המספרים הממשיים - טענות בלבד

חשבון אינפיניטסימלי (1) - 80131

מרצה: רז קופרמן

מתרגלים: אור יער ודניאל רוזנבלט

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 שדה סדור

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

טענה 1.1. קבוצת המספרים החיוביים סגורה לחיבור ולכפל, כלומר לכל $a,b \in \mathbb{F}$ $0 <$ מתקיים $0 < a+b$ וגם $0 < a \cdot b$.

טענה 1.2. יהי $a \in \mathbb{F}$, מתקיים $a > 0$ אם"ם $-a < 0$, כלומר מספר הוא חיובי אם"ם הנגדי שלו שלילי.

מסקנה 1.3. קבוצת המספרים החיוביים אינה ריקה.

טענה 1.4. האיבר האדיש לכפל הוא מספר חיובי, כלומר $0 < 1$.

טענה 1.5. יהיו $a,b \in \mathbb{F}$ כך ש-$a < b$, מתקיים $-b < -a$.

טענה 1.6. יהיו $a,b,c \in \mathbb{F}$ כך ש-$a < b$ ו-$c < 0$, מתקיים $b \cdot c < a \cdot c$

טענה 1.7. יהי $0 \neq a \in \mathbb{F}$, מתקיים $a > 0$ אם"ם $0 < a^{-1}$.

טענה 1.8. יהיו $a,b \in \mathbb{F} > 0$, מתקיים $0 < a \cdot b$.

מסקנה 1.9. יהי $0 \neq a \in \mathbb{F}$, מתקיים $a \cdot a > 0$.

טענה 1.10. יהיו $a,b,c,d \in \mathbb{F}$, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. אם $a < b$ ו-$c < d$ אז $a + c < b + d$
2. טרנזיטיביות א"ש חלש: אם $a \leq b$ ו-$b \leq c$ אז $a \leq c$
3. הלימת א"ש חלש לחיבור: אם $a \leq b$ אז $a + c \leq b + c$
4. אם $a \leq b$ ו-$c \leq d$ אז $a + c \leq b + d$
5. $a \cdot b > 0$ אם"ם $a,b < 0$ או ש-$a,b > 0$
6. אם $0 < a < b$ אז $0 < b^{-1} < a^{-1}$
7. אם $0 < a < b$ ו-$0 < c < d$ אז $0 < a \cdot c < b \cdot d$
8. לא קיים שדה סדור בעל איבר מקסימלי ו/או מינימלי, כלומר לא קיים $M \in \mathbb{F}$ כך שלכל $x \in \mathbb{F}$ מתקיים $x \leq M$ ולא קיים $m \in \mathbb{F}$ כך שלכל $x \in \mathbb{F}$ מתקיים $m \leq x$.

2 הערך המוחלט

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

למה 2.1. לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $|a| = |-a|$.

למה 2.2. לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $|a| \geq 0$, יתרה מזאת, $|a| = 0$ אם"ם $a = 0$.

למה 2.3. לכל $p \in \mathbb{F}$ ו-$0 \leq q \in \mathbb{F}$ מתקיים $|p| \leq q$ אם"ם $-q \leq p \leq q$.

מסקנה 2.4. לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $-|a| \leq a \leq |a|$.

משפט 2.5. אי-שוויון המשולש
לכל $a, b \in \mathbb{F}$ מתקיים $|a + b| \leq |a| + |b|$.
ובגרסה אחרת (נציב $-b$ במקום b): $|a - b| \leq |a| + |b|$.

♣ מה הקשר למשולש?
נשאל שאלה אחרת, גאומטרית: בהינתן שלושה קטעים כיצד נדע אם ניתן לבנות מהם משולש? (לדוגמה: מהקטעים באורך $5, 1, 1$ אי אפשר לבנות משולש).
התשובה היא שניתן לבנות מהקטעים משולש אם"ם סכום אורכיהם של כל שניים מהקטעים גדול מאורך השלישי...

♣ א"ש המשולש הוא אחת משלוש התכונות שנדרשות מכל פונקציית מרחק[1].

משפט 2.6. אי-שוויון המשולש ההפוך[2]
לכל $a, b \in \mathbb{F}$ מתקיים $||a| - |b|| \leq |a + b|$.

טענה 2.7. לכל $a, b, c, x, y \in \mathbb{F}$ מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $a + b \geq a - |b|$
2. $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
3. $||a| - |b|| \leq |a - b|$
4. $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$
5. $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$

[1] שתי האחרות הן סימטריה וחיוביות בהחלט.
[2] זהו שם אומלל מעט משום שאין זה המשפט ההפוך למשפט א"ש המשולש במובן המתמטי השכיח: המשפט ההפוך למשפט פיתגורס אומר שכל משולש המקיים את המשוואה $a^2 + b^2 = c^2$ (כאשר a, b, c הם אורכי הצלעות שלו) הוא משולש ישר זווית, כלומר המשפט ההפוך הוא זה האומר שהגרירה ההפוכה נכונה (לא תמיד זה קורה).

3 קבוצות מיוחדות בשדה סדור

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

3.1 המספרים הטבעיים

טענה 3.1. $\mathbb{F}$ מכיל קבוצות אינדוקטיביות (לדוגמה $\{x\in\mathbb{R}:1\leq x\}$).

טענה 3.2. יהא A אוסף של קבוצות אינדוקטיביות המוכלות ב-$\mathbb{F}$, החיתוך של כל איברי A (שהם קבוצות אינדוקטיביות) הוא קבוצה אינדוקטיבית.

מסקנה 3.3. $\mathbb{N}$ היא קבוצה אינדוקטיבית.

טענה 3.4. לכל קבוצה אינדוקטיבית $I\subseteq\mathbb{F}$ מתקיים $\mathbb{N}\subseteq I$.

מסקנה 3.5. תהא I קבוצה אינדוקטיבית, אם $I\subseteq\mathbb{N}$ אז $I=\mathbb{N}$.

משפט 3.6. הוכחה באינדוקציה

לכל $n\in\mathbb{N}$ יהי $P(n)$ פסוק לוגי, אם $P(1)=\text{True}$ וגם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $P(n)\rightarrow P(n+1)$ אז $P(n)=\text{True}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

♣ זהו הסוג הקלאסי של הוכחה באינדוקציה אך ישנם סוגים נוספים, ראו בערך "אינדוקציה מתמטית" בוויקיפדיה.

טענה 3.7. המספר 1 הוא האיבר הקטן ביותר ב-$\mathbb{N}$, במילים אחרות: לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $n\geq 1$ (וגם כמובן ש-$1\in\mathbb{N}$).

טענה 3.8. קבוצת המספרים הטבעיים סגורה לחיבור, במילים אחרות: לכל $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $n+m\in\mathbb{N}$.

טענה 3.9. קבוצת המספרים הטבעיים סגורה לכפל, לכל $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $n\cdot m\in\mathbb{N}$.

טענה 3.10. לכל $1\neq n\in\mathbb{N}$ מתקיים $n-1\in\mathbb{N}$, לכל מספר טבעי שאינו 1 יש מספר טבעי קודם.

טענה 3.11. לכל $n,m\in\mathbb{N}$ המקיימים $n>m$ מתקיים $n-m\in\mathbb{N}$.

טענה 3.12. יהי $m\in\mathbb{N}$, לא קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $m<n<m+1$.

משפט 3.13. עיקרון הסדר הטוב[3]

לכל תת-קבוצה של $\mathbb{N}$ שאינה ריקה יש איבר מינימלי[4], כלומר לכל $\emptyset\neq A\subseteq\mathbb{N}$ קיים $m\in A$ כך ש-$m\leq a$ לכל $a\in A$.

3.2 המספרים השלמים והמספרים הרציונליים

טענה 3.14. קבוצת המספרים השלמים ($\mathbb{Z}$) סגורה לחיבור, לחיסור ולכפל[5].

♣ שימו לב: $\mathbb{Z}$ אינה סגורה לחילוק, וזאת למרות שהחילוק הוגדר ע"י הכפל.

טענה 3.15. המספר 2^{-1} אינו שלם.

טענה 3.16. לכל $n\in\mathbb{Z}$ מתקיים:

$$n\in\text{Odd}\longleftrightarrow n\pm1\in\text{Even}\qquad n\in\text{Even}\longleftrightarrow n\pm1\in\text{Odd}$$
$$n\in\text{Odd}\longleftrightarrow n\pm2\in\text{Odd}\qquad n\in\text{Even}\longleftrightarrow n\pm2\in\text{Even}$$

מסקנה 3.17. מתקיים $\text{Odd}=\{n\in\mathbb{Z}|\exists k\in\mathbb{Z}:2k-1=n\}=\{2k-1\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

טענה 3.18. $\mathbb{Q}$ הוא תת-שדה[6] של $\mathbb{F}$, כלומר הוא שדה ביחס לאותן פעולות חיבור וכפל של $\mathbb{F}$[7] והוא תת-קבוצה של $\mathbb{F}$.

[3] סדר טוב על קבוצה הוא יחס סדר מלא המקיים שלכל תת-קבוצה לא ריקה יש מינימום (ויקיפדיה).
[4] לאחר שנגדיר מינימום נוכל לומר שהוא המינימום של הקבוצה.
[5] ומכיוון ש-$0,1\in\mathbb{Z}$ נובע מזה ש-$\mathbb{Z}$ הוא חוג חילופי - כלומר הוא מקיים את כל אקסיומות השדה מלבד קיום הופכי לכל איבר שונה מ-0 (בחוג סתם הכפל אינו מוכרח לקיים את חוק החילוף, לכן אמרנו ש-$\mathbb{Z}$ הוא חוג **חילופי**)
[6] $\mathbb{Q}$ הוא גם שדה סדור.
[7] כולל האיברים האדישים.

4 חסמים וארכימדיות

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

טענה 4.1. קבוצה $A\subseteq\mathbb{F}$ היא חסומה אם"ם קיים $M\in\mathbb{F}$ כך ש-$|a|<M$ לכל $a\in A$.

טענה 4.2. קבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלעיל ע"י מספר טבעי, לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש-$n<m$.

מסקנה 4.3. קבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלעיל ע"י מספר רציונלי.

♣ מכאן ש-$\mathbb{Q}$ הוא שדה ארכימדי.

נניח ש-$\mathbb{F}$ ארכימדי.

משפט 4.4. לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{F}$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$\frac{1}{n}<\varepsilon$.

מסקנה 4.5. לכל $0<x,y\in\mathbb{F}$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$n\cdot x>y$.

5 השדה הסדור השלם (המספרים הממשיים)

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

למה 5.1. נסמן $4:=2+2$, מתקיים:

- לכל $m,n\in\text{Even}$ קיים $k\in\mathbb{Z}$ כך ש-$m\cdot n=4k$.
- אם $m,n\in\text{Odd}$ אז $m\cdot n\in\text{Odd}$.

טענה 5.2. לא קיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש-$q^2=2$.[8]

♣ זהו המובן שבו שדה הרציונליים "מלא חורים", אם ניקח את ההמחשה שהבאנו בקובץ ההגדרות, ניתן לחלק את הקרש שאנו רוצים להפוך ליתר של המשולש לשני חלקים: החלק שאנו רוצים להפוך ליתר והאחר שאנו רוצים להיפטר ממנו, אם נשאר עם מספרים רציונליים בלבד לא נוכל להצביע על הנקודה שבין שני החלקים כדי שנוכל להעביר בה את המסור.

טענה 5.3. כל קטע (מכל סוג) מכיל קטע מכל סוג.

טענה 5.4. כל קרן (מכל סוג) מכילה קטע מכל סוג.

טענה 5.5. יהי $a\in\mathbb{R}$, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. החיתוך של כל שתי סביבות של a הוא סביבה של a.
2. החיתוך של שתי סביבות מנוקבות של a הוא סביבה מנוקבת של a.
3. כל סביבה של a מכילה סביבה **סימטרית** של a, כלומר לכל סביבה U של a קיים $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_r(a)\subseteq U$.
4. כל סביבה מנוקבת של a מכילה סביבה **סימטרית** מנוקבת של a, כלומר לכל סביבה מנוקבת U של a קיים $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_r^{\circ}(a)\subseteq U$.

[8] לכל $x\in\mathbb{R}$ נסמן $x^2:=x\cdot x$.

6 חסם עליון וחסם תחתון

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

משפט 6.1. יחידות החסם העליון ויחידות החסם התחתון

- תהא $A \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה שיש לה חסם עליון ויהי $M \in \mathbb{F}$ חסם עליון של A, אם $M' \in \mathbb{F}$ הוא חסם עליון של A אז $M = M'$.
- תהא $B \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה שיש לה חסם תחתון ויהי $m \in \mathbb{F}$ חסם תחתון של B, אם $m' \in \mathbb{F}$ הוא חסם תחתון של B אז $m = m'$.

משפט 6.2. אפיון נוסף לחסם עליון ולחסם תחתון

- תהא $A \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה, מספר $M \in \mathbb{F}$ הוא החסם העליון של A אם"ם מתקיימים שני התנאים הבאים:
  1. M הוא חסם מלעיל של A
  2. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{F}$ קיים $a \in A$ כך ש-$M - \varepsilon < a$
- תהא $B \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה, מספר $m \in \mathbb{F}$ הוא החסם התחתון של B אם"ם מתקיימים שני התנאים הבאים:
  1. m הוא חסם מלרע של B
  2. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{F}$ קיים $b \in B$ כך ש-$m + \varepsilon > b$

משפט 6.3.

- תהא $A \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה שיש לה מקסימום, ל-A יש חסם עליון (יחיד) ואותו מקסימום שווה לו (כלומר גם הוא יחיד).
- תהא $B \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה שיש לה מקסימום, ל-A יש חסם תחתון (יחיד) ואותו מינימום שווה לו (כלומר גם הוא יחיד).

טענה 6.4. לכל קבוצה סופית (שאינה ריקה) המוכלת בשדה סדור יש מקסימום ומינימום.

משפט 6.5.

- בשדה הסדור השלם ($\mathbb{R}$), לכל קבוצה החסומה מלעיל יש חסם עליון.
- בשדה הסדור השלם ($\mathbb{R}$), לכל קבוצה החסומה מלרע יש חסם תחתון.

♣ יש הלוקחים את החלק הראשון של משפט זה כאקסיומת השלמות (אלו טענות שקולות), כמובן שניתן היה גם לקחת את החלק השני.

משפט 6.6. ארכימדיות של $\mathbb{R}$
בשדה הסדור השלם ($\mathbb{R}$), $\mathbb{N}$ אינה חסומה מלעיל; כלומר $\mathbb{R}$ הוא שדה ארכימדי.

מסקנה 6.7. בשדה הסדור השלם ($\mathbb{R}$), $\mathbb{Z}$ אינה חסומה מלרע.

משפט 6.8. הרציונליים צפופים בממשיים
לכל $x, y \in \mathbb{R}$ המקיימים $x < y$ קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש-$x < q < y$.

למה 6.9. תהיינה $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ כך ש-$a \leq b$ לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$, מתקיים $\sup A \leq \inf B$.

משפט 6.10. למת החתכים
תהיינה $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ כך ש-$a \leq b$ לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$, הפסוקים הבאים שקולים:

1. קיים $M \in \mathbb{R}$ יחיד כך ש-$a \leq M \leq b$ לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$.
2. $\sup A = \inf B$.
3. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיימים $a \in A$ ו-$b \in B$ כך ש-$b - a < \varepsilon$.
4. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש-$0 \leq \inf B - a < \varepsilon$.
5. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $b \in B$ כך ש-$0 \leq b - \sup A < \varepsilon$.

טענה 6.11. תהיינה $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$, מתקיים:

- אם A ו-B חסומות מלעיל אז $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$, ואם A ו-B חסומות מלרע אז $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.
- יהי $0 \leq \beta \in \mathbb{R}$; אם A חסומה מלעיל אז $\sup(\beta \cdot A) = \beta \cdot \sup(A)$, ואם A חסומה מלרע אז $\inf(\beta \cdot A) = \beta \cdot \inf(A)$.
- אם $A, B \subseteq [0, \infty)$ אז $\inf(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B)$, ואם (בנוסף) A ו-B חסומות מלעיל אז $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$.
- אם $A, B \subseteq (-\infty, 0]$ אז $\inf(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$, ואם (בנוסף) A ו-B חסומות מלרע אז $\sup(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B)$.

7 חזקות

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

טענה 7.1. יהיו $0 < a, b \in \mathbb{F}$ ו-$n \in \mathbb{N}$, $a < b$ אם"ם $a^n < b^n$.

♣ הטענה נכונה גם עבור א"ש חלש.

משפט 7.2. חוקי חזקות כשהמעריך טבעי

יהיו $0 \neq x, y \in \mathbb{F}$ ו-$n, m \in \mathbb{N}$, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.
2. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$.
3. $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.
4. אם $0 < x < y$ אז $x^n < y^n$.[9]
5. אם $1 < x$ ו-$n < m$ אז $x^n < x^m$.
6. אם $0 < x < 1$ ו-$n < m$ אז $x^n > x^m$.

♣ שלושת חוקי החזקות הראשונים נכונים עבור כל פעולת כפל (על קבוצה כלשהי) המקיימת חילוף וקיבוץ.

♣ אם $x < 0$ אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$x^n = \begin{cases} (-x)^n & n \in \text{Even} \\ -(-x)^n & n \in \text{Odd} \end{cases}$$

ואם $x = 0$ אז $x^n = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

משפט 7.3. חוקי חזקות כשהמעריך שלם

יהיו $0 \neq x, y \in \mathbb{F}$ ו-$n, m \in \mathbb{Z}$, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.
2. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$.
3. $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.
4. אם $0 < x < y$ ו-$0 < n$ אז $x^n < y^n$.
5. אם $0 < x < y$ ו-$0 > n$ אז $x^n > y^n$.
6. אם $1 < x$ ו-$n < m$ אז $x^n < x^m$.
7. אם $0 < x < 1$ ו-$n < m$ אז $x^n > x^m$.

♣ שלושת חוקי החזקות הראשונים נכונים עבור כל פעולת כפל (על קבוצה כלשהי) המקיימת חילוף וקיבוץ ובתנאי שלאיברים המדוברים יש איבר הופכי ביחס לפעולת הכפל.

♣ אם $x < 0$ אז לכל $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ מתקיים:

$$x^n = \begin{cases} (-x)^n & |n| \in \text{Even} \\ -(-x)^n & |n| \in \text{Odd} \end{cases}$$

♣ ראינו בקובץ ההגדרות שניתן להגדיר $0^0 := 0$ או $0^0 := 1$ כרצוננו מבלי לקבל סתירה.

[9] סעיף זה נובע ישירות מטענה 7.1.

משפט 7.4. אי-שוויון ברנולי[10]
לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $-1 < x \in \mathbb{F}$ מתקיים $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

משפט 7.5. קיום ויחידות השורש
לכל $0 < x \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $0 < y \in \mathbb{R}$ יחיד כך ש-$y^n = x$.

משפט 7.6. האי-רציונליים צפופים בממשיים
לכל $x, y \in \mathbb{R}$ כך ש-$x < y$ קיים $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ כך ש-$x < \gamma < y$.

למה 7.7. יהי $0 < x \in \mathbb{N}$, לכל $n, k \in \mathbb{N}$ ו-$m, j \in \mathbb{Z}$ המקיימים $\frac{m}{n} = \frac{k}{j}$ מתקיים $(x^m)^{\frac{1}{n}} = \left(x^j\right)^{\frac{1}{k}}$.

משפט 7.8. חוקי חזקות כשהמעריך רציונלי
יהיו $0 < x, y \in \mathbb{F}$ ו-$q, r \in \mathbb{Q}$, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $x^q \cdot x^r = x^{q+r}$.
2. $(x^q)^r = x^{q \cdot r}$.
3. $(x \cdot y)^q = x^q \cdot y^q$.
4. אם $0 < x < y$ ו-$0 < q$ אז $x^q < y^q$, כמו כן אם $0 < x < y$ ו-$0 > q$ אז $x^q > y^q$.
5. אם $1 < x$ ו-$q < r$ אז $x^q < x^r$.
6. אם $0 < x < 1$ ו-$q < r$ אז $x^q > x^r$.

♣ חוקי חזקות אלו נכונים גם כשהמעריך ממשי.

משפט 7.9. לכל $a, b \in \mathbb{F}$ ולכל $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} \cdot b^k$$

♣ משפט זה הוא הכללה של נוסחת הכפל המקוצר $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

[10] ערך בוויקיפדיה: יאקוב ברנולי.