הסתברות בדידה - הגדרות

תורת ההסתברות (1) - 80420

מרצה: אורי גוראל-גורביץ'

מתרגל: אמיר בכר

סוכם ע"י שריה אנסבכר

סמסטר ב' תשפ"ד, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

סביר להניח שהסיכומים שלי מכילים טעויות רבות - אני מוצא כאלה כל יום (רשימת טעויות נפוצות),
אני מפציר בכם לעדכן אותי בכל טעות שאתם מוצאים (ממש כל טעות ללא יוצא מן הכלל);
אתם מוזמנים להגיב על גבי המסמכים ב-Google Drive, לשלוח לי דוא"ל או למלא פנייה באתר.

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://srayaa.wixsite.com/math

1 התחלה

הסכמה: בקורס זה נכנה כל קבוצה שאינה ריקה בשם "מרחב מדגם".

הגדרה 1.1. פונקציית הסתברות נקודתית
יהי Ω מרחב מדגם, פונקציה $p:\Omega\to\mathbb{R}$ תיקרא פונקציית הסתברות נקודתית על Ω אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. אי-שליליות - לכל $\omega\in\Omega$ מתקיים $p\left(\omega\right)\geq0$.
2. נרמול - $\sum_{\omega\in\Omega}p\left(\omega\right)=1$.

♣ ההסתברות המתמטית מנסה לפרמל את מה שנקרא בשפת היום-יום "סיכוי"[1], מרחב המדגם הוא קבוצת התוצאות האפשריות של ה"ניסוי" אותו אנו מתעתדים לבצע, והערך של p עבור כל תוצאה אפשרית הוא הסיכוי שאנו מייחסים לכך שזו אכן תהיה התוצאה של ה"ניסוי". הדוגמה הקלאסית היא הטלת קובייה - במקרה הזה מרחב המדגם הוא הקבוצה $\Omega:=\left\{ 1,2,3,4,5,6\right\}$, ומכיוון שאנחנו מייחסים לכל אחת מהתוצאות האפשריות סיכוי זהה, $p:\Omega\to\mathbb{R}$ היא הפונקציה המוגדרת ע"י $p\left(\omega\right):=\frac{1}{6}$ לכל $\omega\in\Omega$.

♣ לעתים יהיה לנו נוח יותר להגדיר את מרחב המדגם כך שיכלול תוצאות שאינן אפשריות ולומר שהסיכוי של תוצאות אלו הוא 0, הדבר דומה לכך שהטווח של פונקציה אינו חלק מזהותה וניתן להחליפו בכל קבוצה המכילה את תמונת הפונקציה.

תזכורת: תהא Ω קבוצה, התומך של פונקציה $p:\Omega\to\mathbb{R}$ הוא הקבוצה $\mathrm{Supp}\left(p\right):=\left\{ \omega\in\Omega\mid p\left(\omega\right)>0\right\}$.

♣ כפי שראינו בהקדמה, כדי שהסכום $\sum_{\omega\in\Omega}p\left(\omega\right)$ יהיה מוגדר, התומך של p - $\mathrm{Supp}\left(p\right):=\left\{ \omega\in\Omega\mid p\left(\omega\right)>0\right\}$ - צריך להיות סופי או בן-מנייה.

[1] אם כשאתם שומעים את המילה "סיכוי" עובר לכם משהו בראש - הסתפקו בזה, אני לא רואה צורך להסביר כל מילה שאני משתמש בה; אם אתם מוכרחים להתפלסף - המשיכו לקרוא.
לתפיסתי, המילה "סיכוי" מתייחסת לשני מושגים דומים:

1. "סיכוי" הוא תכונה שיש למצב נתון, והיא הסיבה לכך שהוא מתפתח למצב אחר. במקרה של הטלת הקובייה לכל מספר יש סיכוי שווה להיות התוצאה, הסיכויים "מתמודדים" ביניהם באופן **לא ידוע** וה"מנצח" קובע את התוצאה. ההשלכה המעשית לכך שסיכוי אחד גדול מחברו היא ש**אם** נבצע את הניסוי פעמים רבות, אנו מצפים שהסיכוי הגדול יותר "ינצח" פעמים רבות יותר וביחס דומה ליחס שבין שני הסיכויים. **אבל**, הסיכויים קיימים גם מבלי שנבצע את הניסוי פעמים רבות! הם אלו ש**גורמים** לתוצאות לקרות ביחס המתאים (בערך).
2. "סיכוי" הוא חלק מן הדרך הנכונה לחשוב, למה אני מתכוון במילים "הדרך הנכונה לחשוב"? ישנם חוקי היגיון בסיסיים כגון: "אם P גורר את Q ו-Q גורר את R אז P גורר את R", אלו חוקים שלעולם לא יביאו אותנו לידי טעות לבדם מפני שהם פשוט נכונים (כן, גם הקורא המתפלסף מסכים שהחוק שהזכרתי נכון, גם אם הוא לא מודה בזה בפה מלא). לעומתם קיים מה שמכונה "שכל ישר", לדוגמה: כולנו ראינו פעמים רבות שכאשר עוזבים חפץ באוויר הוא נופל, ולכן כולנו מסיקים שאם מחר נעזוב את העט שלנו באוויר הוא ייפול. תמיד יכול לבוא אדם ולומר שהוא לא חושב כך, אך במקרה כזה אומר שהוא "אינו חושב נכון" למרות שאין לי שום דרך להוכיח שאני צודק. השכל הישר עלול להביא אותנו לידי טעות: בדוגמה של העט הנופל ידוע לכולנו שבתחנת החלל הבין-לאומית עטים אינם נופלים כשעוזבים אותם, האם זה אומר שטעינו? אני רוצה לטעון שלא טעינו בדרך אלא רק בתוצאה, חשבנו נכון וקיבלנו טעות - זה לא סותר! בהינתן המידע שהיה לנו לפני שהגענו לחלל זו הייתה המחשבה הנכונה לחשוב, כעת כשיש לנו מידע נוסף ייתכן שנשנה את דעתנו, אך אין זה אומר שטעינו קודם בתהליך החשיבה.

מה כל זה קשור להסתברות? כולנו נסכים שאדם החושש לצאת מביתו שמא יפגע בו ברק אינו "חושב נכון", וזאת משום שלהערכתנו ה**סיכוי** לכך אפסי, כלומר אנו מעריכים את אותו "סיכוי" במשמעותו הקודמת, למרות חוסר הידיעה שלנו בנושא אנחנו מסוגלים לומר בביטחון שזה פשוט לא יקרה. האם כאשר זה קורה לאותו אדם (וזה אכן קורה) נאמר שטעינו? לא ולא! שוב טעינו רק בתוצאה ולא בדרך.

הגדרה. סיגמא-אלגברה

יהי Ω מרחב מדגם, קבוצה $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}\left(\Omega\right)$ תיקרא סיגמא-אלגברה על Ω אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. $\emptyset\in\mathcal{F}$.
2. סגירות לאיחוד בן-מנייה - לכל קבוצה בת-מנייה $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{F}$ של איברים זרים בזוגות (כלומר $A\cap B=\emptyset$ לכל $A,B\in\mathcal{A}$ כך ש-$A\neq B$), מתקיים:
$$\dot{\bigcup_{A\in\mathcal{A}}}A\in\mathcal{F}$$
3. סגירות למשלים - לכל $A\in\mathcal{F}$ מתקיים $\Omega\setminus A\in\mathcal{F}$.

לא ראינו את ההגדרה של סיגמא-אלגברה בכיתה, אך כפי שנראה בהמשך כל קבוצת מאורעות על Ω היא סיגמא-אלגברה על Ω.

הגדרה 1.2. פונקציית הסתברות

יהי Ω מרחב מדגם, ותהא $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}\left(\Omega\right)$ קבוצת מאורעות על Ω. פונקציה $\mathbb{P}:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ תיקרא פונקציית הסתברות על $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

1. אי-שליליות - לכל $A\in\mathcal{F}$ מתקיים $\mathbb{P}\left(A\right)\geq0$.
2. נרמול - $\mathbb{P}\left(\Omega\right)=1$.
3. סכימות בת-מנייה - לכל קבוצה בת-מנייה $X\subseteq\mathcal{F}$ של איברים זרים בזוגות (כלומר $x\cap y=\emptyset$ לכל $x,y\in X$ כך ש-$x\neq y$), מתקיים:
$$\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{x\in X}}x\right)=\sum_{x\in X}\mathbb{P}\left(x\right)$$

הגדרה 1.3. מרחב הסתברות

מרחב הסתברות הוא שלשה סדורה $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$, כאשר $\mathbb{P}$ היא פונקציית הסתברות על הזוג $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$; בפרט Ω אינה ריקה, $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}\left(\Omega\right)$ ו-$\Omega\in\mathcal{F}$.

במקרה כזה Ω תיקרא מרחב המדגם ו-$\mathcal{F}$ תיקרא קבוצת המאורעות; כמו כן נאמר ש-$\mathbb{P}$ נתמכת על קבוצה $A\in\mathcal{F}$ אם $\mathbb{P}\left(A\right)=1$.

טענה. תהא $p:\Omega\to\mathbb{R}$ פונקציית הסתברות על Ω, תהא $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}\left(\Omega\right)$ קבוצת מאורעות של Ω, ותהא $\mathbb{P}_{p}:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $A\in\mathcal{F}$):
$$\mathbb{P}_{p}\left(A\right):=\sum_{a\in A}p\left(a\right)$$
$\mathbb{P}_{p}$ היא פונקציית הסתברות על $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$, והיא נתמכת על $\text{Supp}\left(p\right)$.

♣ לא כל פונקציית הסתברות נוצרת ע"י פונקציית הסתברות נקודתית; לדוגמה: הפונקציה המחזירה לכל תת-קטע של $\left[0,1\right]$ את אורכו, היא פונקציית הסתברות על $\left(\left[0,1\right],\mathcal{F}\right)$, כאשר $\mathcal{F}$ **אינה** קבוצת כל תתי-הקטעים של $\left[0,1\right]$ אלא סיגמא-אלגברה המכילה את הקבוצה הזו.

2 מרחבי הסתברות בדידה

הגדרה 2.1. פונקציית הסתברות בדידה

יהי Ω מרחב מדגם, ותהא $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}\left(\Omega\right)$ קבוצת מאורעות על Ω. פונקציית הסתברות $\mathbb{P}:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ על $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ תיקרא פונקציית הסתברות בדידה אם קיימת פונקציית הסתברות נקודתית $p:\Omega\to\mathbb{R}$ כך שלכל $A\in\mathcal{F}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(A\right)=\sum_{a\in A}p\left(a\right)$$

האם אנחנו דורשים ש-$\mathcal{F}=\mathcal{P}\left(\Omega\right)$?

הגדרה 2.2. מרחב הסתברות בדידה

מרחב הסברות $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ ייקרא מרחב הסתברות בדידה אם $\mathbb{P}$ היא פונקציית הסתברות בדידה על $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$.

במקרה כזה נסמן פעמים רבות את פונקצייתה ההסתברות ב-$\mathbb{P}_{p}$ כדי לציין ש-$p:\Omega\to\mathbb{R}$ היא פונקציית הסתברות נקודתית המקיימת (לכל $A\in\mathcal{F}$):

$$\mathbb{P}_{p}\left(A\right)=\sum_{a\in A}p\left(a\right)$$

הגדרה 2.3. מרחב הסתברות אחידה

מרחב הסתברות בדידה $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_{p}\right)$ ייקרא מרחב הסתברות אחידה אם לכל $\omega_{1},\omega_{2}\in\Omega$ מתקיים $p\left(\omega_{1}\right)=p\left(\omega_{2}\right)$.

טענה 2.4. יהיו $\Omega_{1},\Omega_{2},\ldots,\Omega_{n}$ מרחבי מדגם, תהא $p_{0}:\Omega_{1}\to\mathbb{R}$ פונקציית הסתברות נקודתית, ולכל $n>k\in\mathbb{N}$ ו-$\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{k}\right)\in\Omega_{1}\times\Omega_{2}\times\ldots\times\Omega_{k}$ תהא גם $p_{\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{k}}:\Omega_{k+1}\to\mathbb{R}$ היא פונקציית הסתברות נקודתית.

הפונקציה $p:\Omega_{1}\times\Omega_{2}\times\ldots\times\Omega_{n}\to\mathbb{R}$, המוגדרת ע״י (לכל $\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{n}\right)\in\Omega$):

$$p\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{n}\right):=p_{0}\left(\omega_{1}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}p_{\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{k}}\left(\omega_{k+1}\right)$$

היא פונקציית הסתברות נקודתית על $\Omega_{1}\times\Omega_{2}\times\ldots\times\Omega_{n}$.

♣ מבחינה אינטואיטיבית מה שקורה כאן הוא כזה: אנחנו מבצעים את הניסוי של מרחב ההסתברות $\left(\Omega_{1},\mathcal{P}\left(\Omega_{1}\right),\mathbb{P}_{p_{0}}\right)$ (לדוגמה: הטלת קובייה), ולפי התוצאה מחליטים איזה ניסוי לבצע בשלב הבא (בכך אנחנו מגדירים מרחב הסתברות חדש - $\left(\Omega_{2},\mathcal{P}\left(\Omega_{2}\right),\mathbb{P}_{p_{\omega_{1}}}\right)$), וחוזר חלילה.

הגדרה 2.5. ניסוי רב-שלבי

מרחב הסתברות בדידה $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_{q}\right)$ ייקרא ניסוי רב-שלבי אם פונקציית ההסתברות הנקודתית q ניתנת להצגה שבטענה האחרונה (2.4).

הגדרה 2.6. מרחב מכפלה

יהיו $\left(\Omega_{1},\mathcal{F}_{1},\mathbb{P}_{1}\right),\left(\Omega_{2},\mathcal{F}_{2},\mathbb{P}_{2}\right),\ldots,\left(\Omega_{n},\mathcal{F}_{n},\mathbb{P}_{n}\right)$ מרחבי הסתברות בדידה, ולכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ נסמן ב-p_{i} את פונקציית ההסתברות הנקודתית המתאימה.

- המכפלה הנקודתית של פונקציות ההסתברות הנ״ל היא הפונקציה $p:\Omega_{1}\times\Omega_{2}\times\ldots\times\Omega_{n}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע״י (לכל $\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{n}\right)\in\Omega$):

$$p\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{n}\right):=\prod_{k=1}^{n}p_{k}\left(\omega_{k}\right)$$

- מרחב המכפלה של המרחבים הנ״ל הוא מרחב ההסתברות $\left(\Omega_{1}\times\Omega_{2}\times\ldots\times\Omega_{n},\mathcal{F}_{1}\times\mathcal{F}_{2}\times\ldots\times\mathcal{F}_{n},\mathbb{P}_{p}\right)$ (עבור p הנ״ל).
- מאורעות מכפלה במרחב המכפלה הנ״ל הם מאורעות מהצורה $A_{1}\times A_{2}\times\ldots\times A_{n}$ כאשר $A_{k}\in\mathcal{F}_{k}$ לכל $k\in\mathbb{N}$.
- מאורעות שוליים במרחב המכפלה הנ״ל הם מאורעות מהצורה $A_{1}\times A_{2}\times\ldots\times A_{j-1}\times B\times A_{j+1}\ldots\times A_{n}$, כאשר $A_{k}\in\mathcal{F}_{k}$ לכל $j\neq k\in\mathbb{N}$ ו-$B\in\mathcal{F}_{j}$.