**המספרים הממשיים**

שיעור 1 (ג' באדר ב' ה'תשפ"ב – 06/03/2022)

הגדרה: המספרים הממשיים הם שדה סדור שלם.

הגדרה: שדה הוא קבוצה שיש בה לפחות שני איברים המכונים "אפס" (מסומן "0") ו-"אחד" (מסומן "1"), שעל איבריה מוגדרות שתי פעולות דו-מקומיות המכונות "חיבור" (מסומנת "+") ו-"כפל" (מסומנת "∙"). המקיימות 9 תכונות שתובאנה בהמשך.

הגדרה: פעולה דו-מקומית היא פעולה הקולטת שני איברים בדיוק ופולטת איבר אחד בלבד.

כשאנו אומרים שפעולה דו-מקומית מוגדרת על קבוצה כוונתנו היא ש**לכל שני איברים** (לאו-דווקא שונים) **בקבוצה** ש"יוכנסו" לפעולה הדו-מקומית כקלט "תיתן" הפעולה **איבר השייך לקבוצה** כפלט (יתכן שזהו אחד משני האיברים המהווים קלט). ולעניינינו: לכל שני מספרים ממשיים המהווים קלט תיתן פעולת החיבור/כפל (בהקשר של מספרים ממשיים אלו חיבור/כפל ממש[[1]](#footnote-1)) מספר ממשי יחיד כפלט. ובשפה מתמטית:

כפי שאמרנו פעולות אלו צריכות לקיים 9 תכונות (4 מהן תקיים כל אחת בנפרד ואת האחרונה תקיימנה יחד) כדי שהגדרתן על קבוצה תהפוך אותה לשדה ואלו הן:

1. A1 - פעולת החיבור מקיימת את חוק הקיבוץ, כלומר: לכל שלושה איברים בקבוצה (נקרא להם a,b,c) מתקיים ש- [[2]](#footnote-2).
2. A2 - פעולת החיבור מקיימת את חוק החילוף, כלומר: לכל שלושה איברים בקבוצה (נקרא להם a,b,c ) מתקיים ש- .
3. A3 - קיום איבר ניטרלי לחיבור (זהו האיבר המכונה "אפס" ומסומן "0" שלעיל), כלומר: לכל איבר בקבוצה מתקיים ש- .
4. A4 - קיום נגדי, כלומר לכל איבר בקבוצה (נסמנו "a") קיים איבר בקבוצה (אותו נסמן ב-"-a") כך ש- .
5. M1 - פעולת הכפל מקיימת את חוק הקיבוץ, כלומר: לכל שלושה איברים בקבוצה (נקרא להם a,b,c) מתקיים ש- .
6. M2 - פעולת הכפל מקיימת את חוק החילוף, כלומר: לכל שלושה איברים בקבוצה (נקרא להם a,b,c ) מתקיים ש- .
7. M3 - קיום איבר ניטרלי לכפל (זהו האיבר המכונה "אחד" ומסומן "1" שלעיל), כלומר: לכל איבר בקבוצה מתקיים ש- .
8. M4 - קיום הופכי, כלומר: לכל איבר בקבוצה (נסמנו "a") שאינו האיבר הניטרלי לחיבור (0) קיים איבר בקבוצה (אותו נסמן ב-"") כך ש- .
9. D - פעולות החיבור והכפל מקיימות יחדיו את חוק הפילוג, כלומר: לכל שלושה איברים בקבוצה (נקרא להם a,b,c) מתקיים ש- .

הערות בנוגע לחיסור וחילוק:

החיסור (מסומן "-") מוגדר כך: חיסור שני איברים בקבוצה (נכנה אותם a,b) הוא חיבור הנגדי של המחסר למחוסר, כלומר: .

החילוק (מסומן ":", "/", "" או "") מוגדר כך: חילוק שני איברים בקבוצה (נכנה אותם a,b) הוא הכפלת המחולק בהופכי של המחלק כלומר: .

שתי אקסיומות "נסתרות" המבוססות על משמעות מושג השוויון והלימה בינו לפעולות:

E1 אם  *אז .*

E2 *אם אז .*

*דוגמה לשדה*

*הקבוצה שלנו היא* {0,1} *ופעולות ה-"כפל" וה-"חילוק" המוגדרות עליה קולטות ופולטות את האיברים הנ"ל ע"פ הטבלאות הבאות:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *1* | *0* | *+* |
| *1* | *0* | *0* |
| ***0*** | *1* | *1* |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *1* | *0* | **∙** |
| *0* | ***0*** | *0* |
| *1* | *0* | *1* |

*כדי להוכיח שזהו אכן שדה עלינו להראות שכל 9 התכונות מתקיימות.*

*סתם לידע כללי: לשדה זה קוראים* F2 *והוא השדה היחיד שבו שני איברים בלבד.*

*קל לראות שאת המשבצות אותן לא הדגשנו וצבענו באדום היינו ממש מוכרחים למלא כפי שאכן מילאנו (ע"פ תכונות* A3 *ו-* M3 *בהתאמה).*

**כאן יש להראות שאכן זהו שדה.**

*משפט: לכל קיים יחיד המקיים .*

*בעצם יש כאן שתי טענות: אחת- שקיים פתרון והשנייה- שהוא הפתרון היחיד, לכן כדי להוכיח את נכונות המשפט עלינו להוכיח את שתיהן.*

*הוכחה: ראשית, נוכיח את קיום הפתרון, נראה ש- פותר את המשוואה (*x *אכן קיים משום שקבוצת הממשיים היא שדה ובפרט: פעולות החיבור והכפל מוגדרות עליה, ובנוסף, היא מקיימת את התכונות:* M4 *ו-*A4*).*

*ממשמעות השוויון נובע שכל שניים השווים לשלישי שווים זה לזה (זוהי אחת האקסיומות של אוקלידס), נציב את ה-*x *הנ"ל באגף שמאל של המשוואה ונראה שהביטוי באגף זה שווה לביטוי אחר אותו נשווה לאחר וכן הלאה עד שנגיע לביטוי שבאגף ימין ואז לפי אקסיומה זו יהיה ברור שאלו ביטויים שווים.*

*נציג את ההוכחה בטבלה: הטענות תופענה בעמודה הימנית ונימוקן -בשמאלית, כך שניתן להראות שטענה אחת גוררת את שתי הסמוכות לה לפי הנימוק המופיע ליד המאוחרת מבין השתיים.*

|  |  |
| --- | --- |
| *טענה* | *נימוק* |
|  | M1 |
|  | M4 |
|  | M3 |
|  | A1 |
|  | A4 |
|  | A3 |

*כעת נוכיח את היותו של הפתרון הנ"ל הפתרון היחיד,*

*כלומר: עלינו להוכיח ש- .*

*מטרנזיטיביות השוויון נובע שאם הטענה הגוררת נכונה אזי (אם הטענה הגוררת אינה נכונה ודאי שפסוק הגרירה בכללותו הוא פסוק אמת).*

|  |  |
| --- | --- |
| *טענה* | *נימוק* |
|  | *טרנזיטיביות השוויון* |
|  | E1 |
|  | A1 |
|  | A4 |
|  | A3 |
|  | E2 |
|  | M1 |
|  | M4 |
|  | M3 |

*שיעור 2 (ה' באדר ב' ה'תשפ"ב – 08/03/2022)*

*טענה (יחידות איבר ניטרלי לחיבור)[[3]](#footnote-3): אם מקיימים אזי .*

*הוכחה: נתבונן בשוויון , בסמלי המשפט שהוכחנו בשיעור הקודם (יקרא להלן המשפט): .*

*המשפט אומר שיש רק פתרון אחד, אקסיומה* A3 *אומרת ש- פותר את המשוואה, מכאן ש-.*

*טענה (יחידות הנגדי): אם מקיימים אזי .*

*הוכחה: נתבונן במשוואה , ע"פ* A4 *פותר את המשוואה וע"פ המשפט זהו הפתרון היחיד.*

*טענה (אפשר לצמצם): אם מקיימים אזי .*

*הוכחה: נתבונן במשוואה , נשים לב ש- הוא פתרון ומצד שני גם פותר את המשוואה, מיחידות הפתרון נובע ש-.*

*טענה: לכל .*

*הוכחה:*

|  |  |
| --- | --- |
| *טענה* | *נימוק* |
|  | A3 |
|  | A3, E2 |
|  | D |
|  | A2 |
|  | *טענה קודמת* |

*מאקסיומות השדה נובע:*

**יש להוכיח את כל הנ"ל.**

*כעת נראה שלא כל הזהויות הידועות של הממשיים מתקיימות בכל שדה.*

*טענה (?): אם המקיימים אזי .*

|  |  |
| --- | --- |
| *טענה* | *נימוק* |
|  | *נתון* |
|  | E1 |
|  | A2, A1 |
|  | A3, A4 |
|  | M3 |
|  | D |

*ישנם שדות בהם כגון* F2 *ולכן א"א להוכיח את הטענה בהתבסס על אקסיומות השדה בלבד.*

*הגדרה: שדה נקרא סדור אם לכל הפסוק הוא פסוק לוגי (=ניתן לשייך לו ערך אמת) כך ש:*

O1*- טריכוטומיה: לכל מתקיים (מדובר ב"או" מוציא).*

O2*- טרנזיטיביות:.*

O3*- הלימה עם חיבור: .*

O4*- הלימה עם כפל: .*

*הערות:*

*בארבעת התכונות הנ"ל הגדרנו את היחס >.*

*פירושו של הסימון הוא: או (מוציא[[4]](#footnote-4)) .*

*פירושו של הסימון הוא: .*

*פירושו של הסימון הוא: .*

**כאן יש להביא את כל הטענות שהובאו על שדות סדורים.**

1. כך נראה לי אך לא נאמר בשיעור במפורש. [↑](#footnote-ref-1)
2. ניתן להוכיח מתכונה זו תכונות דומות גם לגבי 4 איברים וכו' כלומר את חוק הקיבוץ במלואו. [↑](#footnote-ref-2)
3. כל עוד נשתמש רק בתכונות השדה תהיה הטענה (וחלק מן הבאות אחריה נכונה לכל שדה). [↑](#footnote-ref-3)
4. בגלל הטריכוטומיה ניתן לומר או מכליל. [↑](#footnote-ref-4)