הפונקציות ההיפרבוליות

חשבון אינפיניטסימלי (2) - 80132

מרצה: יורם לסט

מתרגלים: דניאל אופנר ומתן בן-אשר

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ג, האונ' העברית

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

הגדרה. נגדיר את הפונקציות $\sinh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (סינוס היפרבולי) ו-$\cosh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (קוסינוס היפרבולי) ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$\sinh\left(x\right):=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$
$$\cosh\left(x\right):=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

מסקנה. $\sinh$ היא פונקציה אי-זוגית ו-$\cosh$ היא פונקציה זוגית.

♣ הקשר לפונקציות הטריגונומטריות עמוק יותר משמירה על האי-זוגיות של $\sin$ ועל הזוגיות של $\cos$, בהמשך הקורס נראה שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים[1]:

$$\exp\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$$
$$\sin\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}$$
$$\cos\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\cdot\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}$$

נוסחאות אלו הן שהביאה את אוילר להגדיר את שלוש הפונקציות הללו עבור מספרים מדומים בצורה הבאה[2]:

$$\exp\left(ix\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(ix\right)^{n}}{n!}$$
$$\sin\left(ix\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\cdot\frac{\left(ix\right)^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}$$
$$\cos\left(ix\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\cdot\frac{\left(ix\right)^{2n}}{\left(2n\right)!}$$

כעת נשים לב לכך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left(-i\right)\cdot i^{2n+1}\cdot\left(-1\right)^{n}=\left(-i\right)\cdot i\cdot i^{2n}\cdot\left(-1\right)^{n}=1\cdot\left(i^{2}\right)^{n}\cdot\left(-1\right)^{n}=\left(-1\right)^{n}\cdot\left(-1\right)^{n}=1$$

ומכאן שמתקיים:

$$\begin{aligned}\sinh\left(x\right)&=\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-x\right)^{n}}{n!}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n}}{n!}-\frac{\left(-x\right)^{n}}{n!}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-i\right)\cdot i^{2n+1}\cdot\left(-1\right)^{n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}\right)\\&=-i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-1\right)^{n}\cdot\frac{\left(ix\right)^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}\right)=-i\cdot\sin\left(ix\right)\end{aligned}$$

[1] אלה פשוט הגבולות של סדרת פולינומי טיילור של הפונקציות כשהם מפותחים סביב 0.
[2] הגדרת הגבול של סדרה במרוכבים עובדת באותה צורה רק עם הערך המוחלט של המרוכבים.

וגם:

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}+\frac{(-x)^n}{n!}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-i)\cdot i\cdot i^{2n}\cdot(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\cdot\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}\right) = \cos(ix)\end{aligned}$$

טענה. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

הוכחה. יהי $x \in \mathbb{R}$, מהגדרה מתקיים:

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2\\ &= \frac{\left(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right)}{4}\\ &= \frac{2\cdot 1 + 2\cdot 1}{4} = 1\end{aligned}$$

■

טענה. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\sinh'(x) &= \cosh(x)\\ \cosh'(x) &= \sinh(x)\end{aligned}$$

טענה. $\sinh$ היא פונקציה הפיכה וההופכית שלה היא הפונקציה $\operatorname{arsinh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $x \in \mathbb{R}$):

$$\operatorname{arsinh}(x) := \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

הוכחה. ראינו לעיל שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\sinh'(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, פונקציית האקספוננט חיובית ממש על כל הישר הממשי ומכאן שגם $\cosh$ חיובית ממש על כל הישר, כלומר הנגזרת של $\sinh$ חיובית ממש על כל הישר ומכאן שהיא עולה ממש וממילא חח"ע.

יהי $y \in \mathbb{R}$, ונגדיר $x := \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$, נשים לב ש-$y^2 + 1 > y^2$ ומכיוון שפונקציית השורש עולה ממש הדבר גורר ש-$\sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{y^2} = |y| \geq -y$ ומכאן ש-$y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$ ולכן ניתן לחלק בו ללא בעיות.

נוכיח ש-y = $\sinh\left(x\right)$:

$$\begin{aligned}\sinh\left(x\right) &= \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{\ln\left(y+\sqrt{y^{2}+1}\right)}-e^{-\ln\left(y+\sqrt{y^{2}+1}\right)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(y+\sqrt{y^{2}+1}-\frac{1}{y+\sqrt{y^{2}+1}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(y+\sqrt{y^{2}+1}\right)^{2}-1}{y+\sqrt{y^{2}+1}}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(y^{2}+2y\cdot\sqrt{y^{2}+1}+y^{2}+1\right)-1}{y+\sqrt{y^{2}+1}}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2y^{2}+2y\cdot\sqrt{y^{2}+1}}{y+\sqrt{y^{2}+1}}\\
&= \frac{y^{2}+y\cdot\sqrt{y^{2}+1}}{y+\sqrt{y^{2}+1}}=y\end{aligned}$$

y הנ"ל היה שרירותי ולכן לכל $y\in\mathbb{R}$ קיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש-$\sinh\left(x\right)=y$, כלומר $\sinh$ היא על, אך לא רק שבכך הוכחנו שהיא הפיכה אלא שמצאנו גם את ההופכית שלה שהיא הפונקציה $\text{arsinh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$\text{arsinh}\left(x\right):=\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)$$

■

♣ אבל איך בכלל ידענו לסמן $x:=\ln\left(y+\sqrt{y^{2}+1}\right)$? נניח שקיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש-$\sinh\left(x\right)=y$, כלומר:

$$y=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow y\cdot e^{x}=e^{x}\cdot\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\frac{e^{2x}-1}{2}\\
&\Rightarrow 2ye^{x}=e^{2x}-1\\
&\Rightarrow 0=e^{2x}-2ye^{x}-1\end{aligned}$$

נסמן $t:=e^{2x}$,

$$\begin{aligned}&\Rightarrow 0=t^{2}-2yt-1\\
&\Rightarrow t=\frac{2y\pm\sqrt{4y^{2}+4}}{2}=\frac{2y\pm2\sqrt{y^{2}+1}}{2}=y\pm\sqrt{y^{2}+1}\end{aligned}$$

כעת נשים לב לכך ש-$y+\sqrt{y^{2}+1}$ חיובי בעוד ש-$y-\sqrt{y^{2}+1}$ שלילי ולכן בהכרח $x=\ln\left(y+\sqrt{y^{2}+1}\right)$.

מסקנה. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

הוכחה. יהי $x \in \mathbb{R}$, מכלל השרשרת נובע שמתקיים:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsinh}'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

■