היסודות לאוקלידס - ספר ראשון

תורגם מיוונית לאנגלית על ידי ריצ'רד פיצפטריק.
תורגם מאנגלית לעברית על ידי שריה אנסבכר.
מפורסם תחת רישיון CC BY-NC-SA 4.0.

תוכן העניינים

הקדמות 4
מתוך הקדמת המתרגם לאנגלית - Richard Fitzpatrick 4
אודות התרגום - מיוונית לאנגלית, ומאנגלית לעברית 4

הגדרות 5

הנחות יסוד ומוסכמות מקובלות 6
הנחות יסוד 6
מוסכמות מקובלות 6

משפט 1 6

משפט 2 7

משפט 3 8

הקדמות

מתוך הקדמת המתרגם לאנגלית - Richard Fitzpatrick

ה"יסודות" של אוקלידס הוא ללא ספק היצירה המתמטית המפורסמת ביותר של העת העתיקה הקלאסית, והוא ראוי לכבוד בהיותו ספר הלימוד המתמטי העתיק ביותר בעולם שנמצא בשימוש רציף. מעט ידוע על המחבר, מעבר לעובדה שהוא חי באלכסנדריה בסביבות שנת 300 לפנה"ס. הנושאים העיקריים של היצירה הם גאומטריה, פרופורציה ותורת המספרים.

מרבית המשפטים המופיעים ב"יסודות" לא התגלו ע"י המחבר, אלא הם פרי עבודתם של מתמטיקאים יוונים קדומים יותר כגון: פיתגורס (והאסכולה שלו), היפוקרטס מכיוס, תאיטטוס מאתונה ואאודוקסוס מקנידוס. עם זאת, אוקלידס זוכה בדרך כלל להכרה על סידור המשפטים באופן לוגי המראה (יש להודות, לא תמיד בקפדנות הנדרשת ע"י המתמטיקה המודרנית) שהם נובעים בהכרח מחמש אקסיומות פשוטות. אוקלידס זוכה גם להכרה על פיתוח מספר הוכחות מחוכמות למשפטים התגלו זה מכבר, כגון משפט 48 בספר הראשון.

הבנייות הגאומטריות שבהן עוסק ה"יסודות" מוגבלות לאלו שניתן להשיג באמצעות סרגל ומחוגה. יתרה מזאת, הוכחות באמצעות מדידה אסורות בהחלט: כלומר כל השוואה בין שני גדלים מוגבלת לאמירה שהגדלים שווים, או שהאחד גדול מהאחר.

ה"יסודות" מורכב משלושה-עשר ספרים. הספר הראשון מתאר את המשפטים הבסיסיים של גאומטריית המישור, כולל שלושת המקרים שבהם משולשים חופפים, משפטים שונים המערבים ישרים מקבילים, המשפט בנוגע לסכום זוויות במשולש, ומשפט פיתגורס. הספר השני נחשב בדרך כלל לעוסק ב"אלגברה גאומטרית", מכיוון שלרוב המשפטים הכלולים בו יש משמעויות אלגבריות פשוטות. הספר השלישי חוקר מעגלים ותכונותיהם, וכולל משפטים על משיקים וזוויות היקפיות. הספר הרביעי עוסק במצולעים משוכללים החסומים במעגלים, או חוסמים מעגלים. הספר החמישי מפתח את התורה האריתמטית של פרופורציה. הספר השישי מיישם את את תורת הפרופורציה על גאומטריית המישור ומכיל משפטים על צורות דומות. הספר השביעי עוסק בתורת המספרים האלמנטרית: מספרים ראשוניים, המכנה המשותף הקטן ביותר וכדומה. הספר השמיני עוסק בסדרות הנדסיות. הספר התשיעי מכיל יישומים שונים של תוצאות משני הספרים הקודמים, וכולל משפטים על קיום אין-סוף מספרים ראשוניים, כמו גם על סכום של סדרה הנדסית. הספר העשירי מנסה לסווג גדלים חסרי מידה משותפת (כלומר אי-רציונליים) באמצעות מה שמכונה "שיטת המיצוי", הקדמה עתיקה לאינטגרציה. הספר האחד-עשר עוסק במשפטים בסיסיים של גאומטריה תלת-ממדית. הספר השנים-עשר מחשב את הנפחים היחסיים של חרוטים, פירמידות, גלילים וכדורים, תוך שימוש בשיטת המיצוי. לבסוף, הספר השלושה-עשר חוקר את חמשת הגופים האפלטוניים.

אודות התרגום - מיוונית לאנגלית, ומאנגלית לעברית

ה"יסודות" נכתב במקור ביוונית על ידי אוקלידס בסביבות שנת 300 לפני הספירה. יותר מאלפיים שנה לאחר מכן, נערך המקור היווני על ידי יוהאן לודוויג הייברג (Johan Ludvig Heiberg) והיינריך מנגה. בשנת 1908 פורסם תרגום של ה"יסודות" לאנגלית שכתב תומס היתˈ (Heath Thomas)[1], ועליו התבסס ריצˈרד פיצפטריק (Richard Fitzpatrick) בתרגום לאנגלית מודרנית שהוצא לאור בשנת 2007 ותיקן בשנת 2008 (מסת"ב 978-0-6151-7984-1). תרגום זה, יחד עם המקור היווני כפי שנערך על ידי הייברג, מפורסם גם באתר של פיצפטריק בכתובת https://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf.

נכון לזמן כתיבת שורות אלה, לא קיים תרגום של ה"יסודות" לעברית מודרנית. כחובב גאומטריה מושבע הדבר חרה לי מאוד, וכך, נאמן לפתגם "קריינא דאיגרתא איהו ליהווי פרוונקא"[2], החלטתי לכתוב תרגום כזה בעצמי. מכיוון שאיני יודע יוונית ביקשתי מריצˈרד פצפטריק להשתמש בתרגום שלו לאנגלית, והוא נענה לי בשמחה. כעת עמדה בפניי הדילמה האלמותית של כל המתרגמים: עד כמה "להיצמד" לטקסט המקורי ועד כמה להתאימו לשפת הקורא. בעצתו של חברי הטוב, אריאל גלפרין, החלטתי לתרגם באופן חופשי מאוד, מתוך הבנה שאם אצמד לניסוח המקורי אחטא למטרה הראשית של התרגום שהיא להיות מובן לקורא המודרני. בנוסף, איני מתרגם מקצועי, כך שמן הסתם לא אצליח להיצמד לנוסח המקורי כראוי (אפילו אם אנסה), מה גם שבכל מקרה מדובר בתרגום של תרגום. יתרון נוסף לתרגום חופשי הוא שהוא דורש זמן מועט יותר, שהרי אינו נצרך לבחירת הנוסח המדויק, וכך יקל עליי להשלים את המשימה.

שריה אנסבכר, יוני 2025

[1] אין זה התרגום הראשון לאנגלית אך הוא מעניין אותנו בגלל ההמשך.

[2] פתגם ארמי שתרגומו המילולי הוא "קריין האיגרת הוא יהיה השליח", ובעברית פשוטה: "אתה רוצה שדבר מה יקרה? אל תחכה לאחרים, אלא עשה אותו בעצמך!".

הגדרות

1. נקודה היא דבר שאינו ניתן לחלוקה לחלקים קטנים יותר.
2. קו הוא דבר מה חד-ממדי - בעל אורך, אך חסר רוחב[3].
3. הקצוות של קו הם נקודות.
4. קו ישר או קטע, הוא קו **סימטרי בין הנקודות שקצותיו**[4].
5. משטח הוא צורה דו-ממדית - בעל אורך ורוחב בלבד (אך חסר גובה).
6. הקצוות של משטח הם קווים.
7. משטח מישורי הוא משטח **סימטרי בין הקווים שבקצותיו**.[5]
8. הנטייה בין שני קווים, הנמצאים על אותו מישור ונפגשים בנקודה אחת, אשר אינם נמצאים בקו ישר, תיקרא זווית מישורית.
9. זווית ישרת-קווים (או סתם זווית) היא הנטייה שבין שני קווים ישרים הנפגשים בנקודה אחת.
10. זווית ישרה היא הזווית הנוצרת בין שני קווים ישרים, כאשר אחד מהם "עומד" על האחר ונוצרות שתי זוויות צמודות שוות.
11. זווית קהה היא זווית גדולה מזווית ישרה.
12. זווית חדה היא זווית קטנה מזווית ישרה.
13. שפה היא קצה של משהו (בין אם הוא קו שאז מדובר בנקודה, ובין אם הוא משטח שאז מדובר בקו).
14. צורה היא מה שנתחם ע"י שפה אחת או כמה שפות, אם היא משטח מישורי נקרא לה גם צורה מישורית.
15. עיגול הוא צורה מישורית המוקפת על ידי קו אחד (הנקרא מעגל), כך שקיימת נקודה בתוך העיגול, המקיימת שהקווים הישרים היוצאים ממנה אל הנקודות שעל המעגל שווים זה לזה (באורכם). כל קו ישר כזה ייקרא רדיוס.
16. הנקודה בתוך העיגול, שהקווים הישרים היוצאים ממנה אל הנקודות שעל המעגל שווים זה לזה, נקראת מרכז העיגול / המעגל.
17. קוטר של עיגול/מעגל הוא קטע הועבר דרך מרכז העיגול/מעגל, וקצותיו על המעגל. כל קוטר חוצה את המעגל לשני חלקים שווים.[6]†
18. חצי-עיגול הוא הצורה המוקפת על ידי קוטר וחצי המעגל הנחתך על ידו. מרכז חצי-העיגול הוא מרכז העיגול המתאים.
19. מצולעים הם צורות מישוריות המוקפות על ידי קווים ישרים הנקראים צלעות. מצולעים המוקפים על ידי שלוש צלעות נקראים משולשים (ביחיד: משולש), ואלו המוקפים על ידי ארבע צלעות נקראים מרובעים (ביחיד: מרובע).
20. **משולשים על פי צלעות**
    - משולש שווה-צלעות הוא משולש בעל שלוש צלעות שוות.
    - משולש שווה-שוקיים הוא משולש בעל שתי צלעות שוות, ושתיים בלבד.
    - משולש שונה-צלעות הוא משולש בעל צלעות שונות זו מזו.
21. **משולשים על פי זוויות**
    - משולש ישר-זווית הוא משולש שאחת מזוויותיו ישרה.
    - משולש קהה-זווית הוא משולש שאחת מזוויותיו קהה.
    - משולש חד-זווית הוא משולש ששלוש זוויותיו חדות.
22. **מרובעים על פי צלעות וזוויות**
    - ריבוע הוא מרובע ישר-זוויות ושווה-צלעות (כלומר שכל זוויותיו ישרות וכל צלעותיו שוות זו לזו).
    - מלבן הוא מרובע ישר זוויות שאינו שווה-צלעות.
    - מעוין הוא מרובע שווה-צלעות שאינו ישר-זוויות.
    - מקבילית היא מרובע בעל שני זוגות של צלעות נגדיות שוות, ושני זוגות של זוויות נגדיות שוות.
23. קווים מקבילים הם קווים ישרים הנמצאים באותו מישור, שגם אם נאריך אותם כקווים ישרים כמה שנרצה - לא ייפגשו לעולם.

---

[3] לאו דווקא קו ישר, לדוגמה: גם מעגל הוא נחשבת קו. כל ההערות הן משל המתרגם לעברית, מלבד אלו המסומנות בדקר (†) השייכות למתרגם לאנגלית.
[4] הסימטריה היא מה שגורם לקו להיות ישר - אם ייטה לאחד הצדדים כבר לא יהיה סימטרי.
[5] גם כאן הסימטריה היא זו המחייבת את המשטח להיות מישורי.
[6] למעשה יש להתייחס לזה כהנחת יסוד, ולא כחלק מהגדרה.

הנחות יסוד ומוסכמות מקובלות

הנחות יסוד

1. בין כל שתי נקודות שונות ניתן לשרטט קו ישר (קטע).
2. בהינתן קו ישר (קטע), ניתן להאריכו לשני הכיוונים ללא הגבלה, תוך שמירה על היותו קו ישר.
3. בהינתן קטע, ניתן לשרטט מעגל שמרכזו באחת מקצותיו והקטע הוא רדיוס שלו.
4. כל הזוויות הישרות שוות זו לזו[7].
5. אם קו ישר חותך שני שווים ישרים אחרים, כך שבאחד מצדדיו סכום שתי הזוויות הפנימיות קטן מסכום שתי זוויות ישרות, אז אם נאריך את שני הקווים די הצורך - ייפגשו בנקודה הנמצאת באותו צד של הישר הראשון.

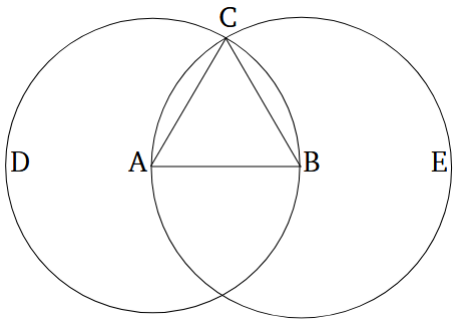
מוסכמות מקובלות

1. שני דברים השווים לאותו דבר שווים גם זה לזה.
2. אם דברים שווים נוספים לדברים שווים אז הסכומים שווים.
3. אם דברים שווים מופחתים מדברים שווים אז ההפרשים שווים.
4. דברים החופפים זה לזה גם שווים זה לזה.
5. כל דבר גדול מכל חלק שלו.

משפט 1

נתונות שתי נקודות שונות A ו-B.

בעיה: לבנות משולש שווה-צלעות שאחת מצלעותיו היא הקטע AB.



יהי S_1 מעגל בעל מרכז A ורדיוס AB (הנחה 3).
יהי S_2 מעגל בעל מרכז B ורדיוס BA (הנחה 3).
תהא C נקודת חיתוך של המעגלים S_1 ו-S_2[8].
הנקודה C נמצאת על המעגל S_1, מכאן שהקטע AC שווה לקטע AB (הגדרה 15).
הנקודה C נמצאת על המעגל S_2, מכאן שהקטע BC שווה לקטע AB (הגדרה 15).
הקטעים AC ו-BC שווים לקטע AB ולכן שווים גם זה לזה (מוסכמה 1).
אם כן המשולש $\triangle ABC$ הוא משולש שווה-צלעות שאחת מצלעותיו היא הקטע AB.

---

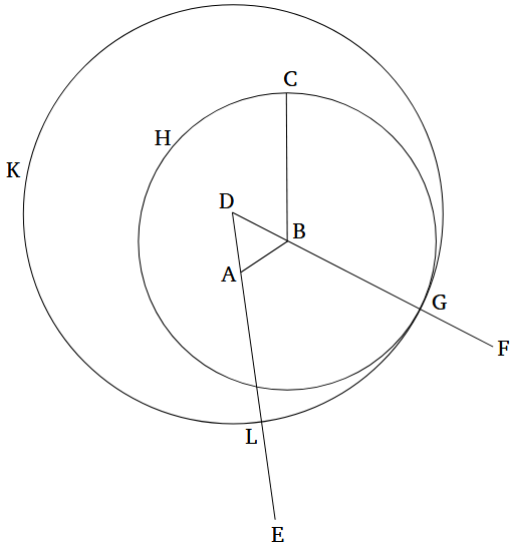
[7] אין זו הנחה טריוויאלית מפני שכזכור (הגדרה 10) זווית ישרה לא הוגדרה כחצי מזווית שטוחה, אלא כזווית הנוצרת בין קו ישר ה"עומד" על קו ישר אחר, כך שהוא יוצר שתי זוויות צמודות שוות. אף אחד אינו מבטיח לנו שכאשר שני קווים ישרים עומדים על שני קווים ישרים אחרים (כל אחד על קו אחד) מתקיים שהזוויות הנוצרות בשני המקרים שוות זו לזו.

[8] הקיום של C אינו נובע מהנחות היסוד, והוא צריך לנבוע מהנחת יסוד נוספת. ניסוח אפשרי של הנחת היסוד הזו: שני מעגלים שהמרחק בין המרכזים שלהם אינו גדול ממש מסכום הרדיוסים שלהם, נחתכים לפחות בנקודה אחת.

משפט 2

נתונה נקודה A, ונתון קטע BC.

בעיה: לבנות קטע באורך של BC שאחד מקצותיו הוא הנקודה A.



נשרטט את הקטע AB (הנחה 1)[9].

יהי $\triangle ABD$ משולש שווה-צלעות שהקטע AB הוא אחת מצלעותיו (משפט 1).

יהיו AE ו-BF קווים ישרים הנוצרים מהארכת הקטעים DA ו-DB בהתאמה (הנחה 2).

יהי S_1 מעגל בעל מרכז B ורדיוס BC (הנחה 3).

איור: נסמן ב-G נקודה שבה המעגל S_1 חותך את הקטע BF[10]. [11]

יהי S_2 מעגל בעל מרכז D ורדיוס DG (הנחה 3).

איור: נסמן ב-L נקודה שבה המעגל S_2 חותך את הקטע AE[12].

מהעובדה ש-B היא מרכז המעגל S_1 נובע שהקטע BC שווה לקטע BG (הגדרה 15).

כמו כן, מהעובדה ש-D היא מרכז המעגל S_2 נובע שהקטע DL שווה לקטע DG (הגדרה 15).

בתוך שני אלה הקטעים DA ו-DB שווים זה לזה ($\triangle ABD$ הוא משולש שווה-צלעות), ולכן אם נפחית מ-DL את DA ומ-DG את DB נקבל קטעים שווים (מוסכמה 3); כלומר הקטע AL שווה לקטע BG.

הקטעים AL ו-BC שווים שניהם לקטע BG ולכן גם שווים זה לזה, אם כן AL הוא קטע המקיים את המבוקש.

---

[9] אוקלידס מניח כאן במובלע שהנקודות A ו-B שונות, הנחה זו אינה בעייתית משום שאם הן זהות הרי שהקטע BC עונה על המבוקש.

[10] הקיום של G אינו נובע מהנחות היסוד, והוא צריך לנבוע מהנחת יסוד נוספת. ניסוח אפשרי של הנחת היסוד הזו: בהינתן קטע ומעגל שמרכזו באחד מקצות הקטע, אם רדיוס המעגל קצר מאורך הקטע אז המעגל חותך את הקטע. במקרה שלנו העובדה שניתן להאריך את הקטע DB ללא הגבלה מאפשרת לנו לבחור את הנקודה F כך ש-BF ארוך מ-BC (שהוא הרדיוס של S_1), ולכן על פי הנחת היסוד החדשה המעגל S_1 חותך את הקטע BF.

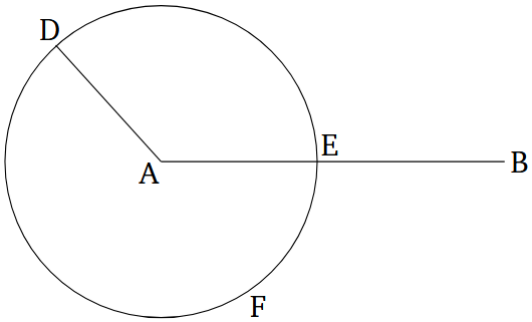
[11] משפט זה אינו חלק מהטקס המקורי שבו הנקודה G הוגדרה על ידי האיור שלעיל, אלא הוא תוספת של המתרגם לעברית. וכן להלן, בכל פעם כשמופיעה ההקדמה המודגשת "**איור:**" מדובר בתוספת של המתרגם.

[12] ראה הערה קודמת.

משפט 3

נתונים קטע AB וקטע C כך ש-AB גדול מ-C.

בעיה: לחתוך מהקטע AB קטע בגודל של C.



יהי AD קטע באורך של הקטע C (משפט 2).

ויהי S מעגל בעל מרכז A ורדיוס AD (הנחה 3).

איור: נסמן ב-E נקודה שבה המעגל S חותך את הקטע AB (ראה הערה 10).

מכיוון שהנקודה A היא מרכז המעגל S, AE שווה ל-AD (הגדרה 15).

אבל, C גם הוא שווה ל-AD, ולכן AE שווה ל-C (מוסכמה 1), אם כן AE עונה על המבוקש.