חשבון אינפיניטסימלי (1)

סמסטר ב' תשפ"ב

פתרון לתרגיל 1

מגיש: שריה אנסבכר

מס' ת"ז: 208026948

הבהרות

בשלבים רבים של ההוכחות נשתמש באקסיומה "שניים השווים לשלישי שווים זה לזה" (טרנזיטיביות השוויון) מבלי לציין זאת כדי לחסוך בכתיבה.

כל הפסוקים המופיעים כאן הם פסוקי אמת (וניתן לראות זאת מן ההוכחות) אלא אם נאמר במפורש אחרת.

**שאלה 2**

נגדיר על המספרים השלמים את הפעולה \* על ידי: .

סעיף (א)

צ"ל: \* מקיימת את אקסיומת האסוציאטיביות,

כלומר: האם "" הוא פסוק אמת?

אנו יודעים כי קבוצת המספרים נשלמים מקיימת כמעט את כל אקסיומות השדה (=כולן למעט M4 - קיום ההופכי הכפלי) וכן מקיימת היא את חוקי הקיבוץ, החילוף והפילוג במלואם (=לא רק בשלושה איברים המחוברים ו/או מוכפלים זה בזה אלא גם בכל כמות אחרת).

ראשית, נכתוב את m\*n ו- n\*p בצורה מפורשת:

ע"פ הגדרת הפעולה \*:

ומכאן ש:

וגם: .

נסתכל כעת על השוויון שבפסוק הראשון "": ע"פ הגדרת הפעולה \* ניתן להמשיך ולכתוב את הביטוי בצורה מפורשת, אם כן קיבלנו:

מאחר שאנו יודעים כי פעולת הכפל מקיימת את חוק החילוף, הרי שנוכל לכתוב את האיבר האחרון שבאגף ימין (האיבר הזה: "") כך: ,

ומשום שהכפל והחיבור מקיימים יחדיו את חוק הפילוג נוכל לכותבו גם כך: , וא"כ:

כעת נסתכל על השוויון השני: , ע"פ הגדרת הפעולה \* ניתן להמשיך ולכתוב את הביטוי בצורה מפורשת ואם כן קיבלנו:

מאחר שאנו יודעים כי פעולות הכפל והחיבור מקיימות יחדיו את חוק הפילוג) ניתן לכתוב את האיבר השלישי שבצד ימין של המשוואה (האיבר הזה: "*") כך: וא"כ:*

*כעת נסתכל על שני השוויונות יחד: פעולת החיבור מקיימת את חוקי הקיבוץ והחילוף ומכאן שאין שום משמעות לסוגריים המופיעים בחלק האחרון (התחתון) של רצפי השוויונות ומכאן שהפסוק הראשון שקול לפסוק הבא:*

והשני שקול לפסוק זה:

כעת נסתכל שוב על החלק האחרון של רצפי השוויונות ונגלה שהם כמעט זהים ושני ההבדלים הם כדלקמן:

1. ישנם איברים דומים שההבדל ביניהם הוא סדר ההכפלה של m, n ו/או p; הבדל זה אינו מפריע לנו משום שהכפל מקיים את חוקי הקיבוץ והחילוף וא"כ ניתן להחליף את זוגות האיברים הדומים (pmn ו-mnp, pn ו-np, pm ו-mp) זה בזה.
2. סדר חיבור האיברים שונה, אך פעולת החיבור מקיימת גם היא את חוק החילוף וא"כ לשנות את סדר חיבור האיברים מבלי לפגוע בערכו המספרי של הביטוי כך שגם הבדל זה אינו מפריע.

בכתיב מתמטי (את השינויים נעשה על רצף השוויונות הראשון כאשר נפטר קודם כל מההבדל הראשון ולאחריו מהשני):

אנו כבר יודעים שהאגף האחרון ברצף השוויונות הזה מופיע ברצף השוויונות השני, ומשום שהפסוקים הללו אומרים שרצפי השוויונות נכונים לכל שלושה איברים בקבוצת המספרים השלמים הרי שלכל שלושה איברים בקבוצת השלמים כל האגפים השונים (בשני הפסוקים) שווים זה לזה.

ולסיכום (בכתיב מתמטי):

*מש"ל.*

סעיף (ב)

צ"ל: \* מקיימת את אקסיומת הקומוטטביות.

כלומר: האם "*" הוא פסוק אמת?*

*ראשית, נכתוב את שני אגפי השוויון בצורה מפורשת (ע"י הגדרת \*) בתוך פסוקי אמת:*

*פסוק #1:*

*פסוק #2:*

*נסתכל על הפסוק הראשון, אנו יודעים שהחיבור מקיים את חוק החילוף וא"כ הוא שקול לפסוק הבא:*

*.*

*אנו יודעים שגם הכפל מקיים את חוק החילוף וא"כ:*

.

*הביטוי שבאגף ימין של השוויון בפסוק זה הוא בדיוק הביטוי המופיע באגף ימין של השוויון בפסוק #2,* ומשום שהפסוקים הללו אומרים שהשוויונות נכונים לכל שני איברים בקבוצת המספרים השלמים הרי שלכל שני איברים בקבוצת השלמים כל האגפים השונים (בשני הפסוקים) שווים זה לזה *ובפרט:*

*, מש"ל.*

*סעיף (ג)*

*צ"ל: קיים ב- איבר אדיש לפעולה \*.*

*איבר אדיש הוא מה שקראנו לו בשיעור "איבר ניטרלי" לפעולה.*

*כלומר: האם הפסוק "" הוא פסוק אמת?*

*הערה: כבר הוכחנו בסעיף (ב) ש- \* היא פעולה קומוטטיבית ומכאן שאם זהו פסוק אמת אזי גם:*

*"" הוא פסוק אמת.*

*נרצה לטעון ש-0 (האיבר הניטרלי לחיבור) הוא ה-*n *המבוקש, כלומר: נוכיח ש-"" הוא פסוק אמת.*

*ע"פ הגדרת \* הפסוק הבא: "", שקול לפסוק שאנו מבקשים להוכיח את נכונותו.*

*אנו יודעים ש-0 הוא איבר ניטרלי לחיבור וא"כ ניתן לכתוב את האגף הראשון שבשוויון (המופיע בתוך הפסוק) כך: ויהיה עלינו להוכיח שאכן "" הוא פסוק אמת.*

*נסתכל כעת על הביטוי הבא: , ניתן לכתוב אותו בצורה מפורשת בשתי צורות:*

1. *הכפל והחיבור מקיימים יחדיו את חוק הפילוג וא"כ: .*
2. *0 הוא איבר ניטרלי לחיבור וא"כ: .*

*הצגנו את אותו הביטוי בשתי הצורות ולכן שתיהן חייבות להיות שוות, כלומר:*

*.*

*1 הוא איבר ניטרלי לכפל ומכאן ש- הוא בעצם* m*, כלומר: ; מש"ל.*

***שאלה 3***

*סעיף (א) - תת סעיף* i*)*

*צ"ל: .*

*נראה זאת באינדוקציה כאשר " ()" תקרא הטענה* P(n)*.*

*בסיס האינדוקציה: נוכיח ש-*P(1) *(כלומר: ), ואכן אנו יודעים כי:*

*.*

*צעד האינדוקציה: נראה ש-.*

P(n) *היא בעצם: .*

P(n+1) *היא בעצם: .*

*אנו יודעים כי* *מכאן שאם* P(n) *נכונה אזי* P(n+1) *היא בעצם:*

*, והרי זה פסוק אמת משום ש-*

*, ומכאן ש-* P(n+1) *היא בעצם:*

*וזהו פסוק אמת; מש"ל.*

*סעיף (א) - תת סעיף* ii*)*

*צ"ל:*

*נראה זאת באינדוקציה כאשר " ()" תקרא הטענה* P(n)*.*

*בסיס האינדוקציה: נוכיח ש-*P(1) *(כלומר: ) היא פסוק אמת, ואכן אנו יודעים כי:*

*.*

*צעד האינדוקציה: נראה ש-.*

P(n) *היא בעצם: .*

P(n+1) *היא בעצם:*

*.*

*אנו יודעים כי: , מכאן שאם* P(n) *נכונה אזי* P(n+1) *היא בעצם:*

*והרי זה פסוק אמת משום ש-*

*, ומכאן ש-* P(n+1) *היא בעצם:*

*וזהו פסוק אמת; מש"ל.*

*סעיף (ב)*

*יהי .*

*צ"ל: .*

*נראה זאת באינדוקציה כאשר " ()" תקרא הטענה* P(n)*.*

*בסיס האינדוקציה: נוכיח ש-*P(1) *(כלומר: ), ואכן אנו יודעים כי:*

*כל עוד (וזהו אחד מנתוני השאלה).*

*צעד האינדוקציה: נראה ש-.*

P(n) *היא: .*

P(n+1) *היא בעצם: .*

*אנו יודעים כי: , מכאן שאם* P(n) *נכונה אזי* P(n+1) *היא בעצם:*

*והרי זה פסוק אמת משום ש-*

*, ומכאן ש-* P(n+1) *היא בעצם:*

*וזהו פסוק אמת; מש"ל.*