מרחבים מטריים - הוכחות נבחרות

חשבון אינפיניטסימלי (3) - 80415

מרצה: תמר (תמי) ציגלר

מתרגלים: אריה דויטש, קרן דניאל ואור קופרמן

סוכם ע"י שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ד, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 מרחבים מטריים ומרחבים נורמיים

1.1 מטריקה

משפט 1.1. אי-שוויון המשולש ההפוך
יהי $(\mathbb{X}, d)$ מרחב מטרי, לכל $x, y, z \in \mathbb{X}$ מתקיים $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$.

1.2 נורמה

טענה 1.2. יהיו $(V, \|\cdot\|_V)$ ו-$(W, \|\cdot\|_W)$ מרחבים נורמיים מעל אותו שדה, ותהא $T : V \to W$ העתקה ליניארית כך שהנורמה $\|T\|_{\text{op}}$ מוגדרת; לכל $v \in V$ מתקיים $\|T(v)\|_W \leq \|T\|_{\text{op}} \cdot \|v\|_V$.

טענה 1.3. יהיו $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ ו-$(U, \|\cdot\|_U)$ מרחבים נורמיים מעל אותו שדה, ותהיינה $T_1 : V \to W$ ו-$T_2 : W \to U$ העתקות ליניאריות כך ש-$\|T_1\|_{\text{op}}$ ו-$\|T_2\|_{\text{op}}$ מוגדרות; מתקיים $\|T_2 \circ T_1\|_{\text{op}} \leq \|T_2\|_{\text{op}} \cdot \|T_1\|_{\text{op}}$.

2 קבוצות במרחב מטרי

יהי $(\mathbb{X}, d)$ מרחב מטרי.

2.1 חסימות

למה 2.1. יהיו $x, y \in \mathbb{X}$ ויהיו $0 < r, s \in \mathbb{R}$, מתקיימים ארבעת הפסוקים הבאים:

1. $y \in B_r(x)$ אם"ם $x \in B_r(y)$.
2. $y \in \hat{B}_r(x)$ אם"ם $x \in \hat{B}_r(y)$.
3. אם $y \in B_\varepsilon(x)$ לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ אז $x = y$.
4. אם $d(x,y) + s \leq r$ אז $B_s(y) \subseteq B_r(x)$ ו-$B_s(x) \subseteq B_r(y)$.

♣ סעיפים 1 ו-2 נכונים גם עבור ספירות.

טענה 2.2. תהא $Y \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה חסומה, לכל $x \in \mathbb{X}$ קיים $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש-$Y \subseteq B_r(x)$.

למה 2.3. יהי $x \in \mathbb{X}$, כל כדור פתוח שמרכזו ב-x מכיל כדור סגור שמרכזו ב-x.

♣ כמובן שגם כדור סגור מכיל כדור פתוח ($B_r(x) \subseteq \hat{B}_r(x)$), החידוש הוא שגם כדור פתוח מכיל כדור סגור.

למה 2.4. תהא $Y \subseteq \mathbb{X}$ ויהיו $y \in Y$ ו-$0 < r \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$B_r^Y(y) = B_r^{\mathbb{X}}(y) \cap Y$$
$$\hat{B}_r^Y(y) = \hat{B}_r^{\mathbb{X}}(y) \cap Y$$
$$S_r^Y(y) = S_r^{\mathbb{X}}(y) \cap Y$$

מסקנה 2.5. תהא $\mathbb{X} \supseteq Y$ ותהא $A \subseteq Y$, A היא קבוצה פתוחה ב-Y (כלומר במרחב המטרי (Y, d_Y)) אם"ם קיימת קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{X}$ (פתוחה ב-$\mathbb{X}$) כך ש-$A = U \cap Y$.

♣ מסקנה מיידית היא שהמשפט נכון גם עבור קבוצות סגורות: תהא $Y \subseteq \mathbb{X}$ ותהא $A \subseteq Y$, A היא קבוצה **סגורה** ב-Y (כלומר במרחב המטרי (Y, d_Y)) אם"ם קיימת קבוצה **סגורה** $C \subseteq \mathbb{X}$ (סגורה ב-$\mathbb{X}$) כך ש-$A = C \cap Y$.

טענה 2.6. כל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה, וכל כדור סגור הוא קבוצה סגורה.

טענה 2.7. תהא A קבוצה של קבוצות פתוחות ב-$\mathbb{X}$, האיחוד של כל הקבוצות ב-A הוא קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{X}$.

♣ נשים לב לכך שיש כאן כמה אפשרויות:

- A יכולה להיות סופית ואז קיימות $U_1, U_2, \ldots, U_r \subseteq \mathbb{X}$ כך ש-$A = \{U_1, U_2, \ldots, U_r\}$, ואז האיחוד של כל הקבוצות שבה בה הוא הקבוצה:

$$\bigcup_{i=1}^{r} U_i$$

- A יכולה להיות אין-סופית בת-מנייה, כלומר ניתן לסדר את איבריה בסדרה אינסופית: $A = \{U_1, U_2, \ldots\}$, ואז האיחוד של כל הקבוצות שבה בה הוא הקבוצה:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

- A יכולה להיות אין-סופית שאינה בת-מנייה, כלומר א"א לסדר את איבריה בסדרה אינסופית, ואז האיחוד של כל הקבוצות שבה בה הוא הקבוצה:

$$\bigcup_{U \in A} U$$

בכל מקרה האיחוד של כל הקבוצות ב-A הוא הקבוצה:

$$\left\{ x \in \mathbb{X} \;\middle|\; \exists U \in A : x \in U \right\}$$

מסקנה 2.8. כל חיתוך של קבוצות סגורות ב-$\mathbb{X}$ הוא קבוצה סגורה - לא משנה אם מדובר באיחוד סופי, בן-מנייה או אפילו אין-סופי שאינו בן-מנייה.

טענה 2.9. חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

♣ זה לא נכון עבור חיתוך אין-סופי, לדוגמה (ב-$\mathbb{R}$ עם המטריקה האוקלידית):

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\}$$

מסקנה 2.10. איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.

טענה 2.11. תהא $U\subseteq\mathbb{X}$, U היא קבוצה פתוחה אם"ם ניתן להציג אותה כאיחוד של כדורים פתוחים, כלומר קיימת קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ כך שמתקיים:

$$U=\bigcup_{a\in A}B_{r_a}\left(a\right)$$

כאשר $0<r_a\in\mathbb{R}$ לכל $a\in A$.

טענה 2.12. יהי $\left(V,\left\Vert \cdot\right\Vert \right)$ מרחב נורמי, לכל $v\in V$ ולכל $0<r\in\mathbb{R}$ מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. $\overline{B_r\left(v\right)}=\hat{B}_r\left(v\right)$.
2. $\left(\hat{B}_r\left(v\right)\right)^\circ=B_r\left(v\right)$.
3. $\partial B_r\left(v\right)=\partial\hat{B}_r\left(v\right)=S_r\left(v\right)$.

♣ טענה זו אינה נכונה במרחב מטרי כללי.

את שלוש הטענות הבאות לא ראינו בכיתה.

טענה 2.13. תהא $A\subseteq\mathbb{X}$.

- הפנים של A (A°) הוא איחוד כל הקבוצות הפתוחות ב-$\mathbb{X}$ שמוכלות ב-A.
- החוץ של A הוא איחוד כל הקבוצות הפתוחות ב-$\mathbb{X}$ שזרות ל-A.
- הסגור של A ($\overline{A}$) הוא חיתוך כל הקבוצות הסגורות ב-$\mathbb{X}$ שמכילות את A.

טענה 2.14. לכל $A\subseteq\mathbb{X}$ מתקיים:

$$\partial A=\overline{A}\setminus A^\circ \qquad A^\circ\subseteq A\subseteq\overline{A}$$
$$\partial\left(A^\circ\right)\subseteq\partial A \qquad \left(A^\circ\right)^\circ=A^\circ$$
$$\partial\left(\overline{A}\right)\subseteq\partial A \qquad \overline{\left(\overline{A}\right)}=\overline{A}$$
$$\mathbb{X}\setminus\overline{A}=\left(\mathbb{X}\setminus A\right)^\circ \qquad A^\circ=A\setminus\partial A$$
$$\mathbb{X}\setminus A^\circ=\overline{\left(\mathbb{X}\setminus A\right)} \qquad \overline{A}=A\cup\partial A$$

טענה 2.15. תהא $A\subseteq\mathbb{X}$, A צפופה ב-$\mathbb{X}$ אם"ם $\overline{A}=\mathbb{X}$.

עד כאן הטענות שלא ראינו בכיתה.

טענה 2.16. איחוד סופי של קבוצות קומפקטיות הוא קבוצה קומפקטית.

טענה 2.17. כל מרחב מטרי קומפקטי הוא מרחב חסום לחלוטין.

הוכחה. נניח $\left(\mathbb{X},d\right)$ מרחב מטרי שאינו חסום לחלוטין, ויהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ כך שלא קיימת קבוצה סופית $Y\subseteq\mathbb{X}$ המהווה ε-רשת, מכאן ש-$\left(\mathbb{X},d\right)$ אינו קומפקטי - לכיסוי הפתוח $\bigcup_{x\in\mathbb{X}}B_\varepsilon\left(x\right)$ אין תת-כיסוי סופי. ■

מכאן ועד סוף הפרק מופיעות טענות שלא ראינו בכיתה.

טענה 2.18. כל תת-קבוצה של $\mathbb{X}$ היא איחוד זר של רכיבי הקשירות שלה.

טענה 2.19. רכיבי הקשירות של קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{X}$ הם קבוצות פתוחות.

מסקנה 2.20. כל קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}^k$ ניתנת להצגה כאיחוד סופי או בן-מנייה של קבוצות פתוחות וקשירות.

טענה 2.21. תהא $A \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה קשירה ותהא $B \subseteq A$, אם B פתוחה וסגורה אז $B = A$ או ש-$B = \emptyset$.

הוכחה. נניח ש-B פתוחה וסגורה, מכאן שגם $A \setminus B$ פתוחה וסגורה; כלומר A ניתנת להצגה כאיחוד זר של קבוצות פתוחות ($A = B \uplus (A \setminus B)$) ולכן אחת הקבוצות הללו ריקה, וממילא השנייה היא A עצמה. ■

3 סדרות

יהי $(\mathbb{X}, d)$ מרחב מטרי.

משפט 3.1. כל סדרה מתכנסת היא סדרה חסומה.

למעשה לא ראינו את המשפט הזה בכיתה אך הוא טריוויאלי.

משפט 3.2. תהא $C \subseteq \mathbb{X}$ תת-קבוצה, C היא קבוצה סגורה אם"ם לכל סדרה מתכנסת $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ שכל איבריה ב-C מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in C$$

♣ זו הסיבה לכך שקבוצה **סגורה** נקראת כך - היא **סגורה** לגבולות.

הוכחה.

- $\Leftarrow$
  נניח ש-C סגורה ותהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת, מהגדרת הגבול ומהגדרת נקודה חיצונית נובע ש-$\lim_{n\to\infty} x_n$ אינה נקודה חיצונית ל-C, ולכן מהיות C סגורה נובע ש-$\lim_{n\to\infty} x_n \in C$.

- $\Rightarrow$
  נניח שלכל סדרה מתכנסת שכל איבריה ב-C גם גבולה שייך ל-C, מהגדרת הגבול ומהגדרת נקודה חיצונית נובע שכל $x \in \mathbb{X}\setminus C$ היא נקודה חיצונית ל-C, כלומר C סגורה.

■

מסקנה 3.3. תהא $A \subseteq \mathbb{X}$, הסגור של A ($\bar{A}$) הוא קבוצת כל הגבולות של סדרות מתכנסות שכל איבריהן ב-A.

משפט 3.4. משפט הירושה
תהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה, אם $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$x \in \mathbb{X}$ אז גם כל תתי-הסדרות שלה מתכנסות ל-x; כמו כן, אם $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה אז גם כל תתי-הסדרות שלה חסומות.

טענה 3.5. תהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי, אם יש ל-$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ גבול חלקי אז היא מתכנסת.

הטענה האחרונה לא נלמדה בכיתה, אך היא די טריוויאלית, ואזדקק לה כדי להוכיח את השקילות בין קומפקטיות לקומפקטיות סדרתית מבלי להשתמש במושג השלמות.

הוכחה. נניח של-$(x_n)_{n=1}^{\infty}$יש גבול חלקי, ויהיו $(n_k)_{n=1}^{\infty}$ סדרת אינדקסים עולה ממש ו-$x \in \mathbb{X}$ כך ש-$x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.
יהי $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$, ויהיו $K, N \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים: $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ לכל $K < k \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ לכל $N < n, m \in \mathbb{N}$, ו-$N > n_K$.
מכאן שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ ולכל $K < k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$$

כלומר $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת. ■

משפט 3.6. יהיו $(\mathbb{X}_1,d_1),(\mathbb{X}_2,d_2)\ldots,(\mathbb{X}_k,d_k)$ מרחבים מטריים, ונסמן $\mathbb{X}:=\mathbb{X}_1\times\mathbb{X}_2\times\ldots\times\mathbb{X}_k$.
תהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-$\mathbb{X}$, ונסמן את הקואורדינטה ה-i של x_n ב-x_n^i (לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $k\geq i\in\mathbb{N}$).
$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת (ב-$\mathbb{X}$) אם"ם לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$ הסדרה $(x_n^i)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת (ב-$\mathbb{X}_i$), ובמקרה כזה מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\begin{bmatrix}\lim\limits_{n\to\infty}x_n^1\\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n^2\\ \vdots\\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n^k\end{bmatrix}$$

♣ כזכור, הסכמנו שטענות המדברות על מרחבי מכפלה מתייחסות למטריקות $d,\rho:\mathbb{X}\times\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ המוגדרות ע"י (לכל $x,y\in\mathbb{X}$):

$$d(x,y):\sum_{i=1}^{k}d_i(x_i,y_i)$$
$$\rho(x,y):=\max\{d_i(x_i,y_i)\mid k\geq i\in\mathbb{N}\}$$

את המשפט האחרון למדנו בכיתה בנוסח חלש יותר: רק עבור סדרות של נקודות ב-$\mathbb{R}^k$, אבל ההוכחה זהה לחלוטין לכל מרחב מכפלה עם מטריקה מהצורה הנ"ל.

הוכחה.

- $\Leftarrow$
  נניח ש-$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $x\in\mathbb{X}$. לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:
  $$d_i\left(x_n^i,x_i\right)\leq\rho(x_n,x)\leq d(x_n,x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$
  ומכאן ש-$\lim_{n\to\infty}x_n^i=x_i$.
- $\Rightarrow$
  נניח שלכל $k\geq i\in\mathbb{N}$ הסדרה $(x_n^i)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, ונסמן:
  $$y:=\begin{bmatrix}\lim\limits_{n\to\infty}x_n^1\\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n^2\\ \vdots\\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n^k\end{bmatrix}$$
  מאריתמטיקה של גבולות נובע כי:
  $$\lim_{n\to\infty}d(x_n,y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}d_i(x_i,y_i)=\sum_{i=1}^{k}\lim_{n\to\infty}d_i\left(x_n^i,y_n^i\right)=0$$
  ולכן ממשפט הכריך גם $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$.[1]

■

[1] העובדה שהגבול תופס גם עבור ρ נובע מהאי-שוויון שבכיוון הראשון בהוכחה.

טענה 3.7. כל מרחב מטרי קומפקטי סדרתית הוא מרחב חסום לחלוטין.

הוכחה. נניח ש-$(\mathbb{X},d)$ אינו חסום לחלוטין, ויהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ כך שלא קיימת קבוצה סופית $Y\subseteq\mathbb{X}$ המהווה ε-רשת, מכאן ש-$(\mathbb{X},d)$ אינו קומפקטי - לכיסוי הפתוח $\bigcup_{x\in\mathbb{X}}B_{\varepsilon}\left(x\right)$ אין תת-כיסוי סופי.

תהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-$\mathbb{X}$ המוגדרת באופן הבא: לכל $n\in\mathbb{N}$ יהי x_n כך ש-$x_n\notin B_{\varepsilon}\left(x_k\right)$ לכל $n>k\in\mathbb{N}$, מהגדרת ε נובע שאכן מתקיים:

$$\mathbb{X}\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}B_{\varepsilon}\left(x_k\right)$$

ולכן קיים x_n כזה. מהגדרת $(x_n)_{n=1}^{\infty}$לכל $L\in\mathbb{X}$ ולכל $N\in\mathbb{N}$ מתקיים $d\left(x_{N+1},L\right)+d\left(x_{N+2},L\right)\geq d\left(x_{N+1},x_{N+2}\right)>\varepsilon$ ולכן $\max\left\{d\left(x_{N+1},L\right),d\left(x_{N+2},L\right)\right\}>\frac{\varepsilon}{2}$, מכאן ש-$(\mathbb{X},d)$ אינו קומפקטי סדרתית. ∎

משפט 3.8. מרחב מטרי הוא קומפקטי אם"ם הוא קומפקטי סדרתית.

הוכחה.

- $\Leftarrow$
  נניח ש-$(\mathbb{X},d)$ קומפקטי, ותהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-$\mathbb{X}$.
  - נסמן $C_0:=\mathbb{X}$ ותהא $(C_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות סגורות המוגדרת באופן הבא:
    מטענה 2.17 נובע שלכל $k\in\mathbb{N}$ קיימת קבוצה סופית $A_k\subseteq\mathbb{X}$ המהווה $\frac{1}{k}$-רשת, תהא A_k כנ"ל ונסמן $Y_k:=\left\{y\in A_k\mid B_{\frac{1}{k}}\left(y\right)\cap C_{k-1}\neq\emptyset\right\}$.
    ע"פ השלב הקודם יש ב-C_{k-1} אין-סוף מאיברי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ובפרט C_{k-1} אינה ריקה, מכאן ש-Y_k אינה ריקה ויתרה מזאת קיים $y\in Y_k$ כך שיש ב-$B_{\frac{1}{k}}\left(y\right)\cap C_{k-1}$ אין-סוף מאיברי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$; נסמן עבור y כזה $C_k:=\hat{B_{\frac{1}{k}}}\left(y\right)\cap C_{k-1}$, ושוב C_k היא קבוצה סגורה ויש בה אין-סוף מאיברי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ובפרט אינה ריקה.
  - נניח בשלילה ש-$\bigcap_{k=1}^{\infty}C_k=\emptyset$, מכאן ש-$\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\mathbb{X}\setminus C_k\right)=\mathbb{X}$ - זהו כיסוי פתוח של $\mathbb{X}$ ולכן מהקומפקטיות של $\mathbb{X}$ נובע שיש לו תת-כיסוי סופי, מהגדרת $(C_k)_{k=0}^{\infty}$ נובע כי $\left(\mathbb{X}\setminus C_k\right)\subseteq\left(\mathbb{X}\setminus C_{k+1}\right)$ לכל $k\in\mathbb{N}_0$ ולכן קיים $k\in\mathbb{N}_0$ כך ש-$\mathbb{X}\setminus C_k=\mathbb{X}$ בסתירה לכך ש-$C_k\neq\emptyset$ לכל $k\in\mathbb{N}_0$; מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה וקיים $c\in\bigcap_{k=1}^{\infty}C_k$, א"כ יהי c כנ"ל.
  - נסמן $n_0:=0$ ותהא $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת אינדקסים עולה ממש המוגדרת באופן הבא: לכל $k\in\mathbb{N}$ יש ב-C_k אין-סוף מאיברי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, בפרט קיים $n_{k-1}<n\in\mathbb{N}$ כך ש-$x_n\in C_k$, נסמן עבור n כזה $n_k:=n$.
    לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $x_{n_k}\in C_k\subseteq\hat{B_{\frac{1}{k}}}\left(y\right)$ עבור $y\in\mathbb{X}$ כלשהו ולכן $d\left(x_{n_k},c\right)\leq\frac{2}{k}<\frac{3}{k}$, מכאן ש-$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=c$.
- $\Rightarrow$
  נניח ש-$(\mathbb{X},d)$ קומפקטי סדרתית, נניח בשלילה שהוא אינו קומפקטי, ויהי A כיסוי פתוח של $\mathbb{X}$ כך שאין ל-A תת-כיסוי סופי.
  - נסמן $B_0:=\mathbb{X}$ ותהא $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת כדורים המוגדרת באופן הבא:
    מהטענה הקודמת (3.7) נובע שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת קבוצה סופית $S_n\subseteq\mathbb{X}$ המהווה $\frac{1}{n}$-רשת, תהא S_k כנ"ל ונסמן $T_n:=\left\{y\in S_n\mid B_{\frac{1}{n}}\left(y\right)\cap B_{n-1}\neq\emptyset\right\}$.
    ע"פ השלב הקודם B_{n-1} היא קבוצה פתוחה ואין ל-A תת-כיסוי סופי של B_{n-1} ובפרט B_{n-1} אינה ריקה, מכאן ש-T_n אינה ריקה ויתרה מזאת קיים $y\in T_n$ כך שאין ל-A תת-כיסוי סופי של $B_{\frac{1}{n}}\left(y\right)\cap B_{n-1}$; עבור y כזה נסמן $B_n:=B_{\frac{1}{n}}\left(y\right)\cap B_{n-1}$, ושוב B_n היא קבוצה פתוחה ואין ל-A תת-כיסוי סופי שלה.
  - תהא $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש-$y_n\in B_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$, מהגדרת $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ נובע ש-$B_n\subseteq B_{n-1}$ ו-$d\left(a,b\right)<\frac{2}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $a,b\in B_n$. מכאן שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $d\left(y_n,y_m\right)<\frac{2}{N}<\varepsilon$, כלומר $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי; מהיות $(\mathbb{X},d)$ קומפקטי סדרתית ומטענה 3.5 נובע ש-$(y_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת.

– נסמן $l := \lim_{n\to\infty} y_n$, תהא $U \in A$ כך ש-$l \in U$, ותהא $0 < \delta \in \mathbb{R}$ כך ש-$B_\delta(l) \subseteq U$. יהי $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $y_n \in B_{\frac{\delta}{2}}(l)$ ו-$\frac{2}{N+1} < \frac{\delta}{2}$, מכאן שלכל $z \in B_{N+1}$ מתקיים:

$$d(z,l) \leq d(z, y_{N+1}) + d(y_{N+1}) < \frac{2}{N+1} + \frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

א"כ $B_{N+1} \subseteq B_\delta(l) \subseteq U$ בסתירה להגדרת B_{N+1} כך שאין ל-A תת-כיסוי סופי שלה; מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$(\mathbb{X}, d)$ הוא מרחב קומפקטי.

■

♣ מעתה נפסיק להשתמש במונח "קומפקטי סדרתית" ובכל מקום נכתוב "קומפקטי" בלבד.

מסקנה 3.9. מרחב מכפלה של מרחבים קומפקטיים גם הוא מרחב קומפקטי.

משפט 3.10. כל קבוצה קומפקטית $K \subseteq \mathbb{X}$ היא סגורה וחסומה.

♣ הכיוון ההפוך אינו נכון בהכרח.

הוכחה. החסימות נובעת מלמה 2.17, והסגירות נובעת ממשפט 3.2. ■

משפט 3.11. קבוצה $K \subseteq \mathbb{R}^m$ היא קבוצה קומפקטית אם"ם היא סגורה וחסומה.

הוכחה. את הגרירה מימין לשמאל הוכחנו במשפט הקודם (3.10).
באינפי' 1 ראינו שלכל שתי סדרות חסומות $(a_n)_{n=1}^\infty$ ו-$(b_n)_{n=1}^\infty$ של מספרים ממשיים, קיימת סדרת אינדקסים עולה ממש $(n_k)_{k=1}^\infty$ כך ש-$(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ ו-$(b_{n_k})_{k=1}^\infty$ מתכנסות; כלומר ניתן לסנכרן את האינדקסים של תתי הסדרות המתכנסות שמבטיח משפט בולצאנו-ויירשטראס, ובאותו האופן ניתן לסנכרן את האינדקסים של כל m סדרות. בהינתן קבוצה סגורה וחסומה $K \subseteq \mathbb{R}^m$ וסדרת נקודות $(x_n)_{n=1}^\infty$ ב-K נקבל ש-$\left(x_n^i\right)_{n=1}^\infty$ היא סדרה חסומה לכל $m \geq i \in \mathbb{N}$, ולכן קיימת סדרת אינדקסים עולה ממש $(n_k)_{k=1}^\infty$ כך ש-$\left(x_{n_k}^i\right)_{k=1}^\infty$ מתכנסת לכל $m \geq i \in \mathbb{N}$. ממשפט 3.6 נובע שעבור $(n_k)_{k=1}^\infty$ כזו הסדרה $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ מתכנסת, ומהסגירות של K נקבל שגבולה שייך ל-K (משפט 3.2). ■

טענה 3.12. אם $(\mathbb{X}, d)$ קומפקטי אז כל קבוצה סגורה $C \subseteq \mathbb{X}$ היא קבוצה קומפקטית.

הוכחה. תהא $C \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה סגורה ותהא $(x_n)_{n=1}^\infty$ סדרת נקודות ב-C, מהקומפקטיות של $(\mathbb{X}, d)$ נובע של-$(x_n)_{n=1}^\infty$ יש תת-סדרה מתכנסת, ומהסגירות של C נובע שגבולה שייך ל-C. ■

טענה 3.13. נניח ש-$(\mathbb{X}, d)$ קומפקטי, ותהא $(x_n)_{n=1}^\infty$ סדרת נקודות ב-$\mathbb{X}$.
$(x_n)_{n=1}^\infty$ מתכנסת אם"ם יש לה גבול חלקי יחיד.

לא למדנו את הטענה בכיתה אך היא טריוויאלית, ואזדקק לה כדי להוכיח את טענה 4.5.

4 פונקציות

יהיו $(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$ ו-$(\mathbb{Y},d_{\mathbb{Y}})$ מרחבים מטריים.

טענה 4.1. תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה $a\in\mathbb{X}$; אם הגבול $\lim_{x\to a}f(x)$ קיים אז f חסומה מקומית ב-x.

משפט 4.2. אפיון היינה לגבול של פונקציה בנקודה ולרציפות

תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה.

- $L\in\mathbb{Y}$ הוא הגבול של f בנקודה $x\in\mathbb{X}$ אם"ם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (ב-$\mathbb{X}$) המתכנסת ל-x מתקיים:
$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=L$$
- f רציפה בנקודה $x\in\mathbb{X}$ אם"ם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (ב-$\mathbb{X}$) המתכנסת ל-x מתקיים:
$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$$

לא ראינו בכיתה את המסקנה והמשפט הבאים.

מסקנה 4.3 תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת U של נקודה $x\in\mathbb{X}$.
ל-f יש גבול ב-x אם"ם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-x שכל איבריה ב-U הסדרה $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת.

משפט 4.4. תנאי קושי לגבול של פונקציה בנקודה

תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה $a\in\mathbb{X}$. תנאי הכרחי ומספיק לקיום הגבול $\lim_{x\to a}f(a)$ הוא שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x_1,x_2\in B'_\delta(a)$ מתקיים $d_{\mathbb{Y}}(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$.

טענה 4.5. תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה רציפה, לכל קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ גם הפונקציה $f|_A:A\to\mathbb{Y}$ היא פונקציה רציפה ביחס למרחב המטרי (A,d_A).

משפט 4.6 יהיו $(\mathbb{Y}_1,d_1),(\mathbb{Y}_2,d_2)\ldots,(\mathbb{Y}_k,d_k)$ מרחבים מטריים, נסמן $\mathbb{Y}:=\mathbb{Y}_1\times\mathbb{Y}_2\times\ldots\times\mathbb{Y}_n$ ותהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה. כמו כן לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$ תהא $f_i:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}_i$ פונקציה, כך שלכל $x\in\mathbb{X}$ מתקיים:
$$f(x)=\begin{bmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\\ \vdots\\ f_n(x)\end{bmatrix}$$
ל-f יש גבול בנקודה $a\in\mathbb{X}$ אם"ם ל-f_i יש גבול ב-a לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$, ובמקרה כזה מתקיים:
$$\lim_{x\to a}f(x)=\begin{bmatrix}\lim_{x\to a}f_1(x)\\ \lim_{x\to a}f_2(x)\\ \vdots\\ \lim_{x\to a}f_k(x)\end{bmatrix}$$
כמו כן f רציפה בנקודה $x\in\mathbb{X}$ אם"ם f_i רציפה ב-x לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$.

♣ המשפט נובע ישירות ממשפט 3.6 ואפיון היינה. **מסיבה זו למדנו אותו בכיתה רק עבור פונקציה מהצורה $f:\mathbb{X}\to\mathbb{R}^k$.**

משפט 4.7. \ותהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה, f רציפה אם"ם לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{Y}$ הקבוצה $f^{-1}\left(U\right)$ גם היא פתוחה.

הוכחה.

- $\Leftarrow$

  נניח ש-f רציפה ותהא $U\subseteq\mathbb{Y}$ קבוצה פתוחה. תהא $x\in f^{-1}\left(U\right)$ נקודה, מהגדרה מתקיים $f\left(x\right)\in U$ ולכן מהיות U פתוחה נובע שקיים $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_{\varepsilon}\left(f\left(x\right)\right)\subseteq U$, יהי ε כנ"ל.
  תהא $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x'\in B_{\delta}\left(x\right)$ מתקיים $f\left(x'\right)\in B_{\varepsilon}\left(f\left(x\right)\right)\subseteq U$, מכאן שלכל $x'\in B_{\delta}\left(x\right)$ מתקיים $x'\in f^{-1}\left(U\right)$, כלומר $B_{\delta}\left(x\right)\subseteq f^{-1}\left(U\right)$ ו-x היא נקודה פנימית של $f^{-1}\left(U\right)$.
  x הנ"ל הייתה שרירותית ולכן כל נקודה ב-$f^{-1}\left(U\right)$ היא נקודה פנימית, כלומר $f^{-1}\left(U\right)$ פתוחה.

- $\Rightarrow$

  נניח שלכל קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{Y}$ הקבוצה $f^{-1}\left(U\right)$ גם היא פתוחה. מכאן שלכל נקודה $x\in\mathbb{X}$ ולכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ הקבוצה $f^{-1}\left(B_{\varepsilon}\left(f\left(x\right)\right)\right)$ היא קבוצה פתוחה, כלומר קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_{\delta}\left(x\right)\subseteq f^{-1}\left(B_{\varepsilon}\left(f\left(x\right)\right)\right)$. מכאן שלכל נקודה $x\in\mathbb{X}$ ולכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x'\in B_{\delta}\left(x\right)$ מתקיים $f\left(x'\right)\in B_{\varepsilon}\left(f\left(x\right)\right)$, וא"כ f רציפה.

■

משפט 4.8. משפט ההצבה בגבולות
יהיו $\left(\mathbb{X}_1,d_1\right)$, $\left(\mathbb{X}_2,d_2\right)$ ו-$\left(\mathbb{X}_3,d_3\right)$ מרחבים מטריים, תהיינה $f:\mathbb{X}_1\to\mathbb{X}_2$ ו-$g:\mathbb{X}_2\to\mathbb{X}_3$ שתי פונקציות, ותהא $a\in\mathbb{X}_1$ נקודה.

- נניח של-f יש גבול ב-a ונסמן $l:=\lim_{x\to a}f\left(x\right)$, ונניח של-$g$ יש גבול ב-l ונסמן $m:=\lim_{y\to l}g\left(y\right)$.
  אם קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $a\neq x\in B_{\delta}\left(a\right)$ מתקיים $f\left(x\right)\neq l$, אז ל-$g\circ f$ יש גבול ב-a והוא m.

- אם f רציפה ב-a ו-g רציפה ב-$f\left(a\right)$ אז $g\circ f$ רציפה ב-a.

בכיתה ראינו רק שהרכבה של שתי פונקציות רציפות היא רציפה, ובנוסף לא קראנו למשפט הזה "משפט ההצבה בגבולות".

מסקנה 4.9 תהיינה $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ ו-$\left(y_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות לגבולות $x\in\mathbb{X}$ ו-$y\in\mathbb{X}$ בהתאמה, מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}d\left(x_n,y_n\right)=d\left(x,y\right)$$

מסקנה 4.10. אריתמטיקה של גבולות ושל רציפות
תהיינה $f,g:\mathbb{X}\to\mathbb{C}$ פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של נקודה $a\in\mathbb{X}$, כך שהגבולות הבאים קיימים:

$$l:=\lim_{x\to a}f\left(x\right),\ \ m:=\lim_{x\to a}g\left(x\right)$$

מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $\lim_{x\to a}\left(f+g\right)\left(x\right)=l+m$.
2. $\lim_{x\to a}\left(f\cdot g\right)\left(x\right)=l\cdot m$.
3. אם $m\neq0$ אז $\lim_{x\to a}\frac{1}{g\left(x\right)}=\frac{1}{m}$.
4. אם $m\neq0$ אז $\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\frac{l}{m}$.

כמו כן אם f ו-g רציפות ב-a אז גם $f+g$ ו-$f\cdot g$ רציפות ב-a, ואם (בנוסף) $g\left(a\right)\neq0$ אז $\frac{1}{g}$ ו-$\frac{f}{g}$ רציפות ב-a.

משפט 4.11. כלל אפסה וחסומה
תהיינה $f,g:\mathbb{X}\to\mathbb{C}$ פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של נקודה $a\in\mathbb{X}$, אם $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=0$ וגם g חסומה מקומית ב-a אז $\lim_{x\to a}\left(f\cdot g\right)\left(x\right)=0$.

משפט 4.12. משפט ערך הביניים

תהא $A\subseteq\mathbb{X}$ קבוצה קשירה מסילתית, ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה; לכל $a,b\in A$ כך ש-$f(b)\le f(a)$ ולכל $y\in[f(a),f(b)]$ קיים $c\in A$ כך ש-$f(c)=y$.

הוכחה. יהיו $a,b\in A$ כך ש-$f(a)\le f(b)$, תהא $\gamma:[0,1]\to A$ מסילה כך ש-$\gamma(0)=a$ ו-$\gamma(1)=b$.
ממשפט ההצבה בגבולות לפונקציות רציפות **(המסקנה האחרונה)** נובע ש-$f\circ\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה, וממשפט ערך הביניים (אינפי' 1) נובע שלכל $y\in[f(\gamma(0)),f(\gamma(1))]=[f(a),f(b)]$ קיים $t\in[0,1]$ כך ש-$f(\gamma(t))=y$, כלומר קיים $c\in A$ כך ש-$f(c)=y$. ■

משפט 4.13. עיקרון המקסימום והמינימום של ויירשטראס

נניח ש-$(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$ קומפקטי, ותהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ פונקציה; אם f רציפה אז היא מקבלת מקסימום ומינימום (כלומר ל-$\mathrm{Im}f$ יש מקסימום ומינימום).

משפט 4.14. תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה רציפה, לכל קבוצה קומפקטית $K\subseteq\mathbb{X}$ גם $f(K)$ היא קבוצה קומפקטית.

הוכחה. תהא $K\subseteq\mathbb{X}$ קבוצה קומפקטית, תהא $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-$f(K)$, ותהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-K כך ש-$f(x_n)=y_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.
מהיות K קומפקטי נובע שקיימת סדרת אינדקסים עולה ממש $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך ש-$(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול ב-K, וע"פ אפיון היינה לרציפות מתקיים:

$$\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f\left(\lim_{k\to\infty}x_{n_k}\right)\in f(K)$$

כלומר ל-$(y_n)_{n=1}^{\infty}$ יש תת-סדרה המתכנסת לגבול ב-$f(K)$.
$(y_n)_{n=1}^{\infty}$ הנ"ל הייתה שרירותית ולכן הנ"ל נכון לכל סדרה ב-$f(K)$, וא"כ $f(K)$ היא קבוצה קומפקטית. ■

מסקנה 4.15. נניח ש-$(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$ קומפקטי, ותהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה רציפה; כל קבוצה סגורה $C\subseteq\mathbb{X}$ היא קומפקטית (טענה 3.12), וגם $f(C)$ היא קבוצה קומפקטית.

משפט 4.16. משפט קנטור[2]

נניח ש-$(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$ קומפקטי, ותהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה; אם f רציפה אז היא גם רציפה במידה שווה.

משפט 4.17. תנאי ליפשיץ[3]

יהיו $(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$ ו-$(\mathbb{Y},d_{\mathbb{Y}})$ מרחבים מטריים, ותהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה; אם f רציפה ליפשיץ אז היא גם רציפה במידה שווה.

משפט 4.18. יהיו $(V,\|\cdot\|_V)$ ו-$(W,\|\cdot\|_W)$ מרחבים נורמיים מעל אותו שדה ($\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$), ותהא $T:V\to W$ העתקה ליניארית.
אם הנורמה האופרטורית של T מוגדרת (בפרט אם V נ"ס), אז T היא פונקציה רציפה ליפשיץ, ולכן גם רציפה במידה שווה.

---

[2] ערך בוויקיפדיה: גאורג קנטור.
[3] ערך בוויקיפדיה: רודולף ליפשיץ.

5 שקילויות בין מרחבים מטריים

כל הטענות הבאות נכונות גם עבור $\mathbb{C}^n$ ומרחבים נורמיים נוצרים סופית מעל $\mathbb{C}$.

טענה 5.1. יהי $\left(V,\left\Vert \cdot\right\Vert _{V}\right)$ מרחב נורמי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$ ונסמן $n:=\dim V$, קיימת נורמה $\left\Vert \cdot\right\Vert :\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ כך ש-$\left(V,\left\Vert \cdot\right\Vert _{V}\right)$ ו-$\left(\mathbb{R}^{n},\left\Vert \cdot\right\Vert \right)$ איזומטריים.

טענה 5.2. כל הנורמות על $\mathbb{R}^n$ שקולות זו לזו.

הוכחה. תהא $\left\Vert \cdot\right\Vert :\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה ונסמן $\tilde{C}:=\sum_{i=1}^{n}\left\Vert e_{i}\right\Vert$ (מהגדרה $\tilde{C}>0$), לכל $x\in\mathbb{R}^{n}$ מתקיים:

$$\left\Vert x\right\Vert =\left\Vert \sum_{i=1}^{n}x_{i}\cdot e_{i}\right\Vert \leq\sum_{i=1}^{n}\left\Vert x_{i}\cdot e_{i}\right\Vert =\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|\cdot\left\Vert e_{i}\right\Vert \leq\left(\max_{n\geq i\in\mathbb{N}}\left|x_{i}\right|\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left\Vert e_{i}\right\Vert =\left\Vert x\right\Vert _{\infty}\cdot\tilde{C}$$

תהא $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f\left(x\right):=\left\Vert x\right\Vert$ לכל $x\in\mathbb{R}^{n}$, מהשורה הקודמת נובע ש-f רציפה ליפשיץ לפי הנורמות $\left\Vert \cdot\right\Vert _{\infty}$ (על $\mathbb{R}^{n}$) ו-$\left|\cdot\right|$ (על $\mathbb{R}$), שכן לכל $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ מתקיים:

$$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|=\left|\left\Vert x\right\Vert -\left\Vert y\right\Vert \right|\leq\left\Vert x-y\right\Vert \leq\tilde{C}\cdot\left\Vert x-y\right\Vert _{\infty}$$

הקבוצה $S:=\left\{ x\in\mathbb{R}^{n}:\left\Vert x\right\Vert _{\infty}=1\right\}$[4] היא קבוצה סגורה וחסומה לפי הנורמה $\left\Vert \cdot\right\Vert _{\infty}$, מכאן שהיא גם קומפקטית לפי נורמה זו, ולכן מהיות f רציפה נובע ש-f מקבלת מינימום על S. א"כ נסמן $C:=\min\left(f\left(S\right)\right)$ (מהגדרה $C>0$), ומכאן שלכל $0\neq x\in\mathbb{R}^{n}$ מתקיים:

$$\left\Vert x\right\Vert =\left\Vert x\right\Vert _{\infty}\cdot\frac{\left\Vert x\right\Vert }{\left\Vert x\right\Vert _{\infty}}=\left\Vert x\right\Vert _{\infty}\cdot\left\Vert \frac{x}{\left\Vert x\right\Vert _{\infty}}\right\Vert =\left\Vert x\right\Vert _{\infty}\cdot f\left(\frac{x}{\left\Vert x\right\Vert _{\infty}}\right)\geq\left\Vert x\right\Vert _{\infty}\cdot C$$

כמובן שעבור $x=0$ מתקיים $\left\Vert x\right\Vert =0\leq0\cdot C=\left\Vert x\right\Vert _{\infty}\cdot C$, ולכן קיבלנו שלכל $x\in\mathbb{R}^{n}$ מתקיים:

$$C\cdot\left\Vert x\right\Vert _{\infty}\leq\left\Vert x\right\Vert \leq\tilde{C}\cdot\left\Vert x\right\Vert _{\infty}$$

כלומר כל הנורמות על $\mathbb{R}^{n}$ שקולות לנורמה $\left\Vert \cdot\right\Vert _{\infty}$ ומהטרנזיטיביות של יחס השקילות בין נורמות נובע שכל שתי נורמות על $\mathbb{R}^{n}$ שקולות זו לזו. ■

מסקנה 5.3. כל הנורמות על מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$ שקולות זו לזו.

מסקנה 5.4. יהי $\left(V,\left\Vert \cdot\right\Vert \right)$ מרחב נורמי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$, קבוצה $K\subseteq V$ היא קבוצה קומפקטית אם"ם היא סגורה וחסומה.

טענה 5.5. יהיו $\left(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}}\right)$ ו-$\left(\mathbb{Y},d_{\mathbb{Y}}\right)$ מרחבים מטריים, ותהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה חח"ע ועל (הפיכה); אם $\mathbb{X}$ קומפקטי ו-f רציפה, אז f היא הומיאומורפיזם בין $\mathbb{X}$ ל-$\mathbb{Y}$ (כלומר f^{-1} רציפה גם היא).

הוכחה. יהי $y\in\mathbb{Y}$, תהא $\left(y_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-$\mathbb{Y}$ המתכנסת ל-y, ותהא $\left(x_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-$\mathbb{X}$ כך ש-$x_{n}=f^{-1}\left(y_{n}\right)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

יהיו $L,L'\in\mathbb{X}$ שני גבולות חלקיים של $\left(x_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, ותהיינה $\left(n_{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ ו-$\left(n_{j}\right)_{j=1}^{\infty}$ שתי סדרות אינדקסים עולות ממש כך ש-$\left(x_{n_{k}}\right)_{k=1}^{\infty}$ ו-$\left(x_{n_{j}}\right)_{j=1}^{\infty}$ מתכנסות ל-L ול-L' (בהתאמה). מכאן שע"פ משפט הירושה ואפיון היינה לרציפות מתקיים:

$$\begin{aligned}f\left(L_{1}\right)=f\left(\lim_{k\to\infty}x_{n_{k}}\right)&=\lim_{k\to\infty}f\left(x_{n_{k}}\right)=\lim_{k\to\infty}y_{n_{k}}=\lim_{n\to\infty}y_{n}\\&=\lim_{j\to\infty}y_{n_{j}}=\lim_{j\to\infty}f\left(x_{n_{j}}\right)=f\left(\lim_{j\to\infty}x_{n_{j}}\right)=f\left(L_{2}\right)\end{aligned}$$

[4] זוהי ספרת היחידה לפי הנורמה $\left\Vert \cdot\right\Vert _{\infty}$.

מהיות f חח"ע נובע כי $L=L'$, כלומר ל-$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ יש גבול חלקי יחיד.
מטענה 3.13 ומהיות $(\mathbb{X},d)$ מרחב קומפקטי נובע ש-$(x_n)_{n=1}^{\infty}=\left(f^{-1}(y_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-L, ומהיות f רציפה נובע כי:

$$\begin{aligned}f^{-1}(y)&=f^{-1}\left(\lim_{n\to\infty}y_n\right)=f^{-1}\left(\lim_{n\to\infty}f(x_n)\right)=f^{-1}\left(f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)\right)\\&=f^{-1}(f(L))=L=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}f^{-1}(y_n)\end{aligned}$$

מהיות $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ שרירותית ומאפיון היינה לרציפות נובע ש-f^{-1} רציפה. ■

טענה 5.6. כל הומיאומורפיזם הוא העתקה פתוחה.

טענה 5.7. יהיו $(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$ ו-$(\mathbb{Y},d_{\mathbb{Y}})$ מרחבים מטריים הומיאומורפיים, ויהי $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ הומיאומורפיזם; לכל תת-קבוצה $S\subseteq\mathbb{X}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}(f(S))^{\circ}&=f(S^{\circ})\\\overline{f(S)}&=f\left(\overline{S}\right)\\\partial f(S)&=f(\partial S)\end{aligned}$$

בכיתה ראינו את הטענה תוך הנחה ש-S קומפקטית, כפי שניתן לראות בהוכחה אין בזה שום צורך.

הוכחה. תהא $S\subseteq\mathbb{X}$ תת-קבוצה.

- נוכיח ש-$(f(S))^{\circ}=f(S^{\circ})$:
  - ע"פ טענה 5.6 f היא העתקה פתוחה, ולכן לכל $x\in S^{\circ}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_\delta(x)\subseteq S$ ו-$f(B_\delta(x))$ היא קבוצה פתוחה המוכלת ב-$f(S)$, כלומר $f(x)$ היא נקודה פנימית של $f(S)$ לכל $x\in S^{\circ}$ ומכאן ש-$f(S^{\circ})\supseteq(f(S))^{\circ}$.
  - f^{-1} היא העתקה פתוחה (כי f רציפה) ולכן לכל $y\in(f(S))^{\circ}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_\delta(y)\subseteq f(S)$ ו-$f^{-1}(B_\delta(y))$ היא קבוצה פתוחה המוכלת ב-$f^{-1}(f(S))$, כלומר $f^{-1}(y)$ היא נקודה פנימית של S לכל $y\in(f(S))^{\circ}$ ומכאן ש-$f^{-1}\left((f(S))^{\circ}\right)\subseteq S^{\circ}$ וממילא $(f(S))^{\circ}=f\left(f^{-1}\left((f(S))^{\circ}\right)\right)\subseteq f(S^{\circ})$.
- נזכיר שמהיות f חח"ע נובע שלכל שתי קבוצות $A,B\subseteq\mathbb{X}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}f(A)\setminus f(B)&=f(A\setminus B)\\f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)&=f^{-1}(A\setminus B)\end{aligned}$$

  נוכיח ש-$\overline{f(S)}=f\left(\overline{S}\right)$. מהסעיף הקודם נובע כי:

$$\begin{aligned}\mathbb{Y}\setminus\overline{f(S)}&=(\mathbb{Y}\setminus f(S))^{\circ}=(f(\mathbb{X})\setminus f(S))^{\circ}=(f(\mathbb{X}\setminus S))^{\circ}\\&=f\left((\mathbb{X}\setminus S)^{\circ}\right)=f\left(\mathbb{X}\setminus\overline{S}\right)=f(\mathbb{X})\setminus f\left(\overline{S}\right)=\mathbb{Y}\setminus f\left(\overline{S}\right)\end{aligned}$$

  ומכיוון שע"פ הגדרה $\overline{f(S)}\subseteq\mathbb{Y}$ ו-$f\left(\overline{S}\right)\subseteq\mathbb{Y}$ נובע מזה ש-$\overline{f(S)}=f\left(\overline{S}\right)$.
- ע"פ שלושת הסעיפים הקודמים מתקיים:

$$\partial f(S)=\overline{f(S)}\setminus f(S)^{\circ}=f\left(\overline{S}\right)\setminus f(S^{\circ})=f\left(\overline{S}\setminus S^{\circ}\right)=f(\partial K)$$

■

6 שלמות

6.1 התחלה

משפט 6.1. מרחב מטרי הוא קומפקטי אם"ם הוא שלם וחסום לחלוטין.

הוכחה.

- $\Leftarrow$
נניח ש-$(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב מטרי קומפקטי, ראינו כבר (טענה 2.17) שנובע מזה שהוא גם חסום לחלוטין.
מהקומפקטיות של $(\mathbb{X},d)$ נובע שלכל סדרת קושי יש גבול חלקי, ולכן ע"פ טענה 3.5 היא גם מתכנסת; כלומר $(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב שלם.

- $\Rightarrow$
נניח ש-$(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב מטרי שלם וחסום לחלוטין ותהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה.
  - נסמן $B_0 := \mathbb{X}$ ותהא $(B_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת באופן הבא:
$\mathbb{X}$ חסום לחלוטין ולכן קיימת קבוצה סופית $Y_k \subseteq \mathbb{X}$ המהווה $\frac{1}{k}$-רשת של $\mathbb{X}$, תהא Y_k כנ"ל ונסמן $A_k := \left\{y \in Y_k \mid B_{\frac{1}{k}}(y) \cap B_{k-1} \neq \emptyset\right\}$.
מהשלב הקודם נובע שיש ב-B_{k-1} אין-סוף מאיברי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, ולכן מכיוון ש-A_k סופית נדע שקיים $y \in A_k$ כך שב-$B_{\frac{1}{k}}(y) \cap B_{k-1}$ יש אין-סוף מאיברי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$; נסמן עבור y כזה $B_k := B_{\frac{1}{k}}(y) \cap B_{k-1}$ ושוב יש ב-B_k אין-סוף מאיברי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
  - מכאן שקיימת סדרת אינדקסים עולה ממש $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך ש-$x_{n_k} \in B_k$ לכל $k \in \mathbb{N}$, מהגדרת $(B_k)_{k=1}^{\infty}$ נובע ש-$B_k \subseteq B_{k-1}$ ו-$d(a,b) < \frac{2}{k}$ לכל $k \in \mathbb{N}$ ולכל $a,b \in B_k$. מכאן שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $K < k,m \in \mathbb{N}$ מתקיים $d(x_{n_k}, x_{n_m}) < \frac{2}{K} < \varepsilon$, כלומר $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי ולכן מהיות $(\mathbb{X},d)$ שלם נובע שהיא מתכנסת, כלומר יש ל-$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ תת-סדרה מתכנסת.
  - $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ הייתה סדרה שרירותית ולכן לכל סדרה ב-$\mathbb{X}$ יש תת-סדרה מתכנסת, כלומר $(\mathbb{X},d)$ קומפקטי.

■

משפט 6.2. משפט החיתוך של קנטור
$(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב מטרי שלם אם"ם כל סדרת קושי ב-$(\mathbb{X},d)$ מתכנסת.

♣ ההגדרה המקובלת של מרחב שלם היא שכל סדרת קושי שבו מתכנסת, ולכן הניסוח המקובל של המשפט הוא שהמרחב שלם אם"ם מקיים את ההגדרה שנתתי אני לשלמות.

לא ראינו את המשפט בכיתה.

הוכחה.

- $\Leftarrow$
נניח ש-$(\mathbb{X},d)$ שלם, ותהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי.
  - תהא $(C_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות סגורות ב-$(\mathbb{X},d)$ המוגדרת באופן הבא:
מהיות $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי נובע שלכל $k \in \mathbb{N}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n,m \in \mathbb{N}$ מתקיים $d(x_n, x_m) < \frac{1}{k}$, א"כ תהא $(N_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה כנ"ל ולכל $k \in \mathbb{N}$ נסמן:
$$C_k := \hat{B}_{\frac{1}{N_k}}(x_{N_k+1})$$
מהגדרה נובע ש-$(C_k)_{k=1}^{\infty}$ היא אכן סדרת קבוצות סגורות לא ריקות, המקיימת $C_{k+1} \subseteq C_k$ לכל $k \in \mathbb{N}$ ו-$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(C_k) = 0$.

– מהיות $(\mathbb{X},d)$ שלם נובע שקיים $c\in\mathbb{X}$ יחיד כך שמתקיים:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k=\{c\}$$

יהי c כנ"ל.

– לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $k\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N_k<n\in\mathbb{N}$ מתקיים $x_n\in C_k$ ולכן גם:

$$d\left(x_n,c\right)<\frac{2}{N_k}<\varepsilon$$

ולכן ע"פ הגדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-c.

- $\Rightarrow$

נניח שכל סדרת קושי ב-$(\mathbb{X},d)$ מתכנסת, ותהא $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות סגורות לא ריקות המקיימות $A_{k+1}\subseteq A_k$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ו-$\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}\left(A_k\right)=0$.

תהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-$\mathbb{X}$ כך ש-$x_n\in A_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$, מהנתון $\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}\left(A_k\right)=0$ נובע ש-$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי ולכן מתכנסת.

לכל $k\in\mathbb{N}$ הקבוצה A_k היא קבוצה סגורה המכילה אין-סוף מאיברי הסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, ולכן $\lim_{n\to\infty}x_n\in A_k$ לכל $k\in\mathbb{N}$, כלומר:

$$\lim_{n\to\infty}x_n\in\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$$

מצד שני מהנתון $\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}\left(A_k\right)$ נובע שהחיתוך הנ"ל אינו יכול להכיל יותר מאיבר בודד ומכאן שמתקיים:

$$\left\{\lim_{n\to\infty}x_n\right\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$$

■

6.2 משפט ההשלמה

טענה 6.3. אם קיימת קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-A צפופה ב-$\mathbb{X}$ ולכל סדרת קושי ב-A[5] יש גבול ב-$\mathbb{X}$ אז $(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב שלם.

נאמר ששתי סדרות $(x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}$ <u>שקולות זו לזו</u> אם מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}d\left(x_n,y_n\right)=0$$

זהו אכן יחס שקילות, נסמן ב-$\hat{\mathbb{X}}$ את קבוצת מחלקות השקילות של יחס זה ותהא $\hat{d}:\hat{\mathbb{X}}\times\hat{\mathbb{X}}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $\left[(x_n)_{n=1}^{\infty}\right],\left[(y_n)_{n=1}^{\infty}\right]\in\hat{\mathbb{X}}$):

$$\hat{d}\left(\left[(x_n)_{n=1}^{\infty}\right],\left[(y_n)_{n=1}^{\infty}\right]\right):=\lim_{n\to\infty}d\left(x_n,y_n\right)$$

[5] כלומר סדרת קושי ב-$\mathbb{X}$ שכל איבריה ב-A.

משפט ההשלמה אינו חלק מהחומר למבחן ולכן עוד לא כתבתי לו הוכחה.

טענה 6.4. יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב מטרי, אם קיימת קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-A צפופה ב-$\mathbb{X}$ ולכל סדרת קושי ב-A[6] יש גבול ב-$\mathbb{X}$ אז $(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב שלם.

יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב מטרי, נאמר ששתי סדרות $(x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}$ <u>שקולות זו לזו</u> אם מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}d\left(x_n,y_n\right)=0$$

זהו אכן יחס שקילות, נסמן ב-$\hat{\mathbb{X}}$ את קבוצת מחלקות השקילות של יחס זה ותהא $\hat{d}:\hat{\mathbb{X}}\times\hat{\mathbb{X}}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $\left[(x_n)_{n=1}^{\infty}\right],\left[(y_n)_{n=1}^{\infty}\right]\in\hat{\mathbb{X}}$):

$$\hat{d}\left(\left[(x_n)_{n=1}^{\infty}\right],\left[(y_n)_{n=1}^{\infty}\right]\right):=\lim_{n\to\infty}d\left(x_n,y_n\right)$$

♣ יש להוכיח ש-$\hat{d}$ אכן מוגדרת היטב, כלומר הגבול $\lim_{n\to\infty}d\left(x_n,y_n\right)$ אכן קיים לכל שתי סדרות קושי ב-$\mathbb{X}$ ובנוסף הוא אינו תלוי בבחירת הנציגים של מחלקות השקילות $\left[(x_n)_{n=1}^{\infty}\right]$ ו-$\left[(y_n)_{n=1}^{\infty}\right]$.

טענה 6.5. $\hat{d}$ היא מטריקה על $\hat{\mathbb{X}}$ ולכן $\left(\hat{\mathbb{X}},\hat{d}\right)$ הוא מרחב מטרי.

טענה 6.6. תהא $f:\mathbb{X}\to\hat{\mathbb{X}}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(x):=\left[(x)_{n=1}^{\infty}\right]$ לכל $x\in\mathbb{X}$, כלומר f מעתיקה כל נקודה ב-$\mathbb{X}$ למחלקת השקילות של הסדרה הקבועה המתאימה.
לכל $x,y\in\mathbb{X}$ מתקיים:

$$d\left(x,y\right)=\hat{d}\left(\left[(x)_{n=1}^{\infty}\right],\left[(y)_{n=1}^{\infty}\right]\right)=\hat{d}\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)$$

ובנוסף $\mathrm{Im}f$ היא קבוצה צפופה ב-$\hat{\mathbb{X}}$.

מסקנה 6.7. $\left(\hat{\mathbb{X}},\hat{d}\right)$ הוא מרחב שלם ומכאן שהוא השלמה של $\mathbb{X}$.

טענה 6.8. יהי $(\mathbb{Y},d_{\mathbb{Y}})$ מרחב מטרי שלם, תהא $D\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-D צפופה ב-$\mathbb{X}$ ותהא $f:D\to\mathbb{Y}$ פונקציה רציפה במידה שווה.
קיימת פונקציה יחידה $\tilde{f}:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ כך ש-$\tilde{f}$ רציפה ו-$\tilde{f}\mid_D=f$.

מסקנה 6.9. לכל מרחב מטרי $(\mathbb{Y},d_{\mathbb{Y}})$ המהווה השלמה של $(\mathbb{X},d)$ קיימת איזומטריה בין $\mathbb{Y}$ ל-$\hat{\mathbb{X}}$, כלומר השלמה של מרחב מטרי היא יחידה עד כדי איזומטריה.

6.3 משפט ההעתקה המכווצת

טענה 6.10. כל העתקה מכווצת היא העתקה כמעט מכווצת, וכל העתקה כמעט מכווצת היא רציפה ליפשיץ, ולכן גם רציפה במידה שווה.

טענה 6.11. תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ העתקה כמעט מכווצת, יש ל-f לכל היותר נקודת שבת אחת (ייתכן שאין לה בכלל נקודות שבת).

הוכחה. נניח בשלילה של-f יש יותר מנקודת שבת אחת, ותהיינה $x_1,x_2\in\mathbb{X}$ שתי נקודות שונות כאלה.

$$\Rightarrow d\left(x_1,x_2\right)=d\left(f\left(x_1\right),f\left(x_2\right)\right)<d\left(x_1,x_2\right)$$

■

[6] כלומר סדרת קושי ב-$\mathbb{X}$ שכל איבריה ב-A.

משפט 6.12. משפט ההעתקה המכווצת
לכל העתקה מכווצת על מרחב מטרי שלם יש נקודת שבת יחידה.

האם גם המשפט ההפוך נכון? שאם לכל העתקה מכווצת על מרחב מטרי יש נקודת שבת אז המרחב המטרי שלם?

הוכחה. נניח ש-$(\mathbb{X},d)$ שלם, תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ העתקה מכווצת, ויהי $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש-$0\leq\lambda<1$ ולכל $x,y\in\mathbb{X}$ מתקיים:

$$d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq\lambda\cdot d\left(x,y\right)$$

יהי $x_0\in\mathbb{X}$ ותהא $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י $x_n:=f^n\left(x_0\right)$[7] לכל $n\in\mathbb{N}$.
מכאן שלכל $n,m\in\mathbb{N}$ כך ש-$n\leq m$ מתקיים:

$$\begin{aligned}d\left(x_n,x_m\right)&\leq\sum_{k=n}^{m-1}d\left(x_k,x_{k+1}\right)=\sum_{k=n}^{m-1}d\left(f^k\left(x_0\right),f^k\left(x_1\right)\right)\\&\leq\sum_{k=n}^{m-1}\lambda^k\cdot d\left(x_0,x_1\right)=d\left(x_0,x_1\right)\cdot\sum_{k=n}^{m-1}\lambda^k\end{aligned}$$

מתנאי קושי להתכנסות טורים, ומהעובדה שהטור $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n$ הוא טור הנדסי מתכנס, נובע כי לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $d\left(x_n,x_m\right)<\varepsilon$; כלומר $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי, ולכן מהיות $(\mathbb{X},d)$ מרחב שלם נובע ש-$\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, נסמן את גבולה ב-x.
f היא פונקציה רציפה (טענה 6.10) ולכן לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$f\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n=x$$

היחידות נובעת מהטענה הקודמת (6.11). ■

משפט 6.13. לכל העתקה כמעט מכווצת על מרחב מטרי קומפקטי יש נקודת שבת יחידה.

הוכחה. נניח ש-$(\mathbb{X},d)$ קומפקטי, תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ העתקה כמעט מכווצת , ותהא $g:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $g\left(x\right):=d\left(x,f\left(x\right)\right)$ לכל $x\in\mathbb{X}$.
מהיות f, $\mathrm{Id}_{\mathbb{X}}$ ו-d רציפות נובע ש-g רציפה (משפט 4.6 ומשפט ההצבה בגבולות), ולכן מהיות $(\mathbb{X},d)$ קומפקטי נובע ש-g מקבלת מינימום על $\mathbb{X}$.
תהא $x\in\mathbb{X}$ נקודת מינימום כזו ונניח בשלילה ש-$x\neq f\left(x\right)$,

$$\Rightarrow g\left(f\left(x\right)\right)=d\left(f\left(x\right),f\left(f\left(x\right)\right)\right)<d\left(x,f\left(x\right)\right)=g\left(x\right)$$

בסתירה להיות x נקודת מינימום של g; מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$x=f\left(x\right)$, כלומר x היא נקודת שבת של f.
היחידות נובעת מטענה 6.11. ■

[7] כאן $f^n\left(x_0\right)$ אינו חזקה (זה חסר משמעות), אלא הרכבה של f n פעמים על עצמה ($f^0:=\mathrm{Id}_{\mathbb{X}}$ ו-$f^n:=f\circ f^{n-1}$ לכל $n\in\mathbb{N}$).