm1$ ונשים לב שהאפשרות הראשונה מתאימה עבור $\det A=1$:

$$\det A=c^{2}-(-s)\cdot s=c^{2}+s^{2}=1$$

ואילו השנייה מתאימה עבור $\det A=-1$:

$$\det A=c\cdot(-c)-s^{2}=-\left(c^{2}+s^{2}\right)=-1$$

על כל פנים מהשוויון $c^{2}+s^{2}=1$ נובע שקיימת $\theta\in[0,2\pi)$ כך ש-$c=\cos\theta$ ו-$s=\sin\theta$[14], כלומר נקבל את אחת משתי האפשרויות:

$$A=\left[\begin{array}{cc}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{array}\right],\ A=\left[\begin{array}{cc}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & -1\end{array}\right]$$

האפשרות הראשונה היא סיבוב ב-θ רדיאנים נגד כיוון השעון והשנייה היא שיקוף ביחס לציר ה-x ואז סיבוב ב-θ רדיאנים נגד כיוון השעון (נזכור שהכפלת מטריצות שקולה להרכבה), למעשה ניתן להציג את השנייה כשיקוף דרך הישר $y=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot x=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot x$ (אם $\theta=\pi$ אז מדובר בשיקוף דרך ציר ה-y).
לסיכום: כל האופרטורים האורתוגונליים על מרחבים אוקלידיים מתפרקים לסיבובים (אם הדטרמיננטה היא 1) ושיקופים (אם הדטרמיננטה היא -1) על תתי-מרחבים שמורים מממד 1 או 2.

♣ אם A היא מטריצת סיבוב אז אין לה ערכים עצמיים אלא אם $\theta=0$ (מדובר במטריצת היחידה ולכן $\sigma(A)=\{1\}$) או ש-$\theta=\pi$ (מדובר במטריצה הנגדית של מטריצה היחידה ולכן $\sigma(A)=\{-1\}$);
אם A היא מטריצת שיקוף אז $\sigma(A)=\{-1,1\}$ משום שציר השיקוף מועתק לעצמו והציר המאונך מועתק לנגדי שלו:

$$\left[\begin{array}{cc}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin(\theta)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \sin(\theta)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-\cos(\theta)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right)\\ \sin\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin(\theta)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \sin(\theta)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos(\theta)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right)\\ \cos\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}$$

---

[14] הגרירה נובעת ממשפט פיתגורס ההפוך: אם משולש מקיים את השוויון $a^{2}+b^{2}=c^{2}$ (כאשר a,b,c הן אורכי הצלעות של המשולש) אז הוא ישר זווית (ו-c הוא אורך היתר), העובדה שניתן לבנות מצלעות באורכים אלו משולש כלשהו נובעת מזה שהשוויון גורר את $c+a>b$, את $c+b>a$ ואת $a+b>c$ (ראו מה שכתבתי על כך בהסבר על שמו של א"ש המשולש בסיכום הקורס אינפי' 1).

מסקנה 3.18. אם f אופרטור אורתוגונלי אז קיים בסיס אורתונורמלי U של V כך שמתקיים:

$$[f]_U=\begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -I_q & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}$$

כאשר $A_i=\begin{bmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{bmatrix}$ עבור $\theta_i\in(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ לכל $r\geq i\in\mathbb{N}$, $p=\dim V_1$, $q=\dim V_{-1}$[15] ו-$p+q+2r=\dim V$.

4 אופרטורים נורמליים ואופרטורים הרמיטיים

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל לשדה $\mathbb{F}$ ויהי $f:V\to V$ אופרטור.

4.1 התחלה

משפט 4.1. שקילויות של אופרטורים נורמליים, הרמיטיים ואנטי-הרמיטיים

1. f נורמלי אם"ם לכל $v,w\in V$ מתקיים $\langle f(v)\mid f(w)\rangle=\langle f^*(v)\mid f^*(w)\rangle$.
2. f הרמיטי אם"ם לכל $v,w\in V$ מתקיים $\langle v\mid f(w)\rangle=\langle f(v)\mid w\rangle$.
3. f הרמיטי אם"ם לכל $v,w\in V$ מתקיים $\langle f(v)\mid w\rangle=\langle v\mid f(w)\rangle$.
4. f אנטי-הרמיטי אם"ם לכל $v,w\in V$ מתקיים $\langle v\mid f(w)\rangle=\langle -f(v)\mid w\rangle$.
5. f אנטי-הרמיטי אם"ם לכל $v,w\in V$ מתקיים $\langle f(v)\mid w\rangle=\langle v\mid -f(w)\rangle$.
6. נניח ש-V נ"ס,
   - f נורמלי אם"ם לכל בסיס אורתונורמלי U של V המטריצה $[f]_U$ היא מטריצה נורמלית.
   - f הרמיטי אם"ם לכל בסיס אורתונורמלי U של V המטריצה $[f]_U$ היא מטריצה הרמיטית.
   - f אנטי-הרמיטי אם"ם לכל בסיס אורתונורמלי U של V המטריצה $[f]_U$ היא מטריצה אנטי-הרמיטית.

הוכחה.

- לכל $v,w\in V$ מתקיים:

$$\langle f^*(f(v))\mid w\rangle=\langle v\mid f(f^*(w))\rangle\iff\langle f(v)\mid f(w)\rangle=\langle f^*(v)\mid f^*(w)\rangle$$

א"כ הוכחנו את הגרירה מימין לשמאל בסעיף 1, כדי להוכיח את הגרירה משמאל לימין נשים לב לכך שאם לכל $v,w\in V$ מתקיים:

$$\langle f^*(f(v))\mid w\rangle=\langle v\mid f(f^*(w))\rangle$$

אז מטענה 2.10 נובע ש-$f^*\circ f=(f\circ f^*)^*$והרי מתכונות הצמוד (סעיף 3 במשפט 2.11) מתקיים:

$$(f\circ f^*)^*=(f^*)^*\circ f^*=f\circ f^*$$

[15] בכל שיקוף ציר השיקוף כלול ב-V_1 והציר המאונך לו כלול ב-V_{-1}, בסיבוב ב-0 רדיאנים כל התמ"ו השמור כלול ב-V_1.

- סעיפים 2-5 הם מקרים פרטיים של טענה 2.10 ושל סעיף 5 במשפט 2.11 בהתאמה.
- סעיף 6 נובע ישירות ממסקנה 2.14 ומהקשר של הרכבת העתקות ליניאריות לכפל מטריצות.

■

משפט 4.2. תכונות של אופרטורים נורמליים

נניח ש-f נורמלי, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. לכל $v\in V$ מתקיים $\|f^{*}(v)\|=\|f(v)\|$.
2. לכל $j,k\in\mathbb{N}$ מתקיים $f^{k}\circ(f^{*})^{j}=(f^{*})^{j}\circ f^{k}$.
3. לכל $P\in\mathbb{F}[x]$ גם $P(f)$ הוא אופרטור נורמלי.
4. לכל $v\in V$ ולכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים
$$f(v)=\lambda\cdot v\iff f^{*}(v)=\overline{\lambda}\cdot v$$
ובפרט $\overline{\lambda}\in\sigma(f^{*})\iff\lambda\in\sigma(f)$.
5. לכל $\lambda,\mu\in\sigma(f)$ כך ש-$\lambda\neq\mu$ מתקיים $V_\lambda\perp V_\mu$.

♣ נזכיר שוב שאופרטורים הרמיטיים ואופרטורים אוניטריים הם בפרט אופרטורים נורמליים ולכן אלו גם תכונות שלהם.

♣ אפילו אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אין זה מוכרח שקיימים $\lambda,\mu\in\sigma(f)$ כך ש-$\lambda\neq\mu$, במקרה כזה סעיף 4 מתקיים באופן ריק (כמובן שאם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז יכול להיות של-f אין ערכים עצמיים בכלל).

הוכחה.

1. נובע ישירות מהגדרת הנורמה ומסעיף 1 במשפט הקודם (4.1).
2. הרכבה מקיימת את חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) וכש-f נורמלי ההרכבה שלו עם f^{*} מקיימת גם את חוק החילוף (קומוטטיביות).
3. יהי $P\in\mathbb{F}[T]$ ויהיו $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ כך ש-$P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot x^k$.

$$\Rightarrow(P(f))^{*}=\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot f^{k}\right)^{*}=\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\cdot f^{k}\right)^{*}=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}\cdot\left(f^{k}\right)^{*}=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}\cdot(f^{*})^{k}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow P(f)\circ(P(f))^{*}&=\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot f^{k}\right)\circ\left(\sum_{j=0}^{n}\overline{a_k}\cdot(f^{*})^{k}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\cdot f^{k}\circ\sum_{j=0}^{n}\overline{a_j}\cdot(f^{*})^{j}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}a_k\cdot f^{k}\circ\left(\overline{a_j}\cdot(f^{*})^{j}\right)\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}a_k\cdot\overline{a_j}\cdot\left(f^{k}\circ(f^{*})^{j}\right)\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}a_k\cdot\overline{a_j}\cdot\left((f^{*})^{j}\circ f^{k}\right)\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\overline{a_j}\cdot(f^{*})^{j}\right)\circ\left(a_k\cdot f^{k}\right)\right)\\&=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\overline{a_j}\cdot(f^{*})^{j}\right)\circ\left(a_k\cdot f^{k}\right)\right)=\sum_{j=0}^{n}\left(\overline{a_j}\cdot(f^{*})^{j}\circ\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\cdot f^{k}\right)\right)\\&=\left(\sum_{j=0}^{n}\overline{a_j}\cdot(f^{*})^{j}\right)\circ\left(\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\cdot f^{k}\right)\right)=(P(f))^{*}\circ P(f)\end{aligned}$$

ומהגדרה נקבל ש-$P(f)$ נורמלי.

4. מהסעיף הקודם נובע שגם $f-\mathrm{Id}_V$ הוא אופרטור נורמלי, נניח של-f יש ערך עצמי $\lambda\in\mathbb{F}$ ויהי $v\in V$ כך ש-$f(v)=\lambda\cdot v$.
$$\Rightarrow 0_V=f(v)-\lambda\cdot v=(f-\lambda\cdot\mathrm{Id}_V)(v)=\left(f^*-(\lambda\cdot\mathrm{Id}_V)^*\right)(v)$$
$$=\left(f^*-\overline{\lambda}\cdot\mathrm{Id}_V^*\right)(v)=f^*(v)-\overline{\lambda}\cdot\mathrm{Id}_V(v)=f^*(v)-\overline{\lambda}\cdot v$$
$$\Rightarrow f^*(v)=\overline{\lambda}\cdot v$$
הגרירה בכיוון ההפוך נובעת מהעובדה ש-$f=(f^*)^*$ ו-$\overline{\overline{\lambda}}=\lambda$.

5. נניח של-f יש לו שני ערכים עצמיים שונים $\lambda,\mu\in\mathbb{F}$ ובהג"כ נניח ש-$\mu\neq 0$, א"כ יהיו $v\in V_\lambda$ ו-$w\in V_\mu$.
$$\Rightarrow\langle v\mid w\rangle=\left\langle v\mid\frac{1}{\mu}\cdot\mu\cdot w\right\rangle=\frac{1}{\mu}\cdot\langle v\mid f(w)\rangle=\frac{1}{\mu}\cdot\langle f^*(v)\mid w\rangle=\frac{1}{\mu}\cdot\left\langle\overline{\lambda}\cdot v\mid w\right\rangle=\frac{\lambda}{\mu}\cdot\langle v\mid w\rangle$$
כעת נניח בשלילה ש-$\langle v\mid w\rangle\neq 0$,
$$\Rightarrow\mu=\mu\cdot\frac{\langle v\mid w\rangle}{\langle v\mid w\rangle}=\lambda$$
בסתירה לכך ש-$\lambda\neq\mu$. מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$\langle v\mid w\rangle=0$, כלומר $v\perp w$ ומכיוון ש-v ו-w היו שרירותיים נובע מזה ש-$V_\mu\perp V_\lambda$.

■

מסקנה 4.3. אם f הרמיטי אז כל הערכים העצמיים שלו ממשיים, ואם f אנטי-הרמיטי אז כל הערכים העצמיים שלו מדומים.

משפט 4.4. נניח ש-V נ"ס, מתקיימים שני הפסוקים הבאים:

1. אם f הרמיטי או אנטי-הרמיטי אז $\mathrm{Im}f=(\ker f)^\perp$.
2. אם f הרמיטי או אנטי-הרמיטי אז לכל תמ"ו $W\subseteq V$ שמור תחת f גם $W^\perp$ שמור תחת f.

הוכחה. בשביל אופרטורים הרמיטיים סעיף 1 נובע ישירות מסעיף 7 במשפט 2.11, סעיף 2 נובע מסעיף 8 במשפט זה, ובשביל אופרטורים אנטי-הרמיטיים יש לשים לב לכך ש-$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(-f)$ ושתמ"ו $W\subseteq V$ שמור תחת f אם"ם הוא שמור תחת $-f$. ■

טענה 4.5. נניח ש-V נ"ס ונביא לטענה זו שני ניסוחים שקולים:

- כל הטלה אורתוגונלית על תמ"ו היא אופרטור הרמיטי.
- אם $f^2=f$ ו-$\mathrm{Im}f=(\ker f)^\perp$ אז f הרמיטי.

♣ העובדה ש-$f^2=f$ אומרת ש-f הוא אופרטור הטלה ואילו העובדה ש-$\mathrm{Im}f=(\ker f)^\perp$ אומרת שזוהי ההטלה האורתוגונלית על התמ"ו $\mathrm{Im}f$.

הוכחה. <u>הוכחה 1 - ע"פ הנוסחה המפורשת של האופרטור הצמוד</u>
תהא $p_W:V\to V$ הטלה אורתוגונלית על תמ"ו $W\subseteq V$ (כלומר $(p_W)^2=p_W$ ובנוסף $W=\mathrm{Im}p_W$ ו-$W^\perp=\ker P_W$) ונניח ש-$f=p_W$.
נדגיש שכל התכונות של p_W כהטלה אורתוגונלית נובעות מהעובדה ש-$(p_W)^2=p_W$ וש-$\mathrm{Im}p_W=(\ker p_W)^\perp$, לכן כשהנחנו ש-$f=p_W$ לא הנחנו שום דבר מלבד ש-$f^2=f$ ו-$\mathrm{Im}f=(\ker f)^\perp$.
יהי $(u_1,u_2,\ldots,u_k)$ בסיס אורתונורמלי של W ויהי $(u_{k+1},u_{k+2},\ldots,u_n)$ בסיס אורתונורמלי של $W^\perp$, א"כ $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ הוא בסיס אורתונורמלי של V.

יהי $v\in V$ ויהיו $w\in W$ ו-$w^{\perp}\in W^{\perp}$ כך ש-$v=w+w^{\perp}$, א"כ $p_W(v)=w$.
מהנוסחה המפורשת של הצמוד, ממשפט 1.12 ומתכונות ההטלה נובע שמתקיים (לכל $v\in V$):

$$\begin{aligned}(p_W)^*(v)&=\sum_{i=1}^{k}\langle p_W(u_i)\mid v\rangle\cdot u_i+\sum_{i=k+1}^{n}\langle p_W(u_i)\mid v\rangle\cdot u_i=\sum_{i=1}^{k}\langle u_i\mid v\rangle\cdot u_i+\sum_{i=k+1}^{n}\langle 0_V\mid v\rangle\cdot u_i\\
&=\sum_{i=1}^{k}\langle u_i\mid v\rangle\cdot u_i+\sum_{i=k+1}^{n}0\cdot u_i=\sum_{i=1}^{k}\langle u_i\mid v\rangle\cdot u_i=\sum_{i=1}^{k}\left\langle u_i\mid w+w^{\perp}\right\rangle\cdot u_i\\
&=\sum_{i=1}^{k}\left(\langle u_i\mid w\rangle+\left\langle u_i\mid w^{\perp}\right\rangle\right)\cdot u_i=\sum_{i=1}^{k}\left(\langle u_i\mid w\rangle+0\right)\cdot u_i\\
&=\sum_{i=1}^{k}\langle u_i\mid w\rangle\cdot u_i=\sum_{i=1}^{k}\langle u_i\mid w\rangle\cdot u_i+\sum_{i=k+1}^{n}0\cdot u_i\\
&=\sum_{i=1}^{k}\langle u_i\mid w\rangle\cdot u_i+\sum_{i=k+1}^{n}\langle u_i\mid w\rangle\cdot u_i=w=p_W(v)\end{aligned}$$

■

הוכחה. <u>הוכחה 2 - אלגברית</u>
לכל $v\in V$ מתקיים:

$$f(v-f(v))=f(v)-f^2(v)=f(v)-f(v)=0_V$$

מכאן שלכל $v\in V$ מתקיים $v-f(v)\in\ker(T)=(\mathrm{Im}T)^{\perp}$ ולכן גם (לכל $w\in V$):

$$\langle v-f(v)\mid f(w)\rangle=0$$

א"כ לכל $v,w\in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\langle v\mid f(w)\rangle&=\langle f(v)+(v-f(v))\mid f(w)\rangle=\langle f(v)\mid f(w)\rangle+\langle v-f(v)\mid f(w)\rangle=\langle f(v)\mid f(w)\rangle\\
\langle f(v)\mid w\rangle&=\langle f(v)\mid f(w)+(w-f(w))\rangle=\langle f(v)\mid f(w)\rangle+\langle f(v)\mid w-f(w)\rangle=\langle f(v)\mid f(w)\rangle\end{aligned}$$

מכאן שלכל $v,w\in V$ מתקיים $\langle f(v)\mid w\rangle=\langle f(v)\mid f(w)\rangle=\langle v\mid f(w)\rangle$ ומטענה 2.10 נובע ש-$f=f^*$. ■

טענה 4.6. אם f נורמלי אז לכל $\lambda\in\sigma(f)$ התמ"ויים V_λ ו-$(V_\lambda)^{\perp}$ שמורים הן תחת f והן תחת f^*.

הוכחה. נניח ש-f נורמלי ויהי $\lambda\in\sigma(f)$ (אם אין כזה הטענה טריוויאלית), V_λ שמור תחת f מהגדרה וכבר ראינו שזה אומר ש-$(V_\lambda)^{\perp}$ שמור תחת f^* (סעיף 8 במשפט 2.11).
נוכיח ש-V_λ שמור תחת f^*, מסעיף 5 במשפט 4.2 נובע שלכל $v\in V_\lambda$ מתקיים:

$$f(f^*(v))=f^*(f(v))=f^*(\lambda\cdot v)=\lambda\cdot f^*(v)$$

כלומר $f^*(v)\in V_\lambda$ ומכאן ש-V_λ שמור תחת f^*.
נוכיח ש-$(V_\lambda)^{\perp}$ שמור תחת f, לכל $v\in V_\lambda$ ולכל $w\in(V_\lambda)^{\perp}$ מתקיים:

$$\langle v\mid f(w)\rangle=\langle f^*(v)\mid w\rangle=\left\langle\overline{\lambda}\cdot v\mid w\right\rangle=\lambda\cdot\langle v\mid w\rangle=0$$

■

4.2 המשפט הספקטרלי

4.2.1 במרחבים הרמיטיים

נניח ש-V הרמיטי, כלומר V נ"ס ו-$\mathbb{F}=\mathbb{C}$.

משפט 4.7. המשפט הספקטרלי

- f נורמלי אם"ם f לכסין אוניטרית.
- מטריצה $A\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ היא נורמלית אם"ם היא לכסינה אוניטרית.

הוכחה.

- $\Leftarrow$
נניח ש-f נורמלי ונוכיח את הטענה באינדוקציה על הממד של V, אם $\dim V=1$ הטענה טריוויאלית ולכן נעבור ישר לצעד האינדוקציה.
נניח שהמשפט נכון לכל ממ"פ מממד קטן ממש מ-$\dim V$ ויהי $\lambda\in\sigma\left(f\right)$ (נזכור שמעל המרוכבים $\sigma\left(f\right)\neq\emptyset$), בטענה הקודמת (4.6) ראינו ש-V_λ ו-$\left(V_\lambda\right)^\perp$ שמורים תחת f ותחת f^*ולכן הצמצום של f ל-V_λ מתחלף עם הצמצום של f^* ל-V_λ ואותו הדבר נכון גם עבור $\left(V_\lambda\right)^\perp$, כלומר הצמצומים של f ל-V_λ ול-$\left(V_\lambda\right)^\perp$ (בנפרד) הם אופרטורים נורמליים ולכן ע"פ הנחת האינדוקציה הם לכסינים אוניטרית.
כלומר קיימים בסיסים אורתונורמליים של V_λ ו-$\left(V_\lambda\right)^\perp$ שכל איבריהם הם וקטורים עצמיים של f, השרשור של בסיסים אלו הוא בסיס אורתונורמלי של V שכל איבריו הם וקטורים עצמיים של f ומכאן ש-f לכסין אוניטרית.

- $\Rightarrow$
נניח ש-f לכסין אוניטרית, יהי $\left(u_1,u_2,\ldots,u_n\right)$ בסיס אורתונורמלי מלכסן שלו ויהיו $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{C}$ כך ש-$f\left(u_i\right)=\lambda_i\cdot u_i$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$.
מכאן שלכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ מתקיים $f^*\left(u_i\right)=\overline{\lambda_i}\cdot u_i$ ולכן גם:
$$\begin{aligned}f\left(f^*\left(u_i\right)\right)&=f\left(\overline{\lambda_i}\cdot u_i\right)=\overline{\lambda_i}\cdot f\left(u_i\right)=\overline{\lambda_i}\cdot\lambda_i\cdot u_i=\lambda_i\cdot\overline{\lambda_i}\cdot u_i\\&=\lambda_i\cdot f^*\left(u_i\right)=f^*\left(\lambda_i\cdot u_i\right)=f^*\left(f\left(u_i\right)\right)\end{aligned}$$
וממילא $f\circ f^*=f^*\circ f$, כלומר f נורמלי.

- המשפט עבור מטריצות נובע ישירות מהמשפט עבור אופרטורים ומהעובדה שמעבר בסיס במטריצות מתבצע ע"י כפל במטריצה הפיכה מצד אחד ובהופכית שלה מהצד השני.

$\blacksquare$

מסקנה 4.8. אם f נורמלי אז $f=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\cdot p_i$, כאשר p_i היא ההטלה האורתוגונלית על V_{λ_i} לכל $r\geq i\in\mathbb{N}$ ו-$\sigma\left(f\right)=\left\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r\right\}$.

מסקנה 4.9.

- באופרטורים ומטריצות הרמיטיים:
  - f הרמיטי אם"ם קיים בסיס אורתונורמלי שכל איבריו הם וקטורים עצמיים של f עם ערכים עצמיים ממשיים.
  - מטריצה $A\in M_n(\mathbb{C})$ היא הרמיטית אם"ם קיימת מטריצה אוניטרית $U\in M_n(\mathbb{C})$ כך ש-$U^{-1}AU$ אלכסונית וממשית.
- באופרטורים ומטריצות אנטי-הרמיטיים:
  - f אנטי-הרמיטי אם"ם קיים בסיס אורתונורמלי שכל איבריו הם וקטורים עצמיים של f עם ערכים עצמיים מדומים.
  - מטריצה $A\in M_n(\mathbb{C})$ היא אנטי-הרמיטית אם"ם קיימת מטריצה אוניטרית $U\in M_n(\mathbb{C})$ כך ש-$U^{-1}AU$ אלכסונית ומדומה[16].
- באופרטורים ומטריצות אוניטריים:
  - f אוניטרי אם"ם קיים בסיס אורתונורמלי שכל איבריו הם וקטורים עצמיים של f בעלי ערכים עצמיים שערכם המוחלט הוא 1 (כלומר נמצאים על מעגל היחידה במישור המרוכב).
  - מטריצה $A\in M_n(\mathbb{C})$ היא אוניטרית אם"ם קיימת מטריצה אוניטרית $U\in M_n(\mathbb{C})$ כך ש-$U^{-1}AU$ אלכסונית שאיבריה על האלכסון בעלי ערך מוחלט 1 (כלומר נמצאים על מעגל היחידה במישור המרוכב).

♣ **שימו לב (!):** בלבול נפוץ מאד (לא תאמינו כמה פעמים טעיתי בזה...) הוא לחשוב שהעובדה שהערך המוחלט של ערך עצמי הוא 1 אומרת שמדובר ב-±1, זה לא נכון וכפי שהזכרנו כל המספרים המרוכבים שעל מעגל היחידה במישור המרוכב מקיימים זאת; כמובן שהסיבה לבלבול היא שאנו רגילים לעבוד בממשיים...

מסקנה 4.10.

1. f נורמלי אם"ם קיים בסיס U אורתונורמלי המטריצה $[f]_U$ אלכסונית.
2. f הרמיטי אם"ם קיים בסיס U אורתונורמלי המטריצה $[f]_U$ אלכסונית וממשית.
3. f אנטי-הרמיטי אם"ם קיים בסיס U אורתונורמלי המטריצה $[f]_U$ אלכסונית ומדומה.
4. f אוניטרי אם"ם קיים בסיס U אורתונורמלי המטריצה $[f]_U$ אלכסונית שאיבריה על האלכסון הם בעלי ערך מוחלט 1 (כלומר נמצאים על מעגל היחידה במישור המרוכב).

[16] כלומר בכל הקואורדינטות שלה יש מספרים מדומים.

4.2.2 במרחבים אוקלידיים

נניח ש-V אוקלידי, כלומר V נ"ס ו-$\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

♣ ההוכחה של המשפט הספקטרלי מעל המרוכבים הסתמכה על שלוש נקודות חשובות:

1. לכל תמ"ו $W\subseteq V$ שמור תחת f יש ל-$f|_W$ ערך עצמי, כלומר קיים $\lambda\in\mathbb{F}$ כך ש-V_λ אינו טריוויאלי (ראינו בחלק שעסק באופרטורים שא"א לומר זאת בוודאות מעל $\mathbb{R}$).
2. אם f נורמלי אז מרחבים עצמיים שונים מאונכים זה לזה (סעיף 5 במשפט 4.2).
3. אם f נורמלי אז תתי המרחבים הווקטוריים V_λ ו-$(V_\lambda)^\perp$ שמורים תחת f ותחת f^* (טענה 4.6).

כשאנו רוצים להעתיק את המשפט לאופרטורים נורמליים מעל הממשיים אנחנו נתקלים בבעיה בנקודה הראשונה, ואכן ישנם אופרטורים נורמליים מעל הממשיים שאין להם ערכים עצמיים כלל ולכן אינם לכסינים - הדוגמה הקלאסית היא אופרטור הסיבוב בזווית ישרה נגד כיוון השעון (שהיא מטריצה אורתוגונלית):

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$$

זו הסיבה לכך שהמשפט יהיה נכון אך ורק עבור אופרטורים ומטריצות סימטריים משום שרק אצלם כל הערכים העצמיים ממשיים.

טעות נפוצה בניסיון להוכיח שלמטריצות סימטריות יש ערכים עצמיים היא לומר שכל מטריצה סימטרית מעל הממשיים היא גם מטריצה הרמיטית מעל המרוכבים ואז כפי שראינו יש לה ערך עצמי ממשי ולכן גם כמטריצה מעל הממשיים יש לה את אותו ערך עצמי; **זה פשוט לא נכון!**

בואו ננתח את זה ביסודיות: העובדה שלמטריצה $A\in M_n(\mathbb{C})$ יש ערך עצמי $\lambda\in\mathbb{R}$ אומרת שקיים וקטור $v\in\mathbb{C}^n$ כך ש-$A\cdot v=\lambda\cdot v$ אבל ייתכן ש-$v\notin\mathbb{R}^n$ ולכן לא הצלחנו להוכיח שום דבר לגבי A כמטריצה מעל הממשיים.

למעשה רימיתי מעט כאמרתי שנימוק זה אינו נכון, האמת היא (כפי שהזכרתי בחלק שעסק באופרטורים) שאם למטריצה ממשית יש צורת ז'ורדן ממשית אז יש לה גם בסיס מז'ורדן ממשי[17], מסיבה זו ורק מסיבה זו הנימוק הנ"ל דווקא תקף: ניקח את הבסיס המז'ורדן של המטריצה הסימטרית שהוא למעשה בסיס מלכסן ונפעיל על כל מרחב עצמי את אלגוריתם גרם-שמידט[18]. הבעיה בנימוק הזה היא שהוא מסתמך על מתמטיקה גבוהה יותר שלא למדנו עדיין ולכן העדפתי הוכחה אחרת.

משפט 4.11.

- f סימטרי אם"ם f לכסין אורתוגונלית.
- מטריצה$A\in M_n(\mathbb{R})$ היא סימטרית אם"ם היא לכסינה אורתוגונלית.

הוכחה. את הגרירה מימין לשמאל קל יותר להוכיח עבור מטריצות ואת הגרירה ההפוכה נוח יותר להוכיח עבור אופרטורים, מכיוון שיש לנו שקילות מוחלטת בין מטריצות לאופרטורים אין כאן שום בעיה.

- $\Leftarrow$

נניח ש-A סימטרית ונוכיח את הטענה באינדוקציה על n, אם $n=1$ הטענה טריוויאלית ולכן נעבור ישירות לצעד האינדוקציה.

<u>צעד האינדוקציה</u>

נניח שהטענה מתקיימת לכל $n>k\in\mathbb{N}$.

כמטריצה מעל הממשיים A היא גם מטריצה מעל המרוכבים וככזו יש לה ערך עצמי מעל המרוכבים, ממסקנה 4.3 נובע שכל ערך עצמי כזה הוא ממשי ולכן לפולינום האופייני של A יש שורש ממשי.

כעת נשים לב לכך שהפולינום האופייני של A כמטריצה מעל המרוכבים זהה לפולינום האופייני שלה כמטריצה מעל המרוכבים,

[17] את המשפט הזה ראיתי בוויקיפדיה בערך "דמיון מטריצות" וכפי שניתן לראות שם עדיין לא למדנו את המתמטיקה הדרושה להוכחתו.

[18] הנה לכם עוד נימוק לעובדה שמטריצה הרמיטית מעל המרוכבים היא לכסינה אוניטרית מבלי להסתמך על ההוכחה שהבאנו לעיל בשביל אופרטורים נורמליים.

מכאן שיש ל-A כמטריצה מעל הממשיים ערך עצמי.
א"כ יהי $W \subseteq \mathbb{R}^n$ תמ"ו שמור תחת T_A ממימד 1, כפי שראינו (משפט 4.4) גם $W^\perp$ שמור תחת T_A [19]
מכאן שהצמצומים של T_A ל-W ול-$W^\perp$ הם אופרטורים סימטריים ולכן ע"פ הנחת האינדוקציה הם לכסינים אורתוגונלית; כלומר קיימים בסיסים אורתונורמליים של W ו-$W^\perp$ שכל איבריהם הם וקטורים עצמיים של T_A, והשרשור של בסיסים אלו הוא בסיס אורתונורמלי של V שכל איבריו הם וקטורים עצמיים של T_A ומכאן ש-T_A לכסין אורתוגונלית וכך גם A.

- $\Rightarrow$

נניח ש-f לכסין אורתוגונלית: יהי $U := (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ בסיס אורתונורמלי מלכסן של $\mathbb{R}^n$ ויהיו $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ כך ש-$f(\lambda_i) = \lambda_i \cdot u_i$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.
מכאן שלכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$f(u_i) = \lambda_i \cdot u_i = \overline{\lambda_i} \cdot u_i = f^*(u_i)$$

וממילא $f = f^*$, כלומר f סימטרי.

■

4.3 אלגוריתם ללכסון אורתוגונלי/אוניטרי

אלגוריתם 2 אלגוריתם ללכסון אורתוגונלי/אוניטרי

נתון אופרטור f על ממ"פ V מעל לשדה $\mathbb{F}$, עלינו לקבוע אם f לכסין אורתוגונלית/אוניטרית ואם כן אז גם למצוא את הצורה האלכסונית של f ובסיס אורתונורמלי מלכסן.
כדי לבדוק אם f לכסין אורתוגונלית/אוניטרית ניקח בסיס $\mathcal{B}$ של V ונסמן $A := [f]_\mathcal{B}$, כעת:

- אם $A^* = A$ אז f לכסין אורתוגונלית/אוניטרית.
- אחרת:
  - אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז f אינו לכסין אורתוגונלית.
  - אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ וגם $A^*A = I_n$ ו/או $A^*A = AA^*$ אז f לכסין אוניטרית, אחרת f אינו לכסין אוניטרית.

אם f לכסין אורתוגונלית/אוניטרית נפעל ע"פ השלבים הבאים:

1. נחשב את χ_f, כעת אנחנו יודעים מהם הערכים העצמיים של f אך יותר מזה - מספר ההופעות של כל אחד מהם בצורה האלכסונית הוא הריבוי האלגברי שלו ב-χ_f - לכן כבר עכשיו אנחנו יודעים בדיוק איך נראית הצורה האלכסונית של f (עוד לפני שמצאנו בסיס מלכסן), נסמן אותה ב-D.
2. לכל $\lambda \in \sigma(f)$:
   - נמצא בסיס ל-$V_\lambda = \ker(f - \lambda)$ ע"י מציאת בסיס למרחב הפתרונות של הממ"ל:
   $$([f]_\mathcal{B} - \lambda \cdot I_n) \cdot x = 0$$
   וחילוץ הווקטורים המתאימים ב-V (כל וקטור בבסיס של מרחב הפתרונות הוא וקטור קואורדינטות של וקטור ב-V ע"פ הבסיס $\mathcal{B}$).
   - נפעיל את אלגוריתם גרם-שמידט למציאת בסיס אורתונורמלי של V_λ.
3. נשרשר את הבסיסים זה לזה לבסיס אחד U, מסעיף 5 במשפט 4.2 נובע ש-U הוא בסיס אורתונורמלי.

[19] כזכור T_A היא ההעתקה הליניארית המוגדרת ע"י כפל המטריצה A בווקטור, כמו כן בכל הנוגע למטריצות אנחנו עובדים עם המכפלה הסקלרית ולכן $W^\perp$ מוגדר על פיה.

5 רשימות לזיכרון

יהי f אופרטור על ממ"פ V מעל לשדה $\mathbb{F}$.

- **אופרטור אוניטרי (מעל הממשיים גם: "אורתוגונלי")**
  - הגדרה: לכל $v,w\in V$ מתקיים $\langle f(v)\mid f(w)\rangle=\langle v\mid w\rangle$.
  - שקילויות
    - f הפיך ו-$f^{*}=f^{-1}$.
    - נניח ש-V הרמיטי, f לכסין אוניטרית וכל הערכים העצמיים שלו נמצאים על מעגל היחידה המרוכב.

♣ בניגוד לאופרטורים נורמליים ואופרטורים הרמיטיים, התחום והטווח של העתקה אוניטרית לא מוכרחים להיות זהים.

♣ אם V אוקלידי ו-f אורתוגונלי ניתן לפרק את V לתתי-מרחבים שמורים תחת f מגודל 1 או 2, ובתוך כל תת-מרחב כזה f פועל כסיבוב או שיקוף[20] ללא שינוי גודל המרחב.

- **אופרטור הרמיטי/צמוד לעצמו (מעל הממשיים גם: "סימטרי")**
  - הגדרה: מתקיים $f^{*}=f$.
  - שקילויות
    - לכל $v,w\in V$ מתקיים: $\langle f(v)\mid w\rangle=\langle v\mid f(w)\rangle$.
    - לכל $v,w\in V$ מתקיים: $\langle v\mid f(w)\rangle=\langle f(v)\mid w\rangle$.
    - נניח ש-V נ"ס, f לכסין אוניטרית וכל הערכים העצמיים שלו ממשיים.

- **אופרטור אנטי-הרמיטי (מעל הממשיים גם: "אנטי-סימטרי")**
  - הגדרה: מתקיים $f^{*}=f$.
  - שקילויות
    - לכל $v,w\in V$ מתקיים: $\langle -f(v)\mid w\rangle=\langle v\mid f(w)\rangle$.
    - לכל $v,w\in V$ מתקיים: $\langle v\mid -f(w)\rangle=\langle f(v)\mid w\rangle$.
    - נניח ש-V הרמיטי, f לכסין אוניטרית וכל הערכים העצמיים שלו מדומים.

- **אופרטור נורמלי**
  - הגדרה: מתקיים $f\circ f^{*}=f^{*}\circ f$.
  - שקילויות
    - לכל $v,w\in V$ מתקיים: $\langle f(v)\mid f(w)\rangle=\langle f^{*}(v)\mid f^{*}(w)\rangle$.
    - נניח ש-V הרמיטי, f לכסין אוניטרית.
  - ערכים עצמיים
    - לכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים $\overline{\lambda}\in\sigma(f^{*})\iff\lambda\in\sigma(f)$.
    - לכל $\lambda,\mu\in\sigma(f)$ מתקיים $V_{\lambda}\perp V_{\mu}$.
    - נניח ש-V הרמיטי, מתקיים $f=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\cdot p_i$, כאשר p_i היא ההטלה האורתוגונלית על V_{λ_i} לכל $r\geq i\in\mathbb{N}$ ו-$\sigma(f)=\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r\}$.

♣ אופרטורים הרמיטיים, אנטי-הרמיטיים ואוניטריים הם בפרט אופרטורים נורמליים.

♣ נניח ש-V נ"ס, f נורמלי / הרמיטי / אנטי-הרמיטי / אוניטרי אם"ם לכל בסיס אורתונורמלי U של V המטריצה $[f]_U$ נורמלית / הרמיטית / אנטי-הרמיטית / אוניטרית.

[20] בתמ"ו מממד 1 אין הבדל בין סיבוב ב-π רדיאנים לשיקוף דרך הראשית.