מטריצות ומרחבי קואורדינטות - הגדרות בלבד

אלגברה ליניארית (1) - 80134

מרצה: ערן נבו

מתרגלים: איתמר ישראלי ושני שלומי

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $n,m\in\mathbb{N}$.

סימון: נסמן ב-e_i את הווקטור שבו בכל קואורדינטה ניצב 0 מלבד בקואורדינטה ה-i שבה ניצב 1 (וזאת נעשה לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$).

מסקנה 1.1. הסדרה $E:=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ היא בסיס של $\mathbb{F}^n$.

הגדרה 1.2. הבסיס הסטנדרטי של מרחב הקואורדינטות $\mathbb{F}^n$ הוא $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$.

1.1 מרחב המטריצות

סימון: נסמן ב-$M_{m\times n}(\mathbb{F})$ את קבוצת המטריצות (טבלאות) בעלות m שורות ו-n עמודות שבכל הקואורדינטות שלהן מופיעים איברים ב-$\mathbb{F}$ בלבד; איבר ב-$M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ייקרא מטריצה מסדר (או: מגודל) $m\times n$ (קרי: m על n) מעל $\mathbb{F}$, אם $m=n$ מקובל גם הסימון $M_n(\mathbb{F})$, איבר ב-$M_n(\mathbb{F})$ נקרא גם מטריצה ריבועית מסדר/מגודל n מעל $\mathbb{F}$.

- ♣ ניתן לדבר גם על מטריצות מעל חוגים[1] ולא רק מעל שדות, למעשה כל מה שנראה בקובץ זה ובקובצי הטענות וההוכחות נכון גם עבור מטריצות מעל חוגים מלבד נקודה אחת שתצוין במפורש.
- ♣ ניתן להסתכל על מטריצה ב-$M_{m\times n}(\mathbb{F})$ כסדרה באורך m של וקטורים ב-$\mathbb{F}^n$, אנחנו נשתמש בנקודת המבט הזו פעמים רבות.

סימון: נסמן מטריצות באותיות גדולות ואת האיברים בכל קואורדינטה במטריצה נסמן ע"י האות הקטנה המתאימה והאינדקסים של השורה והעמודה המתאימות, כך לדוגמה האיבר שבשורה ה-i ובעמודה ה-j במטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ יסומן ב-a_{ij} וב-$[A]_{ij}$ (או ב-$a_{i,j}$ וב-$[A]_{i,j}$ אם נרצה למנוע בלבול) וזאת לכל $m\geq i\in\mathbb{N}$ ולכל $n\geq j\in\mathbb{N}$.[2]

הגדרה 1.3. חיבור מטריצות וכפל מטריצה בסקלר

חיבור מטריצות וכפל מטריצה בסקלר יוגדרו רכיב רכיב - לכל $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ולכל $c\in\mathbb{F}$, נגדיר את חיבור המטריצות והכפל בסקלר ע"י:

$$A+B:=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\ldots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\ldots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\ldots&b_{mn}\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\ldots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\ldots&a_{1n}+b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\ldots&a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}$$

$$c\cdot A:=c\cdot\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}c\cdot a_{11}&c\cdot a_{12}&\ldots&c\cdot a_{1n}\\c\cdot a_{21}&c\cdot a_{22}&\ldots&c\cdot a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c\cdot a_{m1}&a_{m2}&\ldots&c\cdot a_{mn}\end{bmatrix}$$

מסקנה 1.4. קבוצת המטריצות $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ עם פעולות החיבור והכפל בסקלר שהוגדרו לעיל ו-$\dim M_{m\times n}(\mathbb{F})=m\cdot n$.

- ♣ ישנן שתי נקודות מבט פשוטות על קבוצת המטריצות המראות שאכן מדובר במרחב וקטורי:
  - $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מתנהגת בדיוק כמו $\mathbb{F}^{m\cdot n}$ מבחינת החיבור הווקטורי והכפל בסקלר.
  - $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ היא בדיוק $\underbrace{\mathbb{F}^m\times\mathbb{F}^m\times\ldots\times\mathbb{F}^m}_{\text{n פעמים}}$ וכבר ראינו שזהו מרחב וקטורי.

[1] חוג הוא קבוצה המקיימת את כל אקסיומות השדה מלבד קיום הופכי והחילוף של הכפל, אם הכפל של החוג חילופי (קומוטטיבי) אומרים שגם החוג הוא חילופי (קומוטטיבי).

[2] במקומות אחרים מסמנים גם A_j^i

1.2 כפל מטריצה בווקטור

הגדרה 1.5. כפל מטריצה בווקטור

יהיו $x \in \mathbb{F}^n$ ו-$A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.[3]

נסמן ב-c_j את העמודה ה-j של A, כלומר $A =: \begin{bmatrix} | & | & & | \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ (נחלק את A לעמודות ונסמן את העמודה הראשונה ב-c_1, את השנייה ב-c_2 וכן הלאה), ונגדיר את הכפל של המטריצה A בווקטור x ע"י:

$$A \cdot x := x_1 \cdot c_1 + x_2 \cdot c_2 + \ldots + x_n \cdot c_n$$

♣ נשים לב: הכפל באגף שמאל הוא זה שאנו מגדירים ואילו החיבור והכפל באגף שמאל הם החיבור הווקטורי והכפל בסקלר של $\mathbb{F}^m$ - כלומר התוצאה של כפל מטריצה בווקטור היא וקטור שמספר איבריו כמספר השורות במטריצה; אני נוטה להאמין שזוהי הגדרה מבלבלת למדי כאשר נתקלים בה לראשונה ולכן אביא כאן דוגמה לחישוב של כפל מטריצה בווקטור.

דוגמה 1.6. יהיו $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ ו-$v \in \mathbb{R}^2$ המוגדרים ע"י:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \ v := \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A \cdot v &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2\cdot 1 \\ -2\cdot 0 \\ -2\cdot 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\cdot 2 \\ 3\cdot 3 \\ 3\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ -2\cdot 0 + 3\cdot 3 \\ -2\cdot 4 + 3\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

♣ ניתן להבין מן הדוגמה שניתן לפשט את התהליך: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ -2\cdot 0 + 3\cdot 3 \\ -2\cdot 4 + 3\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}$, כלומר הקואורדינטה ה-$i$ של הווקטור $A \cdot x$ היא:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j$$

ומי שנזכר כעת בהגדרה האלגברית של המכפלה הסקלרית אינו נזכר בה לחינם - ישנו קשר הדוק בין המכפלה הסקלרית לכפל מטריצה בווקטור ואנו נראה אותו בקורס הבא כשנעסוק במכפלות פנימיות.

הגדרה 1.7. לכל $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ נגדיר את הפונקציה $T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ ע"י $T_A(v) := A \cdot v$ (לכל $v \in \mathbb{F}^n$).

[3] כפל מטריצה בווקטור מוגדר אך ורק כאשר מספר השורות בווקטור שווה למספר העמודות במטריצה.

1.3 כפל מטריצות

הגדרה 1.8. כפל מטריצות
יהי $l\in\mathbb{N}$ ותהיינה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו-$B\in M_{l\times m}(\mathbb{F})$.[4] נסמן ב-$c_j$ את העמודה ה-j במטריצה A, ונגדיר את $B\cdot A$ להיות המטריצה שהעמודה ה-j שלה היא $B\cdot c_j$ (כאשר אנו מסתכלים על c_j כווקטור ב-$\mathbb{F}^m$).

- ♣ ניתן להבין בקלות מן ההגדרה ש-$B\cdot A\in M_{l\times n}(\mathbb{F})$, כלומר המטריצה השמאלית קובעת את מספר השורות והימנית את מספר העמודות.
- ♣ ההגדרה מאפשרת להתייחס לווקטור כמטריצה צרה (בעלת עמודה אחת) וארוכה, כלומר כפל מטריצות הוא הכללה של כפל מטריצה בווקטור.
- ♣ גם הגדרה זו נראית מבלבלת ומוזרה עד הזויה לפני שמתרגלים אליה ולכן אביא שוב דוגמה לחישוב, הסיבה לכך שכפל מטריצות הוגדר דווקא כך תתברר לנו כשנעסוק בהעתקות ליניאריות (הנושא האחרון של הקורס).

דוגמה 1.9. תהיינה $A\in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ו-$B\in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ שתי מטריצות המוגדרות ע"י:

$$B:=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\\4&0\\2&5\end{bmatrix},\ A:=\begin{bmatrix}-1&2&7\\1&3&5\end{bmatrix}$$

נסמן ב-c_i את העמודה ה-i המטריצה A וב-d_j את העמודה ה-j במטריצה B:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow B\cdot A&=\left[\begin{array}{c|c|c} B\cdot c_1 & B\cdot c_2 & B\cdot c_3\end{array}\right]\\
&=\left[\begin{array}{c|c|c} -1\cdot d_1+1\cdot d_2 & 2\cdot d_1+3\cdot d_2 & 7\cdot d_1+5\cdot d_2\end{array}\right]\\
&=\left[\begin{array}{c|c|c} -1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\4\\2\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\0\\5\end{bmatrix} & 2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\4\\2\end{bmatrix}+3\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\0\\5\end{bmatrix} & 7\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\4\\2\end{bmatrix}+5\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\0\\5\end{bmatrix}\end{array}\right]\\
&=\left[\begin{array}{c|c|c}
(-1)\cdot 1+1\cdot 2 & 2\cdot 1+3\cdot 2 & 7\cdot 1+5\cdot 2\\
(-1)\cdot 0+1\cdot 3 & 2\cdot 0+3\cdot 3 & 7\cdot 0+5\cdot 3\\
(-1)\cdot 4+1\cdot 0 & 2\cdot 4+3\cdot 0 & 7\cdot 4+5\cdot 0\\
(-1)\cdot 2+1\cdot 5 & 2\cdot 2+3\cdot 5 & 7\cdot 2+5\cdot 5
\end{array}\right]=\begin{bmatrix}1&8&17\\3&9&15\\-4&8&28\\3&19&39\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- ♣ כפי שראינו לעיל (בכפל מטריצה בווקטור) יכולנו (בדוגמה זו) לעבור מ-$\begin{bmatrix}1&2\\0&3\\4&0\\2&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&2&7\\1&3&5\end{bmatrix}$ הישר ל-$\left[\begin{array}{c|c|c}
(-1)\cdot 1+1\cdot 2 & 2\cdot 1+3\cdot 2 & 7\cdot 1+5\cdot 2\\
(-1)\cdot 0+1\cdot 3 & 2\cdot 0+3\cdot 3 & 7\cdot 0+5\cdot 3\\
(-1)\cdot 4+1\cdot 0 & 2\cdot 4+3\cdot 0 & 7\cdot 4+5\cdot 0\\
(-1)\cdot 2+1\cdot 5 & 2\cdot 2+3\cdot 5 & 7\cdot 2+5\cdot 5
\end{array}\right]$, כלומר: $[B\cdot A]_{ij}=\sum_{k=1}^{m}[B]_{ik}\cdot[A]_{kj}$.
- ♣ נשים לב שניתן להתייחס לכפל מטריצות גם כך:
נסמן את השורה ה-i של A ב-R_i ואת הכניסה ה-j בשורה ה-i של B ב-b_{ij}, המטריצה $B\cdot A$ היא זו שהשורה ה-i שלה היא $\sum_{k=1}^{m}b_{ik}\cdot R_k$ (כאשר חיבור השורות מתבצע גם הוא רכיב רכיב).

[4] כפל מטריצות מוגדר אך ורק כאשר מספר השורות במטריצה הימנית שווה למספר העמודות במטריצה השמאלית.

2 מטריצת היחידה ומטריצות הפיכות

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהא $n\in\mathbb{N}$.

הגדרה 2.1. מטריצת היחידה או מטריצת הזהות היא המטריצה שהעמודה ה-j שלה היא e_j, נסמן ב-I_n את מטריצת היחידה מסדר n ($I_n\in M_n(\mathbb{F})$).

- ♣ כפי שנראה בקובץ הטענות, הסיבה לשם "מטריצת הזהות" היא שההעתקה שהיא מגדירה (T_{I_n}) היא העתקת הזהות על $\mathbb{F}^n$.
- ♣ ניתן להגדיר גם ע"י $[I_n]_{ij}:=\delta_{ij}$ לכל $n\geq i,j\in\mathbb{N}$.

דוגמה 2.2. מטריצת היחידה מסדר 3 היא $I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

הגדרה 2.3. נאמר שמטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ היא מטריצה הפיכה אם קיימת $B\in M_n(\mathbb{F})$ כך ש-$A\cdot B=I_n=B\cdot A$.

- ♣ למה א"א לדבר על מטריצות הופכיות שאינן ריבועיות?
התשובה היא שמטריצות שאינן ריבועיות אינן יכולות לקיים את הפסוק הנ"ל כלל וכלל, הוכחה לכך נראה כשנעסוק במושג הדרגה של מטריצה.

טענה. תהא $P\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה, גם T_P הפיכה.

מסקנה. תהא $P\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה, קיימת $Q\in M_n(\mathbb{F})$ יחידה כך ש-$P\cdot Q=I_n=Q\cdot P$.

הגדרה 2.4. תהא $P\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה, נסמן את אותה $Q\in M_n(\mathbb{F})$ יחידה המקיימת $P\cdot Q=I_n=Q\cdot P$ כך: $Q:=P^{-1}$ ונקרא ל-P^{-1} המטריצה ההופכית של P.

3 פתרון מערכות משוואות ליניאריות

♣ בתיכון למדנו לפתור משוואות בנעלם אחד ובשני נעלמים, ניתן להשתמש בשיטה שלמדנו בתיכון גם עבור משוואות עם יותר משני נעלמים: נציג נעלם אחד כביטוי של שאר הנעלמים וקיבלנו מערכת משוואות חדשה שבה יש נעלם אחד פחות ומשוואה אחת פחות, נציג שוב נעלם אחד ע"י האחרים וחוזר חלילה. בקובץ זה נראה שאפשר למצוא אלגוריתם לפתרון משוואות כאלה ואין צורך בחשיבה מחודשת עבור כל מקרה.
טוב, האמת היא שקצת רימיתי כאן: האלגוריתם שנלמד הוא אלגוריתם לפתרון סוג מסוים של משוואות - משוואות ליניאריות.

♣ הסיבה לכך שאנו לומדים לפתור משוואות ליניאריות באופן אלגוריתמי דווקא עכשיו ובקורס זה היא שהיכולת לבצע זאת (והדרך שבה אכן נעשה זאת) נותנות לנו כלים חזקים לניתוח מרחב הקואורדינטות ובעזרתו גם את כל המרחבים הווקטוריים הנוצרים סופית.

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $m,n\in\mathbb{N}$.

3.1 התחלה

הגדרה 3.1. מערכת משוואות ליניארית

- משוואה ליניארית מעל $\mathbb{F}$ היא משוואה מהצורה הבאה:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot x_i=a_1\cdot x_1+a_2\cdot x_2+...+a_n\cdot x_n=b$$

כאשר $a_1,a_2,\ldots,a_n,b\in\mathbb{F}$ (ה-a_i-ים וה-b נתונים ואילו ה-x_i-ים הם הנעלמים).

- מערכת משוואות ליניארית (להלן גם: ממ"ל) מעל $\mathbb{F}$ היא אוסף משוואות ליניאריות מעל $\mathbb{F}$, כלומר אוסף משוואות מהצורה הבאה[5]:

$$\begin{cases}a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+...+a_{1n}\cdot x_n=b_1\\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+...+a_{2n}\cdot x_n=b_2\\ \vdots\\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+...+a_{mn}\cdot x_n=b_m\end{cases}$$

כאשר $a_{ij}\in\mathbb{F}$ ו-$b_i\in\mathbb{F}$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ ולכל $m\geq j\in\mathbb{N}$, במקרה זה זוהי מערכת של m משוואות ב-n נעלמים.
המקדמים $b_1,b_2,\ldots,b_m$ נקראים המקדמים החופשיים של המערכת.

[5] אם נעלם מסוים מופיע במשוואה אחת ואינו מופיע באחרת אז המקדם שלו במשוואה האחרת יהיה 0, ולכן ניתן להציג כל אוסף של משוואות ליניאריות בצורה זו.

הגדרה 3.2. אוסף הפתרונות

- וקטור $\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$ במרחב הקואורדינטות ייקרא <u>פתרון של משוואה ליניארית</u> $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i = b$ מעל $\mathbb{F}$ אם מתקיים $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot s_i = b$.
- כמו כן וקטור במרחב הקואורדינטות $\mathbb{F}^n$ ייקרא <u>פתרון של מערכת משוואות ליניאריות</u> (מעל $\mathbb{F}$) ב-n נעלמים אם הוא פתרון של כל אחת מהמשוואות במערכת בנפרד.
- <u>אוסף הפתרונות</u> של משוואה ליניארית או של ממ"ל הוא קבוצת כל הווקטורים במרחב הקואורדינטות המהווים פתרון שלה.

הגדרה 3.3. טבעי מאד להתאים לממ"ל שבהגדרה הראשונה מטריצה שתייצג אותה:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

המטריצה השמאלית נקראת <u>המטריצה של המערכת</u> ואילו הימנית נקראת <u>המטריצה המורחבת של המערכת</u> (היא כוללת גם את <u>עמודת המקדמים החופשיים</u>).

♣ מה הקשר של מערכות משוואות ליניאריות לגאומטריה? פשוט מאד - הן מתארות ישריות במרחב: כבר בתיכון ראינו שכל ישר במישור ניתן לתיאור באמצעות משוואה מהצורה $ax + by = c$, וכל מישור במרחב התלת-ממדי מיוצג ע"י משוואה מהצורה $ax + by + cz = d$. א"כ אוסף הפתרונות של ממ"ל הוא החיתוך של כל הישריות המתאימות שהוא בעצמו ישריה, ההבנה הזו נותנת לנו נקודת מבט חדשה על משוואות ליניאריות, כך למשל אם שתי משוואות ליניאריות מתארות ישריות שמרחב הכיוונים שלהן זהה אז מתקיים אחד מן השניים: או שהמשוואות זהות או שאין למערכת פתרון מפני שהחיתוך של ישריות מקבילות הוא ריק.

בעצם הדרך היחידה שבה אוסף הפתרונות יהיה ריק היא שתהיינה שתי קבוצות של ישריות שהחיתוכים של כל אחת מהן בנפרד הם ישריות מקבילות, וזה קורה כאשר יש **תלות ליניארית** בין המשוואות השונות כווקטורים ב-$\mathbb{F}^m$ (אנחנו לא כוללים כאן את עמודת המקדמים החופשיים), כלומר השורות של מטריצת המערכת תלויות לינארית - ניתן לבטא אחת מהן באמצעות האחרות ואז היא "מסכימה" עם האחרות על מרחב הכיוונים של הישרייה אך המקדם החופשי והיחסים בינו למקדמים האחרים הם שקובעים לאן נזיז את מרחב הכיוונים כדי לקבל את הישרייה וכבר ראינו שישריות בעלות מרחב כיוונים זהה אין זהות או זרות.

הגדרה 3.4. מערכת משוואות ליניאריות תקרא <u>הומוגנית</u> אם כל המקדמים החופשיים שלה הם אפסים.

♣ הסיבה לעניין במערכת הומוגנית היא שלמערכת כזו יש תמיד פתרון: אם נציב בכל נעלם את 0 נקבל פתרון, כלומר וקטור האפס של $\mathbb{F}^n$ הוא פתרון; ניתן להסיק מכאן שבמקרה כזה אוסף הפתרונות של ממ"ל הומוגנית הוא ישרייה המכילה את וקטור האפס ומכאן שהוא תמ"ו של $\mathbb{F}^n$.

3.2 מטריצה מדורגת-מצומצמת

♣ כעת נרצה לעבור ממטריצה שממנה קשה לראות את הפתרונות למטריצה שתקל על המלאכה, אך עלינו לעשות זאת בצורה שלא תשנה את אוסף הפתרונות.

הגדרה 3.5. האיבר המוביל בשורה כלשהי במטריצה נתונה הוא האיבר השמאלי ביותר באותה שורה השונה מ-0.

הגדרה 3.6. מטריצה נקראת מדורגת-מצומצמת אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

1. בכל שורה, אם יש בשורה איבר מוביל זהו 1.
2. לכל איבר מוביל במטריצה כל האיברים בעמודתו (מלבדו) הם אפסים.
3. אם בשורה כלשהי יש איבר מוביל אז בכל שורה הנמצאת מעליה יש איבר מוביל.
4. אם בשורה כלשהי יש איבר מוביל אז כל האיברים המובילים של השורות הנמצאות מתחתיה (אם יש כאלה) נמצאים בעמודות שמימין לו.

דוגמה 3.7. דוגמה למטריצה מדורגת-מצומצמת:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

♣ קל מאוד "לראות" מהו אוסף הפתרונות של ממ"ל שמטריצת המערכת המורחבת שלה היא מטריצה מדורגת-מצומצמת[6] (זו כמובן הסיבה להגדרתה כך), לפיכך נרצה למצוא לכל ממ"ל נתונה ממ"ל **אחרת** שיש לה את אותו אוסף פתרונות אך מטריצת המערכת המורחבת שלה היא מטריצה מדורגת-מצומצמת.

מסקנה 3.8. עבור ממ"ל שמטריצת המערכת המורחבת שלה היא מטריצה מדורגת-מצומצמת: קבוצת הפתרונות של הממ"ל אינה ריקה אם"ם לא קיימת במטריצה שורה שבה יש איבר מוביל בעמודת המקדמים החופשיים.

הגדרה 3.9. משתנים שבעמודתם (במטריצה מדורגת-מצומצמת) אין איבר מוביל יקראו משתנים חופשיים (כי יקבלו כל ערך), ומשתנים שבעמודתם יש איבר מוביל יקראו משתנים תלויים (כי ערכם תלוי בערכים שקיבלו המשתנים החופשיים).

[6] לדוגמה, אוסף הפתרונות של הממ"ל המתאימה למטריצה הנ"ל הוא:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_3 + x_5 + 3 \\ x_3 \\ -2x_5 - 1 \\ x_5 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, x_3, x_5 \in \mathbb{F} \right\}$$

3.3 פעולות שורה אלמנטריות

נתבונן בממ"ל הבאה (מעל $\mathbb{F}$):

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+...+a_{1n}\cdot x_n=b_1\\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+...+a_{2n}\cdot x_n=b_2\\ \vdots\\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+...+a_{mn}\cdot x_n=b_m\end{cases}$$

תהא $M\in M_{m\times n+1}(\mathbb{F})$ כך ש-$[M]_{ij}=a_{ij}$ לכל $m\geq i\in\mathbb{N}$ ולכל $n\geq j\in\mathbb{N}$ ו-$[M]_{i,n+1}=b_i$.

סימון: נסמן ב-R_i את השורה ה-i של M.

הגדרה 3.10. פעולת שורה אלמנטרית (להלן גם: פש"א) היא פונקציה $\varepsilon:M_{m\times n+1}(\mathbb{F})\to M_{m\times n+1}(\mathbb{F})$ המוגדרת ע"י אחת שלוש הצורות הבאות:

1. ε היא החלפת השורות ה-i וה-j זו בזו ($m\geq i,j\in\mathbb{N}$), מסומנת ב-$R_i\longleftrightarrow R_j$.
2. הכפלת כל האיברים בשורה ה-i בסקלר $0\neq c\in\mathbb{F}$ ($m\geq i\in\mathbb{N}$), מסומנת ב-$R_i\to c\cdot R_i$.
3. הוספת כפולה של השורה ה-j (בסקלר $0\neq c\in\mathbb{F}$) לשורה ה-i ($m\geq i,j\in\mathbb{N}$ ו-$i\neq j$), מסומנת ב-$R_i\to R_i+c\cdot R_j$.[7]

♣ למעשה ניתן היה להחליף את הפעולה השלישית בהוספת שורה אחת לאחרת מבלי לכפול אותה בסקלר: אם נרצה להוסיף כפולה של השורה ה-j (בסקלר $0\neq c\in\mathbb{F}$) לשורה ה-i נוכל לכפול את השורה ה-i ב-c, להוסיף אותה לשורה ה-j ואז לכפול את השורה ה-i ב-c^{-1}. בנוסף, ניתן לוותר על הפעולה הראשונה לחלוטין: אם נרצה להחליף את השורה ה-i בשורה ה-j נוסיף את השורה ה-i לשורה ה-j (כעת השורה ה-j היא R_i+R_j לפי הסימון המקורי), נחסר את השורה ה-j מהשורה ה-i (כלומר כעת השורה ה-i היא $R_i-(R_i+R_j)=-R_j$), נוסיף את השורה ה-i לשורה ה-j ($(R_i+R_j)+(-R_j)=R_i$) ונכפול את השורה ה-i ב--1 ($-1\cdot(-R_j)=R_j$). כמובן שהרבה יותר נוח לעבוד עם פעולות השורה האלמנטריות כפי שהגדרנו אותן.

טענה. כל פעולת שורה אלמנטרית היא פונקציה הפיכה וההופכית שלה גם היא פעולת שורה אלמנטרית מאותה צורה.

הגדרה 3.11. תהא $A\in M_{m\times n+1}(\mathbb{F})$, נאמר ש-$A$ ו-B שקולות שורה אם ניתן להגיע מ-A ל-B ע"י סדרת פעולות שורה אלמנטריות ונסמן $A\sim B$.

טענה 3.12. היחס "שקילות שורה" הוא אכן יחס שקילות.

משפט. תהא $A\in M_{m\times n+1}(\mathbb{F})$ מטריצת מערכת **מורחבת** של ממ"ל כלשהי ותהא $\varepsilon:M_{m\times n+1}(\mathbb{F})\to M_{m\times n+1}(\mathbb{F})$ פש"א, אוסף הפתרונות של הממ"ל המתאימה ל-$\varepsilon(A)$ זהה לאוסף הפתרונות של הממ"ל המתאימה ל-A.

♣ שימו לב שאנו מבצעים את פעולות השורה אלמנטריות גם על עמודת המקדמים החופשיים.

מסקנה. שתי מערכות משוואות ליניאריות שמטריצות המערכת המורחבת שלהן שקולות שורה הן בעלות אותו אוסף פתרונות.

3.4 אלגוריתם הדירוג - אלימינציית גאוס

אין הגדרות בסעיף זה.

[7] ניתן לאפשר ש-$c=0$ אך אין לזה שום משמעות כמובן.

3.5 מטריצות אלמנטריות

הגדרה 3.13. תהא $\varepsilon : M_{m\times n}(\mathbb{F}) \to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ פש"א, המטריצה המתאימה לפש"א ε היא $\varepsilon(I_m)$; מטריצות כאלה תקראנה מטריצות אלמנטריות.

דוגמה 3.14. המחשה כאשר $m = 7$.

1. המטריצה המתאימה להחלפת השורות השלישית והשישית ($R_3 \longleftrightarrow R_6$) היא:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. המטריצה המתאימה לכפל השורה הרביעית ב-$0 \neq c \in \mathbb{F}$ היא:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. המטריצה המתאימה להוספת כפולה של השורה השנייה (בסקלר $c \in \mathbb{F}$) לשורה החמישית היא:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{c} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

טענה. תהא $\varepsilon : M_{m\times n}(\mathbb{F}) \to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ פש"א ותהא $E \in M_m(\mathbb{F})$ המטריצה האלמנטרית המתאימה לה, מתקיים $\varepsilon(A) = E \cdot A$ לכל $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

מסקנה. תהיינה $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ שתי מטריצות כך ש-$A \sim B$, קיימת מטריצה $P \in M_m(\mathbb{F})$ המהווה מכפלת מטריצות אלמנטריות המקיימת $P \cdot A = B$.

4 המטריצה המשוחלפת, מטריצות משולשיות ומטריצות אלכסוניות

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $m,n\in\mathbb{N}$.

4.1 המטריצה המשוחלפת

הגדרה 4.1. תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה, המטריצה המשוחלפת של A היא המטריצה $A^{t}\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right)$ שעמודותיה הן השורות של A (ושורותיה הן העמודות של A), כלומר $\left[A^{t}\right]_{ij}:=\left[A\right]_{ji}$ לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ ולכל $m\geq j\in\mathbb{N}$.

♣ על פניו זוהי הגדרה אלגברית לחלוטין - אין לה משמעות גאומטרית ולפיכך אין בה טיפת אינטואיציה, אך למעשה כמובן שמצב הדברים שונה ושנלמד על מכפלות פנימיות (בקורס הבא) נבין את המשמעות הגאומטרית של שיחלוף מטריצה.

מסקנה 4.2. לכל $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ מתקיים $\left(A^{t}\right)^{t}=A$.

הגדרה 4.3. תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה ריבועית,

- נאמר ש-A סימטרית אם $A^{t}=A$.
- אמר ש-A אנטי-סימטרית אם $A^{t}=-A$.

מסקנה 4.4. אם $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ היא מטריצה סימטרית וגם אנטי-סימטרית אז כל האיברים על האלכסון הראשי שלה הם אפסים, כלומר לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left[A\right]_{ii}=0$.

4.2 מטריצות משולשיות ומטריצות אלכסוניות

הגדרה 4.5. תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה,

- נאמר ש-A היא מטריצה משולשית עליונה אם בכל הקואורדינטות שמתחת לאלכסון הראשי שלה ניצב 0, כלומר A תקרא משולשית עליונה אם $\left[A\right]_{ij}=0$ לכל $n\geq i,j\in\mathbb{N}$ כך ש-$i>j$.
- נאמר ש-A היא מטריצה משולשית תחתונה אם בכל הקואורדינטות שמתחת לאלכסון הראשי שלה ניצב 0, כלומר A תקרא משולשית תחתונה אם $\left[A\right]_{ij}=0$ לכל $n\geq i,j\in\mathbb{N}$ כך ש-$i<j$.

♣ את הסיבה לעניין במטריצות משולשיות אנחנו נגלה כשנלמד על הדטרמיננטה (הנושא הבא).

מסקנה 4.6. המטריצה המשוחלפת של משולשית עליונה היא משולשית תחתונה והמשוחלפת של משולשית תחתונה היא משולשית עליונה.

הגדרה 4.7. נאמר שמטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ ריבועית היא מטריצה אלכסונית אם כל בכל קוארדינטה שלה שאינה נמצאת על האלכסון הראשי ניצב 0, כלומר A תקרא אלכסונית אם $\left[A\right]_{ij}=0$ לכל $n\geq i,j\in\mathbb{N}$ כך ש-$i\neq j$.

♣ העניין במטריצות אלכסוניות נובע מהעובדה שקל לראות את פעולתן על המרחב (הן מעתיקות כל וקטור בבסיס הסטנדרטי לכפולה שלו ע"פ הקואורדינטה המתאימה על האלכסון הראשי) וקל מאד לחשב את המכפלה של שתי מטריצות אלכסוניות (זוהי המטריצה האלכסונית שהאיברים על האלכסון הראשי שלה הם מכפלות האיברים המתאימים במטריצות המקוריות).

♣ כל מטריצה אלכסונית היא מטריצה סימטרית.

♣ ההגדרה של מטריצה אלכסונית שקולה לכך שזוהי מטריצה משולשית עליונה ותחתונה.

הגדרה 4.8. נאמר שמטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ היא מטריצה סקלרית אם קיים $c\in\mathbb{F}$ כך ש-$A=c\cdot I_{n}$.

♣ מטריצות סקלריות נקראות כך מפני שהן מתנהגות ממש כמו הסקלר המתאים כמעט מכל בחינה.

♣ כמובן שממטריצה סקלרית היא אלכסונית.

5 מרחב הקואורדינטות והדרגה של מטריצה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $m,n\in\mathbb{N}$.

הגדרה 5.1. יהיו V מ"ו נ"ס ו-$\mathcal{B}:=(v_1,v_2,...,v_n)$ בסיס של V, כשעסקנו במרחבים וקטוריים ראינו שלכל $v\in V$ קיים צר"ל יחיד של $\mathcal{B}$ השווה ל-v; א"כ לכל $v\in V$ נסמן:

$$[v]_{\mathcal{B}}:=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$$

כאשר $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ הם אותם סקלרים יחידים המקיימים $v=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot v_i$.
הווקטור $[v]_{\mathcal{B}}$ ייקרא <u>וקטור הקואורדינטות</u> של v ביחס ל-$\mathcal{B}$.

הגדרה 5.2. תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה,

- <u>פרוש השורות</u> של A הוא הפרוש של סדרת הווקטורים ב-$\mathbb{F}^m$ המהווים את השורות של A.[8]
- <u>פרוש העמודות</u> של A הוא הפרוש של סדרת הווקטורים ב-$\mathbb{F}^n$ המהווים את העמודות של A.

הגדרה 5.3. תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.
נסמן ב-$R_1,...,R_m$ את שורות A ונתייחס אליהן כווקטורים ב-$\mathbb{F}^m$, כמו כן נסמן ב-$C_1,...,C_n$ את עמודות A ונתייחס אליהן כווקטורים ב-$\mathbb{F}^n$.

- <u>דרגת השורות</u> של A היא $\dim(\text{span}(R_1,...,R_m))$.
- <u>דרגת העמודות</u> של A היא $\dim(\text{span}(C_1,...,C_n))$.

טענה. דרגת השורות שווה לדרגת העמודות בכל מטריצה.

הגדרה 5.4. תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה, <u>הדרגה</u> של A היא אותו מספר המהווה את דרגות שורותיה ועמודותיה, נסמן את דרגת A ב-$\text{rk}A$.

מסקנה 5.5. לכל $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מתקיים $\text{rk}A=\text{rk}A^t$.

הגדרה 5.6. תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה, מטריצה $B\in M_{s\times t}(\mathbb{F})$ ($m\geq s\in\mathbb{N}$ ו-$n\geq t\in\mathbb{N}$) תקרא <u>תת-מטריצה</u> של A אם היא מתקבלת מ-A ע"י מחיקת שורות ועמודות שלמות.

דוגמה 5.7. תהיינה $A\in M_{5\times 4}(\mathbb{R})$ ו-$B\in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ מטריצות המוגדרות ע"י:

$$A:=\begin{bmatrix}1&2&-1&2\\0&3&1&3\\4&0&7&5\\2&5&10&8\end{bmatrix},\ B:=\begin{bmatrix}0&1&3\\2&10&8\end{bmatrix}$$

B היא תת-מטריצה של A המתקבלת ממנה ע"י מחיקת השורות הראשונה והשלישית ומחיקת העמודה השנייה.

---

[8] יש לשחלף את השורות כדי לקבל וקטורים ב-$\mathbb{F}^m$.