הסתברות בדידה - משפטים

תורת ההסתברות (1) - 80420

מרצה: אורי גוראל-גורביץ'

מתרגל: אמיר בכר

סוכם ע"י שריה אנסבכר

סמסטר א' תשפ"ה, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

1 התחלה 3

2 מרחבי הסתברות בדידה 4

3 הסתברות מותנית ואי-תלות 5

4 משתנים מקריים בדידים 6

4.1 התחלה 6

4.2 הסתברות מותנית ואי-תלות 6

4.3 התפלגויות נפוצות 7

5 תוחלת 8

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על גבי המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

טענה 1.1. תהא $p:\Omega\to\mathbb{R}$ פונקציית הסתברות על מרחב מדגם Ω, תהא $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ קבוצת מאורעות של Ω, ותהא $\mathbb{P}_p:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $A\in\mathcal{F}$):

$$\mathbb{P}_p(A):=\sum_{a\in A}p(a)$$

$\mathbb{P}_p$ היא פונקציית הסתברות על $(\Omega,\mathcal{F})$, והיא נתמכת על $\operatorname{Supp}(p)$.

♣ לא כל פונקציית הסתברות נוצרת ע"י פונקציית הסתברות נקודתית; לדוגמה: הפונקציה המחזירה לכל תת-קטע של $[0,1]$ את אורכו, היא פונקציית הסתברות על $([0,1],\mathcal{F})$, כאשר $\mathcal{F}$ **אינה** קבוצת כל תתי-הקטעים של $[0,1]$ אלא סיגמא-אלגברה המכילה את הקבוצה הזו.

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

טענה 1.2. מתקיימות כל התכונות הבאות:

1. הסתברות המאורע הריק - $\mathbb{P}(\emptyset)=0$.
2. סכימות (סופית) - לכל $n\in\mathbb{N}$ מאורעות זרים בזוגות $A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathcal{F}$ מתקיים:
$$\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{n}}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)$$
3. מונוטוניות - לכל שני מאורעות $A,B\in\mathcal{F}$ כך ש-$A\subseteq B$ מתקיים $\mathbb{P}(A)\leq\mathbb{P}(B)$.
4. לכל מאורע $A\in\mathcal{F}$ מתקיים $\mathbb{P}(A)\leq 1$.
5. הסתברות המאורע המשלים - לכל מאורע $A\in\mathcal{F}$ מתקיים $\mathbb{P}(\Omega\setminus A)=1-\mathbb{P}(A)$.

משפט 1.3. נוסחת ההכלה וההדחה

יהיו $A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathcal{F}$ מאורעות, ולכל $\emptyset\neq I\subseteq[n]$ נסמן $A_I:=\bigcap_{i\in I}A_i$. מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot\left(\sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}}\mathbb{P}(A_I)\right)=\sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]}(-1)^{|I|+1}\cdot\mathbb{P}(A_I)$$

♣ בד"כ לא נצטרך את נוסחת ההכלה וההדחה ליותר משלושה מאורעות, לכן נביא כאן את הנוסחה עבור שניים ושלושה מאורעות. לכל שלושה מאורעות $A,B,C\in\mathcal{F}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$$

$$\mathbb{P}(A\cup B\cup C)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-(\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(C\cap A))+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$$

מסקנה 1.4. חסם האיחוד

לכל קבוצת מאורעות סופית/בת-מנייה $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{F}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A\right)\leq\sum_{A\in\mathcal{A}}\mathbb{P}(A)$$

משפט 1.5. נוסחת ההסתברות השלמה

תהא $\mathcal{A}$ חלוקה סופית/בת-מנייה של Ω כך ש-$A \cap B \in \mathcal{F}$ לכל $A, B \in \mathcal{A}$. לכל מאורע $B \in \mathcal{F}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(A \cap B)$$

משפט 1.6. רציפות פונקציית ההסתברות

תהא $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מאורעות.

- אם $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה עולה, כלומר $A_n \subseteq A_{n+1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$, אז:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

- אם $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה יורדת, כלומר $A_{n+1} \subseteq A_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, אז:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2 מרחבי הסתברות בדידה

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

טענה 2.1. אם $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ הוא מרחב הסתברות אחידה, לכל לכל $A \in \mathcal{F}$ מתקיים $\mathbb{P}_p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

מסקנה 2.2. מרחב המדגם של מרחב הסתברות אחידה הוא סופי.

טענה 2.3. יהיו $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ מרחבי הסתברות בדידה, ויהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב המכפלה שלהם. לכל $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{F}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}_k(A_k)$$

משפט 2.4. נניח ש-$\{\omega\} \in \mathcal{F}$ לכל $\omega \in \Omega$. התנאים הבאים שקולים:

1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ הוא מרחב הסתברות בדידה.
2. $\mathbb{P}$ נתמכת על קבוצה בת-מנייה או סופית.
3. לכל מאורע $A \in \mathcal{F}$ מתקיים $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in \mathcal{F}} \mathbb{P}(\{\omega\})$.
4. $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$.

מסקנה 2.5. אם מרחב המדגם Ω בן-מנייה אז $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ הוא מרחב הסתברות בדידה.

3 הסתברות מותנית ואי-תלות

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

מסקנה 3.1. נוסחת ההסתברות השלמה - נוסח נוסף
תהא $\mathcal{A}$ חלוקה סופית/בת-מנייה של Ω כך ש-$A \cap B \in \mathcal{F}$ לכל $A, B \in \mathcal{A}$. לכל מאורע $B \in \mathcal{F}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{A \in \mathcal{A}'} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \mid A)$$

כאשר $\mathcal{A}' := \{A \in A \mid \mathbb{P}(A) > 0\}$.

טענה 3.2. לכל מאורע $A \in \mathcal{F}$, הפונקציה $\mathbb{P}_A : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ (כזכור $\mathbb{P}_A(X) := \mathbb{P}(X \mid A)$ לכל $X \in \mathcal{F}$), היא פונקציית הסתברות על $(\Omega, \mathcal{F})$.

טענה 3.3. יהיו $A, B \in \mathcal{F}$ שני מאורעות, ותהיינה $\mathbb{P}', \mathbb{P}'' : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ הפונקציות המוגדרות ע"י (לכל $X \in \mathcal{F}$):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}'(X) &:= \mathbb{P}_A(X) = \mathbb{P}(X \mid A) \\ \mathbb{P}''(X) &:= \mathbb{P}'_B(X) = \mathbb{P}'(X \mid B) = \mathbb{P}_A(X \mid B)\end{aligned}$$

לכל $X \in \mathcal{F}$ מתקיים $\mathbb{P}''(X) = \mathbb{P}(X \mid A \cap B)$.

♣ כלומר אין משמעות לסדר שבו מתנים את המאורעות.

משפט 3.4 (חוק בייס[1]).
לכל שני מאורעות $A, B \in \mathcal{F}$ כך ש-$\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \cdot \mathbb{P}(B \mid A)$$

טענה 3.5. יהיו $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ ו-$(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ מרחבי הסתברות.
לכל $A \in \mathcal{F}_1$ ולכל $B \in \mathcal{F}_2$, המאורעות $A \times \Omega_2$ ו-$\Omega_1 \times B$ (במרחב המכפלה) הם בלתי-תלויים.

טענה 3.6. יהיו $A, B \in \mathcal{F}$ שני מאורעות.

- אם A ו-B בלתי-תלויים אז גם A ו-B^c הם מאורעות בלתי-תלויים.
- A ו-Ω הם מאורעות בלתי-תלויים, וכמו כן A ו-$\emptyset$ הם מאורעות בלתי-תלויים.

♣ למעשה ניתן להחליף בטענה את Ω בכל מאורע בעל הסתברות 1, ואת $\emptyset$ בכל מאורע בעל הסתברות 0.

טענה 3.7. יהי $A \in \mathcal{F}$ מאורע ותהא $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\} \subseteq \mathcal{F}$ קבוצת מאורעות, A בלתי-תלוי ב-$\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ אס"ם A בלתי תלוי ב-$\{B_1, B_2, \ldots, B_n, B_1^c, B_2^c, \ldots, B_n^c\}$.

טענה 3.8. תהא $\mathcal{A} := \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subseteq \mathcal{F}$ קבוצת מאורעות, $\mathcal{A}$ היא קבוצה בלתי-תלויה אס"ם A_i בלתי-תלוי ב-$\mathcal{A} \setminus \{A_i\}$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.

טענה 3.9. לכל סדרת מאורעות בלתי-תלויים[2] $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

[1] ערך בוויקיפדיה: תומאס בייס.
[2] קבוצת איברי הסדרה בלתי-תלויה.

4 משתנים מקריים בדידים

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, תהא E קבוצה לא ריקה, ותהא $\mathcal{F}_E$ קבוצת מאורעות על E.

4.1 התחלה

יהיו $X, Y : \Omega \to E$ משתנים מקריים.

טענה 4.1. פונקציית ההתפלגות $\mathbb{P}_X$ היא פונקציית הסתברות על $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_E)$, כלומר $(E, \mathcal{F}_E, \mathbb{P}_X)$ הוא מרחב הסתברות.

טענה 4.2. אם $X \overset{\text{a.s.}}{=} Y$ אז $X \overset{\text{d}}{=} Y$.

טענה 4.3. אם $X \overset{\text{d}}{=} Y$ אז לכל פונקציה $f : E \to E$ מתקיים $f \circ X \overset{\text{d}}{=} f \circ Y$.

טענה 4.4. יהי $Z : \Omega \to E^n$ משתנה מקרי, Z הוא משתנה מקרי בדיד אס"ם $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ הם משתנים מקריים בדידים.

4.2 הסתברות מותנית ואי-תלות

טענה 4.5. אם $X \overset{\text{d}}{=} Y$ אז לכל $S \in \mathcal{F}_E$ כך ש-$\mathbb{P}(X \in S) > 0$ מתקיים $X \mid X \in S \overset{\text{d}}{=} Y \mid Y \in S$.

טענה 4.6. אם לכל $x_1, x_2 \in E$ מתקיים $(Y \mid X = x_2) \overset{\text{d}}{=} (Y \mid X = x_1)$ אז X ו-Y בלתי תלויים ולכל $x \in E$ מתקיים $Y \overset{\text{d}}{=} (Y \mid X = x)$.

יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_k : \Omega \to E$ משתנים מקריים.

טענה 4.7. נניח ש-$X_1, X_2, \ldots, X_k$ בדידים, במקרה כזה $X_1, X_2, \ldots, X_k$ בלתי תלויים אס"ם לכל $X_1, X_2, \ldots, X_k \in E$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(\forall k \geq i \in \mathbb{N}\ X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

מסקנה 4.8. נניח ש-$X_1, X_2, \ldots, X_k$ בדידים[3], אם $X_1, X_2, \ldots, X_k$ בלתי תלויים אז ההתפלגות המשותפת שלהם נקבעת ביחידות ע"י ההתפלגויות שלהם, כלומר אם $X_1, X_2, \ldots, X_k$ בלתי תלויים אז לכל n משתנים מקריים בלתי תלויים $X_1', X_2', \ldots, X_k' : \Omega \to E$ כך ש-$X_i' \overset{\text{d}}{=} X_i$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ מתקיים $(X_1, X_2, \ldots, X_k) \overset{\text{d}}{=} (X_1', X_2', \ldots, X_k')$.

טענה 4.9. אם $X_1, X_2, \ldots, X_k$ בלתי תלויים אז לכל n פונקציות $f_1, f_2, \ldots, f_k : E \to E$ גם המשתנים המקריים $f_1 \circ X_1, f_2 \circ X_2, \ldots, f_k \circ X_k$ בלתי תלויים.

מסקנה 4.10. נניח ש-$X_1, X_2, \ldots, X_k$ בדידים[4], יהיו $b_0, b_1, \ldots, b_l \in \mathbb{N}_0$ כך ש-$0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_l = n$, ולכל $l \geq i \in \mathbb{N}_0$ נסמן $Y_i := \left(X_{b_{i-1}+1}, X_{b_{i-1}+2}, \ldots, X_{b_i}\right)$. אם $X_1, X_2, \ldots, X_k$ בלתי תלויים אז גם $Y_1, Y_2, \ldots, Y_l$ בלתי תלויים.

טענה 4.11. לכל סדרת משתנים מקריים בלתי-תלויים[5] $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ ולכל סדרת תתי-קבוצות $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ של E מתקיים:

$$\mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N}\ X_n \in S_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \in S_n)$$

מסקנה 4.12. אם $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ הוא מרחב הסתברות בדידה, אז לא קיימת קבוצה אין-סופית של משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שאינה התפלגות קבועה.

[3] מסקנה זו נכונה גם עבור משתנים מקריים שאינם בדידים, אלא שלצורך ההוכחה שלה במקרה זה יש צורך בתורת המידה.
[4] גם מסקנה זו נכונה עבור משתנים מקריים שאינם בדידים, וגם בשבילה אנו זקוקים לתורת המידה עבור הגרסה הכללית.
[5] קבוצת איברי הסדרה בלתי-תלויה.

4.3 התפלגויות נפוצות

טענה 4.13. תהא $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים בעלי התפלגות $\mathrm{Ber}(p)$ עבור $p \in (0,1)$[6], ויהי $Z : \Omega \to E$ המשתנה המקרי המוגדר ע"י (לכל $\omega \in \Omega$):

$$Z(\omega) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n(\omega) = 1\}$$

Z הוא בעל התפלגות $\mathrm{Geo}(p)$.

טענה 4.14. נניח ש-X נתמך על $\mathbb{N}$ (בפרט $\mathbb{N} \subseteq E$). התנאים הבאים שקולים:

1. קיים $p \in (0,1)$ כך ש-$X \sim \mathrm{Geo}(p)$.
2. לכל $l \in \mathbb{N}$ מתקיים $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$.

משפט 4.15. תכונת חוסר הזיכרון
נניח ש-X נתמך על $\mathbb{N}$ (בפרט $\mathbb{N} \subseteq E$), וש-$\mathbb{P}(X > 1) > 0$. התנאים הבאים שקולים:

1. קיים $p \in (0,1)$ כך ש-$X \sim \mathrm{Geo}(p)$.
2. לכל $l \in \mathbb{N}$ מתקיים $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} (X - l \mid X > l)$.
3. $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} (X - 1 \mid X > 1)$.

טענה 4.16. נסמן $Z := \sum_{i=1}^{n} X_i$, אם $X_1, X_2, \ldots, X_n$ בלתי תלויים וגם $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{Ber}(p)$, אז $Z \sim \mathrm{Bin}(n,p)$.

טענה 4.17. אם $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ ו-$Y \sim \mathrm{Bin}(m,p)$ אז $X + Y \sim \mathrm{Bin}(n+m,p)$.

טענה 4.18. אם $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda_1)$ ו-$Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda_2)$, אז $X + Y = \mathrm{Poi} \sim \mathrm{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

טענה 4.19. אם $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ ו-$(Y \mid X = n) \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ לכל $n \in \mathbb{N}_0$, אז $Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda p)$.

טענה 4.20. יהי $0 < \lambda \in \mathbb{R}$, תהא $(X_n)_{n=\lceil\lambda\rceil}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים כך ש-$X_n \sim \mathrm{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ לכל $\lambda \leq n \in \mathbb{N}$, ויהי $Z : \Omega \to E$ משתנה מקרי כך ש-$Z \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$. לכל $k \in \mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Z = k)$$

[6] כדי להוכיח שאכן קיימת סדרה כזו יש צורך בתורת המידה.

5 תוחלת

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות, תהא $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ קבוצת מאורעות על $\mathbb{R}$[7], ויהיו $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ שני משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלת סופית.

טענה 5.1. מתקיימות התכונות הבאות:

1. לכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{E}\left(a\cdot X+b\cdot Y\right)=a\cdot\mathbb{E}\left(X\right)+b\cdot\mathbb{E}\left(Y\right)$.
2. אם $X\overset{\text{a.s.}}{\geq}0$ אז $\mathbb{E}\left(X\right)\geq0$, ואם מתקיים בנוסף $\mathbb{P}\left(X>0\right)>0$ אז $\mathbb{E}\left(X\right)>0$.
3. אם $X\overset{\text{a.s.}}{\geq}Y$ אז $\mathbb{E}\left(X\right)\geq\mathbb{E}\left(Y\right)$, ואם מתקיים בנוסף $\mathbb{P}\left(X>Y\right)>0$ אז $\mathbb{E}\left(X\right)>\mathbb{E}\left(Y\right)$.

♣ מאינדוקציה נובע שהתכונה הראשונה מתקיימת לכל צר"ל (סופי!) של משתנים מקריים.

טענה 5.2. אם $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ הוא מרחב הסתברות בדידה אז:

$$\mathbb{E}\left(X\right)=\sum_{\omega\in\Omega}X\left(\omega\right)\cdot\mathbb{P}\left(\left\{\omega\right\}\right)$$

טענה 5.3. יהיו $X_1,X_2,\ldots,X_n:\Omega\to\mathbb{R}$ משתנים מקריים בדידים, תהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה, ונסמן $Z:=f\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)$. מתקיים:

$$\mathbb{E}\left(Z\right)=\sum_{v\in\mathbb{R}^n}f\left(v\right)\cdot\mathbb{P}\left(Z=v\right)$$

טענה 5.4. לכל מאורע $A\in\mathcal{F}$ מתקיים:

$$\mathbb{E}\left(X\mid A\right)=\frac{\mathbb{E}\left(X\cdot\mathbb{1}_A\right)}{\mathbb{P}\left(A\right)}$$

מסקנה 5.5. נוסחת התוחלת השלמה

תהא $\mathcal{A}$ חלוקה סופית/בת-מנייה של Ω כך ש-$A\cap B\in\mathcal{F}$ לכל $A,B\in\mathcal{F}$. מתקיים:

$$\mathbb{E}\left(X\right)=\sum_{A\in\mathcal{A}}\mathbb{E}\left(X\cdot\mathbb{1}_A\right)=\sum_{A\in\mathcal{A}}\mathbb{P}\left(A\right)\cdot\mathbb{E}\left(X\mid A\right)$$

טענה 5.6. אם X ו-Y בדידים אז:

$$\mathbb{E}\left(X\right)=\sum_{t\in\mathbb{R}}\mathbb{P}\left(Y=t\right)\cdot\mathbb{E}\left(X\mid Y=t\right)$$

טענה 5.7. אם X ו-Y בדידים[8] אז $\mathbb{E}\left(X\cdot Y\right)=\mathbb{E}\left(X\right)\cdot\mathbb{E}\left(Y\right)$.

משפט 5.8. אי-שוויון מרקוב[9]

אם $X\overset{\text{a.s.}}{\geq}0$ אז לכל $0<a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{P}\left(X\geq a\right)\leq\frac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

[7] מבחינת ההגדרות ניתן להחליף את $\mathbb{R}$ בכל מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.
[8] גם טענה זו נכונה עבור משתנים מקריים שאינם בדידים אך ההוכחה שלה דורשת את תורת המידה.
[9] אי-שוויון מרקוב קרוי על שם המתמטיקאי הרוסי אנדריי מרקוב, אם כי קיים תיעוד שלו בעבודותיו המוקדמות של פפנוטי צ'בישב שהיה מורו של מרקוב (ויקיפדיה).