אופרטורים - הוכחות נבחרות

אלגברה ליניארית (2) - 80135

מרצה: איתמר צביק

מתרגלים: גיל לבנה ויואב כהן

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

תודתי נתונה לגלעד שרם על סיכומיו המצוינים שהיו לי לעזר רב עד כדי כך שניתן לומר שהסיכום הזה מבוסס על סיכומיו.

סיכומי קורס זה מוקדשים לאהרון כהן;
אהרון, הידיעה שתקרא את הסיכומים הללו דרבנה אותי לאורך כל הדרך.
בהצלחה!

* * *

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 דינמיקה של אופרטור

תהא (V,f) מערכת ליניארית מעל לשדה $\mathbb{F}$.

טענה 1.1. יהי $v\in V$, מתקיים $Z_f(v)=\{[P(f)](v)\mid P\in\mathbb{F}[x]\}$.

למה 1.2. יהי $v\in V$, $O_f(v)$ ו-$Z_f(v)$ שמורים תחת f.

משפט 1.3. יהי $v\in V$ ויהי $W\subseteq V$ תמ"ו שמור תחת f כך ש-$v\in W$, מתקיים $Z_f(v)\subseteq W$; כלומר התמ"ו הציקלי של וקטור הוא התמ"ו השמור המינימלי ביחס להכלה.

טענה 1.4. יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"וים שמורים תחת f, $U\cap W$ ו-$U+W$ גם הם שמורים תחת f.

טענה 1.5. אם V נ"ס ו-$\mathcal{B}$ הוא בסיס סדור שלו אז לכל פולינום $P\in\mathbb{F}[x]$ מתקיים $P([f]_{\mathcal{B}})=[P(f)]_{\mathcal{B}}$.

♣ כדי להוכיח את הטענה נזכר שלכל $T_1,T_2:V\to W$, $T_3:W\to U$ ולכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים:

$$[T_1+T_2]_C^B=[T_1]_C^B+[T_2]_C^B$$
$$[\lambda\cdot T_1]_C^B=\lambda\cdot[T_1]_C^B$$
$$[T_3\circ T_1]_D^B=[T_3]_D^C\cdot[T_1]_C^B$$

כאשר V, W ו-U הם מ"ו נ"ס מעל לשדה $\mathbb{F}$, B, C ו-D הם בסיסים סדורים שלהם ו-T_1, T_2 ו-T_3 הן העתקות ליניאריות.

טענה 1.6. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו, W שמור תחת f אם"ם W שמור תחת $P(f)$ לכל פולינום $P\in\mathbb{F}[x]$.

♣ קל לראות שהטענה נכונה עבור מונומים ואז מהליניאריות של $c\cdot f^n$ (הצבה של f במונום) תנבע הטענה עבור פולינומים.

משפט 1.7. יהיו $P,G\in\mathbb{F}[x]$, מתקיים $P(f)\circ G(f)=(P\cdot Q)(f)$.

הוכחה. יהיו $a_0,a_1,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_m\in\mathbb{F}$ כך שמתקיים:

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot x^i$$
$$G(x)=\sum_{j=0}^{m}b_j\cdot x^j$$

מהליניאריות של f נובע שמתקיים:

$$\begin{aligned}
P(f)\circ G(f)&=P(f)\circ\left(\sum_{j=0}^{m}b_j\cdot f^j\right)=\sum_{j=0}^{m}b_j\cdot\left(P(f)\circ\left(f^j\right)\right)\\
&=\sum_{j=0}^{m}b_j\cdot\left(\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot f^i\right)\circ\left(f^j\right)\right)=\sum_{j=0}^{m}b_j\cdot\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot\left(f^i\circ f^j\right)\right)\\
&=\sum_{j=0}^{m}b_j\cdot\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot f^{i+j}\right)=\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot b_j\cdot f^{i+j}\right)\\
&=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m}a_i\cdot b_j\cdot f^{i+j}\right)=\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{k}a_i\cdot b_{k-i}\right)\cdot f^k=(P\cdot G)(f)
\end{aligned}$$

■

מסקנה 1.8. יהיו $P,G\in\mathbb{F}[x]$, מתקיים $P(f)\circ G(f)=G(f)\circ P(f)$.

משפט 1.9. יהיו $v_1,v_2\in V$, תת-המרחב $Z_f\left(v_1\right)\cap Z_f\left(v_2\right)$ הוא מרחב ציקלי ביחס ל-f.

הוכחה. ראשית, אם $Z_f\left(v_1\right)\cap Z_f\left(v_2\right)=\left\{0_V\right\}$ אז ודאי שמדובר במרחב ציקלי שכן $Z_f\left(0_V\right)=\left\{0_V\right\}$, א"כ נעסוק במקרה שבו $Z_f\left(v_1\right)\cap Z_f\left(v_2\right)\neq\left\{0_V\right\}$.

נתבונן בקבוצת הפולינומים המעתיקים את v_1 אל $Z_f\left(v_2\right)$ באמצעות f:

$$I:=\left\{P\in\mathbb{F}\left[x\right]:P\left(f\right)v_1\in Z_f\left(v_2\right)\right\}$$

מכיוון ש-$Z_f\left(v_1\right)\cap Z_f\left(v_2\right)\neq\left\{0_V\right\}$ בהכרח קיים בקבוצה פולינום שאינו פולינום האפס, יהי $P\in I$ פולינום שדרגתו היא הנמוכה ביותר ב-I מלבד פולינום האפס ונסמן $v:=P\left(f\right)v_1$.

מהגדרה $v\in Z_f\left(v_1\right)\cap Z_f\left(v_2\right)$ ומכיוון שמדובר במרחב שמור תחת f נובע ממשפט 1.3 ש-$Z_f\left(v\right)\subseteq Z_f\left(v_1\right)\cap Z_f\left(v_2\right)$.

יהי $u\in Z_f\left(v_1\right)\cap Z_f\left(v_2\right)$, א"כ קיים $G\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש-$u=G\left(f\right)v_1$, אך מהגדרה $u\in Z_f\left(v_2\right)$ ולכן אותו G שייך ל-I.

יהי G כנ"ל ונחלק את G ב-P עם שארית: יהיו $Q,R\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש-$G=Q\cdot P+R$ ו-$\deg R<\deg P$, נשים לב לכך שמהגדרה I הוא אידאל ולכן $R=G-Q\cdot P\in I$ ומהגדרת P נקבל ש-R הוא פולינום האפס, כלומר $G=Q\cdot P$.

$$\Rightarrow u=G\left(f\right)v_1=\left(Q\cdot P\right)\left(f\right)v_1=\left(Q\left(f\right)\circ P\left(f\right)\right)v_1=Q\left(f\right)v\in Z_f\left(v\right)$$

u הנ"ל היה שרירותי ומכאן ש-$Z_f\left(v_1\right)\cap Z_f\left(v_2\right)\subseteq Z_f\left(v\right)$ ולכן $Z_f\left(v\right)=Z_f\left(v_1\right)\cap Z_f\left(v_2\right)$. ■

2 פולינום מינימלי של וקטור ושל קבוצת וקטורים

יהי V מ"ו נ"ס[1] מעל לשדה $\mathbb{F}$ ויהי f אופרטור על V.

2.1 פולינום מינימלי של וקטור

טענה 2.1. יהי $v\in V$ ויהיו $P,G\in\mathbb{F}\left[x\right]$, מתקיים:

1. אם אחד משני הפולינומים הללו מאפס את v תחת f אז גם $P\cdot G$ מאפס את v תחת f.
2. אם שניהם מאפסים את v תחת f אז גם $P+G$ מאפס את v תחת f.

מסקנה 2.2. לכל $v\in V$ ולכל $w\in Z_f\left(v\right)$ מתקיים $\min_v\left(f\right)w=0_V$.

טענה 2.3. לכל $v\in V$ מתקיים $\dim Z_f\left(v\right)=\deg\left(\min_v\right)$.

משפט 2.4. לכל $v\in V$, לא קיים פולינום שדרגתו נמוכה מזו של $\min_v$ והוא מאפס את v תחת f מלבד פולינום האפס, ובנוסף $\min_v$ הוא הפולינום המתוקן היחיד המקיים זאת.

הוכחה. לא ייתכן שקיים פולינום המאפס את v תחת f ודרגתו נמוכה מזו של $\min_v$ משום שאז נקבל צר"ל מתאפס לא טריוויאלי של $\mathcal{C}_f\left(v\right)$, ואם היה קיים פולינום מתוקן אחר שדרגתו זהה לשל $\min_v$ והוא מאפס את v תחת f ואז גם פולינום ההפרש שלהם (שדרגתו נמוכה יותר) מאפס את v תחת f. ■

מסקנה 2.5. יהי $v\in V$ ויהי $P\in\mathbb{F}\left[x\right]$ פולינום המאפס את v תחת f, מתקיים $\min_v\mid P$.

♣ כדי להוכיח את הטענה נחלק את P ב-$\min_v$ עם שארית (נסמן ב-Q את המנה וב-R את השארית), ומכאן שגם $R=P-Q\cdot\min_v$ מאפס את v תחת f ולכן ממינימליות הדרגה של $\min_v$ נקבל ש-$R=0$; עוד נחזור לרעיון ההוכחה הזה בהמשך.

---

[1] למעשה הסיבה היחידה לדרישה ש-V נ"ס היא כדי שיהיה ברור שהפולינום המינימלי קיים, ניתן להחליף את הדרישה הזו בדרישה שהמסלול של של הווקטור יהיה תלוי ליניארית (כשמדובר בפולינום מינימלי של וקטור) או בדרישה זו על כל הווקטורים בקבוצה/הבסיס שלה (כשמדובר בפולינום מינימלי של קבוצה).

מסקנה 2.6. לכל $v\in V$ ולכל $w\in Z_f(v)$ מתקיים $\min_w\mid\min_v$.

מסקנה 2.7. יהי $v\in V$, אם $\min_v$ אי-פריק (וממילא $v\neq 0_V$) אז לכל $0_V\neq w\in Z_f(v)$ מתקיים $Z_f(w)=Z_f(v)$.

הוכחה. ממשפט 1.3 נובע ש-$Z_f(w)\subseteq Z_f(v)$, מהעובדה ש-$w\neq 0_V$ נובע ש-$\min_w\neq 1$ ולכן $\min_w=\min_v$, מטענה 2.3 נובע ש-$\dim Z_f(w)=\dim Z_f(v)$ וממילא $Z_f(w)=Z_f(v)$. ■

טענה 2.8. יהי $v\in V$ כך ש-$\min_v$ הוא פולינום פריק ויהיו $P,Q\in\mathbb{F}[x]$ פולינומים מתוקנים שאינם קבועים כך ש-$\min_v=P\cdot Q$, נגדיר $w:=P(f)v$; מתקיים $w\neq 0_V$ ו-$\min_w=Q$.

הוכחה. מהגדרה Q מאפס את w תחת f ולכן $\min_w\mid Q$, מצד שני $P\cdot\min_w$ מאפס v תחת f ולכן $P\cdot Q\mid P\cdot\min_w$ וממילא $Q\mid\min_w$ שכן $P\neq 0$, מהעובדה ש-Q ו-$\min_w$ מתוקנים ומחלקים זה את זה נובע שהם שווים. ■

משפט 2.9. יהי $v\in V$ כך ש-$\min_v$ הוא פולינום פריק ויהיו $P,Q\in\mathbb{F}[x]$ פולינומים מתוקנים שאינם קבועים וזרים זה לזה כך ש-$\min_v=P\cdot Q$, נגדיר $w:=P(f)v$ ו-$u:=Q(f)v$; מתקיים:

$$Z_f(v)=Z_f(w)\oplus Z_f(u)$$

הוכחה. מהעובדה ש-P ו-Q זרים זה לזה נובע שקיימים $A,B\in\mathbb{F}[x]$ כך ש-$1=A\cdot P+B\cdot Q$, יהיו A ו-B כנ"ל ומכאן שמתקיים:

$$\begin{aligned}v&=[1(f)](v)=[(A\cdot P+B\cdot Q)(f)](v)\\&=[A(f)\circ P(f)](v)+[B(f)\circ Q(f)](v)\\&=[A(f)](w)+[B(f)](u)\end{aligned}$$

מכאן שלכל $G\in\mathbb{F}[x]$ מתקיים:

$$\begin{aligned}G(v)&=[G(f)\circ A(f)](w)+[G(f)\circ B(f)](u)\\&=[G\cdot A(f)](w)+[G\cdot B(f)](u)\end{aligned}$$

כלומר $G(v)\in Z_f(w)+Z_f(u)$ ולכן $Z_f(v)=Z_f(w)+Z_f(u)$.
ע"פ טענה 2.3 מתקיים $\dim Z_f(w)=\deg(\min_w)=\deg Q$ ו-$Z_f(u)=\deg(\min_u)=\deg P$ ולכן ע"פ משפט הממדים מתקיים:

$$\begin{aligned}\dim(Z_f(w)\cap Z_f(u))&=\dim Z_f(w)+\dim Z_f(u)-\dim Z_f(v)\\&=\deg Q+\deg P-\deg(P\cdot Q)\\&=\deg Q+\deg P-(\deg Q+\deg P)=0\end{aligned}$$

ומכאן ש-$Z_f(w)\cap Z_f(u)=0_V$ ולכן $Z_f(v)=Z_f(w)\oplus Z_f(u)$. ■

מסקנה 2.10. יהי $v\in V$ ויהיו $P_1,P_2,\ldots,P_r\in\mathbb{F}[x]$, $n_1,n_2,\ldots,n_r\in\mathbb{N}_0$ ו-$c\in\mathbb{F}$ כך שהפירוק של $\min_v$ לאי-פריקים הוא:

$$\min_v=c\cdot\prod_{i=1}^{r}(P_i)^{n_i}$$

נגדיר (לכל $r\geq i\in\mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}Q_i&:=\frac{\prod_{i=1}^{r}(P_i)^{n_i}}{((P_i)^{n_i})(f)}\\w_i&:=Q_i(f)v\end{aligned}$$

ואז מתקיים:

$$Z_f(v)=Z_f(w_1)\oplus Z_f(w_2)\oplus\ldots\oplus Z_f(w_r)$$

טענה 2.11. יהיו $w,u\in V$ כך ש-$Z_f\left(w\right)\cap Z_f\left(u\right)=\left\{0_V\right\}$ (כלומר $Z_f\left(w\right)+Z_f\left(u\right)$ הוא סכום ישר) ונסמן $v:=w+u$, מתקיים:

1. $\min_v=\operatorname{lcm}\left(\min_w,\min_u\right)$.
2. אם $\gcd\left(\min_w,\min_u\right)=1$ (כלומר $\min_w$ ו-$\min_u$ זרים זה לזה) אז $Z_f\left(v\right)=Z_f\left(w\right)\oplus Z_f\left(u\right)$.

הוכחה. מהגדרה $\operatorname{lcm}\left(\min_w,\min_u\right)$ הוא כפולה של $\min_w$ ושל $\min_u$ ומכאן שהוא מאפס את w ו-u וממילא גם את v, א"כ $\min_v\mid\operatorname{lcm}\left(\min_w,\min_u\right)$.
מצד שני מתקיים $0_V=\min_v\left(f\right)v=\min_v\left(f\right)w+\min_v\left(f\right)u$ ולכן $\min_v\left(f\right)w=-\min_v\left(f\right)u$, ומכאן ש-$\min_v\left(f\right)w\in Z_f\left(w\right)$ ו-$-\min_v\left(f\right)u\in Z_f\left(u\right)$ ולכן מהנתון ש-$Z_f\left(w\right)\cap Z_f\left(u\right)=\left\{0_V\right\}$ נקבל שמתקיים $\min_v\left(f\right)w=0_V$ ו-$\min_v\left(f\right)u=0_V$;
ושוב, מתקיים $\min_w\mid\min_v$ ו-$\min_u\mid\min_v$ ולכן מהגדרת ה-lcm נובע ש-$\operatorname{lcm}\left(\min_w,\min_u\right)\mid\min_v$.
א"כ $\operatorname{lcm}\left(\min_w,\min_u\right)$ ו-$\min_v$ מחלקים זה את זה ושניהם מתוקנים ולכן שווים.
נניח ש-$\gcd\left(\min_w,\min_u\right)=1$, מכאן ש-$\min_v=\operatorname{lcm}\left(\min_w,\min_u\right)=\min_w\cdot\min_u$.
ממשפט הממדים ומטענה 2.3 נובע שמתקיים:

$$\begin{aligned}\dim\left(Z_f\left(w\right)+Z_f\left(u\right)\right)&=\dim Z_f\left(w\right)+\dim Z_f\left(u\right)-\dim\left\{0_V\right\}\\&=\dim Z_f\left(w\right)+\dim Z_f\left(u\right)\\&=\deg\left(\min_w\right)+\deg\left(\min_u\right)\\&=\deg\left(\min_w\cdot\min_u\right)=\deg\left(\min_v\right)=\dim Z_f\left(v\right)\end{aligned}$$

מצד שני $v\in Z_f\left(w\right)+Z_f\left(u\right)$ ולכן ע"פ משפט 1.3 מתקיים $Z_f\left(v\right)\subseteq Z_f\left(w\right)+Z_f\left(u\right)$ ומכאן ש-$Z_f\left(v\right)=Z_f\left(w\right)\oplus Z_f\left(u\right)$. ■

טענה 2.12. יהיו $w,u\in V$ כך שהמרחב $Z_f\left(w\right)+Z_f\left(u\right)$ הוא ציקלי ויהיו $v_1,v_2\in V$ כך שמתקיים[2]:

$$\begin{aligned}Z_f\left(v_1\right)&=Z_f\left(w\right)+Z_f\left(u\right)\\Z_f\left(v_2\right)&=Z_f\left(w\right)\cap Z_f\left(u\right)\end{aligned}$$

מתקיים גם:

$$\begin{aligned}\min_{v_1}&=\operatorname{lcm}\left(\min_w,\min_u\right)\\\min_{v_2}&=\gcd\left(\min_w,\min_u\right)\end{aligned}$$

הוכחה. מהגדרה $\operatorname{lcm}\left(\min_w,\min_u\right)$ הוא כפולה של $\min_w$ ושל $\min_u$ ומכאן שהוא מאפס את w ו-u ולכן גם את $Z_f\left(v_1\right)=Z_f\left(w\right)+Z_f\left(u\right)$ וממילא גם את v_1, א"כ $\min_{v_1}\mid\operatorname{lcm}\left(\min_w,\min_u\right)$.
מצד שני מהעובדה ש-$\min_{v_1}$ מאפס את v_1 תחת f נובע שהוא מאפס גם את $Z_f\left(v_1\right)=Z_f\left(w\right)+Z_f\left(u\right)$ תחת f וממילא גם את w ו-u, א"כ $\min_{v_1}$ מתחלק ב-$\min_w$ וב-$\min_u$ ולכן מהגדרה $\operatorname{lcm}\left(\min_w,\min_u\right)\mid\min_{v_1}$.
א"כ $\operatorname{lcm}\left(\min_w,\min_u\right)$ ו-$\min_{v_1}$ מחלקים זה את זה ושניהם מתוקנים ולכן שווים.
$\min_w$ ו-$\min_u$ מאפסים את $Z_f\left(v_2\right)=Z_f\left(w\right)\cap Z_f\left(u\right)$ תחת f ובפרט את v_2, א"כ $\min_w$ ו-$\min_u$ מתחלקים ב-$\min_{v_2}$ ולכן $\min_{v_2}\mid\gcd\left(\min_w,\min_u\right)$.
ממשפט הממדים ומטענה 2.3 נובע שמתקיים:

$$\begin{aligned}\deg\left(\operatorname{lcm}\left(\min_w,\min_u\right)\right)&=\dim Z_f\left(v_1\right)=\dim Z_f\left(w\right)+\dim Z_f\left(u\right)-\dim\left(Z_f\left(w\right)\cap Z_f\left(u\right)\right)\\&=\deg\left(\min_w\right)+\deg\left(\min_u\right)-\deg\left(\min_{v_2}\right)\end{aligned}$$

[2] ממשפט 1.9 נובע שאכן קיים v_2 כך ש-$Z_f\left(v_2\right)=Z_f\left(w\right)\cap Z_f\left(u\right)$.

מצד שני מתקיים:

$$\operatorname{lcm}(\min_w,\min_u)=\frac{\min_w\cdot\min_u}{\gcd(\min_w,\min_u)}$$

ולכן:

$$\deg(\operatorname{lcm}(\min_w,\min_u))=\deg(\min_w)+\deg(\min_u)-\deg(\gcd(\min_w,\min_u))$$

ומכאן ש-$\deg(\min_{v_2})=\deg(\gcd(\min_w,\min_u))$ ולכן מהעובדה ששניהם מתוקנים נובע שהם שווים (הוכחנו כבר ש-$\min_{v_2}\mid$ $\gcd(\min_w,\min_u)$). ■

2.2 פולינום מינימלי של קבוצה

טענה 2.13. נניח ש-V נ"ס ותהא $S\subseteq V$ קבוצת וקטורים, קיים פולינום מתוקן $P\in\mathbb{F}[x]$ יחיד המאפס את S תחת f ומקיים שלכל פולינום $G\in\mathbb{F}[x]$ המאפס את S תחת f מתקיים $P\mid G$.

הוכחה. נסמן ב-P פולינום מתוקן שדרגתו היא הנמוכה ביותר מבין אלו שמאפסים את S תחת f[3], ויהי $G\in\mathbb{F}[x]$ פולינום המאפס את S תחת f.
נחלק את G ב-P עם שארית: יהיו $Q,R\in\mathbb{F}[x]$ כך ש-$G=Q\cdot P+R$ ו-$\deg R<\deg P$, מכאן שגם $R=G-Q\cdot P$ מאפס את S, ולכן מהגדרת P נובע ש-$R=0$ ו-$P\mid G$.
היחידות של P נובעת מהעובדה שגם הוא מתחלק בכל פולינום המקיים את התנאים הנ"ל, ומכיוון שאחד התנאים הוא שהפולינום מתוקן העובדה ששניהם מתחלקים זה בזה אומרת שהם שווים. ■

טענה 2.14. נניח ש-V נ"ס ויהיו $S,T\subseteq V$ ו-$P\in\mathbb{F}[x]$, מתקיים:

1. $\min_v\mid\min_S$ לכל $v\in S$.
2. אם P מאפס את V תחת f אז $\min_S\mid P$.
3. אם $S\subseteq T$ אז $\min_S\mid\min_T$.
4. $\min_v=\min_{Z_f(v)}$ לכל $v\in V$.
5. $\min_S=\min_{\operatorname{span}(S)}$.

משפט 2.15. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו שמור תחת אופרטור f ויהיו $P,G\in\mathbb{F}[x]$ פולינומים זרים כך ש-G מאפס את W תחת f, האופרטור $P(f)\mid_W$ הפיך.

[3] אנו לוקחים פולינום מקבוצת הפולינומים בעלי הדרגה הנומכה ביותר המאפסים את S תחת f ומתקנים אותו.

3 פולינום מינימלי של אופרטור, ערכים עצמיים ואופרטורים הניתנים ללכסון

תהא (V,f) מערכת ליניארית מעל לשדה $\mathbb{F}$.

טענה 3.1. המרחבים העצמיים של f והמרחבים העצמיים המוכללים שלו הם תמ"וים שמורים תחתיו.

טענה 3.2. נניח ש-f הפיך (מהגדרה $0 \notin \sigma(f)$), לכל $0 \neq \lambda \in \mathbb{F}$ מתקיים $\lambda \in \sigma(f) \iff \lambda^{-1} \in \sigma\left(f^{-1}\right)$.

טענה 3.3. קבוצת וקטורים שונים מ-0_V שכל אחד מהם שייך למרחב עצמי מוכלל שונה מזה של האחרים היא קבוצה בת"ל, בפרט קבוצת וקטורים עצמיים בעלי ערכים עצמיים שונים זה מזה היא קבוצה בת"ל.

הוכחה. יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \sigma(f)$ ערכים עצמיים שונים זה מזה (אם אין כאלה אז הטענה טריוויאלית), ויהיו $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ כך ש-$v_i \in V^{\lambda_i}$ לכל $r \geq i \in \mathbb{N}$.
נניח בשלילה שאלו וקטורים תלויים ליניארית, אחד מהווקטורים ניתן להצגה כצר"ל של הווקטורים הנותרים, נניח בהג"כ שזהו v_r.
יהיו $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ כך ש-$\min_{v_i}(x) = (x-\lambda_i)^{n_i}$ לכל $r \geq i \in \mathbb{N}$ ונסמן $P := \prod_{i=1}^{r-1}(x-\lambda_i)^{n_i}$.
נשים לב לכך ש-$P(f)v_i = 0_V$ לכל $r-1 \geq i \in \mathbb{N}$ ומכאן ש-P מאפס תחת f כל צר"ל של הווקטורים הללו ובפרט P מאפס תחת f את v_r, א"כ $\min_{v_r} \mid P$ בסתירה לכך ש-λ_r הוא שורש של $\min_{v_r}$ ואינו שורש של P.
מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ואלו וקטורים בת"ל. ■

טענה 3.4. יהי $0_V \neq v \in V$, כל שורש של $\min_v$ הוא ערך עצמי של f.

הוכחה. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ שורש של $\min_v$ ויהי $Q \in \mathbb{F}[x]$ כך ש-$\min_v(x) = (x-\lambda)\cdot Q(x)$.
נסמן $w := Q(f)v$ ומכאן ש-$\min_w(x) = x - \lambda$, כלומר $0_V = \min_w(f)w = f(w) - \lambda \cdot w$ ו-$f(w) = \lambda \cdot w$. ■

♣ כמובן שכל ערך עצמי של f הוא שורש של פולינום מינימלי של וקטור כלשהו (למשל וקטור עצמי מתאים).

מסקנה 3.5. אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז יש ל-f ערך עצמי ומכאן ש-$\sigma(f) \neq \emptyset$ ושל-f יש תת-מרחב שמור ממימד 1.

מסקנה 3.6. אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז יש ל-f תת-מרחב שמור ממימד 1 ו/או תת-מרחב שמור ממימד 2.

נניח ש-V נ"ס.

טענה 3.7. יהי $\mathcal{B} := (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ בסיס של V, מתקיים:

$$\mu_f = \operatorname{lcm}\left(\min_{b_1}, \min_{b_2}, \ldots, \min_{b_n}\right)$$

הוכחה. כל פולינום שמאפס את כל וקטורי הבסיס חייב להתחלק בכל הפולינומים המינימליים שלהם ולכן גם ב-lcm, בפרט μ_f מוכרח לקיים זאת; מצד שני ה-lcm הוא כפולה של כל אחד מהפולינומים המינימליים ולכן הוא מאפס כל אחד מווקטורי הבסיס וממילא גם כל צר"ל שלהם כלומר את כל V, מכאן שה-lcm מתחלק ב-$\mu_f = \min_V$ ומכיוון ששניהם מתוקנים הרי שהם שווים. ■

טענה 3.8. קיים וקטור $u\in V$ כך ש-$\mu_f=\min_u$.

הוכחה. יהי $\mathcal{B}:=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ בסיס של V, נסמן $u_1:=b_1$ ונבצע את התהליך האינדוקטיבי שיפורט להלן.
לכל $n>i\in\mathbb{N}$ נניח ש-$\min_{u_i}=\operatorname{lcm}(\min_{b_1},\min_{b_2},\ldots,\min_{b_i})$[4] ונסמן:

$$\begin{aligned}Q_{i+1}&:=\gcd\left(\min_{u_i},\,\min_{b_{i+1}}\right)\\ w_{i+1}&:=Q_{i+1}(f)\,b_{i+1}\\ u_{i+1}&:=u_i+w_{i+1}\end{aligned}$$

ומכאן שמתקיים:

$$\min_{w_{i+1}}=\frac{\min_{b_{i+1}}}{\gcd\left(\min_{u_i},\min_{b_{i+1}}\right)}$$

א"כ $\min_{u_i}$ ו-$\min_{w_{i+1}}$ זרים זה לזה ולכן מטענה 2.11 נובע שמתקיים:

$$\begin{aligned}\min_{u_{i+1}}&=\operatorname{lcm}\left(\min_{u_i},\,\min_{w_{i+1}}\right)\\ &=\min_{u_i}\cdot\min_{w_{i+1}}\\ &=\frac{\min_{u_i}\cdot\min_{b_{i+1}}}{\gcd\left(\min_{u_i},\min_{b_{i+1}}\right)}\\ &=\operatorname{lcm}\left(\min_{u_i},\,\min_{b_{i+1}}\right)\\ &=\operatorname{lcm}\left(\operatorname{lcm}\left(\min_{b_1},\,\min_{b_2},\ldots,\,\min_{b_i}\right),\,\min_{b_{i+1}}\right)\\ &=\operatorname{lcm}\left(\min_{b_1},\,\min_{b_2},\ldots,\,\min_{b_{i+1}}\right)\end{aligned}$$

א"כ u_n מקיים $\min_{u_n}=\operatorname{lcm}(\min_{b_1},\min_{b_2},\ldots,\min_{b_n})=\mu_f$ כנדרש. ■

מסקנה 3.9. סקלר $\lambda\in\mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של f אם"ם λ הוא שורש של μ_f, במילים אחרות קבוצת השורשים של μ_f היא בדיוק $\sigma(f)$.

מסקנה 3.10. אם μ_f מתפרק לגורמים ליניאריים אז ניתן להציג את V כסכום ישר של מרחבים עצמיים מוכללים.

♣ מכאן שלכל אופרטור על מ"ו מעל $\mathbb{C}$ ניתן להציג את המרחב כסכום ישר של מרחבים עצמיים מוכללים.

הוכחה. נניח ש-μ_f מתפרק לגורמים ליניאריים, יהי $\mathcal{B}:=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ ויהיו $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r\in\mathbb{F}$ כל השורשים של f.
לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ ולכל $r\geq j\in\mathbb{N}$ נסמן ב-k_{ij} היא החזקה הגבוהה ביותר שבה מחלק $x-\lambda_j$ את $\min b_i$, נגדיר:

$$\begin{aligned}Q_{ij}&:=\frac{\min_{b_i}}{(x-\lambda_j)^{k_{ij}}}\\ w_{ij}&:=Q_{ij}(f)\,b_i\end{aligned}$$

ונקבל ש-$Z_f(w_{ij})\subseteq V^{\lambda_j}$ וממילא גם (לכל $r\geq j\in\mathbb{N}$):

$$Z_f(w_{1j})+Z_f(w_{2j})+\ldots+Z_f(w_{nj})\subseteq V^{\lambda_j}$$

ראינו שמתקיים (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ ולכל $r\geq j\in\mathbb{N}$):

$$Z_f(b_i)=Z_f(w_{i1})\oplus Z_f(w_{i2})\oplus\ldots\oplus Z_f(w_{ir})$$

כמובן שמתקיים:

$$V=\sum_{i=1}^{n}Z_f(b_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}Z_f(w_{ij})=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}Z_f(w_{ij})$$

[4] עבור $i=1$ זה אומר ש-$\min_{u_1}=\min_{b_1}$.

ראינו שקבוצת וקטורים שונים מ-0_V שכל אחד מהם שייך למרחב עצמי מוכלל שונה מזה של האחרים היא קבוצה בת"ל, מכאן שמתקיים:

$$V=\sum_{i=1}^{n}Z_f\left(w_{i1}\right)\oplus\sum_{i=1}^{n}Z_f\left(w_{i2}\right)\oplus\ldots\oplus\sum_{i=1}^{n}Z_f\left(w_{ir}\right)$$

כעת נטען שלכל $r\geq j\in\mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{i=1}^{n}Z_f\left(w_{ij}\right)=V^{\lambda_j}$, יהיו $r\geq k\in\mathbb{N}$ ו-$u\in V^{\lambda_j}$.
יהיו $v_1,v_2,\ldots,v_r\in V$ ו-$a_1,a_2,\ldots,a_r\in\mathbb{F}$ כך ש-$v_j\in\sum_{i=1}^{n}Z_f\left(w_{ij}\right)$ לכל $r\geq j\in\mathbb{N}$ ומתקיים:

$$u=\sum_{j=1}^{n}a_j\cdot v_j$$

$$\Rightarrow 0_V=\sum_{j=1}^{k-1}a_j\cdot v_j+\left(a_k\cdot v_k-u\right)+\sum_{j=k+1}^{r}a_k\cdot v_k$$

כפי שראינו הקבוצה $\left\{v_1,v_2,\ldots,v_{k-1},a_k\cdot v_k-u,v_{k+1},\ldots v_r\right\}$ היא קבוצה בת"ל משום שהיא קבוצת וקטורים שונים מ-0_V שכל אחד מהם שייך למרחב עצמי מוכלל שונה מזה של האחרים, מכאן ש-$a_j=0$ לכל $r\geq j\in\mathbb{N}$ כך ש-$j\neq k$, כלומר $u=a_k\cdot v_k\in\sum_{i=1}^{n}Z_f\left(w_{ik}\right)$ ומכיוון ש-u ו-k היו שרירותיים זה אומר ש-$V^{\lambda_j}\supseteq\sum_{i=1}^{n}Z_f\left(w_{ij}\right)$ וממילא $\sum_{i=1}^{n}Z_f\left(w_{ij}\right)=V^{\lambda_j}$. ■

טענה 3.11. התנאים הבאים שקולים:

1. f לכסין.
2. קיים בסיס $\mathcal{B}$ של V שבו כל וקטור הוא וקטור עצמי.
3. לכל $0_V\neq v\in V$ הפולינום $\min_v$ מתפרק לגורמים ליניאריים שונים (ללא חזקות גדולות מ-1).
4. הפולינום המינימלי של f (μ_f) מתפרק לגורמים ליניאריים שונים.
5. ניתן להציג את V כסכום של מרחבים עצמיים מוכללים ובנוסף לכל $\lambda\in\sigma\left(f\right)$ מתקיים $V_\lambda=V^\lambda$.

♣ בהמשך נראה תנאי חמישי: ניתן להציג את V כסכום של מרחבים עצמיים מוכללים ובנוסף לכל ערך עצמי $\lambda\in\sigma\left(f\right)$ של f הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי.

♣ מעל $\mathbb{C}$ ניתן "לוותר" על התנאי שהפולינומים מתפרקים לגורמים ליניאריים / שניתן להציג את V כסכום של מרחבים עצמיים מוכללים מפני שכפי שראינו תנאים אלו מתקיימים תמיד מעל המרוכבים.

טענה 3.12. יהי $P\in\mathbb{F}\left[x\right]$ פולינום מתוקן ותהא $C_P\in M_{\deg P}\left(\mathbb{F}\right)$ המטריצה המלווה של P, מתקיים $\mu_{C_P}=P$.

הוכחה. מהגדרה הפולינום המינימלי של e_1 תחת C_P הוא P ומכיוון שהוא מתוקן, מחלק את μ_{C_P} ודרגתו שווה לממד המרחב הוא מוכרח להיות שווה ל-μ_{C_P}. ■

4 צורת ז'ורדן

יהי V מ"ו מעל לשדה $\mathbb{F}$.

♣ לפני שנתחיל נסביר את הרעיון מאחורי צורת ז'ורדן: אנו רוצים לייצג כל אופרטור במטריצה פשוטה ככל האפשר כדי שיהיה ברור כיצד הוא פועל על המרחב, ובצורה יחידה כדי שנוכל לקבוע באופן מוחלט אם שתי מטריצות דומות זו לזו. הדרך לעשות זאת היא לפרק את המרחב לסכום ישר של תמ"וים שבכל אחד מהם אנו יודעים כיצד לייצג את האופרטור[5] ע"י מטריצה פשוטה, ואז מכיוון שמדובר בסכום ישר נוכל לשרשר את הבסיסים ולקבל בסיס של המרחב כולו כך שהמטריצה המייצגת של האופרטור בבסיס זה היא מטריצה אלכסונית לפי בלוקים[6] שבה כל בלוק הוא אחת המטריצות הפשוטות שכבר מצאנו; הצורה הפשוטה הזו היא מה שקראנו לו בקובץ ההגדרות בשם "צורת ז'ורדן" של האופרטור וכל בלוק במטריצה הזו הוא מה שקראנו לו "בלוק ז'ורדן אלמנטרי".

4.1 קיום של בסיס מז'רדן וצורת ז'ורדן

יהי g אופרטור נילפוטנטי על V.

טענה 4.1. יהי $0_V\neq v\in V$, המטריצה המייצגת של $g\mid_{Z_g(v)}$ בבסיס $\mathcal{C}_g(v)$ היא $J_h(0)$ כאשר $h:=\text{height}(v)$.

♣ כלומר המטריצה המייצגת של $g\mid_{Z_g(v)}$ בבסיס $\mathcal{C}_g(v)$ היא מטריצה מהצורה:

$$\left[g\mid_{Z_g(v)}\right]_{\mathcal{C}_g(v)}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&\cdots&0\\1&0&0&0&\cdots&0\\0&1&0&0&\ddots&\vdots\\0&0&1&0&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&0&\cdots&0&1&0\end{bmatrix}$$

במטריצה כזו ברור מאד כיצד g פועלת על $Z_g(v)$: האיבר הראשון בבסיס מועתק אל האיבר השני, השני מועתק לשלישי וכך הלאה עד שהאחרון מועתק אל וקטור האפס.

מסקנה 4.2. יהיו $0_V\neq v\in V$, $\lambda\in\mathbb{F}$ ו-$f\in\text{End}(V)$ כך ש-$g=f-\lambda$, המטריצה המייצגת של $f\mid_{Z_g(v)}$ בבסיס $\mathcal{C}_g(v)$ היא $J_h(\lambda)$ כאשר $h:=\text{height}(v)$.

♣ כלומר המטריצה המייצגת של $g\mid_{Z_g(v)}$ בבסיס $\mathcal{C}_g(v)$ היא מטריצה מהצורה:

$$\left[f\mid_{Z_g(v)}\right]_{\mathcal{C}_g(v)}=\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&\cdots&0\\1&\lambda&0&0&\cdots&0\\0&1&\lambda&0&\ddots&\vdots\\0&0&1&\lambda&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&0&\cdots&0&1&\lambda\end{bmatrix}$$

גם במטריצה כזו ברור מאד כיצד f פועלת על $Z_g(v)$: כל וקטור v_i בבסיס מועתק אל הווקטור $\lambda\cdot v_i+v_{i+1}$ (כשאר v_{i+1} הוא הווקטור הבא בבסיס) מלבד הווקטור האחרון בבסיס שמוכפל ב-λ מבלי להוסיף לו וקטור אחר.

[5] כשהוא מצומצם לאותו תמ"ו.

[6] חשוב מאד להבין למה העובדה שמדובר בסכום ישר אומרת שהמטריצה המייצגת אלכסונית לפי בלוקים, זהו לב העניין.

משפט 4.3. תהא $(v_1,v_2,\ldots,v_s)$ סדרת וקטורים שונים מאפס ב-V ותהא $(h_1,h_2,\ldots,h_s)$ סדרת הגבהים המתאימים, הסדרה $(\mathcal{C}_g(v_1);\mathcal{C}_g(v_2);\ldots;\mathcal{C}_g(v_s))$[7] בת"ל אם"ם הסדרה $\left(g^{h_1-1}(v_1),g^{h_2-1}(v_2),\ldots,g^{h_s-1}(v_s)\right)$ בת"ל, כלומר סדרת השרשראות בת"ל אם"ם סדרת האיברים האחרונים בכל שרשרת בת"ל.

הוכחה. כל סדרה בת"ל מקיימת שכל תת-סדרה שלה היא בת"ל ולכן הכיוון הראשון של המשפט טריוויאלי, נוכיח את הכיוון השני.
נניח שהסדרה $(\mathcal{C}_g(v_1);\mathcal{C}_g(v_2);\ldots;\mathcal{C}_g(v_s))$ תלויה ליניארית ויהיו $w_1,w_2,\ldots,w_n\in V$ כך ש-$(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ היא הסדרה הנ"ל,
מתלות הליניארית נובע שקיים צר"ל מתאפס לא טריוויאלי של איברי הסדרה, יהיו $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ כך ש-$\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot w_i=0_V$ הוא צר"ל כזה ונסמן $h:=\max\left\{\text{height}(w_i)\mid a_i\neq 0,\ n\geq i\in\mathbb{N}\right\}$.
נפעיל את g^{h-1} על שני האגפים, מתקיים:

$$0_V=g^{h-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot w_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot g^{h-1}(w_i)$$

באגף שמאל מופיע לפחות וקטור אחד שהמקדם שלו שונה מאפס והוא עצמו אינו וקטור האפס - זהו הווקטור ש-h הוא הגובה שלו, מכאן שקיים לפחות עוד וקטור אחד כזה ומהגדרת h נובע שכל הווקטורים הללו מופיעים בסדרת האיברים האחרונים בכל שרשרת, א"כ סדרה זו תלויה ליניארית.
הוכחנו שאם סדרת השרשראות תלויה ליניארית אז גם סדרת האיברים האחרונים בכל שרשרת תלויה ליניארית ולכן אם סדרת האיברים האחרונים בת"ל אז גם סדרת השרשראות כזו. ■

משפט 4.4. תהא $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ סדרת וקטורים שונים מאפס, קיימת סדרת שרשראות $(\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2;\ldots;\mathcal{B}_s)$ בת"ל כך שמתקיים:

$$\text{span}(\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2;\ldots;\mathcal{B}_s)=\text{span}(\mathcal{C}_g(v_1);\mathcal{C}_g(v_2);\ldots;\mathcal{C}_g(v_n))$$

♣ מכאן שאם V נ"ס אז יש לו בסיס שרשראות משום שאם $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ הוא בסיס של V אז מתקיים:

$$V=\text{span}(\mathcal{C}_g(v_1);\mathcal{C}_g(v_2);\ldots;\mathcal{C}_g(v_n))$$

הוכחה. נניח ש-$(\mathcal{C}_g(v_1);\mathcal{C}_g(v_2);\ldots;\mathcal{C}_g(v_n))$ תלויה ליניארית (אחרת סיימנו ואין מה להוכיח שהרי זוהי סדרת שרשראות).
ננמק באינדוקציה על סכום אורכי השרשראות.

<u>בסיס האינדוקציה</u>

אם סכום זה הוא 1 אז מדובר בשרשרת אחת באורך 1 המכילה וקטור יחיד שונה מ-0 וממילא מדובר בסדרה בת"ל[8].

<u>צעד האינדוקציה</u>

מספיק להראות שנוכל להקטין את סכום אורכי השרשראות (ע"י "ויתור" על שרשרת או החלפתה בשרשרת קצרה יותר) תוך שמירה על הפרוש שלהן.
מהמשפט הקודם (4.3) ומההנחה נובע ש-$\left(g^{h_1-1}(v_1),g^{h_2-1}(v_2),\ldots,g^{h_s-1}(v_n)\right)$ תלויה ליניארית, יהי $\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot g^{h_i-1}(v_i)$ צר"ל מתאפס לא טריוויאלי של סדרה זו (למעשה קיימים שני אינדקסים שהמקדם שלהם שונה מ-0).
יהי $n\geq j\in\mathbb{N}$ האינדקס המקיים $h_j=\min\left\{h_i\mid a_i\neq 0,\ n\geq i\in\mathbb{N}\right\}$.

$$\Rightarrow g^{h_j-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot g^{h_i-h_j}(v_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot g^{h_i-1}(v_i)=0_V$$

נגדיר:

$$v':=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot g^{h_i-h_j}(v_i)=a_1\cdot g^{h_1-h_j}(v_1)+a_2\cdot g^{h_2-h_j}(v_2)+\ldots+a_j\cdot v_j+\ldots+a_n\cdot g^{h_n-h_j}(v_n)$$

[7] הסימן "נקודה ופסיק" (";") משמש לציון שמדובר בשרשור של סדרות, כלומר זוהי סדרת וקטורים ולא סדרה של סדרות וקטורים.
[8] למעשה בסיס האינדוקציה כלול במקרה הקודם.

$$\Rightarrow v_j = \frac{1}{a_j}\cdot\left(a_1\cdot g^{h_1-h_j}(v_1)+a_2\cdot g^{h_2-h_j}(v_2)+\ldots+a_n\cdot g^{h_n-h_j}(v_n)-v'\right)$$
$$\Rightarrow v_j\in\text{span}\left(\mathcal{C}_g(v_1);\mathcal{C}_g(v_2);\ldots\mathcal{C}_g(v_{j-1});\mathcal{C}_g(v_{j+1});\ldots;\mathcal{C}_g(v_n),v'\right)$$
$$\Rightarrow \text{span}\left(\mathcal{C}_g(v_j)\right)\subseteq\text{span}\left(\mathcal{C}_g(v_1);\mathcal{C}_g(v_2);\ldots\mathcal{C}_g(v_{j-1});\mathcal{C}_g(v_{j+1});\ldots;\mathcal{C}_g(v_n),\mathcal{C}_g(v')\right)$$
$$\Rightarrow \text{span}\left(\mathcal{C}_g(v_1);\mathcal{C}_g(v_2);\ldots;\mathcal{C}_g(v_n)\right)=\text{span}\left(\mathcal{C}_g(v_1);\mathcal{C}_g(v_2);\ldots\mathcal{C}_g(v_{j-1});\mathcal{C}_g(v_{j+1});\ldots;\mathcal{C}_g(v_n),\mathcal{C}_g(v')\right)$$

השרשרת $\mathcal{C}_g(v')$[9] בהכרח קצרה יותר מ-$\mathcal{C}_g(v_j)$ ולכן הוכחנו את הדרוש. ■

נניח ש-V נ"ס ותהא $(v_1,v_2,\ldots,v_r)$ סדרת וקטורים שונים מאפס כך ששרשור הבסיסים הציקליים שלהם הוא בסיס של V וסדרת הגבהים המתאימה $(h_1,h_2,\ldots,h_r)$ מקיימת $h_1\geq h_2\geq\ldots\geq h_r$.[10]

נסמן:

$$\mathcal{B}:=\left(\mathcal{C}_g(v_1);\mathcal{C}_g(v_2);\ldots;\mathcal{C}_g(v_r)\right)$$

מסקנה 4.5. מתקיים[11]:

$$[g]_{\mathcal{B}}=\left[\begin{array}{c|c|c|c}J_{h_1}(0)&0&\cdots&0\\\hline 0&J_{h_2}(0)&\ddots&0\\\hline\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\\hline 0&0&\cdots&J_{h_r}(0)\end{array}\right]$$

וזוהי צורת ז'ורדן של g.

♣ סדרת הגבהים $(h_1,h_2,\ldots,h_r)$ (כשהיא מסודרת בסדר יורד) נקראת <u>המציין</u> (Segre) של g.

מסקנה 4.6. יהי $\lambda\in\mathbb{F}$ ויהי f אופרטור על V כך ש-$f=g-\lambda$ מתקיים:

$$[f]_{\mathcal{B}}=\left[\begin{array}{c|c|c|c}J_{h_1}(\lambda)&0&\cdots&0\\\hline 0&J_{h_2}(\lambda)&\ddots&0\\\hline\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\\hline 0&0&\cdots&J_{h_r}(\lambda)\end{array}\right]$$

וזוהי צורת ז'ורדן של f.

מסקנה 4.7. יהי f אופרטור על V כך ש-μ_f מתפרק לגורמים ליניאריים, ויהיו $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r\in\mathbb{F}$ כל הערכים העצמיים של f.
נסמן ב-g_i את $f-\lambda_i$ (לכל $r\geq i\in\mathbb{N}$), מהגדרה g_i הוא אופרטור נילפוטנטי על V^{λ_i} ולכן לכל $r\geq i\in\mathbb{N}$ יש ל-f_i בסיס מז'רדן עבור V^{λ_i} (וכל זה לכל $r\geq i\in\mathbb{N}$).
שרשור הבסיסים הללו מהווה בסיס של V ולכן הוא מהווה בסיס מז'רדן של f, כלומר יש ל-f צורת ז'ורדן.

♣ בהמשך נראה שאם μ_f אינו מתפרק לגורמים ליניאריים אז אין ל-f צורת ז'ורדן.

[9] אם $v'=0_V$ אז מדובר בשרשרת ריקה ואנחנו פשוט "נוותר" על השרשרת של v_j מבלי להוסיף שרשרת אחרת.
[10] מהגדרה מתקיים $h_1+h_2+\ldots+h_r=\dim V$.
[11] כאשר האפסים מציינים בלוקים שהם מטריצת האפס מהגודל המתאים.

מסקנה 4.8. לכל מטריצה מעל $\mathbb{C}$ יש צורת ז'ורדן, וכמו כן לכל אופרטור על מ"ו מעל $\mathbb{C}$ יש צורת ז'ורדן.

♣ תהא $A \in M_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$ ותהא $J \in M_n(\mathbb{C})$ צורת ז'ורדן של A ונניח שכל הקואורדינטות של J ממשיות ($J \in M_n(\mathbb{R})$), האם זה אומר שיש ל-A צורת ז'ורדן מעל הממשיים?
לכאורה התשובה שלילית: העובדה ש-J דומה ל-A ב-$M_n(\mathbb{C})$ (איננו יודעים יותר מזה) אומרת רק שקיימת מטריצה $P \in M_n(\mathbb{C})$ כך ש-$J = P^{-1}AP$, היא לא אומרת שאותה P ממשית גם היא - אפילו אם J ממשית; הסיבה לכך שבמפתיע התשובה חיובית נעוצה במתמטיקה גבוהה מזו שלמדנו, אין לי מושג למה זה נכון אבל מצאתי את המשפט הזה בערך "דמיון מטריצות" בוויקיפדיה.

4.2 אלגוריתם למציאת בסיס מז'רדן וצורת ז'ורדן

נניח ש-V נ"ס.

אלגוריתם 1 אלגוריתם למציאת צורת ז'ורדן במרחב ציקלי

יהי $0_V \neq v \in V$ ויהי f אופרטור על V כך ש-$\min_v^f$ מתפרק לגורמים ליניאריים.
יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{F}$ ו-$h_1, h_2, \ldots, h_r \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים:

$$\min_v^f(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{h_i}$$

- לכל $r \geq i \in \mathbb{N}$ נסמן:

$$g_i := f - \lambda_i$$
$$Q_i(x) := \frac{\min_v(x)}{(x-\lambda_i)^{h_i}}$$
$$w_i := Q_i(f)\, v$$

- נסמן $\mathcal{B} := (\mathcal{C}_{g_1}(w_1); \mathcal{C}_{g_2}(w_2); \ldots; \mathcal{C}_{g_s}(w_r))$, $\mathcal{B}$ הוא בסיס שרשראות של $Z_f(v)$ המקיים (לכל $r \geq i \in \mathbb{N}$):

$$\left[g_i \mid_{Z_{g_i}(w_i)}\right]_{\mathcal{C}_{g_i}(w_i)} = J_{h_i}(\lambda_i)$$

ולכן גם:

$$\left[f \mid_{Z_f(v)}\right]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{h_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{h_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & J_{h_r}(\lambda_r) \end{array}\right]$$

כלומר $\mathcal{B}$ הוא בסיס מז'רדן של $f\mid_{Z_f(v)}$ וזוהי צורת ז'ורדן שלה.

♣ נשים לב לכך ש-$Z_{g_i}(w_i) = V^{\lambda_i}$ לכל $r \geq i \in \mathbb{N}$, נקודה זו חשובה להבנת האלגוריתם הכללי של מציאת צורת ז'ורדן (לאו דווקא במרחבים ציקליים).

אלגוריתם 2 אלגוריתם כללי למציאת צורת ז'ורדן

יהי f אופרטור על V ויהי $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ בסיס של V.

- נמצא את הפולינום המינימלי של v_i לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.
  - אם בפירוק לגורמים של אחד מהם מופיע פולינום שאינו ליניארי אז μ_f אינו מתפרק לגורמים ליניאריים ולכן אין ל-f צורת ז'ורדן (עוד לא הוכחנו זאת).
  - אחרת נוכל למצוא בסיס שרשראות של $Z_f(v_i)$ (לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$) ע"י האלגוריתם הקודם.
- כעת אנו יודעים בדיוק כיצד נראה μ_f ולכן גם $\sigma(f)$ ידועה לנו, יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{F}$ כל הערכים העצמיים של f.
  - נסמן $V_i := Z_f(v_i)$ (לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$), וכמו כן נסמן ב-$V_i^{\lambda_j}$ את המרחב העצמי המוכלל בעל ערך עצמי λ_j של $f|_{V_i}$ (לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ ולכל $r \geq j \in \mathbb{N}$).
  - לכל $r \geq j \in \mathbb{N}$ מתקיים $V^{\lambda_j} = V_1^{\lambda_j} + V_2^{\lambda_j} + \ldots + V_n^{\lambda_j}$ שכן $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$.
  - בשלב הקודם ראינו ש-$V_i^{\lambda_j}$ מהווה מרחב ציקלי ביחס לאופרטור $f - \lambda_j$ ומצאנו בסיס ציקלי מתאים (לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ ולכל $r \geq j \in \mathbb{N}$), כעת יש בידינו קבוצת שרשראות שאיבריהן פורשים את V^{λ_j} ולכן נוכל להשתמש בדרך ההוכחה של משפט 4.4 כדי למצוא בסיס שרשראות של V^{λ_j} (לכל $r \geq j \in \mathbb{N}$).
  - האופרטור $f - \lambda_j$ הוא אופרטור נילפוטנטי ב-V^{λ_j} ולכן ההצגה של $f|_{V^{\lambda_j}}$ בבסיס השרשראות הנ"ל היא מטריצה אלכסונית לפי בלוקים שבה כל בלוק הוא בלוק ז'ורדן עם ערך עצמי λ_j (לכל $r \geq j \in \mathbb{N}$).
  - נסדר את השרשראות בכל בסיס כזה לפי גודל השרשראות בסדר יורד ונשרשר את הבסיסים זה לזה, מכיוון ש-V הוא סכום ישר של המרחבים העצמיים שלו התוצאה היא בסיס שרשראות של V שכאשר מייצגים בו את f מקבלים מטריצה בצורת ז'ורדן שלה.

4.3 חזקות של בלוקי ז'ורדן אלמנטריים

טענה 4.9. יהיו $r \in \mathbb{N}$ ו-$\lambda \in \mathbb{F}$, מתקיים (לכל $n \in \mathbb{N}$):

$$(J_r(\lambda))^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n \cdot \lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{n}{2} \cdot \lambda^{n-2} & n \cdot \lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{3} \cdot \lambda^{n-3} & \binom{n}{2} \cdot \lambda^{n-2} & n \cdot \lambda^{n-1} & \lambda^n & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{n}{r-1} \cdot \lambda^{n-(r-1)} & \binom{n}{r-1} \cdot \lambda^{n-(r-2)} & \cdots & \binom{n}{2} \cdot \lambda^{n-2} & n \cdot \lambda^{n-1} & \lambda^n \end{bmatrix}$$

או באופן פורמלי יותר וברור פחות: האיבר בשורה ה-i ובעמודה ה-j הוא:

$$\binom{n}{i-j} \cdot \lambda^{n-(i-j)}$$

כאשר בכל מקום שהביטוי אינו מוגדר[12] האיבר המדובר הוא 0.

♣ טענה זו מאפשרת לנו לחשב חזקות של מטריצות בעלות צורות ז'ורדן במהירות יחסית ע"י מעבר לבסיס מז'רדן, העלאה בחזקה של מטריצת ז'ורדן[13] המתאימה וחזרה לבסיס המקורי, ממש כפי שעשינו עם מטריצות הניתנות ללכסון.

[12] המקדם הבינומי אינו מוגדר כאשר $i - j < 0$ או כאשר $i - j > n$, ואם $i - j > n$ ובנוסף $\lambda = 0$ אז הביטוי אינו מוגדר מסיבה נוספת: לאפס אין הופכי ולכן אי אפשר להגדיר עליו חזקה שלילית.

[13] מכיוון שמטריצת ז'ורדן היא מטריצה אלכסונית לפי בלוקים העלאתה בחזקה נעשית ע"י העלאת כל אחד מן הבלוקים באותה חזקה בנפרד.

הוכחה. אינדוקציה פשוטה מראה שלכל $k\in\mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\left(J_r\left(0\right)\right)^j=\left[\begin{array}{c|c}0_{k\times(r-k)} & 0_{k\times k}\\ \hline I_{r-k} & 0_{(r-k)\times k}\end{array}\right]$$

כאשר במקרה שבו $k\geq r$ מתקיים זה אומר ש-$\left(J_r\left(0\right)\right)^k=0_r$.

מנוסחת הבינום של ניוטון נובע שמתקיים:

$$\begin{aligned}\left(J_r\left(\lambda\right)\right)^n=\left(J_r\left(0\right)+\lambda\cdot I_r\right)^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(J_k\left(0\right)\right)^j\cdot\left(\lambda\cdot I_r\right)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(J_r\left(0\right)\right)^k\cdot\lambda^{n-k}\cdot\left(I_r\right)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}\cdot\left(J_r\left(0\right)\right)^k\cdot I_r\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}\cdot\left(J_r\left(0\right)\right)^k\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}\cdot\left[\begin{array}{c|c}0_{k\times(r-k)} & 0_{k\times k}\\ \hline I_{r-k} & 0_{(r-k)\times k}\end{array}\right]\end{aligned}$$

כעת יש צורך במעט דמיון חזותי כדי להבין שאכן קיבלנו את התוצאה הרצויה: כל אחד מן האיברים בסכום שאינו מטריצת האפס הוא מטריצה שבה אחד מן האלכסונים זהה לאלה שבטענה ובכל מקום אחר יש בה אפסים, אין שני איברים שבהם מדובר באותו אלכסון ויש איבר לכל אלכסון שאינו אלכסון אפסים במטריצה המופיעה בטענה; א"כ כל מטריצה בסכום קובעת את האלכסון שלה לבדה ואינה "מפריעה" לאחרות בקביעת האלכסונים שלהם, התוצאה היא בדיוק המטריצה המופיעה בטענה. ■

5 הפולינום האופייני והריבויים הגאומטריים והאלגבריים

יהי V מ"ו נ"ס ממֵמד n מעל לשדה $\mathbb{F}$ ויהא f אופרטור על V.

טענה 5.1. לכל שתי מטריצות דומות $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ ולכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים:

$$\det(\lambda\cdot I_n-A)=\det(\lambda\cdot I_n-B)$$

הוכחה. תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצות דומות, מכאן שגם $-A$ ו-$-B$ דומות זו לזו (הכפלה בסקלר משמרת דמיון מטריצות), ולכן גם $\lambda\cdot I_n-A$ ו-$\lambda\cdot I_n-B$ דומות זו לזו (הוספת כפולה של מטריצת היחידה משמרת גם היא דמיון מטריצות), ומכאן ש-$\det(\lambda\cdot I_n-A)=\det(\lambda\cdot I_n-B)$. ■

טענה 5.2. קבוצת השורשים של χ_f היא הספקטרום של f.

הוכחה. לכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים $\lambda\in\sigma(f)$ אם"ם $\ker(f-\lambda)\neq\{0_V\}$ וזה קורה אם"ם $f-\lambda$ היא העתקה שאינה הפיכה, כלומר אם"ם המטריצה $[f]_{\mathcal{B}}-\lambda\cdot I_n$ אינה הפיכה ($\mathcal{B}$ הוא בסיס כלשהו של V) וזה שקול לכך ש-$\lambda\cdot I_n-[f]_{\mathcal{B}}$ אינה הפיכה ו-$\det(\lambda\cdot I_n-[f]_{\mathcal{B}})=0$ - כלומר λ הוא שורש של f. ■

משפט 5.3. יהי $P\in\mathbb{F}[x]$ פולינום מתוקן ותהא $C_P\in M_{\deg P}(\mathbb{F})$ המטריצה המלווה של P, מתקיים $\chi_{C_P}=P$.

הוכחה. יהיו $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{F}$ כך ש-$P(x)=x^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cdot x^k$ ו-$n:=\deg P$ ונפתח את הדטרמיננטה של המטריצה $x\cdot I_n-C_P$ ע"פ העמודה הימנית ביותר (העמודה ה-n);
לכל $n\geq k\in\mathbb{N}$ המינור $(x\cdot I_n-C_P)_{k,n}$ הוא מטריצה אלכסונית לפי בלוקים שבה שני בלוקים: הבלוק השמאלי העליון הוא מטריצה משולשית תחתונה בגודל $k-1$ שעל האלכסון שלה יש רק x-ים והבלוק הימני התחתון הוא מטריצה משולשית עליונה בגודל $n-k$ שעל האלכסונים שלה יש רק 1-ים, א"כ הדטרמיננטות שלהם הן x^{k-1} ו-1^{n-k} בהתאמה ולכן הדטרמיננטה של המינור $(C_P)_{k,n}$ היא x^{k-1}.[14] לכל $n>k\in\mathbb{N}$ האיבר שבשורה ה-k בעמודה ה-n של $x\cdot I_n-C_P$ הוא a_{k-1} ואילו האיבר שבשורה ה-n בעמודה ה-n הוא $x+a_{n-1}$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow\det(x\cdot I_n-C_P)&=(x+a_{n-1})\cdot\det\left((C_P)_{n,n}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k-1}\cdot\det\left((C_P)_{k,n}\right)\\&=(x+a_{n-1})\cdot x^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k-1}\cdot x^{k-1}\\&=x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}a_k\cdot x^k\\&=x^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cdot x^k=P(x)\end{aligned}$$

■

משפט 5.4. יהי $V\supseteq W\neq\{0_V\}$ תמ"ו שמור תחת f ונגדיר $g:=f|_W$, מתקיים $\chi_g\mid\chi_f$.

הוכחה. ניקח בסיס של W ונרחיב אותו לבסיס $\mathcal{B}$ של V, נזכור שהדטרמיננטה של מטריצה משולשית (עליונה/תחתונה) לפי בלוקים היא מכפלת הדטרמיננטות של הבלוקים שעל האלכסון ומכאן שהדטרמיננטה של הבלוק המתאים ל-W (במטריצה $x\cdot I_n-[f]_{\mathcal{B}}$) היא χ_g ולכן $\chi_g\cdot Q=\chi_f$ כאשר Q הוא "הדטרמיננטה" של הבלוק האחר (כלומר הפולינום האופייני של הבלוק האחר). ■

טענה 5.5. יהי $0_V\neq v\in V$ ונסמן $W:=Z_f(v)$ ו-$g:=f|_W$, מתקיים $\chi_g=\min_v^f$.

[14] הדטרמיננטה של מטריצה אלכסונית לפי בלוקים היא מכפלת הדטרמיננטות ששל בלוקים על האלכסון.

הוכחה. המטריצה המייצגת של g בבסיס $\mathcal{C}_f(v)$ היא המטריצה המלווה של $\min_v^f$, מצד שני ע"פ משפט 5.3 זוהי גם המטריצה המלווה של χ_g ולכן הם שווים. ∎

מסקנה 5.6. משפט קיילי-המילטון[15]

מתקיים $\chi_f(f)=0$ ו-$\chi_A(A)=0$ (לכל $A\in M_n(\mathbb{F})$).

הוכחה. יהי $v\in V$, נניח בהג"כ ש-$v\neq 0_V$ (אחרת ודאי ש-$\chi_f(f)v=0_V$) ונסמן ב-g את הצמצום של f ל-$Z_f(v)$.
ע"פ הטענה האחרונה (5.5) χ_g מאפס את v תחת f וע"פ המשפט האחרון (5.4) נובע מזה שגם χ_f מאפס את v תחת f.
v הנ"ל היה שרירותי ולכן הנ"ל נכון לכל $v\in V$ וממילא $\chi_f(f)=0$.[16] ∎

טענה 5.7. יהי $J:=J_h(\lambda)\in M_h(\mathbb{F})$ בלוק ז'ורדן אלמנטרי מסדר h בעל ערך עצמי $\lambda\in\mathbb{F}$, מתקיים $\chi_J(x)=(x-\lambda)^h$.

נניח של-f יש צורת ז'ורדן.

מסקנה 5.8. אם J היא צורת ז'ורדן של f כאשר:

$$J=\left[\begin{array}{c|c|c|c} J(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & J(\lambda_r) \end{array}\right]$$

ו-$J(\lambda_i)\in M_{h_i}(\mathbb{F})$ לכל $r\geq i\in\mathbb{N}$, אז:

$$\chi_f(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{h_i}$$

♣ כלומר אם לאופרטור יש צורת ז'ורדן אז הפולינום האופייני שלו מתפרק לגורמים ליניאריים.

הוכחה. הטענה נובעת ישירות מהעובדה שהדטרמיננטה של מטריצה אלכסונית לפי בלוקים היא מכפלת הדטרמיננטות של הבלוקים על האלכסון. ∎

מסקנה 5.9. לכל $\lambda\in\sigma(f)$ הגודל של $J(\lambda)$ (ששווה לריבוי האלגברי של λ) הוא $\dim V^\lambda$.

♣ נשים לב שלכל ערך עצמי $\lambda\in\mathbb{F}$ של f החזקה של $x-\lambda$ בפירוק של μ_f לגורמים היא אורך השרשרת הארוכה ביותר בבסיס השרשראות של V^λ (ששווה לגודל בלוק ז'ורדן האלמנטרי הגדול ביותר בעל ערך עצמי λ).

מסקנה 5.10. מתקיים $\mu_f\mid\chi_f$ וקבוצות השורשים שלהם שווה.

♣ מכאן שגם הפולינום המינימלי של f מתפרק לגורמים ליניאריים, והדבר נכון לכל אופרטור שיש לו צורת ז'ורדן.

[15] ערכים בוויקיפדיה: ארתור קיילי וויליאם רואן המילטון.
[16] כל מטריצה ריבועית היא אופרטור ולכן אין צורך בהוכחה נפרדת.

טענה 5.11. קבוצת האיברים האחרונים בכל שרשרת בבסיס שרשראות של V^{λ} היא בסיס של V_{λ} וזאת לכל ערך עצמי $\lambda\in\mathbb{F}$ של f.

מסקנה 5.12. לכל ערך עצמי $\lambda\in\mathbb{F}$ של f הריבוי הגאומטרי שווה למספר השרשראות בבסיס שרשראות של V^{λ}.

מסקנה 5.13. לכל ערך עצמי $\lambda\in\mathbb{F}$ של f הריבוי הגאומטרי שלו קטן או שווה מזה האלגברי ומתקיים שוויון אם"ם $V_{\lambda}=V^{\lambda}$.

♣ מכאן נובע ש-f לכסין אם"ם יש ל-f צורת ז'ורדן (כלומר ניתן להציג את V כסכום ישר של מרחבים עצמיים מוכללים) ובנוסף לכל $\lambda\in\sigma\left(f\right)$ הריבוי האלגברי של λ שווה לזה הגאומטרי.

♣ נניח של-f יש צורת ז'ורדן, כפי שראינו ניתן לקבוע אם f לכסין ומהם הערכים העצמיים שלו ע"י μ_f ו-χ_f; נניח ש-f לכסין ונרצה למצוא את הצורה האלכסונית שלו ו/או בסיס מלכסן, כדי לבצע זאת נפעל ע"פ השלבים הבאים:

1. יש לנו כבר את χ_f שכן על פיו קבענו ש-f לכסין (אם קבענו בדרך אחרת אז יש לחשב אותו), א"כ אנחנו יודעים מהם הערכים העצמיים של f אך יותר מזה - מספר ההופעות של כל אחד מהם בצורה האלכסונית הוא הריבוי האלגברי שלו ב-χ_f - לכן כבר עכשיו אנחנו יודעים בדיוק איך נראית הצורה האלכסונית של f (עוד לפני שמצאנו בסיס מלכסן), נסמן אותה ב-D.
2. לכל $\lambda\in\sigma\left(f\right)$ נמצא בסיס ל-$V_{\lambda}=\ker\left(f-\lambda\right)$ ע"י מציאת בסיס למרחב הפתרונות של הממ"ל:

$$0=\left(\left[f\right]_{\mathcal{B}}-\lambda\cdot I_{n}\right)\cdot x$$

(כאשר $\mathcal{B}$ הוא בסיס כלשהו של V) וחילוץ הווקטורים המתאימים ב-V (כל וקטור בבסיס של מרחב הפתרונות הוא וקטור קואורדינטות של וקטור ב-V ע"פ הבסיס $\mathcal{B}$).

3. נשרשר את הבסיסים זה לזה ונקבל בסיס מלכסן.

5.1 ניתוח אופרטור ע"פ צורת ז'ורדן, הפולינום המינימלי והפולינום האופייני

תהא J צורת ז'ורדן של אופרטור f ויהי $\lambda\in\sigma\left(f\right)$ ונניח שהמטריצה הבאה היא הבלוק המתאים ל-λ ב-J:

$$J\left(\lambda\right)=\left[\begin{array}{c|c|c|c}
J_{h_{1}}\left(\lambda\right) & 0 & \cdots & 0\\
\hline 0 & J_{h_{2}}\left(\lambda\right) & \cdots & 0\\
\hline 0 & 0 & \ddots & 0\\
\hline 0 & 0 & \cdots & J_{h_{s}}\left(\lambda\right)
\end{array}\right]$$

מאחורי צורת ז'ורדן מסתתר בסיס שרשראות המורכב מבסיסי שרשראות של המרחבים העצמיים המוכללים, כל בלוק ז'ורדן אלמנטרי מייצג שרשרת אחת ולכן:

- מספר השרשראות של λ שווה למספר הבלוקים האלמנטריים בעלי ע"ע λ המופיעים בצורת ז'ורדן, במקרה שלנו זה אומר שמספר השרשראות הוא s.
- מכיוון שכל שרשרת מכילה בסופה וקטור עצמי ואלו פורשים את V_{λ} נדע ש-$\dim V_{\lambda}=s$ (וזהו גם הריבוי הגאומטרי של λ).
- מכיוון שכל שרשרת היא בגודל של הבלוק המתאים לה ואיחוד השרשראות של λ הוא בסיס של V^{λ} נדע שמתקיים $\dim V^{\lambda}=h_{1}+h_{2}+\ldots+h_{s}$, כלומר הממד של המרחב העצמי המוכלל שווה לסכום אורכי הבלוקים האלמנטריים (ששווה לגודל של $J\left(\lambda\right)$).
- מהגדרה, החזקה של $x-\lambda$ בפירוק של μ_f לגורמים היא אורך השרשרת הארוכה ביותר בבסיס השרשראות של V^{λ} ולכן זהו גם הגודל הגדול ביותר של בלוק אלמנטרי בעל ערך עצמי λ.
- ראינו לעיל שהחזקה של $x-\lambda$ בפירוק של χ_f לגורמים (הריבוי האלגברי של λ) היא $\dim V^{\lambda}$ ולכן היא שווה לסכום אורכי הבלוקים האלמנטריים (ששווה לגודל של $J\left(\lambda\right)$).

ובכיוון ההפוך:

- אם נתון לנו μ_f אנחנו יכולים לדעת מהו הבלוק האלמנטרי הגדול ביותר עבור כל ערך עצמי (כמובן שאנחנו יודעים גם מהו הספקטרום).
- אם נתון לנו χ_f אנחנו יכולים לדעת מהו סכום הגדלים של הבלוקים האלמנטריים של כל ערך עצמי (כמובן שאנחנו יודעים גם מהו הספקטרום).
- הממד של $V_\lambda = \ker(f-\lambda)$ הוא מספר הבלוקים האלמנטריים של λ.
- מספר הבלוקים האלמנטריים של λ שגודלם הוא גדול או שווה ל-k הוא $\dim\left(\ker(f-\lambda)^k\right) - \dim\left(\ker(f-\lambda)^{k-1}\right)$[17] ולכן לכל $k\in\mathbb{N}$ מספר הבלוקים שגודלם הוא בדיוק k הוא:
$$2\cdot\dim\left(\ker(f-\lambda)^k\right) - \dim\left(\ker(f-\lambda)^{k-1}\right) - \dim\left(\ker(f-\lambda)^{k+1}\right)$$
זו הסיבה לכך ששתי מטריצות ז'ורדן דומות זו לזו אם"ם הן זהות עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

ארבעת האחרונים יכולים לעזור לנו לקבוע האם מטריצות נתונות דומות זו לזו גם מבלי למצוא את צורת ז'ורדן שלהן, או להפך: ארבעת אלה יכולים לעזור לנו למצוא את צורת ז'ורדן של מטריצה נתונה גם מבלי להפעיל את כל האלגוריתם (שלושת הראשונים מביניהם מגבילים את הקומבינציות האפשריות והאחרון משמש לקביעה מוחלטת במקרה שעוד נותר ספק).

לסיכום:

מרחבים	ריבויים	שרשראות בבסיס של V^λ	צורת ז'ורדן	פולינומים
$\dim V_\lambda$	הריבוי הגאומטרי	מספר השרשראות	מספר הבלוקים	-
$\dim V^\lambda$	הריבוי האלגברי	סכום אורכי השרשראות	הגודל של $J(\lambda)$ וסכום אורכי הבלוקים	החזקה ב-χ_f
-	-	אורך השרשרת הארוכה ביותר	גודל הבלוק האלמנטרי הגדול ביותר	החזקה ב-μ_f

[17] מכל שרשרת שאורכה גדול או שווה ל-k ישנם k וקטורים בבסיס של $\ker(f-\lambda)^k$ ומכל שרשרת שאורכה קצר יותר כל השרשרת מופיעה בבסיס של $\ker(f-\lambda)^k$, באופן דומה כל שרשרת שאורכה קצר יותר מופיעה בשלמותה בבסיס של $\ker(f-\lambda)^{k-1}$ ולכן היא מחוסרת מן החשבון ומכל שרשת שאורכה גדול או שווה ל-k אנו מחסרים $k-1$ וקטורים, א"כ נשארנו עם וקטור אחד מכל שרשרת שאורכה גדול או שווה ל-k.