גאומטריה אוקלידית במישור - טענות

נכתב ע״י שריה אנסבכר

סמסטר ב׳ תשפ״ד, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על גבי המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 פונקציית זווית

תהא $(\mathcal{G}, |\cdot|, \measuredangle)$ גאומטריה כך שיש ב-$\mathcal{G}$ שלוש נקודות שונות, ותהיינה $A, B, C, D, O \in \mathcal{G}$ כך ש-A, B, C שונות מ-O.

טענה 1.1. $\measuredangle AOA$ היא זווית מנוונת.

הוכחה. מתקיים $|AA| = 0 = ||OA| - |OA||$, ולכן מהקשר בין זווית למרחק נובע ש-$\measuredangle AOA = 0$. ■

טענה 1.2. אם $\measuredangle AOB$ היא זווית שטוחה אז $A \neq B$, או בניסוח שקול: אם O נמצאת בין A ל-B, אז $A \neq B$.

הוכחה. נניח ש-$\measuredangle AOB$ היא זווית שטוחה (כלומר $\measuredangle AOB = \frac{1}{2}$) ולכן ע״פ הקשר בין זווית למרחק מתקיים $|AB| = |AO| + |OB|$. מהעובדה ש-A ו-B שונות מ-O נובע ש-$|AO| > 0$ ו-$|OB| > 0$, וממילא $|AB| = |AO| + |OB| > 0$ ו-$A \neq B$. ■

משפט 1.3. אם O נמצאת בין A ל-B אז $\measuredangle AOC + \measuredangle COB = \measuredangle AOB = \frac{1}{2}$.

הוכחה. נניח ש-O נמצאת בין A ל-B (כלומר $\measuredangle AOB = \frac{1}{2}$), ע״פ א״ש הפירמידה מתקיים:

$$\frac{1}{2} = \measuredangle AOB \leq \measuredangle AOC + \measuredangle COB \leq 1 - \measuredangle AOB = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \measuredangle AOB = \measuredangle AOC + \measuredangle COB$$

■

משפט 1.4 (אי-שוויון הפירמידה ההפוך).
מתקיים $|\measuredangle AOB - \measuredangle BOC| \leq \measuredangle AOC$.

הוכחה. ע״פ א״ש הפירמידה מתקיים:

$$\measuredangle AOB \leq \measuredangle AOC + \measuredangle COB$$
$$\measuredangle BOC \leq \measuredangle BOA + \measuredangle AOC$$

ולכן גם:

$$\measuredangle AOB - \measuredangle COB \leq \measuredangle AOC$$
$$\measuredangle BOC - \measuredangle BOA \leq \measuredangle AOC$$

כעת, מהסימטריה של פונקציית הזווית נובע כי:

$$\measuredangle AOB - \measuredangle BOC \leq \measuredangle AOC$$
$$\measuredangle BOC - \measuredangle AOB \leq \measuredangle AOC$$

ומכיוון שבהכרח מתקיים $|\measuredangle AOB - \measuredangle BOC| = \measuredangle AOB - \measuredangle BOC$ ו/או $|\measuredangle AOB - \measuredangle BOC| = \measuredangle BOC - \measuredangle AOB$ נדע שמתקיים $|\measuredangle AOB - \measuredangle BOC| \leq \measuredangle AOC$. ■

טענה 1.5. $\measuredangle AOB$ היא זווית שטוחה אס״ם $\measuredangle ABO$ ו-$\measuredangle OAB$ הן זוויות מנוונות.

הוכחה.

- $\Leftarrow$
  נניח ש-$\measuredangle AOB$ היא זווית שטוחה (כלומר $\measuredangle AOB = \frac{1}{2}$), ע״פ הקשר בין זווית למרחק מתקיים $|AB| = |AO| + |OB|$, ומכאן שגם:

$$|AO| = ||AO|| = ||AB| - |OB|| = ||AB| - |BO||$$
$$|OB| = ||OB|| = ||AB| - |AO|| = ||AB| - |BO||$$

כעת, מהקשר בין זווית למרחק נקבל ש-$\measuredangle ABO = \measuredangle OAB = 0$, כלומר $\measuredangle ABO$ ו-$\measuredangle OAB$ הן זוויות מנוונות.

- $\Leftarrow$

נניח ש-$\measuredangle ABO$ ו-$\measuredangle OAB$ הן זוויות מנוונות (כלומר $\measuredangle ABO = \measuredangle OAB = 0$), ולכן ע״פ הקשר בין זווית למרחק מתקיים:

$$|AO| = ||BO| - |BA|| = ||AB| - |OB||$$
$$|OB| = ||AB| - |AO||$$

נשים לב לכך שאם $|OB| \geq |AB|$ ו/או $|AO| \geq |AB|$ אז ע״י העברת אגף נקבל ש-$|AB| = |AO| + |OB|$, ומכאן ש-$\measuredangle AOB$ היא זווית שטוחה (הקשר בין זווית למרחק).
א״כ נניח בשלילה ש-$|OB| < |AB|$ וגם $|AO| < |AB|$ אז מתקיים:

$$|AO| = |OB| - |AB|$$
$$|OB| = |AO| - |AB|$$

כלומר:

$$|OA| + |AB| = |AB| + |AO| = |OB| = |BO|$$
$$|AB| + |OB| = |AB| + |OB| = |AO|$$

ולכן ע״פ הקשר בין זווית למרחק, הזוויות $\measuredangle OAB$ ו-$\measuredangle ABO$ הן זוויות שטוחות - בסתירה להנחה שהן מנוונות.
מכאן ש-$|OB| \geq |AB|$ ו/או $|AO| \geq |AB|$ וכפי שהראינו לעיל נובע מזה ש-$\measuredangle AOB$ היא זווית שטוחה.

■

טענה 1.6. אם $\measuredangle AOB$ היא זווית מנוונת ו-$A \neq B$ אז בדיוק אחת מבין שתי הזוויות $\measuredangle ABO$ ו-$\measuredangle OAB$ היא זווית שטוחה.

הוכחה. ע״פ הקשר בין זווית למרחק מתקיים $|AB| = ||OB| - |OA||$, ומכאן שמתקיימת לפחות אחת משתי האפשרויות הבאות:

1. $|AB| = |OB| - |OA|$ וממילא $|OB| = |OA| + |AB|$, ושוב ע״פ הקשר בין זווית למרחק מתקיים $\measuredangle OAB = \frac{1}{2}$.
2. $|AB| = |OA| - |OB|$ וממילא $|OA| = |OB| + |BO| = |AB| + |AB|$, ושוב ע״פ הקשר בין מרחק לזווית מתקיים $\measuredangle ABO = \frac{1}{2}$.

לא ייתכן ששתי הזוויות שטוחות משום שהדבר יהווה סתירה לטענה הקודמת (1.5). ■

משפט 1.7. אם B נמצאת בין C ל-O או ש-C נמצאת בין O ל-B, אז $\measuredangle AOB = \measuredangle AOC$.

הוכחה. נניח בהג״כ ש-B נמצאת בין O ל-C (כלומר $\measuredangle OBC = \frac{1}{2}$), מכאן ש-$\measuredangle BOC = 0$ (טענה 1.5).
ע״פ **אי-שוויון הפירמידה ההפוך** מתקיים $|\measuredangle BOA - \measuredangle AOC| \leq \measuredangle BOC$, ולכן מהשורה הקודמת נובע ש-$\measuredangle AOB = \measuredangle AOC$. ■

מסקנה 1.8. אם B נמצאת בין A ל-C ו-C נמצאת בין B ל-D, אז B ו-C נמצאות בין A ל-D.

הוכחה. נניח ש-B נמצאת בין A ל-C ו-C נמצאת בין B ל-D, ע״פ המשפט (1.7) מתקיים ו-$\measuredangle ABD = \measuredangle ABC$ ו-$\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$, כלומר $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD = \frac{1}{2}$ ומהגדרה C ו-D נמצאות בין A ל-D. ■

מסקנה 1.9. אם O נמצאת בין A ל-B ו-C נמצאת בין A ל-O, אז O נמצאת בין B ל-C.

הוכחה. נניח ש-O נמצאת בין A ל-B ו-C נמצאת בין A ל-O, ע״פ המשפט (1.7) מתקיים $\measuredangle BOC = \measuredangle BOA = \frac{1}{2}$, כלומר O נמצאת בין B ל-C. ■

טענה 1.10. אם O נמצאת בין A ל-B, אז מתקיימת לכל היותר אחת משתי האפשרויות הבאות:

1. C נמצאת בין A ל-O.

2. C נמצאת בין B ל-O.

הוכחה. נניח בשלילה ש-C נמצאת בין A ל-O ובין B ל-O (כלומר $\measuredangle ACO = \measuredangle BCO = \frac{1}{2}$), א״כ ע״פ הקשר בין זווית למרחק מתקיים:

$$|AO| = |AC| + |CO|$$
$$|BO| = |BC| + |CO|$$

מהנתון נובע כי $|AB| = |AO| + |OB|$ (שוב ע״פ הקשר בין זווית למרחק), א״כ קיבלנו:

$$|AB| = |AO| + |OB| = |AC| + 2\cdot |CO| + |CB|$$

מהנחת השלילה (C נמצאת בין B ל-O) וממשפט 1.7 נובע כי $\measuredangle ACB = \measuredangle ACO = \frac{1}{2}$, ולכן מהקשר בין זווית למרחק נקבל ש-$|AB| = |AC| + |CB|$.

מכאן ש-$|CO| = 0$, כלומר $C = O$, אך זה עומד בסתירה לכך ש-C נמצאת בין A ל-O.

א״כ הנחת השלילה אינה נכונה - שתי האפשרויות אינן יכולות להתקיים יחד. ∎

2 ישרים ומישורים

תהא $(\mathcal{G}, |\cdot|, \measuredangle)$ גאומטריה.

2.1 ישרים

טענה 2.1. כל ישר הוא קבוצה אין-סופית.

נניח שיש ב-$\mathcal{G}$ ישרים.

טענה 2.2. תהא $S \subseteq \mathcal{G}$ תת-קבוצה, S קווית אס״ם לכל שלוש נקודות $A, B, O \in S$ כך ש-A ו-B שונות מ-O מתקיים $\measuredangle AOB = \frac{1}{2}$ או $\measuredangle AOB = 0$.

הוכחה. נובע ישירות מטענות 1.5 ו-1.6. ■

טענה 2.3. תהא $S \subseteq \mathcal{G}$ קבוצה קווית, ותהיינה $A, B, O \in S$ כך ש-A ו-B שונות מ-O.
לכל $O \neq C \in \mathcal{G}$ מתקיים $\measuredangle COB = \measuredangle COA$ ו/או $\measuredangle COB = \frac{1}{2} - \measuredangle COA$.

הוכחה. ע״פ הטענה הקודמת (2.2) $\measuredangle AOB$ היא זווית שטוחה או זווית מנוונת.

- אם $\measuredangle AOB$ היא זווית שטוחה אז לכל נקודה $O \neq C \in \mathcal{G}$ מתקיים $\measuredangle AOC + \measuredangle COB = \measuredangle AOB = \frac{1}{2}$ (משפט 1.3), וממילא $\measuredangle COB = \frac{1}{2} - \measuredangle COA$.
- ע״פ א״ש הפירמידה ההפוך מתקיים $|\measuredangle AOC - \measuredangle COB| \leq \measuredangle AOB$, מכאן שאם $\measuredangle AOB$ היא זווית מנוונת אז $\measuredangle COB = \measuredangle COA$.

■

טענה 2.4. תהא S קבוצה קווית, ויהיו $A, B, O \in S$ כך ש-O נמצאת בין A ל-B. לכל $O \neq C \in S$ מתקיימת אחת מארבע האפשרויות הבאות:

1. A נמצאת בין C ל-O.
2. C נמצאת בין A ל-O.
3. C נמצאת בין B ל-O.
4. B נמצאת בין C ל-O.

הוכחה. נניח בשלילה שאף אחת מארבע האפשרויות אינה מתקיימת.
מהעובדה שאפשרויות 1 ו-2 אינן מתקיימות, ומהגדרה, נובע ש-O נמצאת בין A ל-C. כמו כן, מהעובדה שאפשרויות 3 ו-4 אינן מתקיימות, ומהגדרה, נובע ש-O נמצאת בין B ל-C.
מכאן ש-C אינה נמצאת בין A ל-B (טענה 1.10), א״כ מהגדרה מתקיימת בדיוק אחת משתי האפשרויות הבאות: A נמצאת בין B ל-C או ש-B נמצאת בין A ל-C.
נניח בהג״כ ש-A נמצאת בין B ל-C, ומכאן ש-$\measuredangle CAO = \measuredangle CAB$ (משפט 1.7). ראינו לעיל ש-O נמצאת בין A ל-C, ולכן ע״פ טענה 1.5 $\measuredangle CAO$ היא זווית מנוונת וממילא גם $\measuredangle CAB$ מנוונת. כעת נקבל מטענה 1.6 ש-$\measuredangle ABC$ שטוחה או ש-$\measuredangle ACB$ שטוחה, אך כבר ראינו ש-C אינה נמצאת בין A ל-B ולכן בהכרח $\measuredangle ABC$ שטוחה, כלומר B נמצאת בין A ל-C בסתירה להנחה.
מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ובהכרח מתקיימת אחת מארבע האפשרויות הנ״ל. ■

טענה 2.5. תהא $S \subseteq \mathcal{G}$ קבוצה קווית, S היא ישר אס״ם קיימת נקודה $O \in S$ המקיימת שלכל $0 < r \in \mathbb{R}$, קיימות שתי נקודות $A, B \in L$ כך ש-O נמצאת בין A ל-B ו-$r = |AO| = |BO|$.

הוכחה. הגרירה מימין לשמאל טריוויאלית, א"כ נוכיח רק את הגרירה השנייה.
נניח שקיימת נקודה $O \in S$ כנ"ל, S קווית ע"פ הגדרה ומהקיום של O נובע שהיא אינה ריקה, לכן נותר להוכיח רק את התנאי השלישי בהגדרה.

- יהיו $S \ni O' \neq O$ ו-$0 < r \in \mathbb{R}$, מהגדרת O נובע שקיימות שתי נקודות $A, B \in S$ כך ש-O נמצאת בין A ל-B ו-$|AO| = |BO| = |OO'| + r$.

  תהיינה A ו-B כנ"ל, ע"פ הטענה הקודמת (2.4) מתקיימת אחת מארבע האפשרויות הבאות:

  1. A נמצאת בין O' ל-O - ע"פ הקשר בין זווית למרחק מתקיים $|OO'| = |OA| + |AO'|$, ולכן מהנ"ל נובע כי:
  $$|AO'| = |OO'| - |OA| = |OO'| - (|OO'| + r) = -r$$
  בסתירה לכך ש-$r > 0$ ו-$|AO'| \geq 0$.
  2. O' נמצאת בין A ל-O - ע"פ הקשר בין זווית למרחק מתקיים $|AO| = |AO'| + |O'O|$, ולכן מהנ"ל נובע כי:
  $$|AO'| = |OA| - |OO'| = |OO'| + r - |OO'| = r$$
  3. O' נמצאת בין B ל-O - מאותו נימוק שבמקרה הקודם נקבל ש-$|BO'| = r$.
  4. B נמצאת בין O' ל-O - מאותו נימוק שבמקרה הראשון נובע שמקרה זה אינו אפשרי.

  א"כ מצאנו נקודה אחת שמרחקה מ-O' הוא r, נסמן נקודה זו ב-X.

- אם ידוע גם ש-$|OO'| = r$ הרי שנמצאה גם הנקודה השנייה, וע"פ החלוקה למקרים O' אכן נמצאת בין הנקודה הראשונה לבין O. לפיכך נוכל להניח ש-$|OO'| \neq r$, וממילא $||OO"| - r| > 0$; ושוב - מהגדרת O נובע שקיימות שתי נקודות $C, D \in S$ כך ש-O נמצאת בין C ל-D ו-$|CO| = |DO| = ||OO'| - r|$.

  תהיינה C ו-D כנ"ל, ופעם נוספת - ע"פ הטענה הקודמת (2.4) מתקיימת אחת מארבע האפשרויות הבאות:

  1. C נמצאת בין O' ל-O - ע"פ מסקנה 1.8 O נמצאת בין D ל-O', ולכן ע"פ הקשר בין זווית למרחק מתקיים:
  $$|OO'| = |OC| + |CO'|$$
  $$|DO'| = |DO| + |OO'|$$
  וממילא אם $|OO'| > r$ אז:
  $$|CO'| = |OO'| - |CO| = |OO'| - (|OO'| - r) = r$$
  ואם $|OO'| < r$ אז:
  $$|DO'| = |DO| + |OO'| = r - |OO'| + |OO'| = r$$
  2. O' נמצאת בין C ל-O - ע"פ הקשר בין זווית למרחק מתקיים $|CO| = |CO'| + |O'O|$, מכאן ש-$|OO'| < r$ (אחרת נקבל ש-$|CO'| = -r$ בסתירה לכך ש-$r > 0$); כעת, ממסקנה 1.9 נקבל ש-O נמצאת בין D ל-O', ולכן ע"פ הקשר בין זווית למרחק מתקיים:
  $$|DO'| = |DO| + |OO'| = r - |OO'| + |OO'| = r$$
  3. O' נמצאת בין D ל-O - מאותו נימוק שבמקרה הקודם נקבל ש-$|CO'| = r$.
  4. D נמצאת בין O' ל-O - מאותו נימוק שבמקרה הראשון נובע שאם $|OO'| > r$ אז $|DO'| = r$, ואם $|OO'| < r$ אז $|CO'| = r$.

  א"כ מצאנו נקודה נוספת שמרחקה מ-O' הוא r, נסמן נקודה זו ב-Y.

- נשים לב לכך ש-$X \neq Y$ שכן $|XO'| = |OO'| + r$ ואילו $|YO'| = ||OO'| - r|$, אם היה מתקיים $|XO'| = |YO'|$ היינו מקבלים ש-$r = 0$ ו/או $|OO'| = 0$ בסתירה לכך ש-$r > 0$ ו-$O' \neq O$. בנוסף נובע מכאן ש-$|XY| = ||O'Y| - |O'X|| \neq 0$,

ולכן ע״פ הקשר בין זווית למרחק $\measuredangle XO'Y \neq 0$, ומהיות S קווית נדע ש-$\measuredangle XO'Y$ - כלומר O' נמצאת בין X ל-Y ובזאת נשלמה ההוכחה.

■

משפט 2.6. תהא $S \subseteq \mathcal{G}$ קבוצה קווית שיש בה שתי נקודות שונות, ותהיינה $A, B \in S$ כך ש-$A \neq B$.
לכל ישר $L \subseteq \mathcal{G}$ המקיים $A, B \in L$ מתקיים $S \subseteq L$.

הוכחה. יהי $L \subseteq \mathcal{G}$ ישר המקיים $A, B \in L$, תהא $C \in S$, ונחלק למקרים:

- אם $C = A$ או ש-$C = B$ אז מהגדרה $C \in L$.
- נניח ש-C נמצאת בין A ל-B או ש-B נמצאת בין A ל-C.
  מהיות L ישר נובע שקיימות שתי נקודות $D, E \in L$ כך ש-A נמצאת בין D ל-E ו-$|AD| = |AE| = |AC|$, תהיינה D ו-E כנ״ל.
  מטענה 1.10 נובע ש-B אינה נמצאת בין A ל-D ו/או B אינה נמצאת בין A ל-E, א״כ נניח בהג״כ ש-B אינה נמצאת בין A ל-D.
  מטענה 2.2, ומהשורה הקודמת, נובע ש-$\measuredangle BAD$ היא זווית מנוונת; מכאן שגם $\measuredangle CAD$ היא זווית מנוונת (משפט 1.7), ולכן ע״פ הקשר בין זווית למרחק מתקיים:
  $$|CD| = ||AC| - |AD|| = ||AC| - |AC|| = 0$$
  כלומר $C = D \in L$.
- המקרה שבו A נמצאת בין B ל-C שקול למקרה שבו B נמצאת בין A ל-C (אין שום הבדל בין A ל-B).

C הנ״ל היה שרירותי ולכן נובע מכאן ש-$L \subseteq S$. ■

מסקנה 2.7. לכל שני ישרים שונים יש לכל היותר נקודת חיתוך אחת.

♣ או במילים אחרות: ״דרך שתי נקודות עובר ישר אחד לכל היותר״.

♣ מכאן ואילך נוכל לומר ״נקודת החיתוך״ (בה״א הידיעה) עבור שני ישרים שונים שאינם זרים.

מסקנה 2.8. כל ישר הוא קבוצה קווית מרבית.

משפט 2.9. כל שתי זוויות קודקודיות שוות זו לזו.

הוכחה. יהיו $L_1, L_2 \subseteq \mathcal{G}$ ישרים שאינם זרים, תהא $O \in L_1 \cap L_2$ נקודת חיתוך שלהם, ויהיו $A, B \in L_1$ ו-$C, D \in L_2$ כך ש-O נמצאת בין A ל-B ובין C ל-D. נוכיח ש-$\measuredangle AOC = \measuredangle BOD$ ו-$\measuredangle AOD = \measuredangle BOC$.
ע״פ משפט 1.3 מתקיים $\measuredangle AOC + \measuredangle COB = \frac{1}{2} = \measuredangle COB + \measuredangle BOD$, ומכאן ש-$\measuredangle AOC = \measuredangle BOD$; באותו אופן נוכיח שגם $\measuredangle AOD = \measuredangle BOC$. ■

משפט 2.10. זוויות צמודות משלימות זו את זו ל-$\frac{1}{2}$, כלומר הסכום של כל שתי זוויות צמודות הוא $\frac{1}{2}$.

הוכחה. יהיו $L_1, L_2 \subseteq \mathcal{G}$ ישרים שאינם זרים, תהא O נקודת חיתוך שלהם, ויהיו $A, B \in L_1$ כך ש-O נמצאת בין A ל-B.
ע״פ משפט 1.7 מתקיים $\measuredangle AOD = \measuredangle AOC$, ולכן ממשפט 1.3 נובע כי:
$$\measuredangle AOC + \measuredangle DOB = \measuredangle AOD + \measuredangle DOB = \frac{1}{2}$$
$$\measuredangle AOD + \measuredangle COB = \measuredangle AOC + \measuredangle COB = \frac{1}{2}$$

■

מסקנה 2.11. יהיו $L_1, L_2 \subseteq \mathcal{G}$ ישרים שונים שאינם זרים, ותהא $O \in L_1 \cap L_2$ נקודת החיתוך שלהם.
קיימים $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ כך שלכל $O \neq A \in L_1$, ו-$O \neq B \in L_2$ מתקיים $\measuredangle AOB = \alpha$ ו/או $\measuredangle AOB = \beta$.

♣ מסקנה זו מאפשרת לנו לדבר על שתי הזוויות שבין זוג ישרים הנחתכים בנקודה.

הוכחה. יהיו $O \neq C \in L_1$ ו-$O \neq D \in L_2$, ונסמן $\alpha := \measuredangle COD$ ו-$\beta := \frac{1}{2} - \measuredangle COD$.
יהיו $O \neq A \in L_1$ ו-$O \neq B \in L_2$ ונחלק למקרים[1]:

1. אם O נמצאת בין A ל-C ובין B ל-D, אז $\measuredangle AOB$ ו-$\measuredangle COD$ הן זוויות קודקודיות, ולכן ע״פ משפט 2.9 מתקיים $\measuredangle AOB = \measuredangle COD = \alpha$.
2. אם O נמצאת בין A ל-C ובנוסף B נמצאת בין D ל-O או ש-D נמצאת בין B ל-O, אז $\measuredangle AOB$ ו-$\measuredangle COD$ הן זוויות צמודות, ולכן ע״פ משפט 2.10 מתקיים $\measuredangle AOB = \frac{1}{2} - \measuredangle COD = \beta$.
3. אם O נמצאת בין B ל-D ובנוסף A נמצאת בין C ל-O או ש-C נמצאת בין A ל-O, אז $\measuredangle AOB$ ו-$\measuredangle COD$ הן זוויות צמודות, ולכן ע״פ משפט 2.10 מתקיים $\measuredangle AOB = \frac{1}{2} - \measuredangle COD = \beta$.
4. אם A נמצאת בין C ל-O או ש-C נמצאת בין A ל-O ובנוסף B נמצאת בין D ל-O או ש-D נמצאת בין B ל-O, אז ע״פ משפט 1.7 מתקיים $\measuredangle AOB = \measuredangle AOD = \measuredangle COD = \alpha$.

■

2.2 מישורים

טענה 2.12. כל מישור הוא קבוצה אין-סופית.

טענה 2.13. בכל מישור מוכלים אין-סוף ישרים.

מסקנה 2.14. אם יש ב-$\mathcal{G}$ מישורים אז יש בה גם ישרים.

נניח שיש ב-$\mathcal{G}$ מישורים.

משפט 2.15. תהא $S \subseteq \mathcal{G}$ קבוצה קווית שיש בה שתי נקודות שונות, ותהיינה $A, B \in S$ כך ש-$A \neq B$.
לכל מישור $M \subseteq \mathcal{G}$ המקיים $A, B \in M$ מתקיים $S \subseteq M$.

הוכחה. יהי $M \subseteq \mathcal{G}$ מישור המקיים $A, B \in M$, תהא $C \in S$, ונחלק למקרים:

- אם $C = A$ או ש-$C = B$ אז מהגדרה $C \in L$.
- נניח ש-C נמצאת בין A ל-B או ש-B נמצאת בין A ל-C.
מהיות M מישור נובע שקיימת נקודה $D \in M$ כך ש-$|AC| = |AD|$ ו-$\measuredangle BAD = 0$, מכאן שגם $\measuredangle CAD = 0$ (משפט 1.7), ולכן ע״פ הקשר בין זווית למרחק מתקיים:
$$|CD| = ||AC| - |AD|| = ||AC| - |AC|| = 0$$
כלומר $C = D \in L$.
- המקרה שבו A נמצאת בין B ל-C שקול למקרה שבו B נמצאת בין A ל-C (אין שום הבדל בין A ל-B).

C הנ״ל היה שרירותי ולכן נובע מכאן ש-$S \subseteq M$. ■

מסקנה 2.16. לכל מישור וישר שאינו מוכל בו יש לכל היותר נקודת חיתוך אחת.

[1] ע״פ מסקנה 2.4 אלו אכן כל המקרים.

משפט 2.17. דרך כל שתי נקודות במישור ניתן להעביר ישר יחיד המוכל במישור
יהי $M \subseteq \mathcal{G}$ מישור, לכל $A, B \in M$ כך ש-$A \neq B$ קיים ישר יחיד $L \subseteq \mathcal{G}$ כך ש-$A, B \in L$ ו-$L \subseteq M$.

הוכחה. תהיינה $A, B \in M$ כך ש-$A \neq B$, היחידות של ישר כנ"ל נובעת ישירות ממסקנה 2.7 ולכן נעסוק כאן רק בקיום.
מהיות M מישור נובע שלכל $0 < r \in \mathbb{R}$ קיימות שתי נקודות $C, D \in M$ כך ש-$|BC| = |BD| = r$, $\measuredangle ABC = 0$ ו-$\measuredangle ABD = \frac{1}{2}$, תהיינה C ו-D כנ"ל.
מהיות M קבוצה מישורית נובע שלכל שתי נקודות כאלה מתקיימת אחת מארבע האפשרויות הבאות:

$$\frac{1}{2} = \measuredangle ABD = \measuredangle ABC + \measuredangle CBD = 0 + \measuredangle CBD = \measuredangle CBD$$
$$0 = \measuredangle ABC = \measuredangle ABD + \measuredangle DBC = \frac{1}{2} + \measuredangle CBD > 0$$
$$\measuredangle CBD = \measuredangle CBA + \measuredangle ABD = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$1 = \measuredangle ABC + \measuredangle CBD + \measuredangle DBA = 0 + \measuredangle CBD + 0 = \measuredangle CBD$$

כלומר האפשרויות השנייה והרביעית אינן אפשריות ולכן $\measuredangle CBD = \frac{1}{2}$, כלומר B נמצאת בין שתי הנקודות הללו; מכאן שקיים ישר יחיד $L \subseteq \mathcal{G}$ כך ש-$A, B \in L$ ו-$L \subseteq M$. ■

3 טיוטה

טענה 3.1. תהא $S\subseteq\mathcal{G}$ קבוצה מישורית שיש בה שלוש נקודות שאינן קוויות[2], ותהיינה $A,B,O\in S$ כנ״ל. לכל $C,D\in S$, אם $\measuredangle AOC=\measuredangle AOD$ וגם $\measuredangle BOC=\measuredangle BOD$, אז $\measuredangle COD=0$.

הוכחה. תהיינה $C,D\in\mathcal{G}$ כך ש-$\measuredangle AOC=\measuredangle AOD$ ו-$\measuredangle BOC=\measuredangle BOD$, נסמן:

$$\begin{aligned}\alpha&:=\measuredangle AOC=\measuredangle AOD\\ \beta&:=\measuredangle BOC=\measuredangle BOD\\ \gamma&:=\measuredangle AOB\\ \delta&:=\measuredangle COD\end{aligned}$$

ונחלק למקרים (מהיות S מישורית נובע שאלו אכן כל המקרים).

- אם $\gamma=\alpha+\beta$ אז לא ייתכן שמתקיימת אחת מהאפשרויות הבאות:

$$\delta=2\alpha$$

■

משפט 3.2. כל מישור הוא קבוצה מישורית מרבית.

הוכחה. יהי $M\subseteq\mathcal{G}$ מישור, ותהא $S\subseteq\mathcal{G}$ קבוצה מישורית כך ש-$M\subseteq S$; תהא $P\in S$, ותהיינה $P\neq A,O\in M$ כך ש-$A\neq O$.

- אם $\measuredangle AOP=0$ או ש-$\measuredangle AOP=\frac{1}{2}$ אז הקבוצה $\{A,O,P\}$ היא קבוצה קווית (נובע מטענות 1.5 ו-1.6), ולכן ע״פ משפט 2.6 היא מוכלת בכל ישר ש-A ו-O שייכות אליו. ע״פ המשפט הקודם (2.17) קיים ישר $L\subseteq\mathcal{G}$ כך ש-$A,O\in L$ ו-$L\subseteq M$, ולפיכך $\{A,O,P\}\subseteq M$ ובפרט $P\in M$. א״כ נוכל להניח מעתה ש-$0<\measuredangle AOP<\frac{1}{2}$.
- לפיכך מהיות M מישור נובע שקיימות שתי נקודות **שונות** $B,C\in M$ כך ש-$|OP|=|CO|=|BO|$ ו-$\alpha:=\measuredangle AOB=\measuredangle AOC=\measuredangle AOP$, תהיינה B ו-C כנ״ל.
  - מהיות S מישורית נובע שמתקיימת אחת מארבע האפשרויות הבאות:

$$\begin{aligned}\alpha=\measuredangle AOB&=\measuredangle AOC+\measuredangle COB=\alpha+\measuredangle COB\\ \measuredangle AOC&=\measuredangle AOB+\measuredangle BOC=\alpha+\measuredangle BOC\\ \measuredangle BOC&=\measuredangle BOA+\measuredangle AOC=2\alpha\\ 1&=\measuredangle AOB+\measuredangle BOC+\measuredangle COA=2\alpha+\measuredangle BOC\end{aligned}$$

    - משתי האפשרויות הראשונות נובע ש-$\measuredangle BOC=0$ (כי $\measuredangle AOB=\measuredangle AOC$), וע״פ הקשר בין זווית למרחק יתקיים $|BC|=||BO|-|CO||=0$ בסתירה לכך ש-$B\neq C$.
    - מהאפשרות השלישית נובע ש-$\alpha\leq\frac{1}{4}$.
    - מהאפשרות הרביעית נובע ש-$\alpha\geq\frac{1}{4}$.
  - מהיות S מישורית נובע שמתקיימת אחת מארבע האפשרויות הבאות:

$$\begin{aligned}\alpha=\measuredangle AOB&=\measuredangle AOP+\measuredangle POB=\alpha+\measuredangle POB\\ \alpha=\measuredangle AOP&=\measuredangle AOB+\measuredangle BOP=\alpha+\measuredangle BOP\\ \measuredangle BOP&=\measuredangle BOA+\measuredangle AOP=2\alpha\\ 1&=\measuredangle AOB+\measuredangle BOP+\measuredangle POA=2\alpha+\measuredangle BOP\end{aligned}$$

[2] כלומר קיימות $A,B,C\in S$ כך ש-$\{A,B,C\}$ אינה קווית.

* משתי האפשרויות הראשונות נובע ש-$\measuredangle BOP = 0$, ולכן ע״פ הקשר בין זווית למרחק מתקיים $|BP| = ||OP| - |OB|| = 0$, כלומר $P = B \in M$.
* מהאפשרות השלישית נובע ש-$\alpha \le \frac{1}{4}$.
* מהאפשרות הרביעית נובע ש-$\alpha \ge \frac{1}{4}$.

– מהיות S מישורית נובע שמתקיימת אחת מארבע האפשרויות הבאות:

$$\alpha = \measuredangle AOC = \measuredangle AOP + \measuredangle POC = \alpha + \measuredangle POC$$
$$\alpha = \measuredangle AOP = \measuredangle AOC + \measuredangle COP = \alpha + \measuredangle COP$$
$$\measuredangle COP = \measuredangle COA + \measuredangle AOP = 2\alpha$$
$$1 = \measuredangle AOC + \measuredangle COP + \measuredangle POA = 2\alpha + \measuredangle COP$$

כפי שראינו לעיל:

* משתי האפשרויות הראשונות נובע ש-$P = C \in M$.
* מהאפשרות השלישית נובע ש-$\alpha \le \frac{1}{4}$.
* מהאפשרות הרביעית נובע ש-$\alpha \ge \frac{1}{4}$.

• א״כ נחלק למקרים באופן הבא:

– אם $\alpha < \frac{1}{4}$ אז $\measuredangle BOC = \measuredangle BOP = \measuredangle COP = 2\alpha$, ולפיכך הסכום של כל שתיים מהן גדול מן השלישית (כי $\alpha > 0$), ומהיות S מישורית נקבל ש-$1 = \measuredangle BOC + \measuredangle BOP + \measuredangle COP = 6\alpha$, כלומר $\alpha = \frac{1}{6}$.

– אם $\alpha > \frac{1}{4}$ אז $\measuredangle BOC = \measuredangle BOP = \measuredangle COP = 1 - 2\alpha$, ולפיכך הסכום של כל שתיים מהן גדול מן השלישית (כי $\alpha < \frac{1}{2}$), ומהיות S מישורית נקבל ש-$1 = \measuredangle BOC + \measuredangle BOP + \measuredangle COP = 3 - 6\alpha$, כלומר $\alpha = \frac{1}{3}$.

– אם $\alpha = \frac{1}{4}$ אז $2\alpha = \frac{1}{2} = 1 - 2\alpha$ ושוב קיבלנו $\measuredangle BOC = \measuredangle BOP = \measuredangle COP = 2\alpha = 1 - 2\alpha = \frac{1}{2}$, ולפיכך הסכום של כל שתיים מהן גדול מן השלישית (כי $0 < \alpha < \frac{1}{2}$), ומהיות S מישורית נקבל ש-$1 = \measuredangle BOC + \measuredangle BOP + \measuredangle COP = 1\frac{1}{2}$, וזו סתירה.

מכאן ש-$P \in M$, ומכיוון ש-P הייתה שרירותית נדע ש-$S \subseteq M$. ■

$$\measuredangle BOC = \measuredangle BOA + \measuredangle AOC = 2\alpha$$
$$\measuredangle BOP = \measuredangle BOA + \measuredangle AOP = 2\alpha$$
$$\measuredangle COP = \measuredangle COA + \measuredangle AOP = 2\alpha$$

$$1 > \measuredangle AOB + \measuredangle BOC + \measuredangle COA = 2\alpha + \measuredangle BOC$$
$$1 > \measuredangle AOB + \measuredangle BOP + \measuredangle POA = 2\alpha + \measuredangle BOP$$
$$1 > \measuredangle AOC + \measuredangle COP + \measuredangle POA = 2\alpha + \measuredangle COP$$

משפט 3.3. תהא $S \subseteq \mathcal{G}$ קבוצה מישורית שיש בה שלוש נקודות שאינן קוויות,[3] ותהיינה $A, B, C \in S$ שלוש נקודות כאלה. לכל מישור $M \subseteq \mathcal{G}$ המקיים $A, B, C \in M$ מתקיים $S \subseteq M$.

[3] כלומר קיימות $A, B, C \in S$ כך ש-$\{A, B, C\}$ אינה קווית.

הוכחה. יהי $M \subseteq \mathcal{G}$ ישר המקיים $A,B,C \in M$, ותהא $D \in S$. מהיות S מישורית נובע שמתקיימת אחת מארבע האפשרויות הבאות[4]:

$$\begin{aligned}
\measuredangle ABC &= \measuredangle CBD + \measuredangle DBA \\
\measuredangle ABD &= \measuredangle ABC + \measuredangle CBD \\
\measuredangle CBD &= \measuredangle CBA + \measuredangle ABD \\
1 &= \measuredangle ABC + \measuredangle CBD + \measuredangle DBA
\end{aligned}$$

■

הוכחה. נניח בשלילה ש-$M \nsubseteq S$, תהא $D \in S$ כך ש-$D \notin M$, ונוכיח ש-$M \uplus \{D\}$ היא קבוצה מישורית בסתירה למשפט הקודם (3.2). ■

[4]כל קבוצה בת שני איברים היא קווית ולכן בהכרח A,B,C שונות זו מזו.