סדרות - טענות בלבד

חשבון אינפיניטסימלי (1) - 80131

מרצה: רז קופרמן

מתרגלים: אור יער ודניאל רוזנבלט

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 גבול של סדרה

טענה 1.1. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$, אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n = b_n$ אז $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-α אם"ם $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-α.

♣ כלומר בכל הקשור להתכנסות לא מעניין אותנו מה קורה בתחילת הסדרה אלא אך ורק מה שקורה באין-סוף.

למה 1.2. יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ כך ש-$\beta \neq \alpha$, קיים $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ כך שהקבוצות $B_\varepsilon(\alpha)$ ו-$B_\varepsilon(\beta)$ זרות (כלומר $B_\varepsilon(\alpha) \cap B_\varepsilon(\beta) = \emptyset$).

למה 1.3. תהיינה $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות פסוקים לוגיים, אם $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ מתקיימת ממקום מסוים ואילך וגם $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ מתקיימת ממקום מסוים ואילך אז $(P_n \wedge Q_n)_{n=1}^{\infty}$ מתקיימת ממקום מסוים ואילך.

משפט 1.4. יחידות הגבול

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת, אם $\alpha \in \mathbb{R}$ וגם $\beta \in \mathbb{R}$ הם גבולות[1] של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אז $\alpha = \beta$.

2 חסימות וסדר

משפט 2.1. כל סדרה מתכנסת היא סדרה חסומה.

טענה 2.2. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות (נסמן את גבולותיהן ב-α ו-β בהתאמה), אם $\alpha < \beta$ אז עבור n גדול דיו מתקיים $a_n < b_n$,
כלומר קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n < b_n$.

מסקנה 2.3. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל-$\alpha \in \mathbb{R}$ ויהי $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, עבור n גדול דיו מתקיים $a_n < \beta$,
כלומר קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n < \beta$.

טענה 2.4. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות (נסמן את גבולותיהן ב-α ו-β בהתאמה),

1. אם עבור n גדול דיו מתקיים $a_n \leq b_n$ אז $\alpha \leq \beta$.
2. אם $\alpha < \beta$ אז עבור n גדול דיו מתקיים $a_n < b_n$.

♣ גם אם היה נתון בסעיף 1 שעבור n גדול דיו מתקיים $a_n < b_n$ עדיין נוכל לומר רק ש-$\alpha \leq \beta$ ולא ש-$\alpha < \beta$, כמו כן גם אם היינו יודעים בסעיף 2 שמתקיים רק $\alpha \leq \beta$ לא היינו יכולים לומר דבר על היחס בין $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ל-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ באין-סוף.

משפט 2.5. משפט הכריך

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(c_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות המתכנסות ל-$L \in \mathbb{R}$ ותהא $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך שעבור n גדול דיו מתקיים $a_n \leq b_n \leq c_n$, גם $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-L.

[1] המשפט אינו נכון מבחינה לשונית משום שמדובר במספר אחד ולכן לא שייך לדבר עליו ברבים, אך הכוונה ברורה ולפני שהמשכנו ואמרנו שהם שווים לא ידענו שבהכרח מדובר באותו מספר (לא יכולתי להתאפק...).

3 אריתמטיקה של גבולות

3.1 התחלה

למה 3.1. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$, הפסוקים הבאים שקולים:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n-\alpha)=0$
3. $\lim_{n\to\infty} |a_n-\alpha|=0$

טענה 3.2. אם סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אז $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$|\lim_{n\to\infty} a_n|$.

♣ שלוש הלמות הבאות נדרשות להוכחת משפט האריתמטיקה של גבולות (להלן).

למה 3.3. יהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, יהי $0<r\in\mathbb{R}$ ויהיו $x\in B_r(\alpha),\ y\in B_r(\beta)$, מתקיים $x+y\in B_{2r}(\alpha+\beta)$.

למה 3.4. יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ ויהיו $\alpha,\beta,x,y\in\mathbb{R}$, אם $|x-\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$ וגם $|y-\beta|<\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}\right\}$ אז $|x\cdot y-\alpha\cdot\beta|<\varepsilon$.

למה 3.5. יהיו $0\neq\beta\in\mathbb{R}$, $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ ו-$y\in\mathbb{R}$, אם:

$$|y-\beta|<\min\left\{\frac{|\beta|}{2},\frac{|\beta|^2\cdot\varepsilon}{2}\right\}$$

אז $y\neq 0$ וגם:

$$\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{\beta}\right|<\varepsilon$$

משפט 3.6. אריתמטיקה של גבולות
תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות המתכנסות ל-$\alpha\in\mathbb{R}$ ו-$\beta\in\mathbb{R}$ בהתאמה, מתקיימים ארבעת הפסוקים הבאים:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$.
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\alpha\cdot\beta$.
3. אם $\beta\neq 0$ אז $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{\beta}$.
4. אם $\beta\neq 0$ אז $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$.

מסקנה 3.7. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל-$\alpha\in\mathbb{R}$ ויהי $b\in\mathbb{R}$, הסדרה $(b\cdot a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$b\cdot\alpha$.

3.2 טענות נוספות

משפט 3.8. כלל אפסה וחסומה
תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל-0 ותהא $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, הסדרה $(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0.

למה 3.9. יהי $q \in (0,1)$, הסדרה $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0.

טענה 3.10. יהי $0 < q \in \mathbb{R}$, הסדרה $\left(\sqrt[n]{q}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-1.

משפט 3.11. משפט צ'זארו (Cesàro)[2]
תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל-$\alpha \in \mathbb{R}$, גם הסדרה $\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n=1}^{\infty}$ (שהיא <u>סדרת הממוצעים</u> של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$) מתכנסת ל-α.

למה 3.12. לכל $0 < x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = 1 \Rightarrow n \le \sum_{i=1}^{n} x_i$$

משפט 3.13. אי-שוויון הממוצעים
תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)^{-1} \le \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \le \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

כלומר: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים הממוצע החשבוני $\le$ הממוצע הגאומטרי $\le$ הממוצע ההרמוני (של כל איברי הסדרה עד ל-a_n).

מסקנה 3.14. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית המתכנסת ל-$0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, גם הסדרות $\left(\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)^{-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ ו-$\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות ל-α.

♣ יחד עם משפט צ'זארו נוכל לומר שכל שלושת הממוצעים של סדרה חיובית מתכנסים לגבול שלה (אם הוא קיים ושונה מ-0).

מסקנה 3.15. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י $a_n = \sqrt[n]{n}$ (לכל $n \in \mathbb{N}$), $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-1.

3.3 סדרה חשבונית וסדרה הנדסית

טענה 3.16. תהא $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה חשבונית ויהי $d \in \mathbb{R}$ הפרש הסדרה, לכל $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים $a_n = a_0 + d \cdot n$.

טענה 3.17. תהא $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה חשבונית ויהי $d \in \mathbb{R}$ הפרש הסדרה, לכל $N \in \mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{n}{2} \cdot (a_0 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot (2a_0 + d \cdot n)$$

♣ כדי להוכיח את הטענה הזו די לשים לב לכך שלכל $n \ge k \in \mathbb{N}_0$ מתקיים $a_k + a_{n-k} = a_0 + a_n$.

טענה 3.18. תהא $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה הנדסית ותהא $q \in \mathbb{R}$ הפרש הסדרה, לכל $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים $a_n = a_0 \cdot q^n$.

[2] ערך בוויקיפדיה האנגלית: Ernesto Cesàro.

טענה 3.19. לכל $1 \neq q \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

♣ נשים לב לאינטואיציה מעניינת עבור הנוסחה:

$$\sum_{k=0}^{n} 10^k = \overbrace{1111111111111111}^{\text{n+1 פעמים}} = \frac{\overbrace{999999999999999}^{\text{n+1 פעמים}}}{9}$$

$$= \frac{1\overbrace{000000000000000}^{\text{n+1 פעמים}}-1}{9} = \frac{10^{n+1}-1}{9} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

כמובן שזה לא מיוחד עבור 10, זה יעבוד לכל בסיס ספירה שנבחר (כלומר לכל $1 < q \in \mathbb{N}$).
ניתן אפילו להמציא בסיס ספירה עבור כל מספר ממשי חיובי השונה מ-1, כך למשל אם נרצה להציג את π בבסיס ספירה $\sqrt{2}$ נקבל מספר בן ארבע ספרות משמאל לנקודה (כי $\left(\sqrt{2}\right)^3 < \pi < \left(\sqrt{4}\right)^4$) ו"אין-סוף" ספרות אחריה (כי א"א להציג את השארית כסכום של שברים מהצורה $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{-n}\right)$): הספרה השמאלית ביותר תהיה 1 (כי אין לנו ספרה גדולה יותר), שלוש הספרות הבאות תהיינה 0 כי $\left(\sqrt{2}\right)^2 < \sqrt{2} < \left(\sqrt{2}\right)^0 < \pi - \left(\sqrt{2}\right)^3$, שלוש הספרות הראשונות אחרי הנקודה תהיינה גם הן אפסים כי $\left(\sqrt{2}\right)^{-1} < \left(\sqrt{2}\right)^{-2} < \left(\sqrt{2}\right)^{-3} < \pi - \left(\sqrt{2}\right)^3$ והספרה הבאה תהיה 1 כי $\left(\sqrt{2}\right)^{-4} > \pi - \left(\sqrt{2}\right)^3$ וכן הלאה, הגבול של הסדרה הזו הוא הוא אכן π (לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\varepsilon > \left(\sqrt{2}\right)^{-n} > 0$)[3].

♣ א"א לעבוד עם בסיס ספירה שלילי, ועבור בסיסי ספירה קטנים מ-1 האינטואיציה לא תעבוד מפני שכאשר נחסיר מהם 1 נקבל "ספרה" שלילית; למרות זאת הפירמול של הוכחה זו עובד גם עבור מספרים קטנים מ-1 ומספרים שליליים[4].

מסקנה 3.20. תהא $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה הנדסית כך ש-$1 \neq q \in \mathbb{R}$ היא מנת הסדרה, לכל $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

♣ כמובן שאם $q = 1$ אז הסכום החלקי ה-n-י הוא $a_0 \cdot (n+1)$.

מסקנה 3.21. תהא $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה הנדסית כך שמנת הסדרה $q \in \mathbb{R}$ מקיימת $|q| < 1$, מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 \cdot \frac{1}{1-q}$$

[3] עבור מספר חיובי קטן מ-1 התפקידים של "משמאל לנקודה" ו-"מימין לנקודה" מתהפכים.
[4] תודתי נתונה למשה רוזנשטיין על העיון המשותף בנושא.

4 גבולות במובן הרחב

טענה 4.1. סדרה השואפת לאין-סוף אינה חסומה מלעיל, כמו כן, סדרה השואפת למינוס אין-סוף אינה חסומה מלרע.

משפט 4.2. משפט הפרוסה
תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות המקיימות $a_n \leq b_n$ ממקום מסוים ואילך;

- אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת לאין-סוף אז גם $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת לאין-סוף,
- כמו כן, אם $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת למינוס אין-סוף אז גם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת למינוס אין-סוף.

טענה 4.3. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים שונים מ-0

- אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אז $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = \infty$.
- אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ אז $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

♣ מה שהטענה אומרת בעצם הוא שלכל סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

5 מונוטוניות

טענה 5.1. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית ויהיו $n, m \in \mathbb{N}$ כך ש-$n < m$,

- אם היא מונוטונית עולה אז $a_m \geq a_n$.
- אם היא עולה ממש אז $a_m > a_n$.
- אם היא מונוטונית יורדת אז $a_m \leq a_n$.
- אם היא יורדת ממש אז $a_m < a_n$.

משפט 5.2. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית,

- אם היא מונוטונית **עולה** וחסומה **מלעיל** אז היא מתכנסת (במובן הצר, גבולה הוא ה**סופרמום** שלה), אחרת היא שואפת ל**אין-סוף**.
- אם היא מונוטונית **יורדת** וחסומה **מלרע** אז היא מתכנסת (במובן הצר, גבולה הוא ה**אינפימום** שלה), אחרת היא שואפת ל**מינוס אין-סוף**.

מסקנה 5.3. כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב.

למה 5.4. לכל $4 \leq k \in \mathbb{N}$ מתקיים $2^k < k!$.

טענה 5.5. הסדרה $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה וחסומה ומכאן שהיא מתכנסת.

♣ הגבול של סדרה זו הוא הקבוע המתמטי e (זוהי הדרך הקלאסית להגדיר אותו), ניתקל בו שוב בקבצים העוסקים בפונקציות ובנגזרות כאשר נדבר על פונקציית האקספוננט.

משפט 5.6. הלמה של קנטור

תהא $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קטעים סגורים (נסמן $I_n := [a_n, b_n]$) המקיימת:

1. $I_{n+1} \subseteq I_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
2. $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

קיים $c \in \mathbb{R}$ יחיד המקיים:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$$

6 תתי-סדרות וגבולות חלקיים

למה 6.1. תהא $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פסוקים לוגיים ותהא $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה עולה ממש שכל איבריה טבעיים (סדרת אינדקסים). מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $n_k \geq k$.
2. אם P_n מתקיים ממקום מסוים ואילך אז גם P_{n_k} מתקיים ממקום מסוים ואילך,
כלומר: אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש-$P_n = \text{True}$ עבור כל $N < n \in \mathbb{N}$ אז קיים $K \in \mathbb{N}$ כך ש-$P_{n_k} = True$ עבור כל $K < k \in \mathbb{N}$.
3. אם P_{n_k} מתקיים ממקום מסוים ואילך אז P_n מתקיים באופן שכיח,
כלומר: אם קיים $K \in \mathbb{N}$ כך ש-$P_{n_k} = \text{True}$ עבור כל $K < k \in \mathbb{N}$ אז לכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $N < n \in \mathbb{N}$ כך ש-$P_n = \text{True}$.

למה 6.2. תהא $A \subseteq \mathbb{N}$ קבוצה שאינה חסומה, קיימת סדרת אינדקסים (=שכל איבריה טבעיים) עולה ממש $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $n_k \in A$.

למה 6.3. תהא $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ תת-סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ותהא $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ תת-סדרה של $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ היא תת-סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

משפט 6.4. משפט הירושה

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה,

1. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$\alpha \in \mathbb{R}$ אז גם כל תתי-הסדרות שלה מתכנסות ל-α.
2. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל-$\pm\infty$ אז גם כל תתי-הסדרות שלה שואפות ל-$\pm\infty$.
3. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית אז גם כל תתי-הסדרות שלה מונוטוניות, ומאותו סוג מונוטוניות.
4. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל אז גם כל תתי-הסדרות שלה חסומות מלעיל.
5. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלרע אז גם כל תתי-הסדרות שלה חסומות מלרע.
6. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה אז גם כל תתי-הסדרות שלה חסומות.

מסקנה 6.5. אם לסדרה יש שני גבולות חלקיים אז היא אינה מתכנסת.

טענה 6.6. מספר ממשי α הוא גבול חלקי של סדרה אם"ם כל סביבה שלו מכילה אין-סוף איברים של סדרה זו.
במילים אחרות: α הוא גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם"ם לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ הקבוצה $\{n\in\mathbb{N}:|a_n-\alpha|<\varepsilon\}$ אינה חסומה.

מסקנה 6.7. מספר ממשי α אינו גבול חלקי של סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם"ם קיים $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ כך ש-$|a_n-\alpha|\geq\varepsilon$ עבור n גדול דיו.

למה 6.8. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה שאינה חסומה מלעיל, לכל $M\in\mathbb{R}$ הקבוצה $\{n\in\mathbb{N}:a_n>M\}$ אינה חסומה מלעיל.

טענה 6.9. $\pm\infty$ הוא גבול חלקי של סדרה אם"ם היא אינה חסומה מלעיל/מלרע (בהתאמה).

טענה 6.10. לכל סדרה יש תת-סדרה מונוטונית.

משפט 6.11. משפט בולצאנו-ויירשטראס (B.W. - Bolzano–Weierstrass)[5]
לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת.

מסקנה 6.12. לכל סדרה יש תת-סדרה מתכנסת במובן הרחב.

טענה 6.13. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות חסומות, קיימת סדרת אינדקסים עולה ממש $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך ש-$(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ו-$(b_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות.

טענה 6.14. לכל סדרה שאינה מתכנסת כלל, כלומר כזו שאינה מתכנסת אפילו לא במובן הרחב, יש לפחות שני גבולות חלקיים במובן הרחב.

7 גבול עליון וגבול תחתון

7.1 אפיונים

משפט 7.1. [6] תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה ותהא A קבוצת הגבולות החלקיים של סדרה זו, ל-A יש מקסימום ומינימום ויתרה מזאת מתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max A = \inf\{\sup\{a_n,a_{n+1},a_{n+2},\ldots\}\mid n\in\mathbb{N}\}$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \min A = \sup\{\inf\{a_n,a_{n+1},a_{n+2},\ldots\}\mid n\in\mathbb{N}\}$$

- ♣ נשמע מסובך, לא? אנחנו מדברים כאן (תחזיקו חזק!) על החסם התחתון של קבוצת החסמים העליונים של קבוצות האיברים של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ החל ממקום מסוים ואילך, אולי הכתיב הבא יהיה קצת יותר קומפקטי:

$$\inf\{\sup\{a_n:n\geq N\}\mid N\in\mathbb{N}\}$$
$$\sup\{\inf\{a_n:n\geq N\}\mid N\in\mathbb{N}\}$$

על כל פנים בהוכחה נסביר טוב יותר מה הולך כאן (ראו בקובץ ההוכחות).

- ♣ הדגש במשפט הוא על הקיום של גבול חלקי מקסימלי/מינימלי ועל סימני השוויון המודגשים באדום, אלו המסומנים בכחול נובעים ישירות מן ההגדרה של גבול עליון/תחתון שהרי לכל קבוצה המקסימום/מינימום שלה (אם הוא קיים) הוא גם הסופרמום/אינפימום שלה (בהתאמה).

[5] ערכים בוויקיפדיה: ברנרד בולצאנו ו-קארל ויירשטראס. המשפט הוכח לראשונה על ידי ברנרד בולצאנו ב-1817 כטענת עזר בדרך להוכחת משפט ערך הביניים. חשיבות המשפט לא הוכרה אז והוא נשכח, עד שכחמישים שנה מאוחר יותר קארל ויירשטראס הוכיח אותו שוב באופן בלתי תלוי (ציטוט מוויקיפדיה בערך של המשפט).

[6] משפט זה והבא אחריו נלמדו באינפי' 2 (יורם לסט, סמסטר א' תשפ"ג).

משפט 7.2. אפיון נוסף לגבול עליון ולגבול תחתון

- תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה שיש לה גבול עליון, מספר ממשי $M \in \mathbb{R}$ הוא הגבול העליון של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם"ם:
  1. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ האי-שוויון $M - \varepsilon < a_n$ מתקיים באופן שכיח
  2. האי-שוויון $M + \varepsilon > a_n$ מתקיים כמעט תמיד
- תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה שיש לה גבול עליון, מספר ממשי $m \in \mathbb{R}$ הוא הגבול התחתון של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם"ם:
  1. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ הא"ש $m + \varepsilon > a_n$ מתקיים באופן שכיח
  2. האי-שוויון $m - \varepsilon < a_n$ מתקיים כמעט תמיד

7.2 סדר

♣ כמעט כל הטענות שבסעיף זה והבא אחריו נלקחו מהספר "חשבון אינפיניטסימלי" שכתב מיכאל הוכמן יחד עם יונתן הראל, איתי וייס ואופק שילון. זהו נושא מבלבל מאד ולכן אשנה מהרגלי ואביא דוגמאות רבות המראות שבאופן כללי אין אריתמטיקה של גבולות עבור גבול עליון/תחתון ואפילו כדי שישתמר יחס סדר צריכים להתקיים תנאים מסוימים.

♣ בכל הטענות שלהלן ניתן להסתפק בחסימות מלעיל/מלרע בשביל הגבול העליון/התחתון, דרשנו חסימות מלעיל ומלרע כדי שנוכל לדבר על שניהם יחד.

טענה 7.3. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות חסומות, אם מתקיים $a_n \leq b_n$ ממקום מסוים ואילך אז מתקיים גם:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$$

דוגמה 7.4. נשים לב שאי אפשר לומר שמתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$$

לדוגמה:

$$a_n := \begin{cases} 1 & n \in \text{Odd} \\ 3 & n \in \text{Even} \end{cases}, \quad b_n := \begin{cases} 2 & n \in \text{Odd} \\ 4 & n \in \text{Even} \end{cases}$$

טענה 7.5. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות חסומות, מתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$$

דוגמה 7.6. נשים לב שלא מתקיימים בהכרח שוויונות, לדוגמה:

$$a_n := (-1)^n, \quad b_n := (-1)^{n+1}$$

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) 0 < 2 = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) 0 > -2 = \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$$

טענה 7.7. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות חסומות ואי-שליליות, מתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)\le\limsup_{n\to\infty}a_n\cdot\limsup_{n\to\infty}b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)\ge\liminf_{n\to\infty}a_n\cdot\liminf_{n\to\infty}b_n$$

דוגמה 7.8. נשים לב שלא מתקיימים בהכרח שוויונות, לדוגמה:

$$a_n:=\begin{cases}1 & n\in\text{Odd}\\ 2 & n\in\text{Even}\end{cases},\quad b_n:=\begin{cases}2 & n\in\text{Odd}\\ 1 & n\in\text{Even}\end{cases}$$

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=2<4=\limsup_{n\to\infty}a_n\cdot\limsup_{n\to\infty}b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=2>1=\liminf_{n\to\infty}a_n\cdot\liminf_{n\to\infty}b_n$$

דוגמה 7.9. אם נרשה לסדרות להיות אי-שליליות נוכל אפילו להפוך את כיווני האי-שוויונות, לדוגמה:

$$a_n:=b_n:=\begin{cases}1 & n\in\text{Odd}\\ -2 & n\in\text{Even}\end{cases}$$

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=4>1=\limsup_{n\to\infty}a_n\cdot\limsup_{n\to\infty}b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=1<4=\liminf_{n\to\infty}a_n\cdot\liminf_{n\to\infty}b_n$$

7.3 אריתמטיקה

טענה 7.10. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות חסומות, מתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty}(-a_n)=-\liminf_{n\to\infty}a_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(-a_n)=-\limsup_{n\to\infty}a_n$$

טענה 7.11. [7] תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה וחיובית, מתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{\liminf_{n\to\infty}(a_n)}$$
$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}(a_n)}$$

טענה 7.12. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת לגבול $l\in\mathbb{R}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, מתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)=l+\limsup_{n\to\infty}b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)=l+\liminf_{n\to\infty}b_n$$

[7] טענה זו נלמדה באינפי' 2 (יורם לסט, סמסטר א' תשפ"ג).

טענה 7.13. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת לגבול $0 \leq l \in \mathbb{R}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, מתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = l \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = l \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n$$

מסקנה 7.14. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת לגבול $0 > l \in \mathbb{R}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, מתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -l \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -l \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$$

8 תנאי קושי

טענה 8.1. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ותהא $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י $b_n = a_{n+1} - a_n$, הסדרה $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0.

♣ הדוגמה הבאה מפריכה את הכיוון ההפוך ולכן אנו נזקקים לתנאי קושי.

דוגמה 8.2. נתבונן בסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע"י $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (לכל $n \in \mathbb{N}$), אכן מתקיים ש-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ אך למרות זאת $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

משפט 8.3. תנאי קושי להתכנסות סדרות

תנאי הכרחי ומספיק לכך שסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תתכנס הוא שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

כלומר כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי וכל סדרת קושי היא סדרה מתכנסת.

♣ הרעיון שמאחורי תנאי קושי[8] תקף כמעט עבור כל סוגי הגבולות ואנחנו נפגש בגרסאות רבות שלו בקורס הבא[9].

[8] שאם כולם מתקרבים לגבול אז כולם מתקרבים לכולם ואם כולם מתקרבים לכולם אז כולם מתקרבים לגבול.

[9] ראו כאן הוכחה כללית לשקילות בין כל סוגי הגבולות לכל תנאי קושי המתאימים.