נגזרות - טענות בלבד

חשבון אינפיניטסימלי (1) - 80131

מרצה: רז קופרמן

מתרגלים: אור יער ודניאל רוזנבלט

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

תוכן העניינים

באינפי' 2[1] השלמנו כמה טענות ומשפטים שלא למדנו בסמסטר שלפניו.
למרות זאת הבאתי אותם כאן מפני שהם שייכים לחומר של אינפי' 1.

* * *

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

[1] שלימד יורם לסט בסמסטר א' תשפ"ג (80132).

1 הנגזרת

משפט 1.1. גזירות גוררת רציפות
תהא f פונקציה גזירה בנקודה $a\in\mathbb{R}$, f גם רציפה ב-a.

משפט 1.2. [2] תהא f פונקציה רציפה בנקודה $a\in\mathbb{R}$. f גזירה ב-a אם"ם קיימים $m,d\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-\left(mx+d\right)}{x-a}=0$$

ובמקרה כזה מתקיים $m=f'\left(a\right)$ ו-$d=f\left(a\right)-f'\left(a\right)\cdot a$.

♣ הישר $mx+b$ הוא בעצם המשיק לגרף הפונקציה.

מסקנה 1.3. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה $a\in\mathbb{R}$. f גזירה ב-a אם"ם קיים $m\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(a+h\right)-\left(m\cdot h+f\left(a\right)\right)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-\left(m\cdot\left(x-a\right)+f\left(a\right)\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-\left(mx+f\left(a\right)-m\cdot a\right)}{x-a}=0$$

ובמקרה כזה מתקיים $m=f'\left(a\right)$.

טענה 1.4. תהא $f:\left(-1,1\right)\to\mathbb{R}$ פונקציה, אם קיים $0<c\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in\left(-1,1\right)$ מתקיים $\left|f\left(x\right)\right|\leq c\cdot x^{2}$ אז f גזירה ב-0 ומתקיים $f'\left(0\right)=0$.

טענה 1.5. יהי $0<a\in\mathbb{R}$ ותהא $f:\left(-a,a\right)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

- אם f זוגית אז f' אי-זוגית.
- אם f אי-זוגית אז f' זוגית.

2 כללי גזירה

טענה 2.1. תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה קבועה[3]; פונקציית הנגזרת $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא פונקציית האפס, כלומר לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f'\left(x\right)=0$.

טענה 2.2. לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathrm{Id}'\left(x\right)=1$.

2.1 אריתמטיקה של גזירות

משפט 2.3. גזירת סכום של פונקציות
תהיינה f ו-g פונקציות גזירות בנקודה $a\in\mathbb{R}$, הנגזרת של $f+g$ ב-a היא:

$$\left(f+g\right)'\left(a\right)=f'\left(a\right)+g'\left(a\right)$$

טענה 2.4. תהא f פונקציה גזירה בנקודה $a\in\mathbb{R}$, הנגזרת של $c\cdot f$ ב-a (לכל $c\in\mathbb{R}$) היא:

$$\left(c\cdot f\right)'\left(a\right)=c\cdot f'\left(a\right)$$

[2] משפט זה נלמד אצל יורם.
[3] קיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש-$f\left(x\right)=c$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

מסקנה 2.5. גזירה היא פעולה ליניארית
לכל שתי פונקציות f ו-g גזירות בנקודה $x\in\mathbb{R}$ ולכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\left(\alpha\cdot f+\beta\cdot g\right)'\left(x\right)=\alpha\cdot f'\left(x\right)+\beta\cdot g'\left(x\right)$$

משפט 2.6. כלל לייבניץ - גזירת מכפלה של פונקציות
תהיינה f ו-g פונקציות גזירות בנקודה $a\in\mathbb{R}$, הנגזרת של $f\cdot g$ ב-a היא:

$$\left(f\cdot g\right)'\left(a\right)=f'\left(a\right)\cdot g\left(a\right)+f\left(a\right)\cdot g'\left(a\right)$$

♣ בניגוד לשני כללי הגזירה הקודמים שהיו אינטואיטיביים מאד (חישבו עליהם בצורה ויזואלית), כלל לייבניץ נראה מוזר מאד במבט ראשון, למה שזה יהיה נכון בכלל?
בתחילה חשבתי להביא כאן איור שלי שמנסה להסביר את העניין, למזלי 3blue1brown כבר עשה את העבודה ואני יכול להסתפק במתן קישור לסרטון המתאים.

משפט 2.7. תהא g פונקציה גזירה בנקודה $a\in\mathbb{R}$, אם $g\left(a\right)\neq0$ אז הנגזרת של $\frac{1}{g}$ ב-a היא:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'\left(a\right)=-\frac{g'\left(a\right)}{g^{2}\left(a\right)}$$

מסקנה 2.8. גזירת מנה של פונקציות
תהיינה f ו-g פונקציות גזירות בנקודה $a\in\mathbb{R}$, אם $g\left(a\right)\neq0$ אז הנגזרת של $\frac{f}{g}$ ב-a היא:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'\left(a\right)=\frac{f'\left(a\right)\cdot g\left(a\right)-f\left(a\right)\cdot g'\left(a\right)}{g^{2}\left(a\right)}$$

2.2 כלל השרשרת וגזירה של פונקציה הופכית

משפט 2.9. כלל השרשרת - גזירת הרכבה של פונקציות
תהיינה f ו-g פונקציות כך ש-f גזירה בנקודה $a\in\mathbb{R}$ ו-g גזירה ב-$f\left(a\right)$, הנגזרת של $g\circ f$ ב-a היא:

$$\left(g\circ f\right)'\left(a\right)=g'\left(f\left(a\right)\right)\cdot f'\left(a\right)$$

♣ לכאורה לא ברור מניין הגיעה הנוסחה הנ"ל, ננסה לתת מעט אינטואיציה.
כל פונקציה ליניארית $ax+b$ מעוותת את הישר הממשי בצורה הבאה: היא מותחת/מכווצת אותו פי a ומזיזה אותו ב-b יחידות ימינה, ההזזה ב-b אינה משנה דבר לנגזרת אבל ברור שאם ניקח גרף של פונקציה גזירה ונכווץ אותו פי a (שזה שקול להרכבה על פונקציה ליניארית כנ"ל) נקבל פונקציה דומה מאד שהשיפועים בין כל שתי נקודות בה גדולים/קטנים פי a מאלה של הפונקציה המקורית ולכן גם השיפועים של המשיקים לה בנקודות שונות יהיו גדולים/קטנים פי a. פונקציות שאינן ליניאריות מעוותות גם הן את הישר הממשי ע"פ כלל ההתאמה שלהן אך מכיוון שקרוב מספיק לנקודה גזירה x הן מתנהגות "כמעט" כמו פונקציות ליניאריות ולכן שוב עלינו למתוח/לכווץ את הנגזרת פי $f'\left(x\right)$.
המחשה של העניין ניתן למצוא באותו סרטון של 3blue1brown שהבאתי עבור כלל לייבניץ.

למה 2.10. תהא f פונקציה הפיכה, אם f גזירה בנקודה $a\in\mathbb{R}$ וגם f^{-1} גזירה ב-$b:=f\left(a\right)$ אז מכלל השרשרת נובע ש-$\left(f^{-1}\right)'\left(f\left(a\right)\right)\cdot f'\left(a\right)=\mathrm{Id}'\left(a\right)=1$ ולכן:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(b\right)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(b\right)\right)}=\frac{1}{f'\left(a\right)}$$

מסקנה 2.11. תהא f פונקציה הפיכה, אם f גזירה בנקודה $a\in\mathbb{R}$ ו-$f'\left(a\right)=0$ אז f^{-1} אינה גזירה ב-$f\left(a\right)$.

משפט 2.12. גזירת פונקציה הופכית

תהא $f:A\to B$ פונקציה הפיכה, לכל $b\in B$ כך ש-f גזירה ב-$f^{-1}\left(b\right)$ וגם $f'\left(f^{-1}\left(b\right)\right)\neq 0$ מתקיים:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(b\right)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(b\right)\right)}$$

♣ האינטואיציה למשפט היא שהגרף של f^{-1} הוא שיקוף הגרף של f ביחס לאלכסון הראשי, כלומר כדי לקבל את הגרף של f^{-1} מהגרף של f כל שעלינו לעשות הוא להחליף בין השמות של הצירים; מסיבה זו השיפועים בין כל שתי נקודות (שהם תוצאת החלקה של הפרש ה-y-ים בהפרש ה-x-ים) הופכיים זה לזה וממילא גם שיפועי המשיקים.

2.3 הסתכלות אחרת על נגזרות

♣ נשים לב שאם פונקציה f גזירה בנקודה $a\in\mathbb{R}$ אז לפונקציה $\Delta_{f,a}$ יש נקודת אי-רציפות סליקה ב-a, תובנה זו הובילה את המתמטיקאי קונסטנטין קרתיאודורי להסיק ש-f רציפה ב-a אם"ם קיים $l\in\mathbb{R}$ כך שהפונקציה $\mathcal{S}_{f,a}:A\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $t\in A$):

$$\mathcal{S}_{f,a}\left(t\right)=\begin{cases}\Delta_{f,a}\left(t\right) & t\neq a\\ l & t=a\end{cases}$$

רציפה ובמקרה כזה מתקיים $f'\left(a\right)=\mathcal{S}_{f,a}\left(a\right)=l$.

משפט 2.13. אפיון לגזירות של פונקציה בנקודה

פונקציה f גזירה בנקודה $a\in\mathbb{R}$ אם"ם קיימת פונקציה $\mathcal{S}_{f,a}$ רציפה ב-a כך שמתקיים $f\left(t\right)=f\left(a\right)+\mathcal{S}_{f,a}\left(t\right)\cdot\left(t-a\right)$ לכל t בסביבה כלשהי של a, ואז מתקיים גם:

$$f'\left(a\right)=\mathcal{S}_{f,a}\left(a\right)$$

♣ המשפט הנ"ל מקל עלינו בהוכחת כללי גזירה, ראו פירוט בקובץ ההוכחות.

3 נגזרות של פונקציות אלמנטריות

3.1 נגזרות של פולינומים (נגזרות במעריך טבעי)

טענה 3.1. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ותהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f\left(x\right):=ax+b$ לכל $x\in\mathbb{R}$ (פונקציה ליניארית), מתקיים $f'\left(x\right)=a$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

טענה 3.2. יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f\left(x\right):=x^{n}$ לכל $x\in\mathbb{R}$, מתקיים $f'\left(x\right)=n\cdot x^{n-1}$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

מסקנה 3.3. לכל פולינום $p\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}a_{k}\cdot x^{k}\in\mathbb{R}\left[x\right]$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$p'\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{k}\cdot k\cdot x^{k-1}$$

♣ כדי שהטענה והמסקנה האחרונות תהיינה נכונה עבור $x=0$ ו-$n=1$ עלינו להגדיר $0^{0}:=1$ (למרות שניתן גם להגדיר $0^{0}:=0$ מבלי לקבל סתירה לאקסיומות השדה), הדבר תלוי במוסכמה ובהקשר.

3.2 נגזרות במעריך רציונלי

טענה 3.4. יהי $m\in\mathbb{Z}$ ותהא $f:\mathbb{R}\setminus\left\{ 0\right\} \to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f\left(x\right):=x^{m}$ לכל $0\neq x\in\mathbb{R}$, מתקיים $f'\left(x\right)=m\cdot x^{m-1}$ לכל $0\neq x\in\mathbb{R}$.

טענה 3.5. יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:\left(0,\infty\right)\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f\left(x\right):=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ לכל $x\in\left(0,\infty\right)$, מתקיים (לכל $0<x\in\mathbb{R}$):

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{n}\cdot x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}=\frac{1}{n}\cdot x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)}$$

מסקנה 3.6. יהי $q\in\mathbb{Q}$ ותהא $f:\left(0,\infty\right)\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f\left(x\right):=x^{q}$ לכל $x\in\left(0,\infty\right)$, מתקיים (לכל $0<x\in\mathbb{R}$):

$$f'\left(x\right)=q\cdot x^{q-1}$$

3.3 נגזרות במעריך ממשי, של פונקציות מעריכיות ושל לוגריתמים

למה 3.7. לכל $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ מתקיים $1+x-2x^{2}\leq\exp\left(x\right)\leq1+x+2x^{2}$.

טענה 3.8. $\exp$ גזירה ב-0 ומתקיים $\exp'\left(0\right)=1$.

טענה 3.9. $\exp$ גזירה בכל מקום ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\exp'\left(x\right)=\exp\left(x\right)$.

מסקנה 3.10. יהי $0<a\in\mathbb{R}$ ותהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f\left(x\right):=a^{x}$, מתקיים (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$f'\left(x\right)=\ln\left(a\right)\cdot a^{x}$$

טענה 3.11. לכל $0<x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\ln'\left(x\right)=\frac{1}{x}$.

מסקנה 3.12. לכל $0<a\in\mathbb{R}$ השונה מ-1 ולכל $0<x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\log_{a}'\left(x\right)=\frac{1}{x\cdot\ln\left(a\right)}$$

מסקנה 3.13. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ ותהא $f:\left(0,\infty\right)\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f\left(x\right):=x^{\alpha}$ לכל $0<x\in\mathbb{R}$, מתקיים (לכל $0<x\in\mathbb{R}$):

$$f'\left(x\right)=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

3.4 הנגזרות של הפונקציות הטריגונומטריות

טענה 3.14. לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\sin'(x)=\cos(x)$.

מסקנה 3.15. לכל $x\in(-1,1)$ מתקיים:

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\cos(\arcsin(x))}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

טענה 3.16. לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\cos'(x)=-\sin(x)$.

מסקנה 3.17. לכל $x\in(-1,1)$ מתקיים:

$$\arccos'(x)=\frac{1}{-\sin(\arccos(x))}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

מסקנה 3.18. לכל $x\in\mathbb{R}$ כך ש-$\cos(x)\neq 0$ מתקיים:

$$\tan'(x)=\frac{\cos^2(x)-(-\sin(x))\cdot\sin(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

מסקנה 3.19. לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\arctan'(x)&=\left(\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}\right)^{-1}=\cos^2(\arctan(x))\\&=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan x)}}\right)^2=\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

3.5 טבלה מסכמת

פונקציה	נגזרת	מקרים פרטיים והערות
$ax+b$	a	הנגזרת של קבועה היא 0 ושל הזהות היא 1.
x^α	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	ניתן להסיק את הנגזרת של כל פולינום.
[4]a^x	$\ln(a)\cdot a^x$	$\exp'(x)=\exp(x)$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)\cdot x}$	$\ln'(x)=\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	הטענות עבור שלוש הפונקציות
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	הללו מופיעות בקובץ[5]
$\operatorname{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	"הפונקציות ההיפרבוליות".

[4] $a\neq 1$, אחרת הנגזרת היא פונקציית האפס.

[5] הקובץ נמצא בתיקייה של אינפי' 2 מפני שהוא כולל מעט עיסוק בטורים ומפני שאכן למדנו על הפונקציות ההיפרבוליות רק באינפי' 2.

4 יחסי הגומלין בין פונקציה לנגזרתה

4.1 התחלה: משפט פרמה ומשפט רול

טענה 4.1. תהא f פונקציה, אם $x \in \mathbb{R}$ היא נקודת קיצון של f ו-f גזירה ב-x אז $f'(x) = 0$.

מסקנה 4.2. משפט פרמה

אם $a \in \mathbb{R}$ היא נקודת קיצון (מקסימום/מינימום) מקומית של פונקציה f ו-f גזירה ב-a אז $f'(a) = 0$.

- ♣ ממשפט פרמה נובע שכל נקודת קיצון היא נקודה קריטית, זו כמובן הסיבה להגדרה של נקודות קריטיות ככאלה שבהן הנגזרת מתאפסת.
- ♣ משפט פרמה נכון גם עבור נגזרות חד-צדדיות.

משפט 4.3. משפט רול[6]

תהא f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b), אם $f(a) = f(b)$ אז קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש-$f'(c) = 0$.

מסקנה 4.4. יהי $p \in \mathbb{R}[x]$ פולינום מדרגה $n \in \mathbb{N}$, ל-p יש לכל היותר n שורשים שונים, כלומר $|\{x \in \mathbb{R} \mid p(x) = 0\}| \leq n$.

4.2 משפט הערך הממוצע של לגראנז'

משפט 4.5. משפט הערך הממוצע של לגראנז'[7]

תהא f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b), קיימת נקודה $c \in (a, b)$ המקיימת:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

מסקנה 4.6. תהא $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ פונקציה, אם $f'(x) = 0$ לכל $x \in (a, b)$ אז f היא פונקציה קבועה.

מסקנה 4.7. תהיינה f ו-g פונקציות המוגדרות על קטע פתוח[8] I וגזירות ב-I, אם $f'(x) = g'(x)$ לכל x בקטע אז קיים $C \in \mathbb{R}$ כך ש-$f = g + C$.

מסקנה 4.8. תהא $f : A \to B$ פונקציה גזירה, אם f' היא פונקציה קבועה אז קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש-$f(x) = ax + b$ לכל $x \in A$, כלומר f היא פונקציה ליניארית.

מסקנה 4.9. תהא f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ וגזירה ב-(a, b).

- אם $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in (a, b)$ אז f מונוטונית עולה ב-(a, b).
- אם $f'(x) \leq 0$ לכל $x \in (a, b)$ אז f מונוטונית יורדת ב-(a, b).
- אם $f'(x) > 0$ לכל $x \in (a, b)$ אז f עולה ממש ב-(a, b).
- אם $f'(x) < 0$ לכל $x \in (a, b)$ אז f יורדת ממש ב-(a, b).

---

[6] ערך בוויקיפדיה: מישל רול.
[7] ערך בוויקיפדיה: ז'וזף-לואי לגראנז'.
[8] או על קרן פתוחה/כל הישר.

מסקנה 4.10. תהא f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ וגזירה ב-(a,b).

- אם $f'(x)\geq 0$ לכל $x\in(a,b)$ אז f מונוטונית עולה ב-$[a,b]$.
- אם $f'(x)\geq 0$ לכל $x\in(a,b)$ אז f מונוטונית יורדת ב-$[a,b]$.
- אם $f'(x)>0$ לכל $x\in(a,b)$ אז f עולה ממש ב-$[a,b]$.
- אם $f'(x)<0$ לכל $x\in(a,b)$ אז f יורדת ממש ב-$[a,b]$.

למה 4.11. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה של $a\in\mathbb{R}$.

- אם קיימת סביבה שמאלית של a שבה f יורדת וקיימת סביבה ימנית של a שבה f עולה אז a היא נקודת מינימום מקומית של f.
- אם קיימת סביבה שמאלית של a שבה f עולה וקיימת סביבה ימנית של a שבה f יורדת אז a היא נקודת מקסימום מקומית של f.

טענה 4.12. תהא f פונקציה גזירה פעמיים בנקודה $a\in\mathbb{R}$ כך ש-a היא נקודה קריטית של f.

- אם $f''(a)>0$ אז a היא נקודת מינימום מקומית של f.
- אם $f''(a)<0$ אז a היא נקודת מקסימום מקומית של f.

טענה 4.13. תהא f פונקציה גזירה פעמיים בנקודה $a\in\mathbb{R}$.

- אם $a\in\mathbb{R}$ היא נקודת מינימום מקומית של f אז $f''(a)\geq 0$.
- אם $a\in\mathbb{R}$ היא נקודת מקסימום מקומית של f אז $f''(a)\leq 0$.

טענה 4.14. [9] תהא f פונקציה גזירה על קטע פתוח[10] I.

- אם f' מונוטונית עולה ב-I אז f קמורה ב-I.
- אם f' מונוטונית יורדת ב-I אז f קעורה ב-I.

מסקנה 4.15. תהא f פונקציה גזירה פעמיים על קטע פתוח[11] I.

- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f''(x)\geq 0$ אז f קמורה ב-I.
- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f''(x)\leq 0$ אז f קעורה ב-I.

♣ מכאן שאם x_0 היא נקודת פיתול של f אז f'' מחליפה סימן ב-x_0.

משפט 4.16. תהא f פונקציה רציפה בנקודה $a\in\mathbb{R}$, אם הגבול $\lim\limits_{x\to a}f'(a)$ קיים אז f גזירה ב-a ומתקיים:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}f'(a)$$

כלומר לפונקציית הנגזרת אין ולו נקודת אי-רציפות סליקה אחת (כשמגדירים אותה על התחום המרבי).

♣ אצל יורם הוכחנו באמצעות משפט דארבו (בהמשך), שלפונקציית הנגזרת אין גם נקודות אי-רציפות מסדר ראשון ומכאן שנקודות אי-רציפות של נגזרת (אם הן קיימות) הן מסדר שני.

[9] טענה זו והמסקנה שאחריה נלמדו אצל יורם.
[10] או על קרן פתוחה/כל הישר.
[11] או על קרן פתוחה/כל הישר.

4.3 משפט הערך הממוצע של קושי ומשפט דארבו

משפט 4.17. משפט הערך הממוצע של קושי

תהיינה f ו-g פונקציות רציפות בקטע סגור $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ וגזירות בקטע הפתוח (a,b), קיים $c\in(a,b)$ המקיים:

$$\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)\cdot g'\left(c\right)=\left(g\left(b\right)-g\left(a\right)\right)\cdot f'\left(c\right)$$

♣ אצל יורם למדנו גרסה קצת אחרת: תהיינה f ו-g פונקציות רציפות בקטע סגור $[a,b]$ וגזירות בקטע הפתוח (a,b), אם לכל $x\in(a,b)$ מתקיים $g'\left(x\right)\neq 0$ אזי $g\left(a\right)\neq g\left(b\right)$ וגם קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך שמתקיים:

$$\frac{f'\left(c\right)}{g'\left(c\right)}=\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{g\left(b\right)-g\left(a\right)}$$

נשים לב שבניסוח זה רואים בבירור שהמשפט של קושי הוא הכללה של משפט הערך הממוצע של לגראנז': נציב $g=\mathrm{Id}$.

משפט 4.18. משפט דארבו[12]

תהא f פונקציה גזירה בקטע פתוח (a,b) כך שבנוסף $f'\left(a^{+}\right)$ ו-$f'\left(b^{-}\right)$ קיימים (f גזירה ב-a מימין וב-b משמאל), לכל t השייך לקטע הפתוח שבין $f'\left(a^{+}\right)$ ו-$f'\left(b^{-}\right)$[13] קיים $x\in(a,b)$ כך ש-$f'\left(x\right)=t$.

♣ משפט דארבו הוא כמין משפט "ערך ביניים" לנגזרות והוא מגביל מאד את קבוצת הפונקציות שהן נגזרות של פונקציות אחרות, לא כל פונקציה יכולה להיות נגזרת!

מסקנה 4.19. [14] תהא f פונקציה גזירה בקטע פתוח (a,b), ל-f' אין נקודות אי-רציפות סליקות או נקודות אי-רציפות מסדר ראשון.

---

[12] ערך בוויקיפדיה: ז'אן גסטון דארבו.

[13] אם $f'\left(a^{-}\right)=f'\left(b^{+}\right)$ אז המשפט מתקיים באופן ריק ומבחינה אינטואיטיבית ניתן לומר שהוא מתקיים תמיד עבור הנגזרות החד-צדדיות בקצוות משום שהן עצמן מקבלות את הערך הדרוש.

[14] מסקנה זו נלמדה אצל יורם.

4.4 משוואות דיפרנציאליות על קצה המזלג

טענה 4.20. תהא $f:A\to B$ פונקציה גזירה כך שקיים $k\in\mathbb{R}$ המקיים $f'(x)=k\cdot f(x)$ לכל $x\in A$[15], קיים $c\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in A$ מתקיים $f(x)=c\cdot e^{kx}$.

טענה 4.21. תהא $f:A\to B$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x)=f(x)$ לכל $x\in A$, קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים (לכל $x\in A$):

$$f(x)=a\cdot e^{x}+b\cdot e^{-x}$$

טענה 4.22. תהא $f:A\to B$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x)=-f(x)$ לכל $x\in A$, קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים (לכל $x\in A$):

$$f(x)=a\cdot\sin(x)+b\cdot\cos(x)$$

מסקנה 4.23. תהא $f:A\to B$ פונקציה גזירה פעמיים כך שקיים $k\in\mathbb{R}$ המקיים $f''(x)=k\cdot f(x)$[16] ונסמן $\omega:=\sqrt{|k|}$.

- אם $k>0$ אז קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים (לכל $x\in A$):

$$f(x)=a\cdot e^{\omega x}+b\cdot e^{-\omega x}$$

- אם $k<0$ אז קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים (לכל $x\in A$):

$$f(x)=a\cdot\sin(\omega x)+b\cdot\cos(\omega x)$$

- אם $k=0$ אז קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$f(x)=ax+b$ לכל $x\in A$.

[15] מהגדרה k כזה יחיד אלא אם f היא פונקציית האפס.

[16] ושוב, מהגדרה k כזה יחיד אלא אם f היא פונקציית האפס.

5 כלל לופיטל

♣ תהיינה f ו-g פונקציות כך שהגבול (במובן הרחב) של f ב-a הוא l וזה של g הוא m[17], כלומר:

$$l:=\lim_{x\to a}f\left(x\right),\ \ m:=\lim_{x\to a}g\left(x\right)$$

ראינו שמתקיים:

מס'	תנאים	"צורת הגבול"	$\lim\limits_{x\to a}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$	נימוקים
1	$l,m\in\mathbb{R}$ ו-$m\neq0$	$\frac{l}{m}$ $\left(\frac{0}{m}\right)$	$\frac{l}{m}$	אריתמטיקה של גבולות
2	$l=\pm\infty$ ו-$0<m\in\mathbb{R}$[18]	$\frac{\pm\infty}{m}$	$\pm\infty$	מקרה 6
3	$0<l\in\mathbb{R}$, $m=0$ ו-g חיובית[19]	$\frac{l}{0}$	∞	מקרה 7
4	$l=\pm\infty$, $m=0$ ו-g חיובית[20]	$\frac{\pm\infty}{0}$	$\pm\infty$	מקרה 7
5	$l\in\mathbb{R}$ ו-$m=\pm\infty$	$\frac{l}{\pm\infty}$ $\left(\frac{0}{\pm\infty}\right)$	0	מקרה 8
6	$l=\pm\infty$ ו-g חסומה מלרע ע"י חסם חיובי[21]	$\frac{\pm\infty}{M}$	$\pm\infty$	כלל המכפלה
7	f חסומה מלרע ע"י חסם חיובי, $m=0$ ו-g חיובית[22]	$\frac{M}{0}$	∞	כלל המכפלה[23]
8	f חסומה ו-$m=\pm\infty$	$\frac{M}{\pm\infty}$	0	כלל אפסה וחסומה[24]

אבל מה קורה בגבולות מהצורה $\frac{0}{0}$ או $\frac{\infty}{\infty}$[25]? כאן בא לעזרתנו כלל לופיטל[26].

משפט 5.1. כלל לופיטל לגבול של פונקציה בנקודה
תהיינה $f,g:A\to B$ שתי פונקציות כך ש-A מכילה סביבה מנוקבת של נקודה $a\in\mathbb{R}$ ובנוסף f ו-g גזירות בסביבה זו.

- אם $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=0$ וגם הגבול $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$ קיים (במובן הרחב) אז מתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to a}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$$

- אם $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=\pm\infty$ וגם הגבול $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$ קיים (במובן הרחב[27]) אז מתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to a}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$$

♣ כלל לופיטל לגבול של פונקציה בנקודה נכון גם עבור גבולות חד-צדדיים (ואז ניתן להסתפק בסביבה חד-צדדית של a שבה f ו-g גזירות).

---

[17] מדובר בגבולות במובן הרחב: ייתכן ש-a, l או m הם סימון ל-$\pm\infty$.
[18] ראה הערה במקרה 6 מה קורה כאשר $m<0$.
[19] ראה הערה במקרה 7 מה קורה כאשר $l<0$ או ש-g שלילית.
[20] ראה הערה במקרה 7 מה קורה כאשר g שלילית.
[21] אם g חסומה מלעיל ע"י חסם שלילי אז הגבול הוא $\mp\infty$.
[22] אם f חסומה מלעיל ע"י חסם שלילי או ש-g שלילית אז הגבול הוא $-\infty$, אך אם שניהם מתקיימים הגבול נשאר ∞.
[23] הגבול של $\frac{1}{g}$ הוא ∞.
[24] הגבול של $\frac{1}{g}$ הוא 0.
[25] גבולות מהצורה $\frac{-\infty}{\infty}$ או מהצורה $\frac{\infty}{-\infty}$ שקולים לגבולות מהצורה $-\frac{\infty}{\infty}$, וגבולות מהצורה $\frac{-\infty}{-\infty}$ שקולים לגבולות מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$.
[26] ערך בוויקיפדיה: המרקיז דה לופיטל, למעשה מי שגילה את כלל לופיטל היה יוהאן ברנולי שהיה המורה של לופיטל, הכלל נקרא על שמו של לופיטל מפני שקנה מברנולי את הבלעדיות על תגליותיו וכך הכלל התפרסם לראשונה בספר שכתב לופיטל (ראו בוויקיפדיה בערכים הנ"ל ובערך כלל לופיטל.
[27] לא ייתכן שהגבול של מנת הנגזרות הוא $-\infty$, הוכחה לכך נמצאת בקובץ ההוכחות (בהוכחה של סעיף זה).

משפט 5.2. כלל לופיטל לגבול של פונקציה ב-$\pm\infty$
תהיינה $f,g:A\to B$ שתי פונקציות.

- נניח ש-A מכילה קרן ימנית כך ש-f ו-g גזירות בכל נקודה בקרן זו.
  - אם $\lim_{x\to\infty} g\left(x\right)=\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=0$ וגם הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$ קיים (במובן הרחב) אז מתקיים:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$$
  - אם $\lim_{x\to\infty} g\left(x\right)=\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=\pm\infty$ וגם הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$ קיים (במובן הרחב) אז מתקיים:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$$

- נניח ש-A מכילה קרן שמאלית כך ש-f ו-g גזירות בכל נקודה בקרן זו.
  - אם $\lim_{x\to-\infty} g\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=0$ וגם הגבול $\lim_{x\to-\infty}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$ קיים (במובן הרחב) אז מתקיים:
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$$
  - אם $\lim_{x\to-\infty} g\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\pm\infty$ וגם הגבול $\lim_{x\to-\infty}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$ קיים (במובן הרחב) אז מתקיים:
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$$

♣ הרעיון מאחורי כלל לופיטל הוא שבמקרים כאלה אנו בעצם שואלים מי מבין הפונקציות "מנצחת", מי שואפת מהר יותר ל-0 או ל-$\pm\infty$, כלומר מה שקובע הוא **קצב השינוי** של הפונקציות הלא הוא הנגזרת!

♣ ישנם מקרים נוספים (מלבד מנת פונקציות) שבהם יש לנו שתי פונקציות ה"מתחרות" ביניהן כשהן "מושכות" את הגבול לכיוונים מנוגדים, לדוגמה:

- $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=0$ ו-$\lim_{x\to a} g\left(x\right)=\pm\infty$ כשהגבול המבוקש הוא $\lim_{x\to a} f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)$ ("צורת הגבול" היא $0\cdot\pm\infty$).
- $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=1$ ו-$\lim_{x\to a} g\left(a\right)=\pm\infty$ כשהגבול המבוקש הוא $\lim_{x\to a} f\left(x\right)^{g\left(x\right)}$ ("צורת הגבול" היא $1^{\pm\infty}$).

את המקרה הראשון קל להמיר ללופיטל:
$$\lim_{x\to a} f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)=\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)}{\frac{1}{g\left(x\right)}}$$
ובשביל המקרה השני יש להשתמש בשיטה הבאה[28]:
$$\lim_{x\to a} f\left(x\right)^{g\left(x\right)}=\lim_{x\to a}\exp\left(\ln\left(f\left(x\right)^{g\left(x\right)}\right)\right)=\lim_{x\to a}\exp\left(g\left(x\right)\cdot\ln\left(f\left(x\right)\right)\right)=\exp\left(\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(f\left(x\right)\right)}{\frac{1}{g\left(x\right)}}\right)$$

[28] נכונות השיטה נובעת ממשפט ההצבה בגבולות.

משפט 5.3. תהיינה f ו-g פונקציות גזירות בנקודה $a\in\mathbb{R}$ כך ש-$f(a)=g(a)=0$ ו-$g'(a)\neq 0$, מתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

- ♣ נשים לב להבדלים בין משפט זה לכלל לופיטל: כאן דרשנו ש-f ו-g תהיינה מוגדרות בסביבה מלאה של a (ולא רק בסביבה מנוקבת), בנוסף דרשנו שיתקיים $g'(a)\neq 0$ (ולא שגבול מנת הנגזרות קיים) וההבדל האחרון הוא שקיבלנו שהגבול שווה למנת הנגזרות (ולא שהוא שווה ל**גבול** של מנת הנגזרות).
- ♣ גם משפט זה נכון עבור גבולות חד-צדדיים (עם נגזרות חד-צדדיות).

מסקנה 5.4. [29] תהיינה f ו-g פונקציות גזירות n פעמים בנקודה $a\in\mathbb{R}$ ומקיימות:

$$g(a)=g'(a)=g''(a)=g^{(3)}(a)=\ldots=g^{(n-1)}(a)=0,\ \ g^{(n)}(a)\neq 0$$

$$f(a)=f'(a)=f''(a)=f^{(3)}(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$$

קיימים הגבול והשוויון:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

[29] מסקנה זו נלמדה אצל יורם.

5.1 קצב הגידול של פולינומים, פונקציית האקספוננט והלוגריתם הטבעי

משפט 5.5. יהיו $p,q\in\mathbb{R}\left[x\right]$ שני פולינומים ויהיו $a_{0},a_{1},\ldots,a_{n},b_{0},b_{1},\ldots,b_{m}\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$p\left(x\right)=a_{n}\cdot x^{n}+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_{1}\cdot x+a_{0}$$
$$q\left(x\right)=b_{m}\cdot x^{m}+b_{m-1}\cdot x^{m-1}+\ldots+b_{1}\cdot x+b_{0}$$

נסמן $j:=\min\left\{ n\geq i\in\mathbb{N}_{0}\mid a_{i}\neq0\right\}$ ו-$k:=\min\left\{ m\geq i\in\mathbb{N}_{0}\mid b_{i}\neq0\right\}$, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

- אם $k<j$ אז $\lim\limits_{x\to0}\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}=0$.
- אם $k=j$ אז $\lim\limits_{x\to0}\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}=\frac{a_{k}}{b_{k}}$.
- נניח ש-$k>j$,
  - אם $\text{sgn}\left(a_{k}\right)=\text{sgn}\left(b_{j}\right)$ אז $\lim\limits_{x\to0}\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}=\infty$.
  - אם $\text{sgn}\left(a_{k}\right)\neq\text{sgn}\left(b_{j}\right)$ אז $\lim\limits_{x\to0}\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}=-\infty$.

משפט 5.6. יהיו $0<\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^{\alpha}\left(x\right)}{x^{\beta}}=0$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{\exp^{\beta}\left(x\right)}=0$$
$$\lim_{x\to0^{+}}x^{\beta}\cdot\ln^{\alpha}\left(x\right)=0$$

מסקנה 5.7. לכל פולינום $p\in\mathbb{R}\left[x\right]$ מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p\left(x\right)}{e^{x}}$$

6 פולינומי טיילור

למה 6.1. תהא f פונקציה גזירה n פעמים בנקודה $a\in\mathbb{R}$, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $P'_{n,f,a}\left(x\right)=P_{n-1,f',a}\left(x\right)$.

משפט 6.2. תהא f פונקציה גזירה n פעמים בנקודה $a\in\mathbb{R}$, הפולינום $P_{n,f,a}$ שקול ל-f ב-a עד כדי סדר n-י, כלומר:

$$\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-P_{n,f,a}\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{n}}=0$$

♣ בתרגול האחרון של אופנר[30] ראינו שהמשפט הזה מאפשר חישוב גבולות באופן יעיל יחסית: נניח שיש לנו חישוב גבול "מגעיל" למדי, נציג כל פונקציה "מגעילה" f שנמצאת בגבול כ-$P_{n,f,a}+R_{n,f,a}$ ואז יתכן שיקל עלינו לחשב את הגבול מפני ש-$P_{n,f,a}$ הוא פולינום וככזה הוא פונקציה "יפה" ועל $R_{n,f,a}$ אנחנו יודעים את המשפט הנ"ל. אין פה ממש אלגוריתם אלא רק רעיון ולכן לא יכולתי לכתוב יותר מזה.

למה 6.3. תהיינה f ו-g שתי פונקציות שוות עד כדי סדר n בנקודה $a\in\mathbb{R}$, לכל $n\geq k\in\mathbb{N}_{0}$ מתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)-g\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{k}}=0$$

סימון: נסמן ב-$\mathbb{R}_{\leq n}\left[x\right]$ את קבוצת הפולינומים מעל $\mathbb{R}$ שהחזקה הגדולה ביותר שלהן קטנה או שווה ל-n.

טענה 6.4. יהי $n\in\mathbb{N}_{0}$ ויהיו $P,Q\in\mathbb{R}_{\leq n}\left[x\right]$ פולינומים השווים זה לזה עד כדי סדר n בנקודה $a\in\mathbb{R}$, מתקיים $P=Q$.

מסקנה 6.5. תהא f פונקציה גזירה n פעמים בנקודה $a\in\mathbb{R}$ ויהי $Q\in\mathbb{R}_{\leq n}\left[x\right]$ כך ש-Q שווה ל-$P_{f,n,a}$ עד כדי סדר n ב-a, מתקיים $Q=P_{n,f,a}$; בפרט, לכל פולינום $g\in\mathbb{R}\left[x\right]$ מדרגה $n\in\mathbb{N}_{0}$ מתקיים $g=P_{n,g,a}$ לכל $a\in\mathbb{R}$.

♣ "אם זה נראה כמו פולינום טיילור, הולך כמו פולינום טיילור ומגעגע כמו פולינום טיילור אז זה פולינום טיילור." (רז קופרמן).

משפט 6.6. תהיינה f,g פונקציות גזירות n פעמים בנקודה $a\in\mathbb{R}$, מכאן ש-$P_{n.f+g,a}=P_{n,f,a}+P_{n,g,a}$.

סימון: תהא $a\in\mathbb{R}$ נקודה, לכל פולינום $P\in\mathbb{R}\left[x\right]$ מדרגה $N\in\mathbb{N}_{0}$ הנתון ע"י[31]:

$$P\left(x\right)=\sum_{k=0}^{N}a_{k}\left(x-a\right)^{k}$$

ולכל $n\in\mathbb{N}_{0}$, נסמן ב-$\left[P\right]_{n,a}$ את ה"קיטוע" של P ב-a המוגדר ע"י:

$$\left[P\right]_{n,a}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\min\left\{n,N\right\}}a_{k}\left(x-a\right)^{k}$$

למה 6.7. תהא f פונקציה גזירה n פעמים בנקודה $a\in\mathbb{R}$, יהי $N\in\mathbb{N}$ ויהי $Q\in\mathbb{R}_{\leq N}\left[x\right]$, אם f שווה ל-Q עד כדי סדר n ב-a אז $\left[Q\right]_{n,a}=P_{n,f,a}$.

משפט 6.8. תהיינה f ו-g פונקציות גזירות n פעמים בנקודה $a\in\mathbb{R}$, מתקיים: $P_{n.f\cdot g,a}=\left[P_{n,f,a}\cdot P_{n,g,a}\right]_{n,a}$.

[30] דניאל אופנר היה המתרגל באינפי' 2 (סמסטר א' תשפ"ג).
[31] ראינו לעיל שניתן להציג כל פולינום בצורה כזו.

משפט 6.9. [32] תהא f פונקציה גזירה n פעמים בנקודה a כך שקיימת סביבה מנוקבת U של a כך ש-$f(a) \neq f(x)$ לכל $x \in U$, ותהא g פונקציה הגזירה n פעמים ב-$f(a)$; מתקיים:

$$P_{n,g\circ f,a} = \left[P_{n,g,f(a)} \circ P_{n,f,a}\right]_{n,a}$$

משפט 6.10. פולינומי טיילור של פונקציות אלמנטריות

לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$P_{n,\sin,a}(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad P_{n,\exp,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$P_{n,\cos,0}(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad P_{n,\ln,1}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{(x-1)^k}{k}$$

משפט 6.11. משפט טיילור[33]

יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבה מלאה U[34] של a[35], יהי $a \neq x \in U$; קיימת נקודה ξ בקטע הפתוח שבין a ל-x כך שניתן להציג את $R_{n,f,a}(x)$ בשתי הצורות הבאות:

- צורת לגראנז'-

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

- צורת קושי-

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-\xi)^n \cdot (x-a)$$

♣ נשים לב: העובדה שקיים ξ בקטע הפתוח שבין x ל-a המקיים את הנ"ל אינה עוזרת לנו הרבה אם אנחנו לא מסוגלים לחסום את הנגזרת ה-$n+1$ של f ב-ξ אך ורק על בסיס הידיעה אודות מיקומו, במילים אחרות ξ תלוי ב-x ולכן מה שקורה כאן הוא שהחלפנו משתנה אחד במשתנה אחר התלוי בו; הדוגמה הקלאסית עבור פונקציה שעבורה צורות השארית הנ"ל אינן עוזרות במאומה היא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

אם נפתח את פולינום טיילור של f סביב 0 נקבל את פולינום האפס והשארית תשאף ל-1 ככל שנתרחק מ-0.

♣ את מי מעניין משפט טיילור?

ובכן... את כל מי שמשתמש במחשבון! שאלתם את עצמכם כיצד המחשבון יודע כמה שווה $\sin(1)$? הרי לא ייתכן שהוא מחזיק את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור כל נקודה, אז איך המחשבון עושה זאת? התשובה היא שישנן פונקציות עבורן ניתן לחסום את השארית של פולינום טיילור[36] בגודל קטן כרצוננו בכל נקודה ובכך לתת את הערך של הפונקציה עד כדי הגודל החוסם את השארית[37]. בעמוד הבא מופיע חישוב של $\sin(1)$ בדיוק של אלפית (דוגמה 6.13).

---

[32] משפט זה נלמד אצל יורם.

[33] ערך בוויקיפדיה: ברוק טיילור.

[34] זו יכולה להיות גם סביבה מלאה חד-צדדית ואז הנגזרות ב-a הן חד-צדדיות.

[35] יש צורך בנגזרת ה-$n+1$ רק עבור סביבה מנוקבת של a.

[36] כשהוא מפותח סביב נקודה שבה קל לחשב את הנגזרות.

[37] יתכן כמובן שישנן דרכים טובות יותר שלא הכרנו בקורס זה, אך עבורנו דרך זו מספיקה בהחלט עבור כל הפונקציות האלמנטריות.

טענה 6.12. e אינו רציונלי.

דוגמה 6.13. חישוב של $\sin(1)$ **עד כדי דיוק של אלפית**
פולינום טיילור של $\sin$ מסדר n סביב 0 הוא:

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

אנחנו יודעים שלכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\left|\sin^{(n)}(x)\right| \leq 1$ ולכן לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים (עבור ξ כלשהו בקטע הפתוח המתאים):

$$|R_{n,\sin,0}(x)| = \left|\frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-0)^{n+1}\right| \leq \frac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

לכן אם נרצה לחשב את הערך שמקבלת $\sin$ ב-x עד כדי 10^{-m} עלינו למצוא $n \in \mathbb{N}$ שעבורו מתקיים:

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-m}$$

לדוגמה, נרצה לחשב את $\sin(1)$ (זה מזכיר לכם משהו?) עד כדי 10^{-3}, אנחנו יודעים שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|1|^{n+1} = 1$.
נשים לב שמתקיים $7! = 5,040$ וא"כ נקבל:

$$\frac{|1|^7}{7!} \leq \frac{1}{5,040} < 10^{-3}$$

ולכן יספיק לנו $n = 6$.

$$\Rightarrow \left|\sin(1) - \sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right| = \left|\sin(1) - \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{6+1}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot (1)^{2k+1}\right| < 10^{-3}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sin(1) &\approx \sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = \frac{(-1)^0}{(2\cdot 0+1)!} + \frac{(-1)^1}{(2\cdot 1+1)!} + \frac{(-1)^2}{(2\cdot 2+1)!} + \frac{(-1)^3}{(2\cdot 3+1)!} \\ &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = \frac{7! - 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 + 6\cdot 7 - 1}{7!} \\ &= \frac{5,040 - 840 + 42 - 1}{5,040} = \frac{4,200 + 41}{5,040} = \frac{4,241}{5,040}\end{aligned}$$