טורים - הגדרות בלבד

חשבון אינפיניטסימלי (2) - 80132

מרצה: יורם לסט

מתרגלים: דניאל אופנר ומתן בן-אשר

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

הפרק העוסק בגבול עליון ובגבול תחתון הועבר לסיכומים של סדרות (אינפי' 1).

* * *

תודתי נתונה ל**מסכם אלמוני** על הסיכום שכתב בשנת הלימודים תשפ"א,
נעזרתי בו רבות על מנת לכתוב את הסיכום שלפניכם.
אשמח מאד לדעת מי הוא אותו מסכם אלמוני כדי שאוכל לציין זאת כאן.

* * *

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

סימון: בהינתן סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ נקרא לסימון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (או באופן שקול: $a_1 + a_2 + a_3 + ...$) "הטור האינסופי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$", לאיברי הסדרה קוראים במקרה כזה גם "איברי הטור" ולאיבר ה-n-י (a_n) קוראים "האיבר הכללי של הטור".

הגדרה 1.1. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים ממשיים; נסמן ב-S_N את $\sum_{n=1}^{N} a_n$ (לכל $N \in \mathbb{N}$) ונקרא לו "הסכום החלקי ה-N-י של הטור", הסדרה $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ תקרא "סדרת הסכומים החלקיים של הטור".
נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם הסדרה $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ מתכנסת ובמקרה כזה נאמר שסכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא $\lim_{N\to\infty} S_N$ ונכתוב:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$$

אם הטור אינו מתכנס נאמר שהוא מתבדר.
אם סדרת הסכומים החלקיים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל-$\pm\infty$ נאמר שהטור שואף/מתבדר ל-$\pm\infty$ (כזכור מהקורס הקודם שאיפה ל-$\pm\infty$ היא סוג של **התבדרות**) ונכתוב:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$$

♣ בהינתן סדרה, הטור שלה לא מוכרח להיות קיים שהרי אין זה מוכרח שהגבול הנ"ל קיים.

הגדרה 1.2. בהינתן טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא לטור $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ ($m \in \mathbb{N}_0$) בשם ה-m זנב של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ או גם ה-m-שארית של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, אם ה-m-זנב של טור מתכנס נסמן את סכומו ב-r_m.

2 טורים חיוביים

הגדרה 2.1. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה,

- אם a_n **אי-שלילי** לכל $n \in \mathbb{N}$ נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור **חיובי**.
- אם a_n **חיובי** לכל $n \in \mathbb{N}$ נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור **חיובי ממש**.
- אם a_n **אי-חיובי** לכל $n \in \mathbb{N}$ נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור **שלילי**.
- אם a_n **שלילי** לכל $n \in \mathbb{N}$ נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור **שלילי ממש**.

♣ סדרת הסכומים החלקיים של טור חיובי היא סדרה מונוטונית עולה ולכן אם היא חסומה אז הטור מתכנס ואם אינה חסומה אז הטור שואף לאינסוף (אלו שתי האפשרויות היחידות כמובן), זוהי הסיבה העיקרית לעניין בטורים חיוביים.

♣ כמובן שכל מה שנאמר על טורים חיוביים נכון גם על טורים שליליים (עם השינויים הנדרשים).

3 טורים בעלי סימנים משתנים

למה 3.1. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה, אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

הגדרה 3.2. יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור.

1. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט.
2. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אך הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ אינו מתכנס, נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בתנאי.

♣ טור הערכים המוחלטים הוא טור חיובי ולכן ניתן להשתמש במבחני ההתכנסות של טורים חיוביים כדי לבדוק אם טור נתון מתכנס בהחלט (וממילא מתכנס בעצמו).

הגדרה 3.3. נאמר שטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ הוא טור חסום אם סדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה.

סימון: תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה, נסמן $P_N := \prod_{n=1}^{N}a_n$ (לכל $N\in\mathbb{N}$).

הגדרה 3.4. נאמר שהמכפלה האינסופית $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנסת אם הגבול $\lim\limits_{N\to\infty}P_N$ קיים (במובן הצר) ושונה מ-0[1].

4 הכנסת סוגריים ושינוי סדר

הגדרה 4.1. נאמר שהטור $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k$ מתקבל מהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ע"י הכנסת סוגריים אם קיימת תת-סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\sigma_k=\sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k}a_l$$

וזאת כאשר נסמן $n_0=0$.

המחשה:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k=\underbrace{(a_1+a_2+...+a_{n_1})}_{\sigma_1}+\underbrace{(a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+...+a_{n_2})}_{\sigma_2}+...+\underbrace{(a_{n_{k-1}+1}+a_{n_{k-1}+2}+...+a_{n_k})}_{\sigma_k}+...$$

5 מכפלות טורים

אין הגדרות בפרק זה.

[1]הגבלה זו נועדה כדי להסיר את המקרים בהם יש אפסים ב-$(a_n)_{n=1}^{\infty}$, אנו משלמים על כך מחיר מסוים מפני שישנן סדרות שאין בהן אפסים ולמרות זאת מקיימות $\lim_{N\to\infty}P_N=0$ אך בשביל זה יש לנו את הגדרת הגבול של סדרה.