אינטגרלים על יריעות - טענות בלבד

אנליזה על יריעות - 80416

מרצה: אור הרשקוביץ

מתרגל: או קדר

סוכם ע״י שריה אנסבכר

סמסטר ב׳ תשפ״ד, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

1 יריעות פרמטריות

תהיינה $X\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-ממדית ו-$\phi:U\to\mathbb{R}^{n}$ פרמטריזציה של X.

טענה 1.1. לכל העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}^{n}$ כך ש-$k\le n$ מתקיים $V\left(T\right)=\sqrt{\det\left(T^{*}\circ T\right)}$[1], וכמו כן לכל מטריצה $A\in M_{n\times k}\left(\mathbb{R}\right)$ מתקיים $V\left(A\right)=\sqrt{\det\left(A^{t}\cdot A\right)}$.

מסקנה 1.2. יהי $\psi:V\to U$ דיפאומורפיזם, ותהא $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$; מתקיים:

$$\int\limits_{U}f\left(\phi\left(x\right)\right)\cdot V\left(D\phi_{x}\right)dx=\int\limits_{V}f\left(\phi\left(\psi\left(y\right)\right)\right)\cdot V\left(D\left(\phi\circ\psi\right)_{y}\right)dy$$

כלומר אם אחד האינטגרלים מוגדר אז גם האחר מוגדר והם שווים.

משפט 1.3. נניח ש-$\left(X,\phi\right)$ רגולרית בנקודה $x_{0}\in U$, במקרה כזה קיימים:

1. סביבה פתוחה $V\subseteq U$ של x_{0} ($x_{0}\in U$)
2. נקודה $p\in\mathbb{R}^{k}$, $0<r\in\mathbb{R}$ ודיפאומורפיזם $\psi:B_{\varepsilon}\left(p\right)\to V$[2]
3. פונקציה חלקה $h:B_{\varepsilon}\left(p\right)\to\mathbb{R}^{n-k}$
4. העתקה ליניארית אורתוגונלית $A:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{n}$

כך ש-$A\left(\left(\phi\circ\psi\right)\left(x_{0}\right)\right)=p$ ו-$\left(x,h\left(x\right)\right)=A\left(\left(\phi\circ\psi\right)\left(x\right)\right)$ לכל $x\in B_{\varepsilon}\left(p\right)$.

♣ כלומר X נראית כמו גרף של פונקציה חלקה בסביבת $\phi\left(x\right)$, זהו האפיון הכי ברור לכך ש-X "חלקה" בסביבה זו.

[1] T^{*} היא ההעתקה הצמודה של T (הוגדרה בליניארית 2), אין שום עניין לזכור זאת כאן - מי שלא זוכר יכול להסתפק בעובדה ש-T^{*} היא ההעתקה הליניארית המקיימת $\left[T^{*}\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}=\left(\left[T\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^{t}$ לכל בחירת בסיסים $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ של $\mathbb{R}^{k}$ ו-$\mathbb{R}^{n}$ בהתאמה.

[2] למעשה כל נקודה ב-$\mathbb{R}^{k}$ תתאים מפני שיש דיפאומורפיזם בין $B_{\varepsilon}\left(p\right)$ ל-$B_{\varepsilon}\left(q\right)$ לכל שתי נקודות $p,q\in\mathbb{R}^{k}$.

2 יריעות k-ממדיות ב-$\mathbb{R}^n$

♣ המשפטים הבאים מראים שלמרות שההגדרה של יריעה k-ממדית ב-$\mathbb{R}^n$ הזכירה פרמטריזציה מקומית, ההגדרה אינה תלויה בה מפני שכל הפרמטריזציות המקומיות שקולות זו לזו.

משפט 2.1. תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$, M היא יריעה חלקה k-ממדית אם"ם לכל נקודה $p\in M$ קיימים:

1. סביבה פתוחה $W\subseteq M$[3] של p ($p\in W$)
2. נקודה $x_0\in\mathbb{R}^k$, $0<r\in\mathbb{R}$ ופונקציה חלקה $h:B_\varepsilon\left(x_0\right)\to\mathbb{R}^{n-k}$
3. העתקה ליניארית אורתוגונלית $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

כך שההעתקה $\alpha:B_r\left(x_0\right)\to\mathbb{R}^n$ המוגדרת ע"י $\alpha\left(x\right):=A\left(x,h\left(x\right)\right)$ (לכל $x\in B_r\left(x_0\right)$) מקיימת $\alpha\left(B_r\left(x_0\right)\right)=W$.

תהא $M\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה חלקה k-ממדית, ותהא $p\in M$.

משפט 2.2. תהיינה $\alpha:U_1\to W_1$ ו-$\beta:U_2\to W_2$ שתי פרמטריזציות מקומיות של M בסביבת p.
נסמן: $W:=W_1\cap W_2$, $U_1':=\alpha^{-1}\left(W\right)$ ו-$U_2':=\beta^{-1}\left(W\right)$; א"כ W היא סביבה פתוחה של p ב-M, U_1' ו-U_2' הן קבוצות פתוחות ב-$\mathbb{R}^k$, ו-$\beta^{-1}\circ\alpha$ היא דיפאומורפיזם בין U_1' ל-U_2'. בפרט $\left(W,\beta\mid_{U_2'}\right)$ היא רה-פרמטריזציה של $\left(W,\alpha\mid_{U_1'}\right)$ ולהפך.

מסקנה 2.3. תהיינה $\alpha:U_1\to W_1$ ו-$\beta:U_2\to W_2$ שתי פרמטריזציות מקומיות של M בסביבת p, ונסמן $x:=\alpha^{-1}\left(p\right)$ ו-$y:=\beta^{-1}\left(p\right)$; מתקיים:

$$\text{Im}\left(D\alpha_x\right)=\text{Im}\left(D\beta_y\right)$$

מסקנה 2.4. תהא $\alpha:U\to W$ פרמטריזציה מקומית של M בסביבת p. קיימות סביבה פתוחה $\tilde{W}$ של p ב-$\mathbb{R}^n$ (כאן $\tilde{W}$ פתוחה ב-$\mathbb{R}^m$ ולא ב-M), והעתקה חלקה $\psi:\tilde{W}\to U$, כך שלכל $x\in\alpha^{-1}\left(\tilde{W}\right)$ מתקיים $\psi\left(\alpha\left(x\right)\right)=x$ (כלומר ב-$\alpha^{-1}\left(\tilde{W}\right)$ מתקיים $\psi\circ\alpha=\text{Id}$).

תהא $N\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה חלקה l-ממדית.

טענה 2.5. תהיינה $f:M\to N$ פונקציה, $\alpha:U\to W$ פרמטריזציה מקומית של M בסביבת p, ו-$\beta:A\to B$ פרמטריזציה מקומית של N בסביבת $f\left(p\right)$.
f חלקה ב-p אם"ם קיימת סביבה פתוחה $U'\subseteq U$ של $\alpha^{-1}\left(p\right)$ כך שהפונקציה $\beta^{-1}\circ f\circ\alpha\mid_{U'}$ היא העתקה חלקה.

♣ חשיבות של טענה זו בכך שהיא נותנת אפיון להיותה של פונקציה חלקה בין יריעות מבלי להזדקק להרחבה מקומית שלה.

טענה 2.6. תהא $f:M\to N$ פונקציה חלקה ב-p, ותהיינה $g:V\to\mathbb{R}^n$ ו-$h:W\to\mathbb{R}^n$ הרחבות מקומיות של f בסביבת p, מתקיים:

$$Dg\mid_{T_p(M)}=Dh\mid_{T_p(M)}$$

ובנוסף הצמצום של Dg ו-Dh ל-$T_p\left(M\right)$ הוא העתקה ליניארית מ-$T_p\left(M\right)$ ל-$T_{f(p)}\left(N\right)$.

משפט 2.7. תהא $f:M\to N$ פונקציה חלקה, ותהא $q\in N$ כך ש-$f^{-1}\left(\{q\}\right)\neq\emptyset$ (כלומר $q\in\text{Im}f$).
אם q היא ערך רגולרי של f אז $f^{-1}\left(\{q\}\right)$ היא יריעה $(k-l)$-ממדית ב-$\mathbb{R}^n$.

אני מנחש שלכל יריעה d-ממדית $N'\subseteq N\subseteq\mathbb{R}^n$ כך שכל נקודה ב-N' היא ערך רגולרי, נקבל ש-$f^{-1}\left(N'\right)$ היא יריעה $(k-l+d)$-ממדית.

[3] שוב נזכיר ש-W פתוחה ב-M ולאו דווקא ב-$\mathbb{R}^n$, המשמעות היא שקיימת קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}^n$ כך ש-$W=U\cap M$.

3 מושגים פיזיקליים

צריך להוסיף כאן את המושגים "מרכז מסה" ו-"מומנט אינרציה" (תרגול 4).