דיפרנציאביליות - הגדרות בלבד

אנליזה אלמנטרית רב-ממדית - 80116

מרצה: נועה ניצן

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

גם בפרק זה אנחנו נעסוק רק בפונקציות מהצורה $f:D\to\mathbb{R}$ כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ולכן לא אטרח לציין זאת בכל פעם.

אינטואיציה: ראינו באינפי' 1 שקיום הגבול: $\lim_{h\to0}\frac{f\left(x_{0}+h\right)-f\left(x_{0}\right)}{h}$ שקול לגזירות של f ב-x_{0} ושאם הגבול אכן קיים אז הוא שווה ל-$f'\left(x_{0}\right)$.

הגדרה 1.1. נגזרת כיוונית

תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה של נקודה $P\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $\vec{0}\neq\vec{u}\in\mathbb{R}^{n}$ וקטור.

נאמר ש-f גזירה בנקודה P בכיוון $\vec{u}$ אם קיים הגבול:

$$\lim_{t\to0}\frac{f\left(P+t\cdot\vec{u}\right)-f\left(P\right)}{\left\Vert \vec{u}\right\Vert \cdot t}$$

ואם אכן קיים הגבול אז נאמר שהוא הנגזרת של f ב-P בכיוון $\vec{u}$ ונסמן אותו ב-$D_{\vec{u}}f\left(P\right)$ או ע"י $\frac{\partial f}{\partial\vec{u}}\left(P\right)$, אם $\vec{u}$ הוא אחד מווקטורי הבסיס הסטנדרטי נסמן את הנגזרת הכיוונית גם ב-$D_{i}f\left(P\right)$[1] עבור e_{i} (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$) ונקרא לה הנגזרת החלקית של f בכיוון המשתנה ה-i.[2]

- ♣ קל יותר לעבוד עם ההגדרה הזו כש-$\vec{u}$ הוא וקטור יחידה ואכן יש המגדירים נגזרת כיוונית רק עבור וקטור יחידה, בקורס שלנו קיבלנו את שתי ההגדרות ולכן נתתי את הכללית מביניהן.

- ♣ נגדיר $h\left(t\right)=f\left(P+t\cdot\vec{u}\right)-f\left(P\right)$ ונניח ש-$\vec{u}$ הוא וקטור יחידה[3], מכלל לופיטל נובע שאם לנגזרת של h יש גבול ב-0 אז הנגזרת $D_{\vec{u}}f\left(P\right)$ קיימת ושווה לגבול זה (שבד"כ הוא גם הנגזרת של h ב-0 כי h' רציפה ב-0).
נשים לב: בניגוד לרעיון המגוחך להפעיל את כלל לופיטל על הגדרת הנגזרת[4] כאן פעמים רבות אנחנו כבר נכיר את הנגזרת של h כי כבר מצאנו אותה בעבודה קשה באינפי' 1 ולכן אנחנו יכולים להקל על עצמנו את החיים.

- ♣ אפשרות נוספת שראינו בהרצאה היא להגדיר $h\left(t\right)=f\left(P+t\cdot\vec{u}\right)$ ואז אם $\vec{u}$ הוא וקטור יחידה יתקיים (מדובר בשוויון פורמלי בלבד):

$$\lim_{t\to0}\frac{f\left(P+t\cdot\vec{u}\right)-f\left(P\right)}{\left\Vert \vec{u}\right\Vert \cdot t}=\lim_{t\to0}\frac{h\left(t\right)-h\left(0\right)}{t}=h'\left(0\right)$$

אני מודה שהאפשרות הזו קלה הרבה יותר ליישום, אבל משום מה כשלמדנו אותה מה שעבר לי בראש הוא דווקא האפשרות הראשונה עד שגלעד שילה העמיד אותי על טעותי...

אינטואיציה: למדנו באינפי' 1 גם את המשפט הבא: תהא f פונקציה רציפה בנקודה $x_{0}\in\mathbb{R}$, f גזירה ב-x_{0} אם"ם קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים (קיום הגבול וערכו):

$$\lim_{x\to x_{0}}\frac{f\left(x\right)-\left(ax+b\right)}{x-x_{0}}=0$$

ובמקרה כזה מתקיים $f'\left(x_{0}\right)=a$ ו-$b=f\left(x_{0}\right)-f'\left(x_{0}\right)\cdot x_{0}$. מהמשפט הזה נובע שפונקציה g גזירה בנקודה $x_{0}\in\mathbb{R}$ אם"ם קיים $m\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים (קיום הגבולות וערכם):

$$\lim_{h\to0}\frac{g\left(x_{0}+h\right)-g\left(x_{0}\right)-m\cdot h}{h}=\lim_{x\to x_{0}}\frac{g\left(x\right)-\left(g\left(x_{0}\right)+m\cdot\left(x-x_{0}\right)\right)}{x-x_{0}}=0$$

---

[1] סימון נוסף שראינו היה f'_{x} עבור $D_{1}f$ ו-f'_{y} עבור $D_{2}f$.
[2] שימושי בשניים או שלושה ממדים שאז נקרא לנגזרת "הנגזרת החלקית בכיוון ציר ה-$x/y/z$".
[3] אם אינו כזה אפשר לנרמל אותו לפני כן או לחלק בנורמה שלו אח"כ במקום לחלק ב-1 כפי שדורש כלל לופיטל (שהרי הנגזרת של המכנה היא $\left\Vert \vec{u}\right\Vert$).
[4] הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ קיים אם הגבול של f' ב-a קיים, זהו רעיון מגוחך מפני שאנחנו לא יודעים ש-f' מוגדרת בכלל, את זה אנחנו מנסים להוכיח.

הגדרה 1.2. דיפרנציאביליות

תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה של נקודה $P \in \mathbb{R}^n$, נאמר ש-f דיפרנציאבילית ב-P אם קיימת העתקה ליניארית $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ המקיימת:

$$\lim_{\left\|\vec{h}\right\| \to 0} \frac{f\left(P + \vec{h}\right) - f(P) - L\left(\vec{h}\right)}{\left\|\vec{h}\right\|} = 0$$

♣ ממש כפי שהביטויים "$g(x) - (g(x_0) + m(x - x_0))$" ו-"$g(x_0 + h) - g(x_0) - m \cdot h$" ביטאו את המרחק של הפונקציה מהישר המשיק לה בנקודה x_0, הביטוי "$f\left(P + \vec{h}\right) - f(P) - L\left(\vec{h}\right)$" הוא המרחק בין הפונקציה לישריה המשיקה לה; כלומר כמו ש-$m \cdot h$ מגדיר ישר העובר בראשית הצירים שכאשר מוסיפים לו את $g(x_0)$ מקבלים ישר שאינו עובר בהכרח בראשית הצירים אך משיק לגרף של g ב-x_0, כך גם הגרף של L הוא תת-מרחב וקטורי (של $\mathbb{R}^{n+1}$!) שכאשר מוסיפים לו את $f(P)$ מקבלים ישריה המשיקה לגרף של f ב-P.

♣ ההגדרה הזו עובדת גם כאשר הטווח של f הוא $\mathbb{R}^m$ עבור $m > 1$ (אלא שאז גם הטווח של L צריך להיות $\mathbb{R}^m$); ואז הגדרת הדיפרנציאביליות של פונקציות מהצורה $f : D \to \mathbb{R}^m$ (כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^n$) כוללת בתוכה גם את ההגדרה האחרונה וגם את הגדרת הגזירות של מסילות, ומוסיפה על אלו את כל הפונקציות שעבורן $n, m > 1$.

למה 1.3. תהא f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $P \in \mathbb{R}^n$, קיימת העתקה ליניארית $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ יחידה המקיימת את הגדרת הדיפרנציאביליות.

הגדרה 1.4. תהא f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $P \in \mathbb{R}^n$ ותהא L ההעתקה הליניארית המתאימה, נסמן את L ע"י $D_f(P)$[5] או ב-$Df(P)$ ונקרא לה הדיפרנציאל השלם של f ב-P_0.

הגדרה 1.5. תהא f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $P := (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, הישריה המוגדרת ע"י $M := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(P))\} + \text{Graph}(D_f(P))$ תקרא הישריה המשיקה לגרף של f ב-P.

♣ M היא הישריה שדיברנו עליה בהערה הקודמת.

משפט 1.6. תהא f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $P \in \mathbb{R}^n$, $D_f(P)$ היא ההעתקה הליניארית המוגדרת ע"י (לכל $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$):

$$D_f(P)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \sum_{i=1}^{n} D_i f(P_0) \cdot x_i = \begin{bmatrix} D_1 f(P) \\ D_2 f(P) \\ \vdots \\ D_n f(P) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

♣ האמת שזה קצת מצחיק לייצג העתקה ליניארית ע"י מכפלה סקלרית בווקטור אחרי שכבר הגדרנו מהי מטריצה מייצגת של העתקה ליניארית ע"פ בסיס נתון, אבל אין הבדל בין כפל מטריצת שורה (או וקטור שורה) בווקטור עמודה לבין מכפלה סקלרית.

[5] יש המסמנים להיפך $D_P(f)$.

הגדרה 1.7. תהא f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $P\in\mathbb{R}^{n}$, הגרדיאנט של f ב-P_{0} הוא הווקטור:

$$\overrightarrow{\nabla}f\left(P\right):=\overrightarrow{\text{grad}}f\left(P\right):=\begin{bmatrix}D_{1}f\left(P\right)\\ D_{2}f\left(P\right)\\ \vdots\\ D_{n}f\left(P\right)\end{bmatrix}$$

א"כ לכל $\vec{v}\in\mathbb{R}^{n}$ מתקיים $\left(D_{f}\left(P\right)\right)\left(\vec{v}\right)=\overrightarrow{\nabla}f\left(P\right)\cdot\vec{v}$.

♣ הגרדיאנט מוגדר רק עבור פונקציות מהצורה $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ מפני שעבור פונקציות מהצורה $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{m}$ כאשר $m>1$ המטריצה המייצגת של הדיפרנציאל השלם חייבת להיות בעלת יותר משורה אחת ולכן אי אפשר להחליף את הכפל בה במכפלה סקלרית של וקטורים.

משפט. תהא f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $P\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $\vec{u}$ וקטור יחידה, מתקיים $\left(D_{f}\left(P\right)\right)\left(\vec{u}\right)=D_{\vec{u}}f\left(P\right)$, כלומר הדיפרנציאל השלם של $\vec{u}$ הוא הנגזרת הכיוונית בכיוון $\vec{u}$.

מסקנה. לכל וקטור יחידה $\vec{u}\in\mathbb{R}^{n}$ מתקיים (תהא $\theta\in\mathbb{R}$ זווית שבין $\vec{u}$ ל-$\overrightarrow{\nabla}f\left(P\right)$):

$$\begin{aligned}D_{\vec{u}}f\left(P\right)&=\overrightarrow{\nabla}f\left(P\right)\cdot\vec{u}=\left\Vert \overrightarrow{\nabla}f\left(P\right)\right\Vert \cdot\left\Vert \vec{u}\right\Vert \cdot\cos\theta\\ &=\left\Vert \overrightarrow{\nabla}f\left(P\right)\right\Vert \cdot1\cdot\cos\theta=\left\Vert \overrightarrow{\nabla}f\left(P\right)\right\Vert \cdot\cos\alpha\end{aligned}$$

♣ נניח בהג"כ ש-$\theta\in\left[0,\pi\right]$, המסקנה הזו מספרת לנו שהכיוון שבו העליה מהנקודה היא התלולה ביותר הוא הכיוון עליו מצביע הגרדיאנט (כאשר $\theta=0$), הכיוון שבו הירידה היא המהירה ביותר הוא בכיוון הנגדי (כאשר $\theta=\pi$) והכיוונים הניצבים להם (כאשר $\theta=\frac{\pi}{2}$) הם אלו שבהם לא נעלה ולא נרד. ובכלל: בכיוונים שעבורם $\theta<\frac{\pi}{2}$ הנגזרת הכיוונית תהיה חיובית (עליה) כאשר השיא הוא עבור $\theta=0$, ובכיוונים שעבורם $\theta>\frac{\pi}{2}$ הנגזרת הכיוונית תהיה שלילית (ירידה) כאשר השיא הוא עבור $\theta=\pi$.

2 דיפרנציאביליות ונקודות קיצון

גם בפרק זה אנחנו נעסוק רק בפונקציות מהצורה $f:D\to\mathbb{R}$ כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ולכן לא אטרח לציין זאת בכל פעם.

♣ ההגדרה של נקודות קיצון (כלליות ומקומיות) מופיעה בקובץ על סדרות ופונקציות.

הגדרה 2.1. נקודות קריטיות וסינגולריות

תהא f פונקציה, נקודה פנימית $P\in\mathbb{R}^{n}$ בתחום ההגדרה תיקרא נקודה קריטית אם כל הנגזרות החלקיות מתאפסות בה, ותיקרא נקודה סינגולרית אם אחת הנגזרות החלקיות אינה מוגדרת בה.

♣ הרעיון הוא כמו באינפי' 1: נקודות קריטיות ונקודות סינגולריות הן היחידות שעלולות להיות נקודות קיצון.

הגדרה 2.2. נקודת אוכף

תהא f פונקציה, נקודה $P\in\mathbb{R}^{n}$ בתחום ההגדרה תקרא נקודת אוכף אם כל הנגזרות החלקיות מתאפסות בה אך היא אינה נקודת קיצון.

♣ נקודת אוכף היא המקבילה של נקודת פיתול שבה הנגזרת מתאפסת, השם נובע מצורת ה"אוכף" שנוצרת במקרה כזה (להמחשה לחצו כאן).

הגדרה 2.3. נגזרות חלקיות מעורבות
תהא f פונקציה, לכל $n \geq i,j \in \mathbb{N}$ ולכל $P \in \mathbb{R}^n$ נקודה בתחום ההגדרה נסמן $D_{ij}f(P) := D_{i,j}f(P) := D_i(D_jf)(P)$.

- ♣ מדובר בסימון בלבד, אף אחד לא מבטיח לנו שהביטוי מוגדר בכלל.
- ♣ הנגזרות הנ"ל הן נגזרות חלקיות מעורבות מסדר שני, אפשר להמשיך ולגזור גם אותן ולקבל נגזרות מעורבות מסדר שלישי: $D_{ijk}f(P) := D_i(D_{jk}f(P)) = D_i(D_j(D_kf)(P))$, וכן עבור נגזרות מעורבות מסדר רביעי וכו'.

2.1 מיון נקודות קריטיות

אינטואיציה: באינפי' 1 ראינו שהציפייה מפולינום שצריך לקרב את פונקציה גזירה בנקודה היא ש"יסכים" עם הפונקציה על כל הנגזרות באותה נקודה עד לסדר מסוים, האם ניתן לבצע זאת גם עבור פונקציות מ-$\mathbb{R}^2$ ל-$\mathbb{R}$? נזכור שאת הפולינום מסדר ראשון כבר ראינו, זהו הדיפרנציאל השלם של הפונקציה בנקודה, אבל כיצד נראה פולינום טיילור מסדר שני?

הגדרה 2.4. תהא $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $f : U \to \mathbb{R}$ פונקציה המקיימת שכל הנגזרות החלקיות שלה מסדר שני בנקודה $P_0 := (x_0, y_0) \in U$ רציפות ב-P_0[6], נסמן:

$$A := D_{11}f(P_0), \ B := D_{12}f(P_0) = D_{21}f(P_0), \ C := D_{22}f(P_0)$$

ואז פולינום טיילור מסדר שני של f ב-P_0 הוא הפונקציה $T_{2,f,P_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2$):

$$\begin{aligned} T_{2,f,P_0}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f(P_0) + D_1f(P_0)\cdot(x-x_0) + D_2f(P_0)\cdot(y-y_0) + \frac{A}{2}(x-x_0)^2 + B(x-x_0)(y-y_0) + \frac{C}{2}(y-y_0)^2 \\ &= f(P_0) + D_1f(P_0)\cdot(x-x_0) + D_2f(P_0)\cdot(y-y_0) + \frac{1}{2}\cdot\left(A(x-x_0)^2 + 2B(x-x_0)(y-y_0) + C(y-y_0)^2\right) \end{aligned}$$

- ♣ הייתי רוצה להביא כאן את ההגדרה הכללית של פולינום טיילור מסדר n אבל התאפקתי מלעשות זאת (ראוי להערכה, לא?) מפני שהנושא שלנו הוא מיון נקודות קריטיות באמצעות הנגזרות החלקיות מסדר שני ולא פולינום טיילור.
- ♣ נשים לב שמהגדרה "פולינום" זה אכן מקיים את מה שציפינו לו, הוא "מסכים" עם f על כל הנגזרות החלקיות מסדר ראשון ומסדר שני בנקודה P_0.
- ♣ אם P_0 היא נקודה קריטית אז מתקיים:

$$T_{2,f,P_0}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(P_0) + \frac{1}{2}\cdot\left(A(x-x_0)^2 + 2B(x-x_0)(y-y_0) + C(y-y_0)^2\right)$$

ואז השאלה אם P_0 היא נקודת מקסימום/מינימום של $T_{2,f,P_0}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ תלויה בשאלה אם קיימת סביבה שבה המחובר השני חיובי/שלילי (אם אין סביבה כזו זוהי נקודת אוכף) ומכיוון שבסביבה מספיק קטנה f מתנהגת בצורה דומה ל-T_{2,f,P_0}[7] נדע ש-P_0 היא נקודת מקסימום/מינימום/אוכף של f אם"ם היא נקודת מקסימום/מינימום/אוכף של T_{2,f,P_0}.

משפט. תהא $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $f : U \to \mathbb{R}$ פונקציה המקיימת שכל הנגזרות החלקיות שלה מסדר שני בנקודה $P_0 \in U$ רציפות ב-P_0, מתקיים:

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - T_{2,f,P_0}(P)}{\|P - P_0\|^2} = 0$$

[6] שאז f דיפרנציאבילית ב-P_0 ומתקיים $D_{12}f(P_0) = D_{21}f(P_0)$.
[7] את זה מראה המשפט הבא, ראו את ההסבר בקובץ הטענות.

הגדרה 2.5. מטריצת הסיאן

תהא f פונקציה כך שכל הנגזרות החלקיות מסדר שני של f בנקודה $P_0 \in \mathbb{R}^n$ מוגדרות, מטריצת הסיאן של f ב-P_0 היא מטריצה $H \in M_n(\mathbb{R})$ המוגדרת ע"י $H_{ij} = D_{ij} f(P_0)$ לכל $n \geq i, j \in \mathbb{N}$.

♣ אם $n = 2$ אז:

$$H = \begin{bmatrix} D_{11} f(P_0) & D_{12} f(P_0) \\ D_{21} f(P_0) & D_{22} f(P_0) \end{bmatrix}$$

♣ נשים לב שאם הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של f ב-P_0 דיפרנציאביליות אז השורה ה-i ב-H היא השחלוף של הגרדיאנט של $D_i f$ ב-P_0, ואם הנגזרות החלקיות מסדר שני של f ב-P_0 רציפות אז מהלמה של שוורץ נובע ש-H סימטרית ולכן לכסינה ומכאן שיש לה ערכים עצמיים.

3 כלל השרשרת

אין הגדרות בפרק זה.