המרחב - טענות בלבד

אנליזה אלמנטרית רב-ממדית - 80116

מרצה: נועה ניצן

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 קבוצות מיוחדות במרחב

טענה 1.1. יהיי $L := \{P + t \cdot \vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ישר, לכל $P' \in L$ ולכל $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ כך ש-$\operatorname{span}(\vec{v}) = \operatorname{span}(\vec{w})$[1] מתקיים $\{P' + t \cdot \vec{w} \mid t \in \mathbb{R}\} = L$.

משפט 1.2. תהא $L \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצת נקודות במישור, L הוא ישר אם"ם קיימים $a, b, c \in \mathbb{R}$ המקיימים $a \neq 0$ או ש-$b \neq 0$ כך שמתקיים $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0 \right\}$.

♣ הצגה זו נקראת ההצגה הסתומה של הישר (בניגוד להצגה הפרמטרית ע"י נקודה ווקטור), ניתן לעבור מהצגה להצגה באמצעות הנוסחאות הבאות:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0,\ b \neq 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{ax + c}{b} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-c}{b} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0,\ a \neq 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = -\frac{by + c}{a} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-c}{a} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R},\ c \neq 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{d}{c} \cdot x + \left(b - \frac{ad}{c} \right) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid dx - cy + (cb - ad) = 0 \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R},\ c = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + 0 \cdot y - a = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid dx - cy + (cb - ad) = 0 \right\}$$

♣ באופן כללי (וכפי שראינו בלינארית 1) כדי לאפיין ישריה[2] שמרחב הכיוונים שלה הוא ממימד m בתוך מרחב $\mathbb{R}^n$ ($m \leq n$) יש צורך בנקודה ו-m וקטורים או ב-$n - m$ משוואות ליניאריות ב-n נעלמים (הצגה מהצורה הראשונה נקראת הצגה פרמטרית והצגה מהצורה השנייה נקראת הצגה סתומה).

טענה 1.3. יהיי $M := \{P + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ מישור, לכל $P' \in M$ ולכל $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ כך ש-$\operatorname{span}(\vec{v}, \vec{w}) = \operatorname{span}(\vec{x}, \vec{y})$ מתקיים $\{P' + s \cdot \vec{x} + t \cdot \vec{y} \mid s, t \in \mathbb{R}\} = M$.

♣ למעשה לכל $P, \vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}, Q, \vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_r} \in \mathbb{R}^n$ המקיימים $\operatorname{span}(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_r}) = \operatorname{span}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r})$ ו-$Q \in \{P + \sum_{i=1}^r a_i \cdot v_i \mid a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{R}\}$ מתקיים:

$$\begin{aligned} \{Q\} + \operatorname{span}(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_r}) &= \left\{ Q + \sum_{i=1}^r b_i \cdot w_i \mid b_1, b_2, \ldots, b_r \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ P + \sum_{i=1}^r a_i \cdot v_i \mid a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{P\} + \operatorname{span}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}) \end{aligned}$$

טענה 1.4. תהיינה $P, Q, R, S \in \mathbb{R}^n$ שונות זו מזו, נקודות אלו הן קו-מישוריות אם"ם קבוצת הווקטורים $\left\{ \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS} \right\}$ תלויה ליניארית.

טענה 1.5. יהיו $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ שני מישורים, אם הם אינם מקבילים אז $M_1 \cap M_2$ הוא ישר.

[1] כלומר $\vec{w} \neq \vec{0}$ ותלוי ליניארית ב-$\vec{v}$, הסיבה לניסוח היא הטענה המקבילה למישורים.

[2] כך קראנו אז תת-מרחב ש"הוזז" מראשית הצירים, כלומר לישרים, מישורים וכאלה ממימד גבוה יותר שאינם עוברים בראשית הצירים ולכן אינם מהווים תתי-מרחבים.

2 נורמה ומטריקה

משפט 2.1. לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $P,Q\in\mathbb{R}^{n}$ מתקיים:

1. $d_{\infty}\left(P,Q\right)\leq d_{2}\left(P,Q\right)\leq\sqrt{k}\cdot d_{\infty}\left(P,Q\right)$.
2. $d_{2}\left(P,Q\right)\leq d_{1}\left(P,Q\right)\leq\sqrt{k}\cdot d_{2}\left(P,Q\right)$.

♣ למעשה מתקיים הרבה יותר מזה: לכל $n,k\in\mathbb{N}$ ולכל $P,Q\in\mathbb{R}^{n}$ מתקיים $d_{\infty}\left(P,Q\right)\leq d_{k}\left(P,Q\right)\leq\sqrt[k]{n}\cdot d_{\infty}\left(P,Q\right)$ וזו הסיבה לכך שהגדרת הגבול ב-$\mathbb{R}^{n}$ לא תבדיל בין המטריקות מהסדרה $\left(d_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, כלומר אם עבור אחת מהן קיים הגבול וזה ערכו כך יהיה עבור כל האחרות.

טענה 2.2. לכל שתי מטריקות d ו-d' על $\mathbb{R}^{k}$ השייכות לסדרת המטריקות $\left(d_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ (כולל d_{∞}) ולכל $0<r\in\mathbb{R}$ קיים $0<r'\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$\left\{ P\in\mathbb{R}^{k}\mid d'\left(P,P_{0}\right)<r'\right\} \subseteq\left\{ P\in\mathbb{R}^{k}\mid d\left(P,P_{0}\right)<r\right\}$$

3 המכפלה הסקלרית

מפרק זה והלאה (כל עוד לא נאמר אחרת) אנו עוסקים בנורמה ובמטריקה האוקלידיות.

♣ מומלץ מאד לצפות בסרטונים של 3blue1brown, ובפרט בסרטון שלו על המכפלה הסקלרית.

משפט 3.1. שקילות אלגברית להגדרה הגאומטרית של המכפלה הסקלרית

לכל $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^{n}$ מתקיים:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=\sum_{i=1}^{n}x_{i}\cdot y_{i}$$

מסקנה 3.2. יהיו $\vec{0}\neq\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^{n}$ ונסמן ב-θ את הזווית הקטנה מבין השתיים הנוצרות ביניהם, מתקיים:

$$\theta=\arccos\left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\left\Vert \vec{x}\right\Vert \cdot\left\Vert \vec{y}\right\Vert }\right)$$

טענה 3.3. תכונות של המכפלה הסקלרית:

1. חיוביות (או חיוביות בהחלט) - לכל $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\vec{v}\cdot\vec{v}\geq 0$ ובנוסף $\vec{v}\cdot\vec{v}=0$ אם"ם $\vec{v}=\vec{0}$.
2. סימטריה - לכל $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$.
3. בי-ליניאריות (ליניאריות בכל רכיב) - לכל $\vec{v},\vec{w},\vec{u}\in\mathbb{R}^n$ ולכל $c\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot(\vec{w}+\vec{u})&=\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{u}\\ \vec{v}\cdot(c\cdot\vec{w})&=c\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})\\ (\vec{v}+\vec{u})\cdot\vec{w}&=\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{u}\cdot\vec{w}\\ (c\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}&=c\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})\end{aligned}$$

♣ הליניאריות ברכיב אחד נובעת מהליניאריות ברכיב האחר ע"י הסימטריה.

טענה 3.4. יהא $L\subseteq\mathbb{R}^2$ ישר ויהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש-$L=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\mid ax+by+c=0\right\}$, נסמן $t:=-\frac{c}{a^2+b^2}$[3] ובנוסף $x_0:=ta$ ו-$y_0:=tb$[4] וא"כ מתקיים:

$$L=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ \begin{bmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=0\right\}$$

♣ מה שהטענה אומרת בעצם הוא שהווקטור $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ מאונך לכל אחד מן ההפרשים $\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ וכך $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ הוא נורמל של L ונקודת החיתוך של L והישר הנפרש ע"י $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ היא $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$, כל זה לא אמור להפתיע אף אחד שכן השיפוע של הישר L הוא $-\frac{a}{b}$ (בהנחה ש-$b\neq 0$) ואילו השיפוע של הישר הנפרש ע"י $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ הוא $\frac{b}{a}$ וכפי שלמדנו בתיכון שני ישרים מאונכים זה לזה אם"ם מכפלת השיפועים שלהם היא -1.

4 המכפלה הווקטורית

♣ מומלץ מאד לצפות בסרטונים של 3blue1brown, ובפרט בסרטון שלו על המכפלה הווקטורית.

יהיו $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ ותהא $\theta\in\mathbb{R}$ זווית שביניהם.

משפט 4.1. זהות לגראנז'[5]

$$\begin{aligned}\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|^2&=\|\vec{a}\|^2\cdot\left\|\vec{b}\right\|^2\cdot\sin^2\theta=\|\vec{a}\|^2\cdot\left\|\vec{b}\right\|^2\cdot\left(1-\cos^2\theta\right)\\ &=\|\vec{a}\|^2\cdot\left\|\vec{b}\right\|^2-\|\vec{a}\|^2\cdot\left\|\vec{b}\right\|^2\cdot\cos^2\theta\\ &=\|\vec{a}\|^2\cdot\left\|\vec{b}\right\|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2\end{aligned}$$

[3] ניתן לחלק ב-a^2+b^2 מפני ש-$a\neq 0$ ו/או $b\neq 0$ שהרי L הוא ישר.
[4] וכך יתקיים $c=-(ax_0+bx_0)$.
[5] ערך בוויקיפדיה ז'וזף-לואי לגראנז'.

טענה 4.2.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}$$

טענה 4.3. יהי $\vec{c}\in\mathbb{R}^3$, מתקיים $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

טענה 4.4. לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים $(t\cdot\vec{a})\times\vec{b}=t\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\times\left(t\cdot\vec{b}\right)$.

תהא $P_0\in\mathbb{R}^3$ ויהא $M:=\left\{P_0+s\cdot\vec{a}+t\cdot\vec{b}\mid s,t\in\mathbb{R}\right\}$ מישור.

טענה 4.5. הווקטור $\vec{a}\times\vec{b}$ הוא נורמל של M.

טענה 4.6. תהא $P_0\in M$ נקודה ויהי $\vec{N}\in\mathbb{R}^3$ נורמל של M, מתקיים $M=\left\{P\in\mathbb{R}^3\mid\overrightarrow{P_0P}\perp\vec{N}\right\}$.

מסקנה 4.7. יהיו $x_0,y_0,z_0\in\mathbb{R}$ כך ש-$P_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$, מתקיים:

$$M=\left\{P\in\mathbb{R}^3\mid\overrightarrow{P_0P}\perp\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\begin{bmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}=0\right\}$$
$$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;(a_2b_3-a_3b_2)(x-x_0)+(a_3b_1-a_1b_3)(y-y_0)+(a_1b_2-a_2b_1)(z-z_0)\right\}$$

♣ ההצגה הזו כבר קרובה מאד להצגה סתומה של המישור, צריך רק להפריד בין המשתנים לאיבר הקבוע (למען האמת הייתי עושה זאת למעלה לו היה לי מקום), כלומר אם נגדיר:

$$\begin{aligned}n&:=a_2b_3-a_3b_2\\m&:=a_3b_1-a_1b_3\\k&:=a_1b_2-a_2b_1\\l&:=-\left(nx_0+my_0+kz_0\right)\end{aligned}$$

נקבל שאחת ההצגות הסתומות של המישור M היא:

$$M=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid nx+my+kz+l=0\right\}$$