סדרות - הוכחות נבחרות

חשבון אינפיניטסימלי (1) - 80131

מרצה: רז קופרמן

מתרגלים: אור יער ודניאל רוזנבלט

סוכם ע"י: שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ב, האונ' העברית

תוכן העניינים

אשמח לקבל הערות והארות על הסיכומים על מנת לשפרם בעתיד,
כל הערה ולו הפעוטה ביותר (אפילו פסיק שאינו במקום או רווח מיותר) תתקבל בברכה;
אתם מוזמנים לכתוב לי לתיבת הדוא"ל: sraya.ansbacher@mail.huji.ac.il.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 גבול של סדרה

טענה 1.1. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$, אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n = b_n$ אז $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-α אם"ם $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-α.

♣ כלומר בכל הקשור להתכנסות לא מעניין אותנו מה קורה בתחילת הסדרה אלא אך ורק מה שקורה באין-סוף.

למה 1.2. יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ כך ש-$\beta \neq \alpha$, קיים $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ כך שהקבוצות $B_\varepsilon(\alpha)$ ו-$B_\varepsilon(\beta)$ זרות (כלומר $B_\varepsilon(\alpha) \cap B_\varepsilon(\beta) = \emptyset$).

למה 1.3. תהיינה $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות פסוקים לוגיים, אם $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ מתקיימת ממקום מסוים ואילך וגם $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ מתקיימת מסוים ואילך אז $(P_n \wedge Q_n)_{n=1}^{\infty}$ מתקיימת ממקום מסוים ואילך.

משפט 1.4. יחידות הגבול

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת, אם $\alpha \in \mathbb{R}$ וגם $\beta \in \mathbb{R}$ הם גבולות[1] של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אז $\alpha = \beta$.

2 חסימות וסדר

משפט 2.1. כל סדרה מתכנסת היא סדרה חסומה.

טענה 2.2. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות (נסמן את גבולותיהן ב-α ו-β בהתאמה), אם $\alpha < \beta$ אז עבור n גדול דיו מתקיים $a_n < b_n$,
כלומר קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n < b_n$.

מסקנה 2.3. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל-$\alpha \in \mathbb{R}$ ויהי $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, עבור n גדול דיו מתקיים $a_n < \beta$,
כלומר קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n < \beta$.

טענה 2.4. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות (נסמן את גבולותיהן ב-α ו-β בהתאמה),

1. אם עבור n גדול דיו מתקיים $a_n \leq b_n$ אז $\alpha \leq \beta$.
2. אם $\alpha < \beta$ אז עבור n גדול דיו מתקיים $a_n < b_n$.

♣ גם אם היה נתון בסעיף 1 שעבור n גדול דיו מתקיים $a_n < b_n$ עדיין נוכל לומר רק ש-$\alpha \leq \beta$ ולא ש-$\alpha < \beta$, כמו כן גם אם היינו יודעים בסעיף 2 שמתקיים רק $\alpha \leq \beta$ לא היינו יכולים לומר דבר על היחס בין $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ל-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ באין-סוף.

משפט 2.5. משפט הכריך

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(c_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות המתכנסות ל-$L \in \mathbb{R}$ ותהא $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך שעבור n גדול דיו מתקיים $a_n \leq b_n \leq c_n$, גם $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-L.

[1] המשפט אינו נכון מבחינה לשונית משום שמדובר במספר אחד ולכן לא שייך לדבר עליו ברבים, אך הכוונה ברורה ולפני שהמשכנו ואמרנו שהם שווים לא ידענו שבהכרח מדובר באותו מספר (לא יכולתי להתאפק...).

3 אריתמטיקה של גבולות

3.1 התחלה

למה 3.1. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$, הפסוקים הבאים שקולים:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n - \alpha) = 0$
3. $\lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0$

טענה 3.2. אם סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אז $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$|\lim_{n\to\infty} a_n|$.

♣ שלוש הלמות הבאות נדרשות להוכחת משפט האריתמטיקה של גבולות (להלן).

למה 3.3. יהיו $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, יהי $0 < r \in \mathbb{R}$ ויהיו $x \in B_r(\alpha)\,,\ y \in B_r(\beta)$, מתקיים $x + y \in B_{2r}(\alpha+\beta)$.

למה 3.4. יהי $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ויהיו $\alpha,\beta,x,y \in \mathbb{R}$, אם $|x-\alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$ וגם $|y-\beta| < \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}\right\}$ אז $|x\cdot y - \alpha\cdot\beta| < \varepsilon$.

הוכחה. מא"ש המשולש ההפוך נובע ש-$||y|-|\beta|| \le |y-\beta| < 1$, ומכאן ש-$|y| < |\beta| + 1$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |x\cdot y - \alpha\cdot\beta| &= |x\cdot y - y\cdot\alpha + y\cdot\alpha - \alpha\cdot\beta| \\
&= |y\cdot(x-\alpha) + (y-\beta)\cdot\alpha| \\
&\le |y\cdot(x-\alpha)| + |(y-\beta)\cdot\alpha| \\
&= |y|\cdot|x-\alpha| + |y-\beta|\cdot|\alpha| \\
&< |y|\cdot\frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)} + \frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}\cdot|\alpha| \\
&< (|\beta|+1)\cdot\frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)} + \frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}\cdot|\alpha| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

■

למה 3.5. יהיו $0 \ne \beta \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ו-$y \in \mathbb{R}$, אם:

$$|y-\beta| < \min\left\{\frac{|\beta|}{2}, \frac{|\beta|^2\cdot\varepsilon}{2}\right\}$$

אז $y \ne 0$ וגם:

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{\beta}\right| < \varepsilon$$

הוכחה. מההנחה נקבל שמתקיים:

$$\begin{aligned}
&|\beta| - |y| \le ||\beta| - |y|| = ||y| - |\beta|| \le |y-\beta| \le \frac{|\beta|}{2} \\
&\Rightarrow 0 < \frac{|\beta|}{2} = |\beta| - \frac{|\beta|}{2} \le |y| \\
&\Rightarrow y \ne 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{y}-\frac{1}{\beta}\right| = \left|\frac{\beta-y}{y\cdot\beta}\right| = \frac{|y-\beta|}{|y|\cdot|\beta|}$$
$$< \frac{|\beta|^2\cdot\varepsilon}{2\cdot|y|\cdot|\beta|} = \frac{|\beta|\cdot\varepsilon}{2\cdot|y|}$$
$$\leq \frac{|\beta|\cdot\varepsilon}{2\cdot\frac{|\beta|}{2}} = \varepsilon$$

■

משפט 3.6. אריתמטיקה של גבולות
תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות המתכנסות ל-$\alpha\in\mathbb{R}$ ו-$\beta\in\mathbb{R}$ בהתאמה, מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$.
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\alpha\cdot\beta$.
3. אם $\beta\neq 0$ אז $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{\beta}$.
4. אם $\beta\neq 0$ אז $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$.

מסקנה 3.7. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל-$\alpha\in\mathbb{R}$ ויהי $b\in\mathbb{R}$, הסדרה $(b\cdot a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$b\cdot\alpha$.

3.2 טענות נוספות

משפט 3.8. כלל אפסה וחסומה
תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל-0 ותהא $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, הסדרה $(a_n\cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0.

למה 3.9. יהי $q\in(0,1)$, הסדרה $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0.

הוכחה.

$$0<q<1\Rightarrow 1<\frac{1}{q}$$

נגדיר $h:=\frac{1}{q}-1$ (נשים לב ש-$0<h$), כלומר $q=\frac{1}{h+1}$ ומכאן שע"פ א"ש ברנולי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$0<q^n=\frac{1}{(h+1)^n}\leq\frac{1}{1+n\cdot h}<\frac{1}{n\cdot h}$$

מאריתמטיקה של גבולות וממשפט הכריך נקבל את המבוקש. ■

טענה 3.10. יהי $0<q\in\mathbb{R}$, הסדרה $\left(\sqrt[n]{q}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-1.

הוכחה. נחלק למקרים.

1. אם $q=1$ הטענה טריוויאלית.
2. נניח ש-$q<1$ ונניח בשלילה ש-$\left(\sqrt[n]{q}\right)_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת ל-1, א"כ קיים $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ כך שלכל $N\in\mathbb{N}$ קיים $N<n\in\mathbb{N}$ כך ש-$\varepsilon\leq\left|\sqrt[n]{q}-1\right|=1-\sqrt[n]{q}$.
יהי $\varepsilon<1$ כנ"ל, א"כ לכל $N\in\mathbb{N}$ קיים $N<n\in\mathbb{N}$ כך שמתקיים:

$$1-\sqrt[n]{q}\geq\varepsilon$$

$$\Rightarrow 1-\varepsilon \geq \sqrt[n]{q} > 0$$
$$\Rightarrow (1-\varepsilon)^n \geq q > 0$$

מלמה 3.9, הסדרה $\left((1-\varepsilon)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0, כלומר קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(1-\varepsilon)^n < q$ בסתירה למה שראינו לעיל, מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$\left(\sqrt[n]{q}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-1.

3. נניח ש-$1 < q$, מכאן ש-$0 < \frac{1}{q} < 1$, במקרה הקודם הוכחנו כי:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{q}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{q}}$$

מאריתמטיקה של גבולות נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{q}}} = 1$$

■

משפט 3.11. משפט צ'זארו (Cesàro)[2]

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל-$\alpha \in \mathbb{R}$, גם הסדרה $\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n=1}^{\infty}$ (שהיא <u>סדרת הממוצעים</u> של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$) מתכנסת ל-α.

הוכחה. יהי $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$.
מהיות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$, יהי N כנ"ל.
כל קבוצה סופית היא קבוצה חסומה, מכאן שקיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $N \geq n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n| \leq M$, יהי M כזה.
מכאן שלכל $N \geq n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n - \alpha| \leq |a_n| + |\alpha| \leq M + |\alpha|$.
לכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k\right) - \alpha\right| &= \left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (a_k - \alpha)\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{N} (a_k - \alpha)\right| + \left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=N+1}^{n} (a_k - \alpha)\right| \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{N} |a_k - \alpha| + \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=N+1}^{n} |a_k - \alpha| \\
&\leq \frac{N \cdot (M + |\alpha|)}{n} + \frac{n-N}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

נגדיר:

$$N' := \max\left\{N, \frac{2N \cdot (M + |\alpha|)}{\varepsilon}\right\}$$

מכאן שלכל $N' < n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (a_k) - \alpha\right| \leq \frac{N \cdot (M + |\alpha|)}{n} + \frac{n-N}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{N \cdot (M + |\alpha|)}{\frac{2N \cdot (M+|\alpha|)}{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

[2] ערך בוויקיפדיה האנגלית: Ernesto Cesàro.

למה 3.12. לכל $0 < x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = 1 \Rightarrow n \leq \sum_{i=1}^{n} x_i$$

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה.

<u>בסיס האינדוקציה</u>

לכל $0 < x_1 \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\prod_{i=1}^{1} x_i = 1 \;\;\Rightarrow\;\; x_1 = 1 \geq 1 = \sum_{i=1}^{1} x_i$$

<u>צעד האינדוקציה</u>

יהי $n \in \mathbb{N}$ ונניח שלכל $0 < x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ המקיימים $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1$ מתקיים $n \leq x_1 + x_2 + ... + x_n$.

יהיו $0 < x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ כך ש-$x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq x_{n+1}$ וגם $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x_1 \leq 1,\;\; 1 \leq x_{n+1} \\
&\Rightarrow 0 \leq 1 - x_1,\;\; 0 \leq x_{n+1} - 1 \\
&\Rightarrow 1 \leq x_1 + x_{n+1} - x_1 \cdot x_{n+1}
\end{aligned}$$

מהנחת האינדוקציה נובע שמתקיים: $n \leq x_2 + ... + x_n + x_1 \cdot x_{n+1}$,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow n + 1 &\leq x_2 + ... + x_n + x_1 \cdot x_{n+1} + x_1 + x_{n+1} - x_1 \cdot x_{n+1} \\
&= x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1}
\end{aligned}$$

■

משפט 3.13. אי-שוויון הממוצעים

תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)^{-1} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

כלומר: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים הממוצע החשבוני $\leq$ הממוצע הגאומטרי $\leq$ הממוצע ההרמוני (של כל איברי הסדרה עד ל-a_n).

הוכחה. יהי $n \in \mathbb{N}$ ונבנה סדרה בת n איברים $(b_k)_{k=1}^{n}$ כשלכל $n \geq k \in \mathbb{N}$ האיבר ה-k יהיה:

$$b_k := \frac{a_k}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_j}}$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n} b_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_j}} = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{j=1}^{n} a_j} = 1$$

מהלמה נקבל:

$$n \leq \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_j}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_j}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_j} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

נתבונן בסדרה $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$, מהשורה הקודמת נובע שמתקיים:

$$0<\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{a_k}}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\leq\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

$$\Rightarrow 0<\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^{-1}\leq\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{a_k}}\right)^{-1}=\prod_{k=1}^{n}\sqrt[n]{a_k}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}$$

■

מסקנה 3.14. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית המתכנסת ל-$0\neq\alpha\in\mathbb{R}$, גם הסדרות $\left(\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^{-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ ו-$\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות ל-α.

♣ יחד עם משפט צ'זארו נוכל לומר שכל שלושת הממוצעים של סדרה חיובית מתכנסים לגבול שלה (אם הוא קיים ושונה מ-0).

הוכחה. מאריתמטיקה של גבולות נובע שהסדרה $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$\frac{1}{\alpha}$ ולכן ממשט צ'זארו נובע שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)=\frac{1}{\alpha}$$

ושוב מאריתמטיקה של גבולות נובע שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}=\alpha$$

ולכן מאי-שוויון הממוצעים וממשפט הכריך נובע שמתקיים גם:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}=\alpha$$

■

מסקנה 3.15. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י $a_n=\sqrt[n]{n}$ (לכל $n\in\mathbb{N}$), $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-1.

הוכחה. תהא $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י $b_1=1$ ו-$b_k=\frac{k}{k-1}$ (לכל $1<k\in\mathbb{N}$), מכאן שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\prod_{k=1}^{n}b_k=n$$

ולכן מהמסקנה הקודמת ומאריתמטיקה של גבולות נקבל שמתקיים:

$$1=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k-1}=\lim_{k\to\infty}b_k=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_k}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$$

■

3.3 סדרה חשבונית וסדרה הנדסית

טענה 3.16. תהא $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה חשבונית ויהי $d \in \mathbb{R}$ הפרש הסדרה, לכל $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים $a_n = a_0 + d \cdot n$.

טענה 3.17. תהא $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה חשבונית ויהי $d \in \mathbb{R}$ הפרש הסדרה, לכל $N \in \mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{n}{2} \cdot (a_0 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot (2a_0 + d \cdot n)$$

♣ כדי להוכיח את הטענה הזו די לשים לב לכך שלכל $n \geq k \in \mathbb{N}_0$ מתקיים $a_k + a_{n-k} = a_0 + a_n$.

טענה 3.18. תהא $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה הנדסית ותהא $q \in \mathbb{R}$ הפרש הסדרה, לכל $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים $a_n = a_0 \cdot q^n$.

טענה 3.19. לכל $1 \neq q \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

♣ נשים לב לאינטואיציה מעניינת עבור הנוסחה:

$$\sum_{k=0}^{n} 10^k = \overbrace{111111111111111}^{\text{n+1 פעמים}} = \frac{\overbrace{999999999999999}^{\text{n+1 פעמים}}}{9}$$
$$= \frac{1\overbrace{000000000000000}^{\text{n+1 פעמים}} - 1}{9} = \frac{10^{n+1} - 1}{9} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

כמובן שזה לא מיוחד עבור 10, זה יעבוד לכל בסיס ספירה שנבחר (כלומר לכל $1 < q \in \mathbb{N}$).
ניתן אפילו להמציא בסיס ספירה עבור כל מספר ממשי חיובי השונה מ-1, כך למשל אם נרצה להציג את π בבסיס ספירה $\sqrt{2}$ נקבל מספר בן ארבע ספרות משמאל לנקודה (כי $\left(\sqrt{2}\right)^3 < \pi < \left(\sqrt{4}\right)^4$) ו"אין-סוף" ספרות אחריה (כי א"א להציג את השארית כסכום של שברים מהצורה $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{-n}\right)$): הספרה השמאלית ביותר תהיה 1 (כי אין לנו ספרה גדולה יותר), שלוש הספרות הבאות תהיינה 0 כי $\left(\sqrt{2}\right)^2 > \sqrt{2} > \left(\sqrt{2}\right)^0 > \pi - \left(\sqrt{2}\right)^3$, שלוש הספרות הראשונות אחרי הנקודה תהיינה גם הן אפסים כי $\left(\sqrt{2}\right)^{-1} > \left(\sqrt{2}\right)^{-2} > \left(\sqrt{2}\right)^{-3} > \pi - \left(\sqrt{2}\right)^3$ והספרה הבאה תהיה 1 כי $\left(\sqrt{2}\right)^{-4} < \pi - \left(\sqrt{2}\right)^3$ וכן הלאה, הגבול של הסדרה הזו הוא הוא אכן π (לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\varepsilon > \left(\sqrt{2}\right)^{-n} > 0$)[3].

♣ א"א לעבוד עם בסיס ספירה שלילי, ועבור בסיסי ספירה קטנים מ-1 האינטואיציה לא תעבוד מפני שכאשר נחסיר מהם 1 נקבל "ספרה" שלילית; למרות זאת הפירמול של הוכחה זו עובד גם עבור מספרים קטנים מ-1 ומספרים שליליים[4].

[3] עבור מספר חיובי קטן מ-1 התפקידים של "משמאל לנקודה" ו-"מימין לנקודה" מתהפכים.
[4] תודתי נתונה למשה רוזנשטיין על העיון המשותף בנושא.

הוכחה. <u>הוכחה 1 - נוסחת הכפל המקוצר</u>
ראינו בקובץ על המספרים הממשיים שלכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$a^n-b^n=(a-b)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}\cdot b^k$$

$$\Rightarrow q^{n+1}-1^{n+1}=(q-1)\cdot\sum_{k=0}^{n}q^{n-k}\cdot 1^k$$
$$\Rightarrow \frac{q^{n+1}-1}{q-1}=\sum_{k=0}^{n}q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}q^k$$

■

הוכחה. <u>הוכחה 2 - פירמול הרעיון של בסיסי ספירה</u>
מתקיים:

$$\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1}{q-1}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left((q-1)\cdot q^k\right)=\frac{1}{q-1}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(q^{k+1}-q^k\right)=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

■

הוכחה. <u>הוכחה 3 - אלגברה פשוטה</u>
מתקיים:

$$q\cdot\sum_{k=0}^{n}q^k=\sum_{k=1}^{n+1}q^k=q^{n+1}-1+\sum_{k=0}^{n}q^k$$

$$\Rightarrow (q-1)\cdot\sum_{k=0}^{n}q^k=q^{n+1}-1$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

■

מסקנה 3.20. תהא $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה הנדסית כך ש-$1\neq q\in\mathbb{R}$ היא מנת הסדרה, לכל $n\in\mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\sum_{k=0}^{n}a_k=a_0\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

♣ כמובן שאם $q=1$ אז הסכום החלקי ה-n-י הוא $a_0\cdot(n+1)$.

מסקנה 3.21. תהא $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה הנדסית כך שמנת הסדרה $q \in \mathbb{R}$ מקיימת $|q| < 1$, מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 \cdot \frac{1}{1-q}$$

הוכחה. מהמסקנה הקודמת (3.20), מלמה 3.9[5] ומאריתמטיקה של גבולות נובע כי:

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (a_0 \cdot q^n) &= \lim_{N\to\infty} \left(a_0 \cdot \frac{q^{N+1}-1}{q-1}\right) \\ &= \frac{a_0}{q-1} \cdot \lim_{N\to\infty} \left(q^{N+1}-1\right) \\ &= \frac{a_0}{q-1} \cdot [0-1] = a_0 \cdot \frac{1}{1-q}\end{aligned}$$

■

4 גבולות במובן הרחב

טענה 4.1. סדרה השואפת לאין-סוף אינה חסומה מלעיל, כמו כן, סדרה השואפת למינוס אין-סוף אינה חסומה מלרע.

משפט 4.2. משפט הפרוסה

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות המקיימות $a_n \le b_n$ ממקום מסוים ואילך;

- אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת לאין-סוף אז גם $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת לאין-סוף,
- כמו כן, אם $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת למינוס אין-סוף אז גם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת למינוס אין-סוף.

טענה 4.3. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים שונים מ-0

- אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אז $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = \infty$.
- אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ אז $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

♣ מה שהטענה אומרת בעצם הוא שלכל סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

[5] הסדרה $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ "כלואה" בין הסדרות $(|q|^n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(-|q|^n)_{n=1}^{\infty}$ וע"פ הלמה שתיהן מתכנסות ל-0 (עבור הסדרה השנייה יש להשתמש גם באריתמטיקה של גבולות).

5 מונוטוניות

טענה 5.1. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית ויהיו $n,m\in\mathbb{N}$ כך ש-$n<m$,

- אם היא מונוטונית עולה אז $a_m\geq a_n$.
- אם היא עולה ממש אז $a_m>a_n$.
- אם היא מונוטונית יורדת אז $a_m\leq a_n$.
- אם היא יורדת ממש אז $a_m<a_n$.

משפט 5.2. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית,

- אם היא מונוטונית **עולה** וחסומה **מלעיל** אז היא מתכנסת (במובן הצר, גבולה הוא ה**סופרמום** שלה), אחרת היא שואפת ל**אין-סוף**.
- אם היא מונוטונית **יורדת** וחסומה **מלרע** אז היא מתכנסת (במובן הצר, גבולה הוא ה**אינפימום** שלה), אחרת היא שואפת ל**מינוס אין-סוף**.

מסקנה 5.3. כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב.

למה 5.4. לכל $4\leq k\in\mathbb{N}$ מתקיים $2^k<k!$.

טענה 5.5. הסדרה $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה וחסומה ומכאן שהיא מתכנסת.

♣ הגבול של סדרה זו הוא הקבוע המתמטי e (וזוהי הדרך הקלאסית להגדיר אותו), ניתקל בו שוב בקבצים העוסקים בפונקציות ובנגזרות כאשר נדבר על פונקציית האקספוננט.

הוכחה. מהבינום של ניוטון נובע שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot 1^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k\cdot\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

נשים לב לכך שלכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $n\geq k\in\mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\leq\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)$$

ומכאן שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\right)\leq\sum_{k=0}^{n+1}\left(\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)\right)=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

בנוסף נובע מהנוסחה הנ"ל ומלמה 5.4 שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\right)\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k!}\\ &\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{2^k}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\\ &=1+1+\frac{12}{24}+\frac{4}{24}+\frac{3}{24}<2\frac{19}{24}\approx 2.7916667\end{aligned}$$

■

משפט 5.6. הלמה של קנטור

תהא $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קטעים סגורים (נסמן $I_n:=[a_n,b_n]$) המקיימת:

1. $I_{n+1}\subseteq I_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.
2. $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

קיים $c\in\mathbb{R}$ יחיד המקיים:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n=\{c\}$$

הוכחה. <u>הוכחה 1 - שימוש במונוטוניות של קצות הקטעים</u>

מסעיף 1 נובע שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_1\leq a_n\leq b_n\leq b_1$, מכאן ש-$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע ולכן ממשפט 5.2 נובע ששתיהן מתכנסות ומתקיים:

$$\alpha:=\lim_{n\to\infty}a_n=\sup\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\},\ \ \beta:=\lim_{n\to\infty}b_n=\sup\{b_n\mid n\in\mathbb{N}\}$$

מסעיף 2 ומאריתמטיקה של גבולות נובע שמתקיים:

$$\beta-\alpha=\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$$

מכאן שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n\leq\alpha=\beta\leq b_n$, כלומר $\alpha\in I_n$ ומכאן שגם:

$$\alpha\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$$

יהי $\gamma\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$, כלומר לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\gamma\in I_n$ וממילא $a_n\leq\gamma\leq b_n$; מכאן שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $0\leq|\alpha-\gamma|\leq b_n-a_n$ ולכן ממשפט הכריך נובע ש-$\alpha-\gamma=0$, כלומר $\alpha=\gamma$.

$$\Rightarrow\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n=\{\alpha\}$$

■

הוכחה. הוכחה 2 - באמצעות למת החתכים
מסעיף 1 נובע שלכל $n,m\in\mathbb{N}$ כך ש-$n\le m$ מתקיים $I_m\subseteq I_n$, כלומר $a_n\le a_m\le b_m\le b_n$, מכאן שלכל $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n\le b_m$; נסמן $A:=\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ ו-$B:=\{b_n\mid n\in\mathbb{N}\}$, א"כ לכל $a\in A$ ולכל $b\in B$ מתקיים $a\le b$.
מסעיף 2 נובע שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$b_n-a_n<\varepsilon$, א"כ לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימים $a\in A$ ו-$b\in B$ כך ש-$b-a<\varepsilon$.
מכאן שע"פ למת החתכים קיים $c\in\mathbb{R}$ יחיד כך ש-$a\le c\le b$ לכל $a\in A$ ולכל $b\in B$, בפרט קיים $c\in\mathbb{R}$ יחיד המקיים $a_n\le c\le b_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ וזה שקול לכך שקיים $c\in\mathbb{R}$ יחיד המקיים $c\in I_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$; יהי c כנ"ל ומכאן שמתקיים:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n=\{c\}$$

■

6 תתי-סדרות וגבולות חלקיים

למה 6.1. תהא $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פסוקים לוגיים ותהא $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה עולה ממש שכל איבריה טבעיים (סדרת אינדקסים). מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $n_k\ge k$.
2. אם P_n מתקיים ממקום מסוים ואילך אז גם P_{n_k} מתקיים ממקום מסוים ואילך,
כלומר: אם קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש-$P_n=\text{True}$ עבור כל $N<n\in\mathbb{N}$ אז קיים $K\in\mathbb{N}$ כך ש-$P_{n_k}=True$ עבור כל $K<k\in\mathbb{N}$.
3. אם P_{n_k} מתקיים ממקום מסוים ואילך אז P_n מתקיים באופן שכיח,
כלומר: אם קיים $K\in\mathbb{N}$ כך ש-$P_{n_k}=\text{True}$ עבור כל $K<k\in\mathbb{N}$ אז לכל $N\in\mathbb{N}$ קיים $N<n\in\mathbb{N}$ כך ש-$P_n=\text{True}$.

למה 6.2. תהא $A\subseteq\mathbb{N}$ קבוצה שאינה חסומה, קיימת סדרת אינדקסים (=שכל איבריה טבעיים) עולה ממש $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך שלכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $n_k\in A$.

למה 6.3. תהא $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ תת-סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ותהא $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ תת-סדרה של $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ היא תת-סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

משפט 6.4. משפט הירושה
תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה,

1. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$\alpha\in\mathbb{R}$ אז גם כל תתי-הסדרות שלה מתכנסות ל-α.
2. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל-$\pm\infty$ אז גם כל תתי-הסדרות שלה שואפות ל-$\pm\infty$.
3. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית אז גם כל תתי-הסדרות שלה מונוטוניות, ומאותו סוג מונוטוניות.
4. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל אז גם כל תתי-הסדרות שלה חסומות מלעיל.
5. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלרע אז גם כל תתי-הסדרות שלה חסומות מלרע.
6. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה אז גם כל תתי-הסדרות שלה חסומות.

מסקנה 6.5. אם לסדרה יש שני גבולות חלקיים אז היא אינה מתכנסת.

טענה 6.6. מספר ממשי α הוא גבול חלקי של סדרה אם"ם כל סביבה שלו מכילה אין-סוף איברים של סדרה זו.
במילים אחרות: α הוא גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם"ם לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ הקבוצה $\{n\in\mathbb{N}:|a_n-\alpha|<\varepsilon\}$ אינה חסומה.

מסקנה 6.7. מספר ממשי α אינו גבול חלקי של סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם"ם קיים $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ כך ש-$|a_n-\alpha|\geq\varepsilon$ עבור n גדול דיו.

למה 6.8. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה שאינה חסומה מלעיל, לכל $M\in\mathbb{R}$ הקבוצה $\{n\in\mathbb{N}:a_n>M\}$ אינה חסומה מלעיל.

טענה 6.9. $\pm\infty$ הוא גבול חלקי של סדרה אם"ם היא אינה חסומה מלעיל/מלרע (בהתאמה).

טענה 6.10. לכל סדרה יש תת-סדרה מונוטונית.

הוכחה. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ותהא I קבוצת אינדקסי השיא של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, כלומר $I:=\{n\in\mathbb{N}\mid\forall k\in\mathbb{N}:k>n\to a_n\geq a_k\}$;
אם I אינה חסומה מלעיל (כלומר היא אינסופית) אז נסדר את האינדקסים של בסדר עולה ונקבל סדרת אינדקסים עולה ממש $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ כך שלכל $k,k'\in\mathbb{N}$ המקיימים $k'<k$ מתקיים $a_{n_k}\geq a_{n_{k'}}$ ולכן הסדרה $\left(a_{n_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ היא תת-סדרה מונוטונית עולה, אחרת, אם I חסומה מלעיל אז קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n\in\mathbb{N}$ ולכל $n<k\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n<a_k$ ובפרט לכל $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n<a_{n+1}$ ולכן הסדרה $(a_n)_{n=N+1}^{\infty}$היא תת-סדרה יורדת ממש. ■

משפט 6.11. משפט בולצאנו-ויירשטראס (B.W. - Bolzano–Weierstrass)[6]
לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת.

הוכחה. ראינו שכל סדרה מונוטונית וחסומה היא סדרה מתכנסת ומהטענה הקודמת נובע שלכל סדרה חסומה יש תת-סדרה חסומה, לכן ממשפט הירושה נקבל שלכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת. ■

♣ דרך נוספת להוכיח זאת היא ליצור סדרת קטעים העומדת בתנאי הלמה של קנטור שכל איבריה מכילים אינסוף מאיברי הסדרה (באמצעות חיפוש בינארי[7]) ואז מהלמה של קנטור ומטענה 6.6 נקבל גבול חלקי של הסדרה.

מסקנה 6.12. לכל סדרה יש תת-סדרה מתכנסת במובן הרחב.

טענה 6.13. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות חסומות, קיימת סדרת אינדקסים עולה ממש $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך ש-$(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ו-$(b_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות.

הוכחה. ממשפט בולצאנו-ויירשטראס נובע שקיימת סדרת אינדקסים עולה ממש $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ כך ש-$\left(a_{n_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ מתכנסת וממשפט הירושה נובע ש-$\left(b_{n_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ חסומה. ושוב, ממשפט בולצאנו-ויירשטראס נובע שקיימת סדרת אינדקסים עולה ממש $(n_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ כך ש-$\left(b_{n_{j_k}}\right)_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת וממשפט הירושה נובע ש-$\left(a_{n_{j_k}}\right)_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת; א"כ הסדרה $(n_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ מקיימת את הנדרש. ■

טענה 6.14. לכל סדרה שאינה מתכנסת כלל, כלומר כזו שאינה מתכנסת אפילו לא במובן הרחב, יש לפחות שני גבולות חלקיים במובן הרחב.

---

[6]ערכים בוויקיפדיה: ברנרד בולצאנו ו-קארל ויירשטראס. המשפט הוכח לראשונה על ידי ברנרד בולצאנו ב-1817 כטענת עזר בדרך להוכחת משפט ערך הביניים. חשיבות המשפט לא הוכרה אז והוא נשכח, עד שכחמישים שנה מאוחר יותר קארל ויירשטראס הוכיח אותו שוב באופן בלתי תלוי (ציטוט מוויקיפדיה בערך של המשפט).

[7]ניקח את קטע שבו נמצאים כל איברי הסדרה (מהיותה חסומה נובע שקיים קטע כזה) - קטע זה יהיה האיבר הראשון בסדרת הקטעים, נחצה את הקטע לשניים, כעת אם בקטע המהווה את החצי הימני יש אין-סוף איברים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ - נבחר בו בתור האיבר הבא בסדרה, אחרת בקטע המהווה את החצי השמאלי יש אין-סוף מאיברי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ונבחר בו בתור הקטע הבא בסדרה; את התהליך הזה נבצע על כל קטע בסדרה כדי לקבל את הקטע הבא אחריו בסדרה וכך בעצם הגדרנו באופן אינדוקטיבי סדרת קטעים כנדרש.

7 גבול עליון וגבול תחתון

7.1 אפיונים

משפט 7.1. [8] תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה ותהא A קבוצת הגבולות החלקיים של סדרה זו, ל-A יש מקסימום ומינימום ויתרה מזאת מתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max A = \inf\{\sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ...\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \min A = \sup\{\inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ...\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

♣ נשמע מסובך, לא? אנחנו מדברים כאן (תחזיקו חזק!) על החסם התחתון של קבוצת החסמים העליונים של קבוצות האיברים של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ החל ממקום מסוים ואילך, אולי הכתיב הבא יהיה קצת יותר קומפקטי:

$$\inf\{\sup\{a_n : n \geq N\} \mid N \in \mathbb{N}\}$$
$$\sup\{\inf\{a_n : n \geq N\} \mid N \in \mathbb{N}\}$$

על כל פנים בהוכחה נסביר טוב יותר מה הולך כאן (ראו בקובץ ההוכחות).

♣ הדגש במשפט הוא על הקיום של גבול חלקי מקסימלי/מינימלי ועל סימני השוויון המודגשים באדום, אלו המסומנים בכחול נובעים ישירות מן ההגדרה של גבול עליון/תחתון שהרי לכל קבוצה המקסימום/מינימום שלה (אם הוא קיים) הוא גם הסופרמום/אינפימום שלה (בהתאמה).

הוכחה. נוכיח את האי-שוויון השני, ההוכחה עבור הראשון דומה למדי.

נוכיח ש-$c := \sup\{\inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ...\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ הוא גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (כלומר שייך ל-A) ושהוא חסם מלרע של A ומכאן שהוא המינימום שלה.

לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן ב-b_n את $\inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ...\}$, נשים לב ש-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית עולה שהרי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\{a_{n+1}, a_{n+2}, ...\} \subseteq \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ...\}$ ולכן האינפימום יכול רק לגדול, כלומר $b_{n+1} \geq b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$; בנוסף, מכיוון ש-$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה גם $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ (שהיא סדרת החסמים התחתונים של זנבותיה) חסומה מלעיל ומכאן שהיא מתכנסת אל החסם העליון שלה (אותו סימנו לעיל ב-c).

כעת נזכור שלכל $n \in \mathbb{N}$, b_n הוא החסם התחתון של $(a_k)_{k=n}^{\infty}$, מכאן שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $n \leq k_n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $b_n \leq a_{k_n} \leq b_n + \frac{1}{n}$, וממשפט הכריך נובע שהסדרה $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-c.

כאן יש לשים לב ש-$(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ אינה בהכרח תת-סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: ייתכן שהסדרה $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ חוזרת על עצמה ו/או אינה מסודרת לפי הסדר (כלומר שקיימים $n, m \in \mathbb{N}$ המקיימים $n < m$ כך שמתקיים $k_n \geq k_m$), לכן עוד לא סיימנו להוכיח ש-$c \in A$.

נשים לב שהסדרה $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ כוללת אינסוף טבעיים שונים: אילו היה בה מספר סופי של טבעיים שונים אזי היה להם מקסימום, כלומר היה קיים $m \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $m + 1 > k_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ובפרט עבור k_{m+1} בסתירה לצורה שבה נבנתה הסדרה, לכן אפשר לחלץ ממנה תת-סדרה עולה ממש $(k_{n_j})_{j=1}^{\infty}$; כעת נתבונן בסדרה $\left(a_{k_{n_j}}\right)_{j=1}^{\infty}$ זוהי תת-סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אך זוהי גם תת-סדרה של $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, ממשפט הירושה נובע שהיא מתכנסת ל-c ומכאן ש-$c \in A$.

כעת נוכיח ש-c הוא חסם מלרע של A ובזה נסיים.

יהי $c > d \in \mathbb{R}$, מהיות c החסם העליון של $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ נובע שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $c \geq b_N > d$, ומכיוון ש-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית עולה נובע מזה שלכל $N \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ...\} = b_n \geq b_N$ ולכן גם $a_n \geq b_N$ ומכאן ש-$|a_n - d| > b_N - d > 0$.

כלומר קיימים $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ו-$N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \notin B_\varepsilon(d)$ ומכאן ש-d אינו גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, כלומר $d \notin A$.

d הנ"ל היה שרירותי ומכאן שלכל $c > d \in \mathbb{N}$ מתקיים $d \notin A$, כלומר $\sup\{\inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ...\} \mid n \in \mathbb{N}\} = c = \min A$. ■

[8] משפט זה והבא אחריו נלמדו באינפי' 2 (יורם לסט, סמסטר א' תשפ"ג).

משפט 7.2. אפיון נוסף לגבול עליון ולגבול תחתון

- תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה שיש לה גבול עליון, מספר ממשי $M \in \mathbb{R}$ הוא הגבול העליון של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם"ם:
  1. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ האי-שוויון $M - \varepsilon < a_n$ מתקיים באופן שכיח
  2. האי-שוויון $M + \varepsilon > a_n$ מתקיים כמעט תמיד
- תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה שיש לה גבול עליון, מספר ממשי $m \in \mathbb{R}$ הוא הגבול התחתון של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם"ם:
  1. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ הא"ש $m + \varepsilon > a_n$ מתקיים באופן שכיח
  2. האי-שוויון $m - \varepsilon < a_n$ מתקיים כמעט תמיד

7.2 סדר

♣ כמעט כל הטענות שבסעיף זה והבא אחריו נלקחו מהספר "חשבון אינפיניטסימלי" שכתב מיכאל הוכמן יחד עם יונתן הראל, איתי וייס ואופק שילון. זהו נושא מבלבל מאד ולכן אשנה מהרגלי ואביא דוגמאות רבות המראות שבאופן כללי אין אריתמטיקה של גבולות עבור גבול עליון/תחתון ואפילו כדי שישתמר יחס סדר צריכים להתקיים תנאים מסוימים.

♣ בכל הטענות שלהלן ניתן להסתפק בחסימות מלעיל/מלרע בשביל הגבול העליון/התחתון, דרשנו חסימות מלעיל ומלרע כדי שנוכל לדבר על שניהם יחד.

טענה 7.3. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות חסומות, אם מתקיים $a_n \leq b_n$ ממקום מסוים ואילך אז מתקיים גם:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$$

דוגמה 7.4. נשים לב שאי אפשר לומר שמתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$$

לדוגמה:

$$a_n := \begin{cases} 1 & n \in \text{Odd} \\ 3 & n \in \text{Even} \end{cases}, \quad b_n := \begin{cases} 2 & n \in \text{Odd} \\ 4 & n \in \text{Even} \end{cases}$$

טענה 7.5. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות חסומות, מתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leq\limsup_{n\to\infty}a_n+\limsup_{n\to\infty}b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)\geq\liminf_{n\to\infty}a_n+\liminf_{n\to\infty}b_n$$

דוגמה 7.6. נשים לב שלא מתקיימים בהכרח שוויונות, לדוגמה:

$$a_n:=(-1)^n\,,\ \ b_n:=(-1)^{n+1}$$

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)0<2=\limsup_{n\to\infty}a_n+\limsup_{n\to\infty}b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)0>-2=\liminf_{n\to\infty}a_n+\liminf_{n\to\infty}b_n$$

הוכחה. נסמן ב-A את קבוצת הגבולות החלקיים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ב-B את זו של $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ וב-C את קבוצת הגבולות החלקיים של $(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$, מהגדרה שלוש הקבוצות חסומות ומכאן שיש לכל אחת מהן סופרמום ואינפימום; כמו כן, מהגדרה ומאריתמטיקה של גבולות נובע ש-$C\subseteq A+B$.

$$\Rightarrow\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\sup C\leq\sup(A+B)=\sup A+\sup B=\limsup_{n\to\infty}a_n+\limsup_{n\to\infty}b_n$$
$$\Rightarrow\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\inf C\geq\inf(A+B)=\inf A+\inf B=\liminf_{n\to\infty}a_n+\liminf_{n\to\infty}b_n$$

■

טענה 7.7. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות חסומות ואי-שליליות, מתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)\leq\limsup_{n\to\infty}a_n\cdot\limsup_{n\to\infty}b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)\geq\liminf_{n\to\infty}a_n\cdot\liminf_{n\to\infty}b_n$$

דוגמה 7.8. נשים לב שלא מתקיימים בהכרח שוויונות, לדוגמה:

$$a_n:=\begin{cases}1 & n\in\text{Odd}\\ 2 & n\in\text{Even}\end{cases},\ \ b_n:=\begin{cases}2 & n\in\text{Odd}\\ 1 & n\in\text{Even}\end{cases}$$

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=2<4=\limsup_{n\to\infty}a_n\cdot\limsup_{n\to\infty}b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=2>1=\liminf_{n\to\infty}a_n\cdot\liminf_{n\to\infty}b_n$$

דוגמה 7.9. אם נרשה לסדרות להיות אי-שליליות נוכל אפילו להפוך את כיווני האי-שוויונות, לדוגמה:

$$a_n:=b_n:=\begin{cases}1 & n\in\text{Odd}\\ -2 & n\in\text{Even}\end{cases}$$

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=4>1=\limsup_{n\to\infty}a_n\cdot\limsup_{n\to\infty}b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=1<4=\liminf_{n\to\infty}a_n\cdot\liminf_{n\to\infty}b_n$$

הוכחה. ההוכחה זהה לזו של הטענה הקודמת (עד כדי החלפת החיבור בכפל), כאשר המעברים:

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$$
$$\inf(A\cdot B)=\inf A\cdot\inf B$$

מוצדקים משום שמדובר בקבוצות אי-שליליות. ■

7.3 אריתמטיקה

טענה 7.10. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות חסומות, מתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n$$

טענה 7.11. [9] תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה וחיובית, מתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n)}$$
$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)}$$

טענה 7.12. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת לגבול $l\in\mathbb{R}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, מתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = l + \limsup_{n\to\infty} b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) = l + \liminf_{n\to\infty} b_n$$

הוכחה. נסמן ב-B את קבוצת הגבולות החלקיים של $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ וב-C את זו של $(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$, מאריתמטיקה של גבולות נובע שמתקיים $C=\{l\}+B$ (ראו הוכחה דומה ומפורטת בטענה הבאה).

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \sup C = \sup(\{l\}+B) = l+\sup\{B\} = l+\limsup_{n\to\infty} b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \inf C = \inf(\{l\}+B) = l+\inf\{B\} = l+\liminf_{n\to\infty} b_n$$

■

[9] טענה זו נלמדה באינפי' 2 (יורם לסט, סמסטר א' תשפ"ג).

טענה 7.13. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת לגבול $0 \leq l \in \mathbb{R}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, מתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = l \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = l \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n$$

הוכחה. ראשית נשים לב לכך שאם $l = 0$ אז הטענה נובעת ישירות מכלל אפסה וחסומה, א"כ נוכל להניח ש-$l > 0$.
נסמן ב-B את קבוצת הגבולות החלקיים של $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ וב-C את קבוצת הגבולות החלקיים של הסדרה $(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ ונרצה להוכיח שמתקיים $C = \{l\} \cdot B$.
יהי $b \in B$ ותהא $(n_k)_{n=1}^{\infty}$ סדרת אינדקסים עולה ממש כך ש-$\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = b$, מאריתמטיקה של גבולות וממשפט הירושה נובע שמתקיים:

$$\lim_{k\to\infty}(a_{n_k} \cdot b_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \cdot \lim_{k\to\infty} b_{n_k} = l \cdot b$$

$$\Rightarrow l \cdot b \in C$$

b הנ"ל היה שרירותי ומכאן ש-$\{l\} \cdot B \subseteq C$.
יהי $c \in C$ ותהא $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ סדרת אינדקסים עולה ממש כך ש-$\lim_{j\to\infty}\left(a_{n_j} \cdot b_{n_j}\right) = c$, מאריתמטיקה של גבולות וממשפט הירושה נובע שמתקיים[10]:

$$\lim_{j\to\infty} b_{n_j} = \lim_{j\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n_j}} \cdot a_{n_j} \cdot b_{n_j}\right) = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{a_{n_j}} \cdot \lim_{j\to\infty}\left(a_{n_j} \cdot b_{n_j}\right) = l^{-1} \cdot c$$

$$\Rightarrow l^{-1} \cdot c \in B$$
$$\Rightarrow c \in l \cdot B$$

c הנ"ל היה שרירותי ומכאן ש-$C \subseteq \{l\} \cdot B$.

$$\Rightarrow C = \{l\} \cdot B$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \sup C = \sup(\{l\} \cdot B) = l \cdot \sup B = l \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$$
$$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \inf C = \inf(\{l\} \cdot B) = l \cdot \inf B = l \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n$$

■

מסקנה 7.14. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת לגבול $0 > l \in \mathbb{R}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, מתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -l \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -l \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$$

[10] $l > 0$ ולכן $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חיובית ממקום מסוים ואילך.

8 תנאי קושי

טענה 8.1. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ותהא $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י $b_n = a_{n+1} - a_n$, הסדרה $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0.

♣ הדוגמה הבאה מפריכה את הכיוון ההפוך ולכן אנו נזקקים לתנאי קושי.

דוגמה 8.2. נתבונן בסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע"י $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (לכל $n \in \mathbb{N}$), אכן מתקיים ש-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ אך למרות זאת $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

הוכחה. יהי $M \in \mathbb{R}$, מארכימדיות של $\mathbb{R}$ נובע שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש-$M < \frac{N}{2}$, יהי N כנ"ל. נשים לב שלכל $2^N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > (1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{15}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{2^{N-1}+1} \ldots + \frac{1}{2^N - 1}\right)$$
$$> 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \ldots + 2^{N-1} \cdot \frac{1}{2^N} = 1 + (N-1) \cdot \frac{1}{2} > \frac{N}{2} > M$$

M הנ"ל היה שרירותי ולכן הנ"ל נכון לכל $M \in \mathbb{R}$ ומהגדרה $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. ■

משפט 8.3. תנאי קושי להתכנסות סדרות

תנאי הכרחי ומספיק לכך שסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תתכנס הוא שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

כלומר כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי וכל סדרת קושי היא סדרה מתכנסת.

♣ הרעיון שמאחורי תנאי קושי[11] תקף כמעט עבור כל סוגי הגבולות ואנחנו נפגש בגרסאות רבות שלו בקורס הבא[12].

הוכחה.

- $\Leftarrow$

  תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת לגבול $L \in \mathbb{R}$ ויהי $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$, מהיותה סדרה מתכנסת נובע שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ וגם $|a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$, יהי N כנ"ל.

  $$\Rightarrow |a_n - a_m| = |a_n - L + L - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

  ε הנ"ל היה שרירותי ולכן הנ"ל נכון לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$.

- $\Rightarrow$

  תהא $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת את תנאי קושי, א"כ קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_1 < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|b_{N_1+1} - b_n| < 1$ ולכן גם $|b_n| < |b_{N_1+1}| + 1$, א"כ $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה ולכן ממשפט בולצאנו ויירשטראס יש לה תת-סדרה חסומה. תהא $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת אינדקסים עולה ממש כך ש-$(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $L' \in \mathbb{R}$.

  יהי $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$, מתנאי קושי נובע שקיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_2 < n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $|b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}$; יהי N_2 כנ"ל ויהי $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$N_2 < n_k$ וגם $|b_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$, וא"כ לכל $N_2 < n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

  $$|b_n - L'| = |b_n - b_{n_k} + b_{n_k} - L'| \leq |b_n - b_{n_k}| + |b_{n_k} - L'| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

  ε הנ"ל היה שרירותי ולכן הנ"ל נכון לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ומהגדרה $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-L'.

■

[11] שאם כולם מתקרבים לגבול אז כולם מתקרבים לכולם ואם כולם מתקרבים לכולם אז כולם מתקרבים לגבול.

[12] ראו כאן הוכחה כללית לשקילות בין כל סוגי הגבולות לכל תנאי קושי המתאימים.