העתקות ליניאריות - הגדרות בלבד

אלגברה ליניארית (1) - 80134

מרצה: ערן נבו

מתרגלים: איתמר ישראלי ושני שלומי

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

1 התחלה

♣ בנושא השני בקורס זה - "מטריצות ומרחבי קואורדינטות" - ראינו את הקשר בין מטריצות מעל שדה למרחב הקואורדינטות שלו, בנושא זה נראה הכללה של נקודה זו למרחבים וקטוריים כלליים ונראה גם עד כמה מרחב הקואורדינטות עוזר לנו להבין אותם.

1.1 הגדרת העתקה ליניארית

יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים מעל לשדה $\mathbb{F}$.

הגדרה 1.1. פונקציה $T:V\to W$ תיקרא העתקה ליניארית (להלן גם: ה"ל) אם היא מקיימת את שתי התכונות הבאות:

1. חיבוריות (אדיטיביות) - לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$.
2. כפליות (הומוגניות) - לכל $v\in V$ ולכל $c\in\mathbb{F}$ מתקיים $T(c\cdot v)=c\cdot T(v)$.

♣ כלומר העתקה ליניארית היא פונקציה **השומרת על המבנה** של המרחב הווקטורי (בקובץ הטענות נראה שבהכרח מתקיים $T(0_V)=0_W$).
מבחינה גאומטרית זה אומר שבניגוד לכל פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ שיכולה לעוות את המרחב בכל דרך שנעלה על הדעת, העתקות ליניאריות מוגבלות ביכולת העיוות שלהן - הגבלה זו מתבטאת בכך שראשית הצירים מועתקת בהכרח אל עצמה ושקווים ישרים אינם מתעקמים; הנה סרטון של 3blue1brown שמסביר את הנקודה הזו בצורה נהדרת (כמו תמיד).

♣ שימו לב: החיבור הווקטורי והכפל בסקלר שבאגף שמאל הם אלו של V ואילו החיבור הווקטורי והכפל בסקלר שבאגף ימין הם אלו של W, זו הסיבה שהעתקה ליניארית יכולה להיות רק בין שני מרחבים וקטוריים מעל לאותו שדה.

1.2 דוגמאות חשובות

דוגמה 1.2. פונקציית האפס ($f(v):=0_W$ לכל $v\in V$) ופונקציית הזהות (Id_V) הן העתקות ליניאריות.

דוגמה 1.3. בדוגמה הזו נתקלנו כבר בנושא הקודם - כל מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מגדירה העתקה ליניארית $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ ע"י $T_A(v):=A\cdot v$ (לכל $v\in\mathbb{F}^n$).

דוגמה 1.4. תהא A קבוצה, ראינו שקבוצת הפונקציות מ-A ל-$\mathbb{F}$ היא מרחב וקטורי, כל איבר $a\in A$ מגדיר העתקה ליניארית $T_a:\mathbb{F}^A\to\mathbb{F}$ ע"י הצבה - $T_a(f):=f(a)$ (לכל $f\in\mathbb{F}^A$).

דוגמה 1.5. כל איבר $r\in\mathbb{F}$ מגדיר העתקה ליניארית $T_r:\mathbb{F}^{\mathbb{F}}\to\mathbb{F}^{\mathbb{F}}$ ע"י $T_r(f)x:=f(x-r)$ (לכל $f\in\mathbb{F}^{\mathbb{F}}$).[1]

1.3 העקבה של מטריצה

הגדרה 1.6. תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה ריבועית, העקבה (באנגלית Trace) של A היא סכום האיברים שעל האלכסון הראשי, כלומר:

$$\mathrm{tr}A:=\sum_{i=1}^{n}[A]_{ii}$$

♣ אנחנו ניתקל בעקבה של מטריצה פעם נוספת באחת הדוגמאות למכפלה פנימית (ליניארית 2).

מה המשמעות הגאומטרית של עקבה???

מסקנה 1.7. פונקציית העקבה ($\mathrm{tr}:M_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$) היא העתקה ליניארית.

[1] כלומר T_r מעתיקה את f לפונקציה $g:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ המוגדרת ע"י $g(x):=f(x-r)$ (לכל $x\in\mathbb{F}$).

2 גרעין ותמונה, הרכבה והפיכות

יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים מעל לשדה $\mathbb{F}$, ותהא $T:V\to W$ העתקה ליניארית.

הגדרה 2.1. הגרעין של T הוא קבוצת כל הווקטורים ב-V ש-T מעתיקה אל 0_W, כלומר:

$$\ker T:=\{v\in V\mid T(v)=0_W\}$$

♣ בפרט, הגרעין של העתקה $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ המוגדרת ע"י מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ הוא בדיוק מרחב הפתרונות של הממ"ל ההומוגנית $A\cdot x=\vec{0}$.
כמו כן התמונה של T_A היא בדיוק $\{b\in\mathbb{F}^m\mid \exists x\in\mathbb{F}^n: A\cdot x=b\}$, כלומר קבוצת כל הווקטורים ב-$\mathbb{F}^m$ שעבורם יש לממ"ל $A\cdot x=b$ פתרון ($b\in\mathbb{F}^m$).

טענה. הגרעין והתמונה של T הם תתי-מרחבים של V ו-W בהתאמה.

הגדרה 2.2. נניח ש-$\ker T$ נ"ס, האפסיות של T מוגדרת ע"י $\text{null}T:=\dim(\ker T)$.

הגדרה 2.3. נניח ש-$\text{Im}T$ נ"ס, הדרגה של T מוגדרת ע"י $\text{rk}T:=\dim(\text{Im}T)$.

אולי כדאי לתלות את ההגדרה של האפסיות והדרגה בכך ש-V נ"ס???

טענה. נניח שקיימת העתקה ליניארית הפיכה $S:V\to W$, גם ההופכית שלה $S^{-1}:W\to V$ היא העתקה ליניארית.

הגדרה 2.4. נאמר ש-V ו-W איזומורפיים זה לזה אם קיימת העתקה ליניארית $S:V\to W$ חח"ע ועל, S כזו תיקרא איזומורפיזם בין V ל-W.

♣ רעיון האיזומורפיזם אינו מיוחד לאלגברה ליניארית, הוא משותף לכל תחומי המתמטיקה ומשמעותו היא ששני אובייקטים מתמטיים זהים מכל בחינה שמעניינת אותנו בהקשר מסוים. לתפיסתי האיזומורפיזם הוא נשמת אפה של המתמטיקה וכבר כתבתי על כך בקובץ "הקדמה למתמטיקה אוניברסיטאית", מי שרוצה לקרוא עוד בנושא ולראות הגדרה פורמלית יכול לקרוא את הערך איזומורפיזם בוויקיפדיה.

♣ אם שני מרחבים וקטוריים נוצרים סופית איזומורפיים זה לזה אז הם בפרט שווי ממד.

נניח ש-V נ"ס.

הגדרה 2.5. נסמן $n:=\dim V$ ויהי $\mathcal{B}:=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ בסיס של V.

- תהא $\omega_{\mathcal{B}}:V\to\mathbb{F}^n$ פונקציה המוגדרת ע"י $\omega_{\mathcal{B}}(v):=[v]_{\mathcal{B}}$ (לכל $v\in V$), כלומר אם $v=\sum_{i=1}^n a_i\cdot v_i$ אז:

$$\omega_{\mathcal{B}}(v):=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$$

- מהגדרה $\omega_{\mathcal{B}}$ היא פונקציה הפיכה, א"כ תהא $\tau_{\mathcal{B}}:\mathbb{F}^n\to V$ הפונקציה ההופכית שלה, כלומר:

$$\tau_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}:=\sum_{i=1}^n a_i\cdot v_i$$

מסקנה 2.6. $\omega_{\mathcal{B}}$ ו-$\tau_{\mathcal{B}}$ הן העתקות ליניאריות.

מסקנה 2.7. V איזומורפי ל- $\mathbb{F}^n$ והפונקציה $\omega_{\mathcal{B}}$ היא איזומורפיזם בין V ל-$\mathbb{F}^n$.

♣ שימו לב ש-V יכול להיות בעצמו $\mathbb{F}^n$ ואז המסקנה אומרת בעצם שאין שום הבדל בין בסיס $\mathcal{B}$ של $\mathbb{F}^n$ (כל בסיס!) לבין הבסיס הסטנדרטי, שניהם מתנהגים באותה צורה בדיוק ורק הנוחות שלנו כבני אדם גורמת לנו להעדיף את הבסיס הסטנדרטי על פני הבסיסים האחרים.

מסקנה 2.8. אם V ו-W מאותו ממד (בפרט גם W נ"ס) אז הם איזומורפיים.

3 המטריצה המייצגת

3.1 התחלה

יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל לשדה $\mathbb{F}$, ויהיו $\mathcal{B} := (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ו-$\mathcal{C} := (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ בסיסים סדורים של V ו-W בהתאמה ($n := \dim V$ ו-$m := \dim W$).

הגדרה 3.1. תהא $T : V \to W$ העתקה ליניארית, <u>המטריצה המייצגת</u> של T ביחס ל-$\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ היא מטריצה מסדר $m \times n$ שהעמודה ה-j שלה היא $[T(v_j)]_{\mathcal{C}}$ (לכל $n \geq j \in \mathbb{N}$), כלומר:

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} := \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ [T(v_1)]_{\mathcal{C}} & [T(v_1)]_{\mathcal{C}} & \ldots & [T(v_n)]_{\mathcal{C}} \\ | & | & | & | \end{array}\right]$$

♣ אנחנו נראה בקובץ הטענות כיצד המטריצה המייצגת אכן מייצגת את ההעתקה הליניארית, הביטוי העיקרי לייצוג זה הוא העובדה שלכל $v \in V$ מתקיים:

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{C}}$$

3.2 מטריצת מעבר בסיס

הגדרה 3.2. יהי $\mathcal{A}$ בסיס סדור של V, המטריצה $[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ נקראת <u>מטריצת מעבר בסיס</u> מ-$\mathcal{A}$ ל-$\mathcal{B}$.

♣ הסיבה להגדרה זו היא שלכל $v \in V$ מתקיים $[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot [v]_{\mathcal{A}} = [v]_{\mathcal{B}}$.

4 דמיון מטריצות

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

- ♣ בפרק הקודם ראינו שניתן לייצג ע"י מטריצה כל העתקה ליניארית על מרחבים וקטוריים נוצרים סופית, הדרך שבה ייצגנו את העתקה ליניארית הסתמכה על בחירת בסיסים שרירותיים למרחבים הווקטוריים המהווים את התחום והטווח שלה - לו היינו בוחרים בסיסים אחרים ייתכן שהיינו מקבלים מטריצה מייצגת שונה; ההבנה הזו גורמת לנו לרצות ולהגדיר יחס שקילות בין מטריצות המייצגות את אותה העתקה ליניארית.

- ♣ כדי לפשט את העניין אנחנו לא עומדים לעסוק בכל הדרכים לייצג ה"ל באמצעות מטריצה אלא רק בדרכים שבהן הבסיס של התחום והבסיס של הטווח זהים - כלומר ייצוג מהצורה $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, ממילא זה אומר שנעסוק אך ורק בהעתקות ליניאריות ממרחב וקטורי לעצמו ויחס השקילות המבוקש יוגדר על מטריצות ריבועיות בלבד. בפרק הקודם ראינו (בקובץ הטענות) שניתן לעבור ממטריצה מייצגת אחת של העתקה ליניארית להצגה אחרת ע"י כפל במטריצות מעבר בסיס מתאימות (אחת מימין ואחת משמאל), ובנוסף, אם מדובר בהעתקה ליניארית ממ"ו נ"ס לעצמו ואנו עוסקים רק בייצוגים מהצורה $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ אז מטריצות המעבר המתאימות הופכיות זו לזו (וכמובן שגם המטריצות המייצגות ריבועיות).

מה יקרה אם נרשה לעצמנו להשתמש בייצוגים שבהם הבסיס של הטווח והבסיס של התחום אינם זהים, ברור שלא נוכל להשתמש בהגדרה שלהלן אך אולי יש בכל זאת דרך לדבר על זה?

הגדרה 4.1. שתי מטריצות ריבועיות $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ תיקראנה <u>דומות זו לזו</u>[2] אם קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_n(\mathbb{F})$ כך שמתקיים $A=P^{-1}\cdot B\cdot P$, ואז נסמן $A\sim B$.

- ♣ העמודות של מטריצה הפיכה P הן בסיס ו-P היא מטריצת המעבר מבסיס זה אל הבסיס הסטנדרטי, לפיכך P^{-1} היא מטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי לבסיס העמודות של P ולכן קיום השוויון הנ"ל מראה ש-T_A ו-T_B הם בעצם אותה העתקה ליניארית אך ביחס לבסיסים שונים שכן מתקיים (כאשר $\mathcal{C}$ הוא בסיס העמודות של P):

$$[T_A]_E^E=[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}^E\cdot[T_B]_E^E\cdot[\mathrm{Id}]_E^{\mathcal{C}}=[T_B]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$$

מסקנה 4.2. דמיון מטריצות הוא יחס שקילות.

[2] זהו יחס שקילות ולכן אין צורך להקפיד ולומר ש-A דומה ל-B או להפך.

5 נספחים

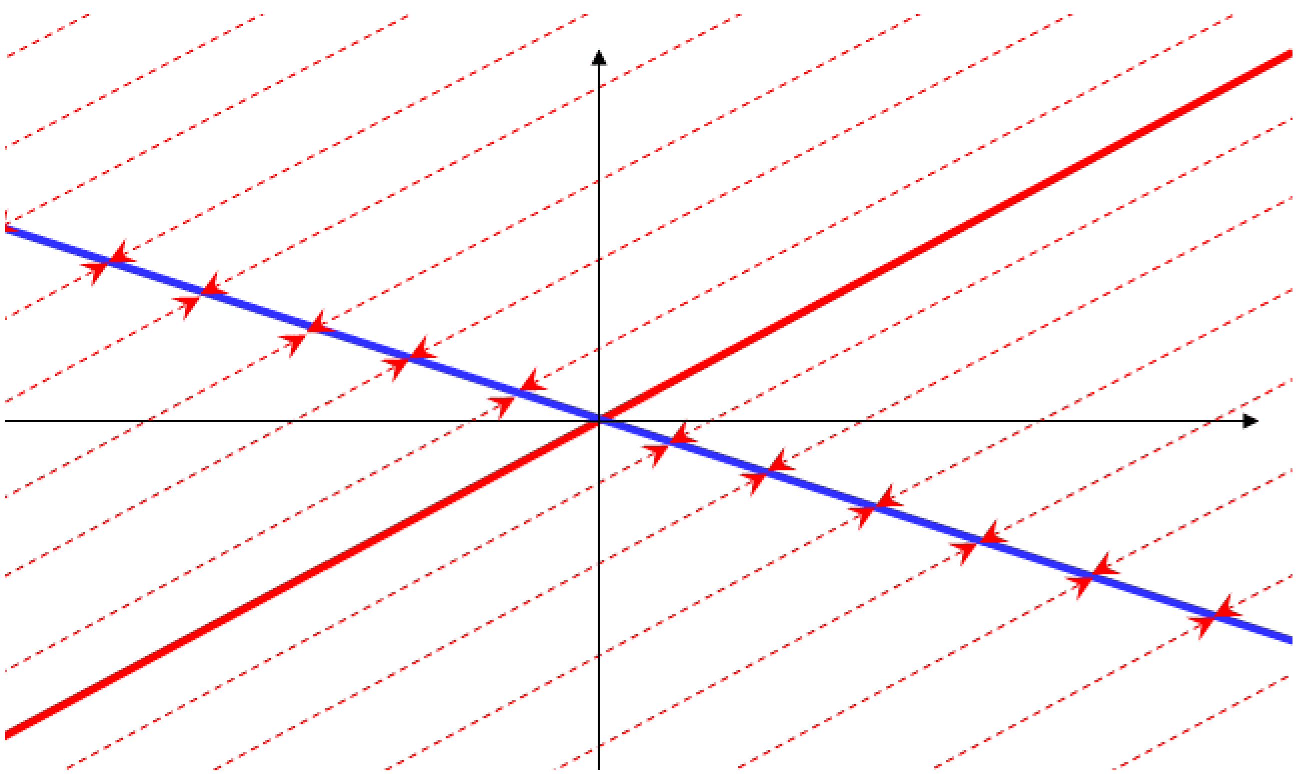
יהי V מ"ו מעל לשדה $\mathbb{F}$.

5.1 הטלות ושיקופים

הגדרה 5.1. יהיו $W,U\subseteq V$ תתי-מרחבים כך ש-$V=W\oplus U$ (נניח שיש כאלה).
ההטלה על W במקביל ל-U היא הפונקציה $p:V\to V$ המוגדרת ע"י $p\left(w+u\right):=w$ לכל $w\in W$ ולכל $u\in U$,
כלומר p מפרקת כל וקטור $v\in V$ לרכיביו ב-W וב-U ומחזירה את הרכיב שב-W בלבד.

- ♣ במילים אחרות: $W=\text{Im}p$, $U=\ker p$ ו-$p\mid_{W}=\text{Id}_{W}$; א"כ $V=\text{Im}p\oplus\ker p$.[3]
- ♣ אנחנו מכירים בעיקר את ההטלה של וקטור על אחד הצירים ב-$\mathbb{R}^{2}$ או ב-$\mathbb{R}^{3}$ שהיא הטלה על ציר אחד במקביל לצירים ה**מאונכים** לו, אך ניתן להטיל על תתי-מרחבים אחרים ובצורה שאינה אנכית.
- ♣ במקומות אחרים (כגון ויקיפדיה) מגדירים הטלה כהעתקה ליניארית $p:V\to V$ המקיימת $p^{2}=p$, זוהי הגדרה שקולה ואנחנו נראה זאת בקובץ ההוכחות.

באיור הבא ניתן לראות כיצד מתבצעת הטלה על ישר אחד במקביל לישר אחר בתוך המישור ($\mathbb{R}^{2}$):



איור 1: הטלה על הישר הכחול במקביל לישר האדום

כל וקטור שנמצא על קו מקווקו מועתק אל הנקודה שעליה מצביע החץ המתאים, כלומר המישור מתכווץ לתוך הישר הכחול ע"פ הזווית שמגדיר הישר האדום.

[3] שימו לב שלא כל פונקציה המקיימת את השוויון $V=\text{Im}p\oplus\ker p$ היא הטלה מפני שלא בהכרח מתקיים גם $p\mid_{W}=\text{Id}_{W}$.

הגדרה 5.2. יהיו $W,U\subseteq V$ תתי-מרחבים כך ש-$V=W\oplus U$ (נניח שיש כאלה).
<u>השיקוף ביחס</u> ל-W (או <u>דרך</u> W) <u>ובמקביל</u> ל-U היא הפונקציה $r:V\to V$ המוגדרת ע"י $r\left(w+u\right)=w-u$, כלומר r מפרקת כל וקטור $v\in V$ לרכיביו ב-W וב-U ואז היא הופכת את הכיוון של הרכיב ב-U ומשאירה את הרכיב ב-W על כנו.

♣ כלומר בשיקוף יש תמ"ו אחד המתפקד כ"מראה" ולפיכך אינו משתנה וכל שאר המרחב "משתקף" בו - כלומר הופך את כיוונו.

מסקנה 5.3. הטלות ושיקופים הן העתקות ליניאריות.

5.2 סיבובים

♣ ראשית, שכנעו את עצמכם שסיבוב של המישור ב-θ רדיאנים נגד כיוון השעון הוא אכן העתקה ליניארית, כלומר הוא שומר על החיבור הווקטורי ועל הכפל בסקלר - זה דורש מעט דמיון.
כעת מהי המטריצה המייצגת של העתקה ליניארית כזו (בבסיס הסטנדרטי)?

הגדרה 5.4. <u>מטריצת הסיבוב</u> ב-θ רדיאנים נגד כיוון השעון היא המטריצה (לכל $\theta\in\mathbb{R}$):

$$R\left(\theta\right):=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

♣ ואכן, כשמסובבים את המישור ב-θ רדיאנים נגד כיוון השעון הווקטור $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ מועתק לווקטור $\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$ והווקטור $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ מועתק לווקטור $\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$.

♣ כעת ניתן להוכיח את הזהויות הטריגונומטריות של קוסינוס וסינוס של סכום זוויות[4] באמצעות כפל מטריצות, מבחינה **גאומטרית** ברור שסיבוב של המישור ב-β רדיאנים ואח"כ סיבוב ב-α רדיאנים שקול לסיבוב ב-$\alpha+\beta$ רדיאנים ולכן מהשקילות בין כפל מטריצות להרכבת העתקות ליניאריות נובע שמתקיים:

$$\begin{bmatrix}\cos\left(\alpha+\beta\right) & -\sin\left(\alpha+\beta\right)\\ \sin\left(\alpha+\beta\right) & \cos\left(\alpha+\beta\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$$

מהגדרת כפל מטריצות נובע שמתקיים:

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha+\beta\right)&=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta\\ \sin\left(\alpha+\beta\right)&=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta\end{aligned}$$

הגדרה 5.5. מטריצה $A\in M_2\left(\mathbb{R}\right)$ תיקרא <u>מטריצת סיבוב ומתיחה</u> אם ניתן להציג אותה ככפולה של מטריצת סיבוב בסקלר אי-שלילי, כלומר אם קיימים $0\le c\in\mathbb{R}$ ו-$\theta\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים $A=c\cdot R\left(\theta\right)$.

♣ המושג הזה אינו מקובל אך כולם יבינו את כוונתו משמו בלבד.

---

[4] לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha\pm\beta\right)&=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta\\ \cos\left(\alpha\pm\beta\right)&=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta\end{aligned}$$

5.3 מרחב ההעתקות

הגדרה 5.6. יהי גם W מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, נסמן ב-$\text{Hom}\left(V,W\right)$ את קבוצת ההעתקות הליניאריות מ-V ל-W ולאחר שנוכיח שהיא מ"ו נקרא לה <u>מרחב ההעתקות (הליניאריות)</u> מ-V ל-W.

טענה. קבוצת ההעתקות הליניאריות $\text{Hom}\left(V,W\right)$, יחד עם פעולות החיבור והכפל בסקלר שלה[5], היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ (לכל מ"ו W מעל $\mathbb{F}$).

♣ כלומר סכום של העתקות ליניאריות וכפל העתקה ליניארית בסקלר הם העתקות ליניאריות, ובנוסף, מתקיימות 8 האקסיומות של מרחב וקטורי.

5.4 מרחבי מנה

הגדרה 5.7. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו, נאמר ששני וקטורים $v,u\in V$ <u>שקולים זה לזה ביחס ל-</u>W אם $v-u\in W$ ונסמן $v\sim u$.

טענה 5.8. היחס שהוגדר לעיל הוא אכן יחס שקילות.

סימון: נסמן את מחלקת השקילות של וקטור $v\in V$ ביחס הנ"ל ע"י $[v]$.

הגדרה 5.9. יהי $W\subseteq V$ תמ"ו, נסמן את קבוצת מחלקות השקילות (קבוצת המנה) של היחס הנ"ל ב-V/W ולאחר שנוכיח שהיא מ"ו נקרא לה <u>מרחב המנה</u> של W.

סימון: תהא $\pi:V\to V/W$ <u>העתקת המנה</u> המוגדרת ע"י $\pi\left(v\right)=\left[v\right]$.

5.5 כפל סדרות וקטורים בווקטורים ממרחב הקואורדינטות ובמטריצות

הגדרה 5.10. תהא $S:=\left(v_{1},v_{2},\ldots,v_{n}\right)$ סדרת וקטורים ב-V ויהי $x\in\mathbb{F}^{n}$, נגדיר את המכפלה $S\cdot x$ ע"י:

$$S\cdot x=\left(v_{1},v_{2},\ldots,v_{n}\right)\cdot x:=\sum_{i=1}^{n}x_{i}\cdot v_{i}$$

♣ נשים לב S אינה בהכרח בסיס ולכן x אינו בהכרח וקטור הקואורדינטות של $\sum_{i=1}^{n}x_{i}\cdot v_{i}$.

♣ כפי שכבר הזכרנו בעבר ניתן להתייחס למטריצה ב-$M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ כסדרה של n וקטורים ב-$\mathbb{F}^{m}$, מנקודת זו ההגדרה שהגדרנו זה עתה היא הכללה של כפל מטריצה בווקטור.

הגדרה 5.11. תהא $S:=\left(v_{1},v_{2},\ldots,v_{n}\right)$ סדרת וקטורים ב-V ותהא $A\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה, נגדיר את המכפלה $S\cdot A$ ע"י:

$$S\cdot A=S\cdot\begin{bmatrix}| & | & | & |\\ c_{1} & c_{2} & \cdots & c_{m}\\ | & | & | & |\end{bmatrix}:=\left(S\cdot c_{1},S\cdot c_{2},\ldots,S\cdot c_{m}\right)$$

כלומר $S\cdot A$ היא סדרה באורך m של וקטורים ב-V שהאיבר ה-j שלה הוא $\sum_{i=1}^{n}\left[A\right]_{ij}\cdot v_{i}$ (לכל $m\geq j\in\mathbb{N}$).

♣ ושוב, מנקודת המבט של האיזומורפיזם בין $M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ל-$\left(\mathbb{F}^{m}\right)^{n}$ הגדרה זו היא הכללה של כפל מטריצות.

---

[5] לכל $f,g:A\to\mathbb{F}$ הגדרנו את $f+g$ ע"י $\left(f+g\right)\left(x\right):=f\left(x\right)+g\left(x\right)$ (לכל $x\in\mathbb{F}$), ולכל $f:A\to\mathbb{F}$ ו-$c\in\mathbb{F}$ הגדרנו את $c\cdot f$ ע"י $\left(c\cdot f\right)\left(x\right):=c\cdot f\left(x\right)$.