אינטגרלים לאורך מסילות - הגדרות בלבד

אנליזה על יריעות - 80416

מרצה: אור הרשקוביץ

מתרגל: אור קדר

סוכם ע"י שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ד, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

1 התחלה

תזכורת: באינפי' 3 הגדרנו מסילה כפונקציה רציפה $\gamma : I \to \mathbb{X}$ כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$ הוא מקטע (בד"כ קטע סגור) ו-$\mathbb{X}$ הוא מרחב מטרי, ואמרנו שפונקציה $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ היא חלקה אם היא גזירה מכל סדר[1].

- ♣ בניגוד לשלושת קורסי אינפי' שלמדנו עד כה, בקורס זה לא נבקש לנסח משפטים עם התנאים המינימליים הדרושים לכך שיתקיימו אלא נקל על עצמנו ונדרוש שכל הפונקציות שנעסוק בהן תהיינה חלקות.

תזכורת: פרמטריזציה של קבוצה $S \subseteq \mathbb{R}^n$ היא מסילה $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ כך ש-$\gamma^* = S$ ($\gamma^* := \text{Im}\varphi$ - זהו סימון מקובל לתמונה של מסילה).

- ♣ בקורס זה לא המסילות עצמן הן שיעניינו אותנו אלא תמונותיהן שעליהן נבצע אנליזה (אינטגרלים, נגזרות וכו').

הגדרה 1.1. תהיינה $V, U \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצות פתוחות, העתקה $\phi : V \to U$ תיקרא דיפאומורפיזם בין V ל-U אם היא חלקה, הפיכה, ההופכית שלה חלקה, ונגזרותיהן הפיכות בכל נקודה.

הגדרה 1.2. נאמר שמסילה חלקה $\mu : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ מתקבלת ממסילה $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ע"י רה-פרמטריזציה אם קיימת פונקציה חלקה ועולה ממש $\phi : [c, d] \to [a, b]$ כך ש-$\phi(c) = a$ ו-$\phi(d) = b$ המקיימת $\mu = \gamma \circ \phi$, ϕ כזו תיקרא רה-פרמטריזציה של $[a, b]$.

- ♣ אם $\mu = \gamma \circ \phi$ אז γ בהכרח חלקה גם היא.
- ♣ מהגדרה ϕ כזו היא דיפאומורפיזם בין $[a, b]$ ל-$[c, d]$ ולכן גם γ מתקבלת מ-μ ע"י רה-פרמטריזציה ($\gamma = \mu \circ \phi^{-1}$). בנוסף, כמובן שכל מסילה מתקבלת מעצמה ע"י רה-פרמטריזציה ($\gamma = \gamma \circ \text{Id}$); ואם מסילה γ_3 מתקבלת ממסילה γ_2 ע"י רה-פרמטריזציה ϕ, ו-γ_2 מתקבלת מ-γ_1 ע"י רה-פרמטריזציה φ, אז γ_3 מתקבלת מ-γ_1 ע"י רה-פרמטריזציה ($\gamma_3 = \gamma_2 \circ \phi = \gamma_1 \circ (\varphi \circ \phi)$). מכאן שרה-פרמטריזציה היא יחס שקילות על כל המסילות החלקות מקטעים סגורים ב-$\mathbb{R}$ שתמונתן זהה והן בעלות נקודות קצה[2] זהות.
- ♣ נזכור שמה שמעניין אותנו הוא אנליזה על תמונות המסילות ולכן נרצה שהאנליזה שלנו לא תהיה תלויה במסילה המהווה את הפרמטריזציה של הקבוצה המבוקשת, כלומר נרצה שהאנליזה תישאר זהה לכל שתי מסילות המתקבלות זו מזו ע"י רה-פרמטריזציה.

מסקנה 1.3. תהיינה $\mu : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ ו-$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ מסילות חלקות כך ש-μ מתקבלת מ-γ ע"י רה-פרמטריזציה $\phi : [c, d] \to [a, b]$, לכל $t \in [c, d]$ מתקיים $\mu'(t) = \gamma'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$ ומכאן שגם $\text{span}(\mu'(t)) = \text{span}(\gamma'(\phi(t)))$.

---

[1] עבור מסילות שתחום ההגדרה שלהן כולל קצה/קצוות של הקטע/הקרן נדרוש גם גזירות חד-צדדית בקצוות מכל סדר.

[2] נקודות הקצה של מסילה $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ הן $\gamma(a)$ ו-$\gamma(b)$, הנקודה הראשונה היא נקודת ההתחלה והשנייה היא נקודת הסיום.

הגדרה 1.4. מסילה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ תיקרא רגולרית בנקודה $t\in[a,b]$ אם $\gamma'(t)\neq 0$, ותיקרא רגולרית אם היא רגולרית בכל נקודה $t\in[a,b]$.

♣ הגדרה זו באה למנוע מצב שבו המסילה אמנם חלקה אך תמונתה אינה "חלקה"[3], נביא לכך דוגמה.
תהא $\gamma:[-1,1]\to\mathbb{R}^2$ מסילה המוגדרת ע"י (לכל $t\in[-1,1]$):

$$\gamma(t):=\begin{cases}\left(-e^{-\frac{1}{t^2}},e^{-\frac{1}{t^2}}\right) & t<0\\ (0,0) & t=0\\ \left(e^{-\frac{1}{t^2}},e^{-\frac{1}{t^2}}\right) & t>0\end{cases}$$

אנחנו יודעים שזוהי מסילה חלקה[4], אך תמונתה היא הקבוצה $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in\left[-e^{-1},e^{-1}\right],\ y=|x|\right\}$, כלומר הגרף של פונקציית הערך המוחלט בקטע $\left[-e^{-1},e^{-1}\right]$ הכולל את 0 שהיא נקודת "שפיץ".

מסקנה 1.5. תהיינה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ ו-$\mu:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ מסילות חלקות כך ש-μ מתקבלת מ-γ ע"י רה-פרמטריזציה $\phi:[c,d]\to[a,b]$, μ רגולרית בנקודה $t\in[c,d]$ אם"ם γ רגולרית ב-$\phi(t)$, ובמקרה כזה מתקיים:

$$\frac{\gamma'(\phi(t))}{\|\gamma'(\phi(t))\|}=\frac{\mu'(t)}{\|\mu'(t)\|}$$

הגדרה 1.6. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה רגולרית בנקודה $t\in[a,b]$, הישר המשיק ל-γ ב-$\gamma(t)$ הוא $\gamma(t)+\text{span}(\gamma'(t))$, ו-$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ ייקרא משיק היחידה ל-γ בנקודה $\gamma(t)$.

♣ משתי המסקנות שראינו נובע שהישר המשיק ומשיק היחידה אינם תלויים בפרמטריזציה.

משפט. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה חלקה, ותהא $\varphi:[0,L[\gamma]]\to[a,b]$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $x\in[0,L[\gamma]]$):

$$\varphi(x):=\int_0^x\|\gamma'(t)\|\,dt$$

φ היא רה-פרמטריזציה של $[a,b]$, ולכל $x\in[0,L[\gamma]]$ מתקיים $\left\|(\gamma\circ\varphi)'(x)\right\|=1$.

הגדרה 1.7. בהינתן מסילה חלקה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, φ המוגדרת שבמשפט שלעיל תיקרא הרה-פרמטריזציה של γ לפי אורך קשת[5], ו-$\overline{\gamma}:=\gamma\circ\varphi$ תיקרא הפרמטריזציה של γ^*[6] לפי אורך קשת.

[3] שימו לב לכך שלא הגדרנו עדיין מתי **קבוצה** היא חלקה, אנו מדברים כאן רק על האינטואיציה להיותה של קבוצה חלקה.
[4] כי ראינו באינפי' 2 את הפונקציה $x\mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ (כשהתמונה של 0 היא 0) ואז הוכחנו שהיא גזירה מכל סדר ב-0 וכל הנגזרות שלה ב-0 מתאפסות.
[5] **לא ברור לי שזהו הניסוח המדויק של המונח, ודבר זה נכון גם עבור השם של $\overline{\gamma}$ להלן.**
[6] **בדף התרגול נכתב כאן γ במקום γ^*, זה נראה לי מוזר.**

2 האינטגרל המסילתי

♣ בהינתן עקומה במרחב $\mathbb{R}^n$ היינו רוצים להיות מסוגלים למדוד את אורכה, כמו כן בהינתן עקומה ב-$\mathbb{R}^n$ ופונקציה (רציפה) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ היינו רוצים להיות מסוגלים לחשב את האינטגרל של f לאורך עקומה ב-$\mathbb{R}^n$[7] - ממש כפי שחישבנו את האינטגרל שלה לאורך קטע סגור.

הגדרה 2.1. בהינתן מסילה חלקה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ וחלוקה P של $[a,b]$, נסמן:

$$S_{\gamma}\left(P\right):=\sum_{i=1}^{r}\left\Vert \gamma\left(x_{i}\right)-\gamma\left(x_{i-1}\right)\right\Vert$$

כאשר $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_r\}$ ו-$x_i>x_{i-1}$ לכל $r\geq i\in\mathbb{N}$[8], זהו <u>סכום רימן</u> של γ עבור החלוקה P.

תזכורת: בהינתן חלוקה $P:=\{x_0,x_1,\ldots,x_r\}$ של קטע $[a,b]$ סימנו את <u>פרמטר החלוקה</u> של P ע"י[9]:

$$\lambda\left(P\right):=\max\left\{ \left|x_{i}-x_{i-1}\right|:r\geq i\in\mathbb{N}\right\}$$

הגדרה 2.2. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה חלקה, נאמר ש-γ <u>בעלת אורך</u> אם קיים הגבול:

$$\lim_{\lambda(P)\to0}S_{\gamma}\left(P\right)$$

ובמקרה כזה נסמן אותו ב-$L\left[\gamma\right]$ ונקרא ל-$L\left[\gamma\right]$ <u>האורך</u> של γ.

♣ משמעות הגבול היא כמו באינפי' 2: קיים $L\in\mathbb{R}$ כך שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל חלוקה P של $[a,b]$ המקיימת $\lambda(P)<\delta$ מתקיים $\left|S_{\gamma}(P)-L\right|<\varepsilon$.

מסקנה 2.3. לכל מסילה חלקה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ בעלת אורך מתקיים:

$$L\left[\gamma\right]=\sup\left\{ S_{\gamma}\left(P\right)\mid\text{של } [a,b] \text{ היא חלוקה } P\right\}$$

הגדרה 2.4. תהיינה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה חלקה, $P:=\{x_0,x_1,\ldots,x_r\}$ חלוקה של $[a,b]$ כך ש-$x_i>x_{i-1}$ לכל $r\geq i\in\mathbb{N}$, $P^*:=\{t_1,t_2,\ldots,t_r\}$ בחירת נקודות עבור P[10], ו-$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נסמן:

$$S_{\gamma}\left(f,P,P^{*}\right)=\sum_{i=1}^{r}f\left(\gamma\left(t_{i}\right)\right)\cdot\left\Vert \gamma\left(x_{i}\right)-\gamma\left(x_{i-1}\right)\right\Vert$$

זהו <u>סכום רימן</u> של f לאורך γ עבור החלוקה P ובחירת הנקודות P^*.

---

[7] ראו כאן המחשה לכך.

[8] מהיות P חלוקה נובע ש-$x_0=a$ ו-$x_r=b$.

[9] **בשיעור אור סימן את פרמטר החלוקה ב-$\text{Mesh}\left(P\right)$.**

[10] כלומר $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ לכל $r\geq i\in\mathbb{N}$.

הגדרה 2.5. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה חלקה ותהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, האינטגרל המסילתי של f לאורך γ ביחס לפרמטר האורך[11] הוא:

$$\int\limits_{\gamma} f\ ds := \lim_{\lambda(P)\to 0} S_{\gamma}\left(f,P,P^*\right)$$

בהנחה שגבול זה אכן קיים.

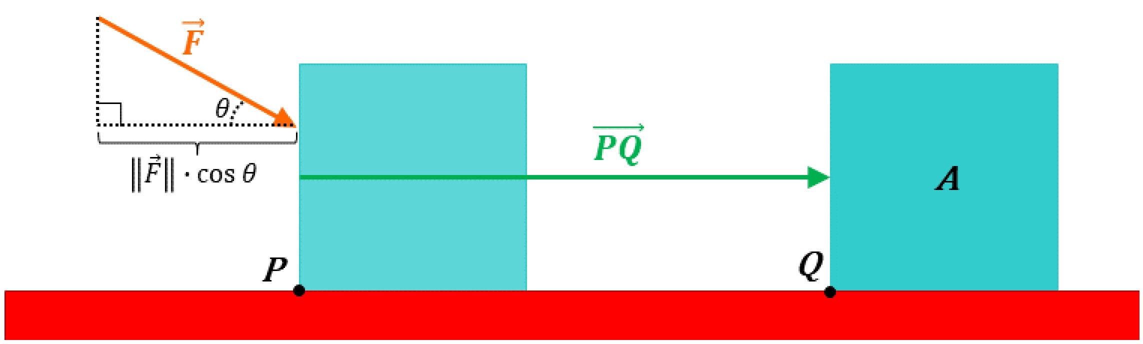
♣ גם כאן משמעות הגבול היא כמו באינפי' 2: קיים $L\in\mathbb{R}$ כך שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל חלוקה P של $[a,b]$ המקיימת $\lambda(P)<\delta$, ולכל בחירת נקודות P^* עבור P, מתקיים $\left|S_{\gamma}\left(f,P,P^*\right)-L\right|<\varepsilon$.

מסקנה 2.6. לכל מסילה חלקה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ בעלת אורך מתקיים $L[\gamma]=\int_{\gamma}1\ ds$.

3 האינטגרל הקווי

♣ בסוף ההקדמה שלי לנושא "מרחבי מכפלה פנימית" (ליניארית 2), הבאתי המחשה פיזיקלית כדי להסביר את האינטואיציה למכפלה פנימית, אביא אותה כאן שוב:

אם אני מפעיל על גוף $\boldsymbol{A}$ כוח קבוע $\vec{F}$ ובכך מזיז אותו מנקודה P לנקודה Q, אז העבודה שביצעתי היא המכפלה הסקלרית $\vec{F}\cdot\overrightarrow{PQ}$ (כאשר $\overrightarrow{PQ}$ הוא וקטור ההעתק מ-P ל-Q). שימו לב - חלק מהכוח שהפעלתי לא תרם לכך שהגוף זז מפני שהוא מאונך לכיוון התנועה של הגוף $\boldsymbol{A}$ (ראו באיור), כלומר המכפלה הסקלרית בדקה עד כמה "הצלחתי" להזיז את הגוף בכיוון הרצוי ע"י הכוח ועשתה זאת ע"י הטלת וקטור הכוח בכיוון של וקטור ההעתק וכפל באורכו של וקטור ההעתק.



איור 1: העבודה היא המכפלה הסקלרית של וקטור הכוח בווקטור ההעתק

אני מקווה שגם מי שלא למד פיזיקה בתיכון קיבל רושם טוב ממה שהולך כאן, לא הייתה לי שום דרך להסביר זאת מבלי לערב מושגים פיזיקליים ולא במקרה...

כל זה היה טוב ויפה אבל מה קורה כאשר אני מניע את הגוף ע"י כוח משתנה לאורך מסלול עקום? אז לא נוכל פשוט לכפול את הווקטורים מפני שאי אפשר לבטא את המסלול העקום והכוח המשתנה ע"י שני וקטורים בלבד.

[11] בוויקיפדיה אינטגרל זה נקרא "אינטגרל קווי מסוג ראשון".

♣ כדי לפתור את הבעיה נסתכל קודם על מקרה פשוט יותר: נניח שהייתי מניע את הגוף לאורך מסלול המורכב מקטעים ישרים, ובכל קטע בנפרד הייתי מפעיל על הגוף כוח קבוע (כלומר בתוך קטע אחד הכוח קבוע אך ייתכן שבשני קטעים שונים הפעלתי כוחות שונים). במקרה כזה היה ברור לכולנו שיש לבצע את החישוב הקודם בנפרד ולסכום את כל תוצאות החישוב, וזה בדיוק מה שנעשה כשנרצה לחשב את העובדה שביצע כוח משתנה לאורך מסלול עקום: נקרב את המסלול העקום ע"י קווים ישרים ובכל קטע נדגום בנקודה אחת את הכוח, וככל שהקטעים הישרים יקרבו טוב יותר את המסלול כך החישוב שלנו יהיה קרוב יותר לאמת, וכאשר ניקח גבול נקבל את התוצאה הרצויה.

הגדרה 3.1. תהא $U\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קבוצה פתוחה, שדה וקטורי על U הוא פונקציה חלקה $X:U\to\mathbb{R}^{n}$.

סימון: לפעמים, כשנרצה להדגיש שפונקציה $X:U\to\mathbb{R}^{n}$ היא שדה וקטורי, נסמן אותה ב-$\vec{X}$.

הגדרה 3.2. תהיינה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^{n}$ מסילה חלקה, $P:=\{x_{0},x_{1},\ldots,x_{r}\}$ חלוקה של $[a,b]$ כך ש-$x_{i-1}<x_{i}$ לכל $r\geq i\in\mathbb{N}$ ו-$P^{*}:=\{t_{1},t_{2},\ldots,t_{r}\}$ בחירת נקודות עבור P, ויהי $\vec{X}:U\to\mathbb{R}^{n}$ שדה וקטורי. נסמן[12]:

$$S_{\gamma}\left(\vec{X},P,P^{*}\right)=\sum_{i=1}^{r}\vec{X}\left(\gamma\left(t_{i}\right)\right)\cdot\left(\gamma\left(x_{i}\right)-\gamma\left(x_{i-1}\right)\right)$$

זהו סכום רימן של $\vec{X}$ לאורך γ עבור החלוקה P ובחירת הנקודות P^{*}.

הגדרה 3.3. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^{n}$ מסילה חלקה ויהי $\vec{X}:U\to\mathbb{R}^{n}$ שדה וקטורי, האינטגרל הקווי של $\vec{X}$ לאורך γ[13] הוא:

$$\int_{\gamma}\vec{X}\cdot d\vec{\ell}:=\int_{\gamma}\vec{X}\cdot d\gamma:=\lim_{\lambda(P)\to0}S_{\gamma}\left(f,P,P^{*}\right)$$

בהנחה שגבול זה אכן קיים.

♣ כאן השדה $\vec{X}$ "מספר לנו" מהו הכוח שהופעל על הגוף בכל נקודה לאורך מסלול תנועתו, וההפרש בין ערכי המסילה מקרב את התנועה של הגוף באותה נקודה, לפיכך המכפלה הפנימית שלהם מקרבת את העבודה שבוצעה באותה נקודה וכשניקח גבול על סכומי רימן הנ"ל נקבל את העבודה שבוצעה על הגוף לאורך כל מסלול תנועתו.

♣ ההמחשה הכי טובה (שאני מכיר) למה שקורה כאן היא העבודה שמבצע שדה חשמלי על גוף בעל מטען חשמלי הנע במרחב שבו חל השדה החשמלי.

[12] כאן סימן הכפל מתייחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית - $x\cdot y=\sum_{i=1}^{n}x_{i}y_{i}$.
[13] בוויקיפדיה אינטגרל זה נקרא "אינטגרל קווי מסוג ראשון".

4 שדות משמרים

הגדרה 4.1. שדה וקטורי $\vec{F}:U\to\mathbb{R}^{n}$ ייקרא משמר אם לכל שתי מסילות חלקות $\gamma_{1},\gamma_{2}:[a,b]\to U$ מתקיים:
$$\int\limits_{\gamma_{1}}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}=\int\limits_{\gamma_{2}}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

- ♣ כלומר שדה משמר הוא שדה וקטורי שהאינטגרל הקווי שלו תלוי אך ורק בנקודות הקצה של העקומה ולא בעקומה המסוימת שמחברת בין נקודות אלו.

הגדרה 4.2. תהא $U\subseteq\mathbb{R}^{n}$[14], תהיינה $\gamma_{0},\gamma_{1}:[a,b]\to\mathbb{R}^{n}$ שתי מסילות חלקות בעלות נקודות קצה זהות, כלומר $\gamma_{0}(a)=\gamma_{1}(a)$ ו-$\gamma_{0}(b)=\gamma_{1}(b)$.
נאמר ש-γ_{0} ו-γ_{1} הומוטופיות ב-U ביחס לנקודות קצה אם קיימת פונקציה חלקה $H:[a,b]\times[0,1]\to\mathbb{R}^{n}$ כך שלכל $t\in[a,b]$ ולכל $s\in[0,1]$ מתקיים:

$$H(a,s)=\gamma_{0}(a)=\gamma_{1}(a)\qquad H(t,0)=\gamma_{0}(t)$$
$$H(b,s)=\gamma_{0}(b)=\gamma_{1}(b)\qquad H(t,1)=\gamma_{1}(t)$$

H כנ"ל תיקרא הומוטופיה בין γ_{0} ל-γ_{1}.

- ♣ כלומר לכל $s\in[0,1]$ הפונקציה $t\mapsto H(t,s)$ היא מסילה חלקה בעלת נקודות קצה זהות לאלה של γ_{0} ו-γ_{1}, ובנוסף הפונקציה $t\mapsto H(t,0)$ היא γ_{0} והפונקציה $t\mapsto H(t,1)$ היא γ_{1}.
א"כ ניתן "לעוות" את γ_{0} באופן רציף ומבלי "לחתוך" אותה עד לקבלת γ_{1}, וזאת אך ורק תוך מעבר ב-U (ראו כאן המחשה).
- ♣ הומוטופיה בתוך קבוצה נתונה היא יחס שקילות.
- ♣ הדוגמה הקלאסית של הומוטופיה היא הפונקציה $(t,s)\mapsto\gamma_{0}(t)\cdot(1-s)+\gamma_{1}(t)\cdot s$, זהו **הצירוף הקמור** של γ_{0} ו-γ_{1} ושם זה ניתן לו מפני שכדי שהומוטופיה כזו תעבוד בהכרח על הקבוצה U להיות קמורה.

הגדרה 4.3. נאמר שקבוצה קשירה מסילתית $U\subseteq\mathbb{R}^{n}$[15] היא פשוטת קשר אם לכל שתי מסילות $\gamma_{0},\gamma_{2}:[a,b]\to U$ בעלות נקודות קצה זהות - γ_{0} ו-γ_{1} הומוטופיות זו לזו ביחס לנקודות קצה.

- ♣ הרעיון הוא שאין ב-U "חורים" - לו היו כאלה היינו יכולים לחבר בין שתי נקודות הנמצאות בצדדים מנוגדים של אחד החורים ע"י שתי מסילות, כאשר כל אחת מהן מקיפה את החור מכיוון אחר ולכן הן לא היו הומוטופיות זו לזו.
- ♣ כל קבוצה קמורה, ובפרט כל כדור פתוח, היא קבוצה פשוטת קשר.

מסקנה 4.4. קבוצה קשירה מסילתית $U\subseteq\mathbb{R}^{n}$ היא פשוטת קשר אם"ם כל מסילה סגורה $\gamma:[a,b]\to U$ הומוטופית (ביחס לנקודות קצה) למסילה קבועה בתוך U.

הגדרה 4.5. שדה וקטורי $\vec{F}:U\to\mathbb{R}^{n}$ ייקרא משמר מקומית אם מתקיים (לכל $n\geq i,j\in\mathbb{N}$):
$$\frac{\partial F_{i}}{\partial x_{j}}=\frac{\partial F_{j}}{\partial x_{i}}$$

כמובן שהייתי שמח להגדיר שדה משמר מקומית ככזה שעבורו לכל נקודה $p\in U$ קיימת סביבה $W\subseteq U$ כך ש-$\vec{F}|_{W}$ הוא שדה משמר, אלא שכך הגדיר אור בשיעור (כמובן שאלו הגדרות שקולות).

[14] האם יש צורך ש-U תהיה פתוחה?
[15] האם יש צורך ש-U תהיה פתוחה?

5 הקוהומולגיה הראשונה

יש לכתוב פרק זה (תרגול 3).