# תורת השדות - הגדרות בלבד

מבנים אלגבריים (2) - 80446

מרצה: שי אברה

מתרגל: אור רז

סוכם ע״י שריה אנסבכר

סמסטר ב׳ תשפ״ד, האוניברסיטה העברית

# תוכן העניינים



בהכנת סיכום זה נעזרתי רבות בספר "מבנים אלגבריים" מאת: דורון פודר, אלכס לובוצקי ואהוד דה-שליט.

* * *

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על גבי המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

# 1 התחלה

♣ ראו גם את הקובץ "על שדות".

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

**הגדרה 1.1.** <u>המציין</u> של $\mathbb{F}$ (נקרא גם <u>המאפיין</u> של $\mathbb{F}$) הוא הסדר של $1$ בחבורה החיבורית של $\mathbb{F}$ כאשר סדר זה סופי, ואם אינו סופי יהיה <u>המציין</u> $0$; בכל מקרה נסמן את המציין ב-$\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)$.

**למה להגדיר את המציין להיות $0$ ולא $\infty$? כך לא יהיה צורך לחלק למקרים וזה טבעי הרבה יותר.**

**טענה.** $\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)$ הוא מספר ראשוני או ש-$\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)=0$.

**מסקנה.** $\mathbb{F}_p$ ניתן לשיכון בכל שדה ממציין $p$ ראשוני, ו-$\mathbb{Q}$ ניתן לשיכון בכל שדה ממציין $0$.

**הגדרה 1.2.** <u>השדה הראשוני</u> של $\mathbb{F}$ הוא $\mathbb{F}_p$ אם $p:=\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)$ ראשוני, ואחרת יהיה $\mathbb{Q}$ <u>השדה הראשוני</u> של $\mathbb{F}$.

# 2 הרחבת שדות

**הגדרה 2.1.** יהיו $\mathbb{E}$ שדה ו-$\mathbb{F}\subseteq\mathbb{E}$ תת-שדה, במקרה כזה נאמר ש-$\mathbb{E}$ הוא <u>שדה הרחבה</u> של $\mathbb{F}$ או ש-$\mathbb{E}$ <u>מרחיב</u> את $\mathbb{F}$ ונסמן $\mathbb{E}/\mathbb{F}$[1].
שדה $\mathbb{K}$ ייקרא <u>שדה ביניים</u> של ההרחבה $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ אם $\mathbb{F}$ הוא תת-שדה של $\mathbb{K}$ ו-$\mathbb{K}$ הוא תת-שדה של $\mathbb{E}$.

♣ פעמים רבות נכתוב "תהא $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ הרחבת שדות" וכדומה, וכוונתנו תהיה "יהיו $\mathbb{F}$ ו-$\mathbb{E}$ שדות כך ש-$\mathbb{E}$ הוא שדה הרחבה של $\mathbb{F}$".

תהא $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ הרחבת שדות.

**סימון:** אם $\mathbb{E}$ נוצר סופית כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ אז נסמן ב-$\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{E}$ את הממד של $\mathbb{E}$ כמ"ו מעל $\mathbb{F}$.

**הגדרה 2.2.** אם $\mathbb{E}$ נוצר סופית כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, אז <u>דרגת ההרחבה</u> של $\mathbb{E}$ היא $[\mathbb{E}:\mathbb{F}]:=\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{E}$ ונאמר ש-$\mathbb{E}/\mathbb{F}$ היא <u>הרחבה סופית</u>, אחרת נכתוב $[\mathbb{E}:\mathbb{F}]=\infty$ ונאמר ש-$\mathbb{E}/\mathbb{F}$ היא הרחבה <u>אין-סופית</u>.

**טענה.** תהא $X$ קבוצת תתי-שדות של שדה $\mathbb{F}$, החיתוך של כל תתי-השדות ב-$X$ הוא תת-שדה של $\mathbb{F}$, וזהו השדה הגדול ביותר (ביחס להכלה) שמוכל בכל תתי-השדות ב-$X$.

**הגדרה 2.3.** תהא $S\subseteq\mathbb{E}$, נסמן ב-$\mathbb{F}\left(S\right)$ את החיתוך של כל תתי-השדות של $\mathbb{E}$ המכילים את $\mathbb{F}\cup S$, $\mathbb{F}\left(S\right)$ ייקרא <u>תת-השדה</u> של $\mathbb{E}$ <u>הנוצר</u> ע"י $S$.

**מסקנה 2.4.** תהא $S\subseteq\mathbb{E}$ תת-קבוצה, מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. $\mathbb{F}\left(S\right)$ הוא תת-שדה של $\mathbb{E}$.
2. $S\subseteq\mathbb{F}\left(S\right)$.
3. לכל תת-שדה $E\subseteq\mathbb{E}$ המכיל את $S$ מתקיים $\mathbb{F}\left(S\right)\subseteq E$.

**סימון:** עבור קבוצה סופית $\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}\subseteq\mathbb{E}$ נכתוב גם $\mathbb{F}\left(s_1,s_2,\ldots,s_n\right):=\mathbb{F}\left(\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}\right)$.

[1] אין שום קשר לחוג מנה, זהו סימון בלבד שאינו קשור בשום צורה שהיא.

**הגדרה 2.5.** יהי $\mathbb{K}\subseteq\mathbb{E}$ תת-שדה, נאמר שתת-קבוצה $S\subseteq\mathbb{K}$ היא קבוצת יוצרים של $\mathbb{K}$ מעל $\mathbb{F}$ אם $\mathbb{K}=\mathbb{F}\left(S\right)$.

**הגדרה 2.6.** $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ תיקרא הרחבה נוצרת סופית אם קיימת קבוצה סופית $S\subseteq\mathbb{E}$ כך ש-$\mathbb{E}=\mathbb{F}\left(S\right)$, ותיקרא הרחבה פשוטה אם קיים $\alpha\in\mathbb{E}$ כך ש-$\mathbb{E}=\mathbb{F}\left(\alpha\right)$ ($\alpha$ כזה ייקרא יוצר פרימיטיבי של $\mathbb{E}$ מעל $\mathbb{F}$).

למה. לכל $\alpha\in\mathbb{E}$ מתקיים:

$$\mathbb{F}\left(\alpha\right)=\left\{ \left.\tfrac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}\right|P,Q\in\mathbb{F}\left[x\right],\ Q\left(\alpha\right)\neq0\right\}$$

**הגדרה 2.7.** איבר $\alpha\in\mathbb{E}$ ייקרא אלגברי מעל $\mathbb{F}$ אם קיים $0\neq P\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש-$P\left(\alpha\right)=0$, אחרת ייקרא טרנסצנדנטי.
$\mathbb{E}/\mathbb{F}$ תיקרא הרחבה אלגברית אם כל איברי $\mathbb{E}$ אלגבריים מעל $\mathbb{F}$, אחרת תיקרא טרנסצנדנטית.

♣ העובדה שאיבר $\alpha\in\mathbb{E}$ הוא אלגברי מעל $\mathbb{F}$ אומרת שלמרות שבלמה האחרונה אין מגבלה על דרגת הפולינומים, בפועל יש כזו מפני שתמיד אפשר לחלק (עם שארית) את הפולינומים בפולינום שמאפס את $\alpha$ ולקחת רק את השארית.

**סימון:** לכל $\alpha\in I$ נסמן $I_{\alpha}:=\left\{ P\in\mathbb{F}\left[x\right]:P\left(\alpha\right)=0\right\}$.

**טענה.** $I_{\alpha}$ הוא אידיאל של $\mathbb{F}\left[x\right]$, ו-$\alpha$ הוא איבר אלגברי מעל $\mathbb{F}$ אס"ם $I_{\alpha}\neq\left\{ 0\right\}$.

**הגדרה 2.8.** יהי $\alpha\in\mathbb{E}$ איבר אלגברי מעל $\mathbb{F}$, הפולינום המינימלי של $\alpha$ מעל $\mathbb{F}$ הוא הפולינום המתוקן היוצר את האידיאל $I_{\alpha}$, פולינום זה יסומן ב-$m_{\alpha}$ וכמו כן הדרגה של $\alpha$ מעל $\mathbb{F}$ תוגדר ע"י $\deg_{\mathbb{F}}\left(\alpha\right):=\deg\left(m_{\alpha}\right)$.

# 3 שדות פיצול

תהא $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ הרחבת שדות.

**הגדרה 3.1.** נאמר שפולינום $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$ מתפצל בשדה הרחבה $\mathbb{E}$ אם ניתן להציגו כמכפלה של גורמים ליניאריים ב-$\mathbb{E}\left[x\right]$, כלומר אם קיימים $a_{1},a_{2},\ldots,a_{\deg f},c\in\mathbb{E}$ כך שמתקיים:

$$f\left(x\right)=c\cdot\prod_{i=1}^{\deg f}\left(x-\alpha_{i}\right)$$

**הגדרה 3.2.** נאמר ששדה הרחבה $\mathbb{E}$ הוא שדה פיצול של פולינום $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$, אם $f$ מתפצל ב-$\mathbb{E}$, ובנוסף $\mathbb{E}$ הוא שדה הביניים היחיד של $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ שבו $f$ מתפצל.

♣ אנחנו נראה בהמשך שלכל פולינום יש שדה פיצול, ובהמשך נראה גם ששדה פיצול הוא יחיד עד כדי איזומורפיזם, א"כ מוצדק לדבר עליו בה"א הידיעה.

**הגדרה 3.3.** נאמר ש-$\mathbb{F}$ הוא שדה סגור אלגברית אם לכל פולינום $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש-$1\leq\deg f$ יש שורש ב-$\mathbb{F}$.

**הגדרה 3.4.** נאמר ששדה הרחבה $\mathbb{E}$ הוא סגור אלגברי של $\mathbb{F}$ אם $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ היא הרחבה אלגברית ו-$\mathbb{E}$ סגור אלגברית.

**משפט.** קיימת הרחבת שדות $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ כך ש-$\mathbb{E}$ סגור אלגברית.

♣ מכאן שלכל שדה יש סגור אלגברי.

♣ לא הוכחנו זאת, אך לכל שדה יש שדה סגור אלגברית מינימלי (**ביחס לשיכון?**) יחיד (עד כדי איזומורפיזם).

**סימון:** לכל שדה $\mathbb{F}$ נסמן את אותו שדה סגור אלגברית מינימלי ב-$\overline{\mathbb{F}}$ ונקרא לו הסגור האלגברי של $\mathbb{F}$.