אופרטורים - הגדרות בלבד

אלגברה ליניארית (2) - 80135

מרצה: איתמר צביק

מתרגלים: גיל לבנה ויואב כהן

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ג, האונ' העברית

תוכן העניינים

תודתי נתונה לגלעד שרם על סיכומיו המצוינים שהיו לי לעזר רב עד כדי כך שניתן לומר שהסיכום הזה מבוסס על סיכומיו.

סיכומי קורס זה מוקדשים לאהרון כהן;
אהרון, הידיעה שתקרא את הסיכומים הללו דרבנה אותי לאורך כל הדרך.
בהצלחה!

* * *

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 דינמיקה של אופרטור

נקרא להעתקה ליניארית ממ"ו V לעצמו ($f:V\to V$) בשם אופרטור[1], נסמן ב-$\text{End}\left(V\right)$ את מרחב האופרטורים מ-V לעצמו[2].

הגדרה 1.1. מערכת ליניארית

יהיו V מ"ו ו-$f:V\to V$ אופרטור על V, הזוג $\left(V,f\right)$ נקרא מערכת ליניארית.

תהא $\left(V,f\right)$ מערכת ליניארית מעל לשדה $\mathbb{F}$.

סימון: נסמן $f^{0}:=\text{Id}_{V}$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ נסמן $f^{n}:=f\circ f^{n-1}$.

- ♣ בכל מקום אחר בפירוש של $f^{n}\left(x\right)$ הוא $\left(f\left(x\right)\right)^{n}$, כלומר העלאה בחזקה ולא הרכבה, תכף נראה למה בקורס זה נוח לנו להגדיר אחרת.

הגדרה 1.2. הצבה של אופרטור/מטריצה בפולינום

יהיו $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ ו-$P\left(x\right):=\sum_{i=0}^{m}a_{i}\cdot x^{i}\in\mathbb{F}\left[x\right]$, נגדיר $P\left(f\right):=\sum_{i=0}^{m}a_{i}\cdot f^{i}$ ונקרא ל-$P\left(f\right)$ ההצבה של f בפולינום P, כמו כן נגדיר $P\left(A\right):=\sum_{i=0}^{m}a_{i}\cdot A^{i}$ ונקרא ל-$P\left(A\right)$ ההצבה של המטריצה A בפולינום P.

- ♣ נזכור שהוכחנו שהרכבה וסכום של העתקות ליניאריות וכן כפל של ה"ל בסקלר הם העתקות ליניאריות ולכן הצבה של אופרטור בפולינום היא אופרטור על אותו מרחב (ודאי שגם הצבה של מטריצה בפולינום היא מטריצה מאותו סדר גודל).
- ♣ בקורס הקודם סימנו מטריצה מייצגת של ה"ל בצורה $\left[f\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ עבור בסיסים $\mathcal{B}$ של התחום ו-$\mathcal{C}$ של הטווח, בקורס הזה נתעסק בעיקר באופרטורים (תחום וטווח זהים) ובד"כ גם נרצה לייצג את המרחב באמצעות בסיס מסוים, לכן נסמן את $\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ע"י $\left[f\right]_{\mathcal{B}}$.
- ♣ הצבה של אופרטור בפולינום מדרגה 0 הוא תמיד כפולה של העתקת הזהות, פעמים רבות נסמן את $\lambda\left(f\right)=\lambda\cdot f^{0}=\lambda\cdot\text{Id}_{V}$ (כאשר λ הוא פולינום) ע"י λ בלבד ועל הקורא יהיה מוטל להבין מן ההקשר שבזה מדובר.

הגדרה 1.3. מסלול

יהי $v\in V$, נגדיר $O_{f}\left(v\right):=\left\{ f^{k}\left(v\right)\mid k\in\mathbb{N}_{0}\right\}$ ונקרא ל-$O_{f}\left(v\right)$ המסלול של v תחת f.

הגדרה 1.4. מסילה

יהי $v\in V$, הסדרה $\left(f^{k}\left(v\right)\right)_{k=0}^{\infty}$ תקרא המסילה של v תחת f.

הגדרה 1.5. מרחב ציקלי

יהי $v\in V$, נסמן $Z_{f}\left(v\right):=\text{span}\left(O_{f}\left(v\right)\right)$ ונקרא ל-$Z_{f}\left(v\right)$ מרחב ציקלי של v תחת f.

הגדרה 1.6. אם קיים $v\in V$ כך ש-$Z_{f}\left(v\right)=V$ אז נאמר ש-v הוא וקטור ציקלי ביחס ל-f וש-V הוא ציקלי ביחס ל-f באמצעות v.

הגדרה 1.7. קבוצה שמורה

תהא $S\subseteq V$, נאמר ש-S שמורה/אינווריאנטית תחת f[3] אם מתקיים $f\left(S\right)\subseteq S$, כלומר $\text{Im}\left(f\mid_{S}\right)\subseteq S$.

- ♣ הגדרה זו תופסת גם עבור תתי-מרחבים וקטוריים וכמובן שבד"כ יעניינו אותנו תמ"וים שמורים ולא סתם קבוצות.
- ♣ V ו-$\left\{ 0_{V}\right\}$ מקיימים תכונות רבות באופן טריוויאלי (הם שמורים תחת כל אופרטור לדוגמה) ולכן במקרים רבים (בעיקר כשנרצה למעט אותם) נקרא להם תתי-מרחבים טריוויאליים.
- ♣ אם V נ"ס וניתן להציג אותו כסכום ישר של תמ"וים שמורים תחת f אז ההצגה המטריציאלית של f בשרשור בסיסים שלהם היא מטריצה אלכסונית לפי בלוקים.

[1] במקומות אחרים קוראים לכל העתקה ליניארית בשם "אופרטור", גם אם היא בין שני מרחבים וקטוריים שונים.
[2] ראינו בקורס הקודם שמדובר במרחב וקטורי.
[3] במהלך הקורס נתקלנו גם בביטוי "f-שמורה" שאינו נכון מבחינה לשונית.

2 פולינום מינימלי של וקטור ושל קבוצת וקטורים

יהי V מ"ו נ"ס[4] מעל לשדה $\mathbb{F}$ ויהי f אופרטור על V.

למה 2.1. יהי $0_V \neq v \in V$, א"כ קיים $n \in \mathbb{N}$ מינימלי כך ש-$\left(v, f\left(v\right), f^2\left(v\right), \ldots, f^n\left(v\right)\right)$ תלויה ליניארית ועבור אותו n קיימים $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$ יחידים כך ש-$f^n\left(v\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot f^k\left(v\right)$.

הגדרה 2.2. בסימוני הלמה שלעיל: נשים לב ש-$\left(v, f\left(v\right), f^2\left(v\right), \ldots, f^{n-1}\left(v\right)\right)$ הוא בסיס של $Z_f\left(v\right)$, בסיס זה נקרא <u>הבסיס הציקלי</u> של $Z_f\left(v\right)$ ונסמן אותו ב-$\mathcal{C}_f\left(v\right)$.

הגדרה 2.3. פולינום מינימלי

בסימוני הלמה שלעיל: נסמן $\min_v\left(x\right) := x^n + \sum_{k=0}^{n-1} -a_k \cdot x^k$[5] ונקרא ל-$\min_v$ <u>הפולינום המינימלי</u> של v תחת f.

♣ מהגדרה הפולינום המינימלי של וקטור האפס הוא 1, ובנוסף, וקטור האפס הוא הווקטור היחיד ש-1 הוא הפולינום המינימלי שלו.

למה 2.4. בסימוניי הלמה שלעיל, נשים לב לכך שמתקיים:

$$\left[f\mid_{Z_f(v)}\right]_{\mathcal{C}_f(v)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

הגדרה 2.5. יהי $P\left(x\right) := \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot x^k \in \mathbb{F}\left[x\right]$ פולינום מתוקן ($b_n = 1$) המטריצה הבאה תקרא <u>המטריצה המלווה</u> של P:

$$C_P := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & -b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -b_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -b_{n-1} \end{bmatrix}$$

♣ המטריצה המלווה של $\min_v$ היא $\left[f\mid_{Z_f(v)}\right]_{\mathcal{C}_f(v)}$.

הגדרה 2.6. נאמר שפולינום $P \in \mathbb{F}\left[x\right]$ <u>מאפס וקטור</u> v תחת f אם מתקיים $P\left(f\right)v = 0_V$, כמו כן נאמר ש-P <u>מאפס קבוצה</u> $S \subseteq V$ תחת f אם לכל $s \in S$ מתקיים $\left[P\left(f\right)\right]\left(s\right) = 0_V$.

טענה. נניח ש-V נ"ס ותהא $S \subseteq V$ קבוצת וקטורים, קיים פולינום מתוקן $P \in \mathbb{F}\left[x\right]$ יחיד המאפס את S תחת f ומקיים שלכל פולינום $G \in \mathbb{F}\left[x\right]$ המאפס את S תחת f מתקיים $P \mid G$.

הגדרה 2.7. לאותו P שבטענה האחרונה נקרא <u>הפולינום המינימלי</u> של S ונסמן אותו ב-$\min_S$[6].

[4] למעשה הסיבה היחידה לדרישה ש-V נ"ס היא כדי שיהיה ברור שהפולינום המינימלי קיים, ניתן להחליף את הדרישה הזו בדרישה שהמסלול של של הווקטור יהיה תלוי ליניארית (כשמדובר בפולינום מינימלי של וקטור) או בדרישה זו על כל הווקטורים בקבוצה/הבסיס שלה (כשמדובר בפולינום מינימלי של קבוצה).

[5] ראינו גם את הסימון $\min_v^f$, שהרי הפולינום המינימלי מוגדר ע"י האופרטור.

[6] ראינו גם את הסימון $\min_S^f$, שהרי הפולינום המינימלי מוגדר ע"י האופרטור.

3 פולינום מינימלי של אופרטור, ערכים עצמיים ואופרטורים הניתנים ללכסון

תהא (V,f) מערכת ליניארית מעל לשדה $\mathbb{F}$.

הגדרה 3.1. נאמר שפולינום $P\in\mathbb{F}[x]$ מאפס את האופרטור f אם לכל $v\in V$ מתקיים $P(f)v=0_V$.

למה 3.2. אם V נ"ס אז קיים פולינום מתוקן $P\in\mathbb{F}[x]$ יחיד המאפס את f כך שלכל $G\in\mathbb{F}[x]$ המאפס את f מתקיים $P\mid G$.

הגדרה 3.3. לאותו P נקרא הפולינום המינימלי של f ונסמן אותו ב-μ_f, בנוסף, לכל $A\in M_n(\mathbb{F})$ נגדיר את הפולינום המינימלי של A להיות הפולינום המינימלי של T_A[7] ונסמן אותו ב-μ_A.

♣ נשים לב שמתקיים $\min_V^f=\mu_f$ ולכן הרבה ממה שנאמר על μ_f נכון גם על הפולינום המינימלי של כל תמ"ו של V (עם ההתאמות הנדרשות).

הגדרה 3.4. נאמר שסקלר $\lambda\in\mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של f אם קיים $0_V\neq v\in V$ כך ש-$f(v)=\lambda\cdot v$, ל-v כזה נקרא וקטור עצמי עם ערך עצמי λ.

♣ הדרך הכי פשוטה ליצור אופרטור שאין לו ערכים עצמיים היא סיבוב של המישור ($\mathbb{R}^2$) בזווית שאינה מתחלקת כפולה שלמה של π, ואילו הדרך הכי פשוטה ליצור אופרטור בעל ערכים עצמיים שאינו כפולה של אופרטור הזהות היא שיקוף של המישור סביב ציר סימטריה כלשהו.

הגדרה 3.5. קבוצת הערכים העצמיים של f תקרא הספקטרום של f ותסומן ע"י $\sigma(f)$.

למה 3.6. לכל $\lambda\in\sigma(f)$ נסמן $V_\lambda:=\{v\in V\mid f(v)=\lambda\cdot v\}$ ו-$V^\lambda:=\left\{v\in V\;\middle|\;\exists h\in\mathbb{N}:\left[(f-\lambda)^h\right](v)=0_V\right\}$; V_λ ו-V^λ הם תמ"ו של V.

הגדרה 3.7. לכל $\lambda\in\sigma(f)$ נקרא ל-V_λ מרחב עצמי עם ערך עצמי λ ביחס ל-f ול-V^λ נקרא מרחב עצמי **מוכלל** עם ערך עצמי λ ביחס ל-f.

♣ נשים לב שלכל $\lambda\in\sigma(f)$ מתקיים $V_\lambda=\ker(f-\lambda)$.

הגדרה 3.8. וקטור השייך למרחב עצמי מוכלל עם ערך עצמי $\lambda\in\mathbb{F}$ יקרא וקטור עצמי מוכלל השייך לערך עצמי λ.

הגדרה 3.9. נניח ש-V נ"ס, נאמר ש-f הוא אופרטור ניתן ללכסון או לכסין אם קיים בסיס $\mathcal{B}$ של V כך ש-$[f]_\mathcal{B}$ היא מטריצה אלכסונית, כמו כן נאמר שמטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ היא מטריצה לכסינה אם קיימת מטריצה אלכסונית הדומה לה.

♣ מהגדרה אופרטור ניתן ללכסון אס"ם יש לו בסיס של וקטורים עצמיים.

♣ היותה של מטריצה לכסינה מקלה עלינו להעלות אותה בחזקה: תהיינה $A,P,D\in M_n(\mathbb{F})$ כך ש-A לכסינה, P הפיכה ו-$D=P^{-1}AP$ אלכסונית, א"כ לכל $m\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$A^m=\left(PDP^{-1}\right)^m=\left(PDP^{-1}\right)\cdot\left(PDP^{-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(PDP^{-1}\right)=P\cdot D^m\cdot P^{-1}$$

והעלאתה של מטריצה אלכסונית בחזקה היא קלה ונוחה.

[7] כזכור, בקורס הקודם הגדרנו לכל $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ את T_A להיות ההעתקה הליניארית מ-$\mathbb{F}^n$ ל-$\mathbb{F}^m$ המוגדרת ע"י $T_A(v):=A\cdot v$ (לכל $v\in V$).

4 צורת ז'ורדן

תהא (V,g) מערכת ליניארית מעל לשדה $\mathbb{F}$.

הגדרה 4.1. נאמר ש-g הוא אופרטור נילפוטנטי אם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$g^n=0$ (g^n היא העתקת האפס).

הגדרה 4.2. אם g נילפוטנטי אז קיים $h\in\mathbb{N}$ מינימלי המקיים $g^h=0$, h כזה יקרא הגובה של g ויסומן ב-$\text{height}\left(g\right)$; כמו כן אם g נילפוטנטי אז לכל $v\in V$ קיים $h\in\mathbb{N}$ מינימלי כך ש-$g^h\left(v\right)=0_V$, h כזה יקרא הגובה של v ויסומן ע"י $\text{height}\left(v\right)$.

- ♣ מהגדרה לכל $v\in V$ מתקיים $\text{height}\left(v\right)\leq\text{height}\left(g\right)$ ושאם $h=\text{height}\left(v\right)$ אז $\mathcal{C}_g\left(v\right)=\left(v,g\left(v\right),g^2\left(v\right),\ldots,g^h\left(v\right)\right)$, מכאן שאם V נ"ס אז מתקיים גם $\text{height}\left(g\right)\leq\dim V$.
- ♣ נשים לב שאם $h=\text{height}\left(v\right)$ אז $\min_v\left(x\right)=x^h$ ושאם $h=\text{height}\left(g\right)$ אז $\mu_g\left(x\right)=x^h$.
- ♣ נשים לב שאם $h=\text{height}\left(v\right)$ ו-$w:=\sum_{k=j}^{h-1}a_k\cdot g^k\left(v\right)$ (כאשר $a_j\neq 0$) אז $\text{height}\left(w\right)=h-j$.

הגדרה 4.3. נניח ש-g הוא אופרטור נילפוטנטי ויהי $v\in V$ ונסמן $h:=\text{height}\left(v\right)$, הבסיס הציקלי $\mathcal{C}_g\left(v\right)$ נקרא שרשרת באורך h.[8]

- ♣ בסיס המהווה שרשור של בסיסים ציקליים נקרא בסיס שרשראות.

הגדרה 4.4. בלוק ז'ורדן[9] אלמנטרי עם ערך עצמי $\lambda\in\mathbb{F}$ מסדר n הוא מטריצה $J_n\left(\lambda\right)\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ מהצורה:

$$J_n\left(\lambda\right)=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & \lambda\end{bmatrix}$$

- ♣ יש המגדירים את בלוקי ז'ורדן בתור המטריצה המשוחלפת לזו שהגדרנו (כך למשל הגדירו בוויקיפדיה), אני מנחש שהסיבה לכך היא שהם מסדרים את הבסיס הציקלי בסדר ההפוך מזה שבו הגדרנו אנחנו כך שבאופרטור נילפוטנטי האיבר האחרון בבסיס הציקלי מועתק לזה **שלפניו** וכן הלאה עד שהראשון מועתק ל-0.

הגדרה 4.5. מטריצה $J\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ תקרא מטריצת ז'ורדן אם היא מטריצה אלכסונית לפי בלוקים וכל בלוק ז'ורדן שלה הוא בלוק ז'ורדן אלמנטרי.

תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה, נאמר שמטריצת ז'ורדן $J\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ היא צורת ז'ורדן של A אם J דומה ל-A, כמו כן, בהינתן אופרטור f ש-A היא מטריצה מייצגת שלו בבסיס $\mathcal{B}$ נאמר ש-J היא צורת ז'ורדן של f וש-$\mathcal{B}$ הוא בסיס מז'רדן של f.

- ♣ בקובץ הטענות אנחנו נראה ששתי מטריצות ז'ורדן הן דומות אם"ם הן זהות עד כדי שינוי סדר הבלוקים, א"כ לכל מטריצה יש לכל היותר מטריצת ז'ורדן אחת (עד כדי שינוי סדר הבלוקים) וכך ניתן לקבוע באופן חד משמעי אם שתי מטריצות נתונות דומות זו לזו.

---

[8] ראינו גם את השם "h-שרשרת" שאינו נכון מבחינה לשונית.

[9] ערך בוויקיפדיה: קאמי ז'ורדן.

5 הפולינום האופייני, הריבוי הגאומטרי והריבוי האלגברי

יהי V מ"ו נ"ס ממימד n מעל לשדה $\mathbb{F}$ ויהא f אופרטור על V.

טענה. לכל שתי מטריצות דומות $A,B\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ולכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים:

$$\det\left(\lambda\cdot I_n-A\right)=\det\left(\lambda\cdot I_n-B\right)$$

הגדרה 5.1. יהי $\mathcal{B}$ בסיס של V, הפולינום $\det\left(x\cdot I_n-[f]_{\mathcal{B}}\right)$[10] נקרא הפולינום האופייני של f ומסומן ע"י χ_f, כמו כן לכל $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ נגדיר $\chi_A:=\chi_{T_A}$[11] ונקרא ל-χ_A הפולינום האופייני של A.

הגדרה 5.2. אם $\lambda\in\mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של f אז הריבוי הגאומטרי של λ מוגדר להיות $\dim V_\lambda=\dim\left(\ker\left(f-\lambda\right)\right)$.

הגדרה 5.3. אם $\lambda\in\mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של f אז הריבוי האלגברי של λ (ביחס ל-f) הוא הריבוי האלגברי של λ ב-χ_f, כלומר הריבוי האלגברי של λ הוא החזקה של $x-\lambda$ בפירוק של χ_f לגורמים.

[10] $x\cdot I_n-[f]_{\mathcal{B}}$ היא מטריצה ב-$M_n\left(\mathbb{F}\left[x\right]\right)$, כלומר היא מטריצה מעל חוג הפולינומים שמעל $\mathbb{F}$.

[11] כזכור T_A היא ההעתקה הליניארית המוגדרת ע"י הכפלת המטריצה בוקטור.