הסתברות בדידה - טענות

תורת ההסתברות (1) - 80420

מרצה: אורי גוראל-גורביץ׳

מתרגל: אמיר בכר

סוכם ע״י שריה אנסבכר

סמסטר ב׳ תשפ״ד, האוניברסיטה העברית

תוכן העניינים

1 התחלה

טענה 1.1. תהא $p:\Omega\to\mathbb{R}$ פונקציית הסתברות על מרחב מדגם Ω, תהא $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ קבוצות מאורעות של Ω, ותהא $\mathbb{P}_p:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $A\in\mathcal{F}$):

$$\mathbb{P}_p(A):=\sum_{a\in A}p(a)$$

$\mathbb{P}_p$ היא פונקציית הסתברות על $(\Omega,\mathcal{F})$, והיא נתמכת על $\text{Supp}(p)$.

♣ לא כל פונקציית הסתברות נוצרת ע"י פונקציית הסתברות נקודתית; לדוגמה: הפונקציה המחזירה לכל תת-קטע של $[0,1]$ את אורכו, היא פונקציית הסתברות על $([0,1],\mathcal{F})$, כאשר $\mathcal{F}$ **אינה** קבוצת כל תתי-הקטעים של $[0,1]$ אלא סיגמא-אלגברה המכילה את הקבוצה הזו.

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

טענה 1.2. מתקיימות כל התכונות הבאות:

1. הסתברות המאורע הריק - $\mathbb{P}(\emptyset)=0$.
2. סכימות (סופית) - לכל $n\in\mathbb{N}$ מאורעות זרים בזוגות $A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathcal{F}$ מתקיים:
$$\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{n}}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)$$
3. מונוטוניות - לכל שני מאורעות $A,B\in\mathcal{F}$ כך ש-$A\subseteq B$ מתקיים $\mathbb{P}(A)\le\mathbb{P}(B)$.
4. לכל מאורע $A\in\mathcal{F}$ מתקיים $\mathbb{P}(A)\le 1$.
5. הסתברות המאורע המשלים - לכל מאורע $A\in\mathcal{F}$ מתקיים $\mathbb{P}(\Omega\setminus A)=1-\mathbb{P}(A)$.

משפט 1.3. הכלה והדחה

לכל שני מאורעות $A,B\in\mathcal{F}$ מתקיים $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$.

♣ כמובן שניתן להכליל את הנוסחה עבור כל איחוד סופי כפי שעשינו בקורס "מתמטיקה בדידה".

מסקנה 1.4. חסם האיחוד

לכל קבוצת מאורעות בת-מנייה $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{F}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A\right)\le\sum_{A\in\mathcal{A}}\mathbb{P}(A)$$

משפט 1.5. נוסחת ההסתברות השלמה

תהא $\mathcal{A}$ חלוקה בת-מנייה של Ω כך ש-$A\cap B\in\mathcal{F}$ לכל $A\in\mathcal{A}$. לכל מאורע $B\in\mathcal{F}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(B)=\sum_{A\in\mathcal{A}}\mathbb{P}(A\cap B)$$

משפט 1.6. נניח ש-$\{\omega\}\in\mathcal{F}$ לכל $\omega\in\Omega$. התנאים הבאים שקולים:

1. $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ הוא מרחב הסתברות בדידה.
2. $\mathbb{P}$ נתמכת על קבוצה בת-מנייה או סופית.
3. לכל מאורע $A\in\mathcal{F}$ מתקיים $\mathbb{P}(A)=\sum_{\omega\in\mathcal{F}}\mathbb{P}(\{\omega\})$.
4. $\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\})=1$.

מסקנה 1.7. אם מרחב המדגם Ω בן-מנייה אז $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ הוא מרחב הסתברות בדידה.

2 מרחבי הסתברות בדידה

טענה 2.1. יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אחידה, לכל לכל $A \in \mathcal{F}$ מתקיים $\mathbb{P}_p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

מסקנה 2.2. מרחב המדגם של מרחב הסתברות אחידה הוא סופי.

טענה 2.3. יהיו $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ מרחבי הסתברות בדידה, ויהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב המכפלה שלהם. לכל $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{F}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}_k(A_k)$$