המספרים המרוכבים

1 בניית שדה המספרים המרוכבים

1.1 הגדרות

♣ ראינו בהקדמה את המוטיבציה והאינטואיציה שמאחורי המספרים המרוכבים, כעת נבנה את שדה המספרים המרוכבים באופן פורמלי.

♣ כפי שראינו בהקדמה אנחנו עומדים לקבל ש-$\mathbb{C} = \{x + y \cdot i \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, מבחינה פורמלית אין לביטוי הזה שום משמעות כרגע מפני שעוד לא הגדרנו חיבור וכפל על $\mathbb{C}$ אך מבחינה אינטואיטיבית הוא אומר לנו המון: כל מספר מרוכב ניתן להצגה באופן יחיד ע"י שתי "קואורדינטות" ממשיות ולכן בעצם כל מספר מרוכב ניתן להצגה באופן יחיד כנקודה במישור (כשאנו מדברים עליו בהקשר של המרוכבים נקרא לו המישור המרוכב).

סימון: נסמן $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ ונקרא ל-$\mathbb{C}$ קבוצת המספרים המרוכבים, לאחר שנגדיר עליה פעולות חיבור וכפל ונוכיח שאכן מדובר בשדה נקרא ל-$\mathbb{C}$ שדה המספרים המרוכבים.

סימון: נסמן $0_{\mathbb{C}} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $1_{\mathbb{C}} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ו- $i := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

♣ אנחנו רוצים שיתקיים $(x, y) = x \cdot 1_{\mathbb{C}} + y \cdot i$ וכבר ראינו בהקדמה כיצד עלינו להגדיר את החיבור והכפל של מספרים מרוכבים אם רצוננו ש-$\mathbb{C}$ יהיה שדה ושיתקיים $i^2 = -1_{\mathbb{C}}$.

הגדרה 1.1. חיבור וכפל של מספרים מרוכבים
תהיינה $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ פעולת החיבור ו-$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ פעולת הכפל של המספרים המרוכבים המוגדרות ע"י (לכל $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$):

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix} = (a + c) \cdot 1_{\mathbb{C}} + (b + d) \cdot i$$
$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{bmatrix} = (ac - bd) \cdot 1_{\mathbb{C}} + (ad + bc) \cdot i$$

♣ נשים לב לכך שפעולת החיבור היא בעצם פעולת החיבור הווקטורי של $\mathbb{R}^2$ ושעבור מספר ממשי $(a, 0)$ הכפל הוא ממש הכפל בסקלר של $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot c - 0 \cdot d \\ a \cdot d + 0 \cdot c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ ad \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

♣ מההערה הקודמת נובע שהחיבור ב-$\mathbb{C}$ מקיים את חוקי החילוף והקיבוץ, שיש לו איבר אדיש שהוא $0_{\mathbb{C}}$ הנ"ל ושלכל איבר ב-$\mathbb{C}$ יש איבר נגדי, בנוסף ניתן לראות מההערה הקודמת ש-$1_{\mathbb{C}}$ הנ"ל הוא האיבר האדיש לכפל ב-$\mathbb{C}$; א"כ על מנת להוכיח ש-$\mathbb{C}$ הוא אכן שדה (עם פעולות החיבור והכפל הללו) עלינו להראות שהכפל שהוגדר לעיל מקיים את חוקי החילוף והקיבוץ, שלכל איבר יש איבר הופכי ושהוא מקיים את חוק הפילוג ביחס לחיבור.

♣ מכיוון ש-$1_{\mathbb{C}}$ הנ"ל הוא האיבר האדיש לכפל נוכל לכתוב מעתה $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x + y \cdot i$ לכל $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}$.

♣ ניתן לשים לב כבר עכשיו שהגדרה שקולה לכפל ב-$\mathbb{C}$ היא:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot c + (-b) \cdot d \\ b \cdot c + a \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{bmatrix}$$

כלומר הכפל ב-$\mathbb{C}$ שקול לכפל במטריצה.

♣ מההערה הקודמת נובע שהכפל ב-$\mathbb{C}$ מקיים את חוק הקיבוץ מפני שכפל מטריצות מקיים אותו, ומאותה סיבה נובע שהוא מקיים את חוק הפילוג ביחס לחיבור.
ניתן להסיק מהערה זו הרבה יותר: נשים לב שהמטריצה המתאימה לכפל היא מטריצת סיבוב ומתיחה, מכאן שפעולת הכפל מקיימת את חוק החילוף ולכל איבר שונה מ-$0_{\mathbb{C}}$ יש איבר הופכי[1] אך בכך הקדמנו את המאוחר.

טענה. $\mathbb{C}$ הוא שדה עם פעולות החיבור והכפל שהגדרנו.

♣ בקובץ ההוכחות מופיעה הוכחה שהכפל אכן מקיים את כל הדרוש ממנו גם מבלי להסתמך על השקילות שלו לכפל מטריצות.

♣ כעת נוכל להשתמש על $\mathbb{C}$ בכל מה שאנחנו כבר יודעים על שדות (ראו את הקובץ "על שדות").

הגדרה 1.2. יהי $z := x + yi \in \mathbb{C}$, x ייקרא <u>החלק הממשי</u> של z ויסומן ב-$\mathrm{Re}(z)$ או ב-y ייקרא <u>החלק המדומה</u> של z ויסומן ב-$\mathrm{Im}(z)$ או ב-$\mathrm{Im}(z)$[2].

♣ נשים לב לכך שהחלק המדומה הוא מספר ממשי.

הגדרה 1.3. מספר $z \in \mathbb{C}$ ייקרא <u>מספר מדומה</u> או <u>מספר דמיוני</u> אם החלק הממשי שלו הוא 0, כמו כן מספר $z \in \mathbb{C}$ יקרא <u>מספר ממשי</u> אם החלק המדומה שלו הוא 0 ואז נזהה אותו עם החלק הממשי שלו[3] (א"כ $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$).

♣ בפרט $0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{R}}$ ו-$1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{R}}$.

♣ כמו כן נוכל לכתוב "$x \leq y$" או "$x < y$" עבור שני מספרים ממשיים למרות שאי אפשר להגדיר על המרוכבים מבנה של שדה סדור, מאותה סיבה לסימון $\sqrt{z}$ אין שום משמעות במרוכבים ולמרות זאת נכתוב אותו וניתן לו את משמעותו הרגילה כשמדובר במספר ממשי.

הגדרה 1.4. כל מספר $z \in \mathbb{C}$[4] ייקרא <u>מספר מרוכב</u> וכמו כן $\mathbb{C}$, יחד עם פעולות החיבור והכפל שהוגדרו לעיל, יקרא <u>שדה המספרים המרוכבים</u>.

---

[1] כי מטריצת סיבוב ומתיחה היא תמיד מטריצה הפיכה אלא אם היא מטריצת האפס.
[2] אותם x ו-y הם יחידים משום ש-$1_{\mathbb{C}}$ ו-i מהווים את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$.
[3] רוצה לומר שבגלל האיזומורפיזם הברור בין $\mathbb{R}$ ל-$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} = \{x + y \cdot i \in \mathbb{C} \mid y = 0\}$ נזהה את $\mathbb{R}$ עם קבוצה זו (שתיקרא <u>המספרים הממשיים</u>), ונזהה כל איבר בקבוצה זו עם החלק הממשי שלו בגלל איזומורפיזם זה.
[4] בין אם הוא מספר מדומה, מספר ממשי או לא זה ולא זה.

♣ בקובץ ההוכחות נראה שההופכי של מספר $0 \neq x+yi \in \mathbb{C}$ הוא:

$$\frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}$$

עובדה זו נותנת לנו מוטיבציה לתת שם ליחס שבין $x+yi$ ל-$x-yi$.

הגדרה 1.5. יהי $z := x+yi \in \mathbb{C}$, <u>הצמוד המרוכב</u> של z הוא $\overline{z} := x-yi$, כלומר זהו המספר המקיים $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ ו-$\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.

♣ מבחינה גאומטרית הצמדה היא פשוט שיקוף סביב ציר ה-x במישור המרוכב.

♣ הצמוד המרוכב הוגדר גם עבור 0: מתקיים $\overline{0} = 0$.

מסקנה 1.6. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיימים ארבעת הפסוקים הבאים:

1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$.
3. $z - \overline{z} = 2i \cdot \mathrm{Im}(z)$.
4. $z = \overline{z}$ אם"ם $z \in \mathbb{R}$.

♣ העובדה ש-$\mathbb{C}$ הוא בעצם $\mathbb{R}^2$ שהוגדרו עליו פעולות חיבור וכפל מאפשרת לנו להשתמש במשפט פיתגורס ולהגדיר את הערך המוחלט של מספר מרוכב ע"י המרחק הגאומטרי שלו מראשית הצירים.

הגדרה 1.7. יהי $z := x+yi \in \mathbb{C}$, <u>הערך המוחלט</u> של z הוא $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$.

♣ נשים לב לכך שהערך המוחלט של מספר מרוכב הוא מספר **ממשי**.

מסקנה 1.8. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $0 \leq |z|$ (הערך המוחלט אי-שלילי) ובנוסף $|z| = 0$ אם"ם $z = 0$.

מסקנה 1.9. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.

1.2 התחלה

טענה 1.10. $\mathbb{C}$ הוא שדה עם פעולות החיבור והכפל שהגדרנו.

הוכחה. יהיו $a+bi, c+di, e+fi \in \mathbb{C}$, נוכיח שהכפל שהוגדר בקובץ ההגדרות מקיים את חוקי החילוף והקיבוץ, שלכל איבר יש איבר הופכי ושהוא מקיים את חוק הפילוג ביחס לחיבור, את הסיבות לכך ש-$\mathbb{C}$ מקיים את שאר אקסיומות השדה כבר ראינו בקובץ ההגדרות.

לאורך כל ההוכחה נזכור שהחיבור והכפל של a,b,c,d,e,f הם חיבור וכפל ב-$\mathbb{R}$ ולכן קומוטטיביים, אסוציאטיביים ודיסטריבוטיביים (הכפל דיסטריבוטיבי ביחס לחיבור).

- מהגדרה מתקיים:

$$\begin{aligned}(a+bi)\cdot(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)\cdot i\\ &= (ca-db)+(da+cb)\cdot i = (c+di)\cdot(a+bi)\end{aligned}$$

ולכן הכפל מקיים את חוק החילוף.

- מהגדרה מתקיים:

$$\begin{aligned}((a+bi)\cdot(c+di))\cdot(e+fi) &= ((ac-bd)+(ad+bc)\cdot i)\cdot(e+fi)\\ &= ((ac-bd)+(ad+bc)\cdot i)\cdot(e+fi)\\ &= ((ac-bd)\cdot e-(ad+bc)\cdot f)+((ac-bd)\cdot f+(ad+bc)\cdot e)\cdot i\\ &= (ace-bde-adf+bcf)+(acf-bdf+ade+bce)\cdot i\\ &= (ace-bde-adf+bcf)+(acf-bdf+ade+bce)\cdot i\\ &= (a\cdot(ce-df)-b\cdot(cf+de))+(a\cdot(cf+de)+b\cdot(ce-df))\cdot i\\ &= (a+bi)\cdot((ce-df)+(cf+de)\cdot i)\\ &= (a+bi)\cdot((ce-df)+(cf+de)\cdot i)\\ &= (a+bi)\cdot((c+di)\cdot(e+fi))\end{aligned}$$

ולכן הכפל מקיים את חוק הקיבוץ.

- מהגדרה מתקיים:

$$\begin{aligned}(a+bi)\cdot((c+di)+(e+fi)) &= (a+bi)\cdot((c+e)+(d+f)\cdot i)\\ &= (a+bi)\cdot((c+e)+(d+f)\cdot i)\\ &= (a\cdot(c+e)-b\cdot(d+f))+(a\cdot(d+f)+b\cdot(c+e))\cdot i\\ &= ac+ae-bd-bf+ad\cdot i+af\cdot i+bc\cdot i+be\cdot i\\ &= ac+ae-bd-bf+ad\cdot i+af\cdot i+bc\cdot i+be\cdot i\\ &= (ac-bd)+(ae-bf)+(ad+bc)\cdot i+(af+be)\cdot i\\ &= ((ac-bd)+(ad+bc)\cdot i)+((ae-bf)+(af+be)\cdot i)\\ &= ((ac-bd)+(ad+bc)\cdot i)+((ae-bf)+(af+be)\cdot i)\\ &= (a+bi)\cdot(c+di)+(a+bi)\cdot(e+fi)\end{aligned}$$

ולכן הכפל מקיים את חוק הפילוג ביחס לחיבור.

- נניח ש-$a+bi\neq 0$, כלומר ש-$(a,b)\neq(0,0)$.

מהגדרה מתקיים:

$$(a+bi)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}\cdot i\right)=(a+bi)\cdot\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right)=\frac{(a+bi)(a-bi)}{a^2+b^2}=\frac{a\cdot a+bi\cdot a+a\cdot(-bi)+bi\cdot(-bi)}{a^2+b^2}$$
$$=\frac{a^2+ab\cdot i+a\cdot(-1)\cdot bi+bi\cdot(-1)\cdot bi}{a^2+b^2}=\frac{a^2+ab\cdot i-ab\cdot i-b^2\cdot i^2}{a^2+b^2}$$
$$=\frac{a^2-b^2\cdot(-1)}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1_{\mathbb{C}}$$

ולכן לכל איבר שונה מ-0 יש הופכי.

■

♣ איך ידענו שדווקא המספר הנ"ל הוא ההופכי המבוקש? כאן בא לעזרתנו טריק הידוע בשם כפל בצמוד, הרעיון הוא כדלהלן.

נחזור לרגע אל הממשיים ונניח שבאמצע הוכחה כלשהי הגענו לביטוי מהצורה ($c>0$):

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}}$$

אנחנו אומרים לעצמנו "אוי ואבוי, שורש וחיבור לא עובדים טוב ביחד... איך נפשט את הביטוי הזה???[5] הלוואי שזה היה $b\cdot\sqrt{c}$!"

כעת מגיע המורה או חבר שכבר מכיר את הטריק, נוטל מאיתנו את העיפרון וכותב:

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}}=\frac{a}{b+\sqrt{c}}\cdot\frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}}=\frac{a\cdot(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})}=\frac{a\cdot(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$$

גם כאן נתבקשנו למצוא את $\frac{1}{a+bi}$, והבעיה היא דומה מאד - חיבור של מספר ממשי עם שורש של מספר שלילי הוא ביטוי שקשה לעבוד איתו ואנחנו עדיין לא יודעים לחלק במספר מרוכב.

למזלנו מתקיים $i^2=-1$ ולכן אנחנו יכולים להפוך את המכנה לממשי:

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{a-bi}{a^2-b^2i^2}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

ולחלק במספר ממשי אנחנו כבר יודעים...

[5] הסיבה השכיחה ביותר לכך שנרצה לפשט את הביטוי היא יצירת מכנה משותף עם ביטוי אחר.

1.3 הצמוד המרוכב והערך המוחלט

טענה 1.11. הצמדה היא פעולה כפלית וחיבורית, כלומר לכל $z, w \in \mathbb{C}$ מתקיים $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ ו-$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

הוכחה. יהיו $z := a + bi \in \mathbb{C}$ ו-$w := c + di$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overline{z + w} &= \overline{(a + c) + (b + d)\, i} \\
&= (a + c) - (b + d)\, i \\
&= (a - bi) + (c - di) \\
&= \overline{z} + \overline{w} \\
\Rightarrow \overline{z \cdot w} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)\, i} \\
&= (ac - bd) - (ad + bc)\, i \\
&= (ac - (-b)\,(-d)) + (a \cdot (-d) + (-b) \cdot c)\, i \\
&= (a - bi)\,(c - di) \\
&= \overline{z} \cdot \overline{w}
\end{aligned}$$

■

טענה 1.12. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

הוכחה. יהי $z := x + yi \in \mathbb{C}$, מהגדרה נובע ש-$\overline{z} = x - y \cdot i$.

$$\Rightarrow z \cdot \overline{z} = (x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 \cdot i^2 = x^2 - y^2 \cdot (-1) = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2$$

■

מסקנה 1.13. לכל $0 \neq z \in \mathbb{C}$ מתקיים:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

משפט 1.14. הערך המוחלט הוא נורמה
לכל $z, w \in \mathbb{C}$ מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. חיוביות בהחלט - $0 \leq z$ ובנוסף $|z| = 0$ אם"ם $z = 0$.
2. הומוגניות - $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
3. אי-שוויון המשולש - $|z + w| \leq |z| + |w|$.

הוכחה.

1. את הסעיף הראשון ראינו כבר בקובץ ההגדרות מפני שהוא נובע ישירות מן ההגדרה.
2. לכל $z, w \in \mathbb{C}$ מתקיים:

$$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot (\overline{z \cdot w}) = z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} = z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w} = |z|^2 \cdot |w|^2 = (|z| \cdot |w|)^2$$

וממילא:

$$|z \cdot w| = \sqrt{|z \cdot w|^2} = \sqrt{(|z| \cdot |w|)^2} = |z| \cdot |w|$$

3. לכל $z,w\in\mathbb{C}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}|z+w|^2&=(z+w)\cdot\left(\overline{z+w}\right)=(z+w)\cdot\left(\bar{z}+\bar{w}\right)=z\cdot\bar{z}+z\cdot\bar{w}+\bar{z}\cdot w+w\cdot\bar{w}\\&=|z|^2+z\cdot\bar{w}+\overline{z\cdot\bar{w}}+|w|^2=|z|^2+2\cdot\mathrm{Re}\left(z\cdot\bar{w}\right)+|w|^2\\&\leq|z|^2+2\cdot|z\cdot\bar{w}|+|w|^2=|z|^2+2\cdot|z|\cdot|\bar{w}|+|w|^2\\&=|z|^2+2\cdot|z|\cdot|w|+|w|^2=\left(|z|+|w|\right)^2\end{aligned}$$

■

2 ההצגה הקוטבית

2.1 הגדרות

♣ עד כה הצגנו את המספרים המרוכבים (שהם נקודות במישור המרוכב) בהצגה הקרטזית שלהם, אך בקובץ "על קואורדינטות ומערכות צירים" **(עוד לא נכתב)** ראינו שניתן לאפיין נקודות במישור גם ע"י ההצגה הקוטבית שלהן, כלומר ע"י מרחקן מראשית הצירים והזווית שהן יוצרות עם החלק החיובי של ציר ה-x, א"כ ניתן לדבר גם על ההצגה הקוטבית של המספרים המרוכבים ומכיוון שהגדרנו את הערך המוחלט כך שיהיה זהה למושג האוקלידי של מרחק נוכל לבטא את הרדיוס בהצגה הקוטבית כערך המוחלט של מהספר המרוכב.

הגדרה 2.1. יהי $0\neq z:=x+yi\in\mathbb{C}$, <u>הצגה קוטבית</u> (נקראת גם <u>הצגה פולרית</u>) של z היא ביטוי מהצורה $z=r\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$ כאשר $r:=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ ואילו θ מוגדרת ע"י:

$$\theta:=\begin{cases}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+2\pi k & x>0\\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\pm\pi+2\pi k & x<0\\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k & x=0,\ \ y>0\\ \frac{\pi}{2}+2\pi k & x=0,\ \ y<0\end{cases}$$

עבור $k\in\mathbb{Z}$ כלשהו.

ההצגה הקוטבית של 0 בשדה המרוכבים היא $0\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$ עבור $\theta\in\mathbb{R}$ כלשהי.

♣ מהגדרה $r\geq 0$.

♣ כזכור אין שום בעיה בכך שיש יותר מהצגה קוטבית אחת למספר נתון משום ש-cos ו-sin הן פונקציות מחזוריות שאורך המחזור שלהן הוא 2π והן מוגדרות על כל הישר הממשי, וגם אם אותו מספר הוא 0 אין כאן בעיה משום ש-$0\cdot(\cos\theta_1+i\cdot\sin\theta_1)=0=0\cdot(\cos\theta_2+i\cdot\sin\theta_2)$ לכל $\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$.

♣ כעת ניתן לראות בבירור שהמטריצה המתאימה לכפל במספר מרוכב היא מטריצת מתיחה וסיבוב שכן המטריצה המתאימה ל-$r\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$ היא:

$$r\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\cdot\cos\theta & -r\cdot\sin\theta\\ r\cdot\sin\theta & r\cdot\cos\theta\end{bmatrix}$$

סימון: תהא $\theta\in\mathbb{R}$, נסמן $\mathrm{cis}\left(\theta\right):=\cos\theta+i\cdot\sin\theta$; א"כ ההצגה הקוטבית של מספר מרוכב ניתנת לכתיבה בקצרה ע"י $r\cdot\mathrm{cis}\left(\theta\right)$ כאשר r הוא הערך המוחלט שלו ו-θ מוגדרת כפי שהוגדרה לעיל.

הגדרה 2.2. חזקה במעריך טבעי
יהי $z \in \mathbb{C}$, נגדיר $z^1 := z$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $z^{n+1} := z^n \cdot z$.

הגדרה 2.3. חזקה במעריך שלם
יהי $0 \neq z \in \mathbb{C}$, לכל $m \in \mathbb{Z}$ נגדיר:

$$z^m := \begin{cases} z^m & m > 0 \\ 1 & m = 0 \\ \frac{1}{z^{-m}} & m < 0 \end{cases}$$

♣ נשים לב לכך שמהגדרה, ההופכי של מספר מרוכב הוא בדיוק אותו מספר בחזקת -1 ולכן אין לנו בעיות בסימון (כמובן שזה היה המקור לסימון של הופכי).

♣ ישנה בעייתיות מסוימת בהגדרת השורש ה-n-י של מספר מורכב ($\sqrt[n]{z}$) משום שיש יותר ממספר אחד המקיים את הדרישה $x^n = z$, ובניגוד לממשיים $\mathbb{C}$ אינו שדה סדור ולכן איננו יכולים לדבר על השורש ה"חיובי".

2.2 התחלה

טענה 2.4. יהי $z := r \cdot \text{cis}(\theta) \in \mathbb{C}$, מתקיים:

- $-z = r \cdot \text{cis}(\theta \pm \pi)$
- $\overline{z} = r \cdot \text{cis}(-\theta)$
- אם $z \neq 0$ אז $z^{-1} = r^{-1} \cdot \text{cis}(-\theta)$

הוכחה.

- נשים לב לכך שמתקיים:

$$\begin{aligned} \text{cis}(\theta) + \text{cis}(\theta \pm \pi) &= \cos\theta + i \cdot \sin\theta + \cos(\theta \pm \pi) + i \cdot \sin(\theta \pm \pi) \\ &= \cos\theta + i \cdot \sin\theta - \cos\theta + i \cdot (-\sin\theta) = 0 \end{aligned}$$

ולכן גם:

$$r \cdot \text{cis}(\theta) + r \cdot \text{cis}(\theta \pm \pi) = r \cdot (\text{cis}(\theta) + \text{cis}(\theta \pm \pi)) = r \cdot 0 = 0$$

וממילא:

$$r \cdot \text{cis}(\theta \pm \pi) = -r \cdot \text{cis}(\theta) = -z$$

- מהגדרה מתקיים:

$$\text{cis}(-\theta) = \cos(-\theta) + i \cdot \sin(-\theta) = \cos\theta - i \cdot \sin\theta = \overline{\cos\theta + i \cdot \sin\theta} = \overline{\text{cis}(\theta)}$$

ולכן מהכפליות של פעולת ההצמדה נובע שגם:

$$r \cdot \text{cis}(-\theta) = \overline{r} \cdot \text{cis}(-\theta) = \overline{r} \cdot \overline{\text{cis}(\theta)} = \overline{r \cdot \text{cis}(\theta)} = \overline{z}$$

- נניח ש-$z \neq 0$, ממסקנה 1.13 ומהסעיף הקודם נובע שמתקיים:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{r \cdot \text{cis}(-\theta)}{r^2} = \frac{1}{r} \cdot \text{cis}(-\theta)$$

■

2.3 הקשר לכפל ולהעלאה בחזקה

טענה 2.5. יהיו $z := r_1 \cdot \text{cis}\,(\theta_1) \in \mathbb{C}$ ו-$w := r_2 \cdot \text{cis}\,(\theta_2)$, מתקיים:

$$z \cdot w = (r_1 \cdot r_2) \cdot \text{cis}\,(\theta_1 + \theta_2)$$

♣ כלומר מה שכפל במספר מרוכב $r \cdot \text{cis}\,(\theta)$ עושה הוא לסובב כל מספר מרוכב בזווית θ ולמתוח אותו פי r, זה לא אמור להפתיע אותנו משתי סיבות: בראש ובראשונה מפני שזו הייתה האינטואיציה שלנו לכפל כבר בהקדמה, ובנוסף מפני שראינו שכפל במספר מרוכב שקול לכפל במטריצת סיבוב ומתיחה.

♣ ההבנה שבהערה הקודמת גורמת לנו לחלק את המספרים המרוכבים לשלוש קבוצות:

1. מספרים שהרדיוס שלהם **גדול** ממש מ-1 - בנוסף לסיבוב הם **מותחים** את הרדיוס של המספר המורכב, כלומר **מגדילים** אותו ע"י כפל באותו הרדיוס.
   המספרים שבקבוצה זו הם אלו שמחוץ למעגל היחידה במישור המרוכב (לא כולל).
2. מספרים שהרדיוס שלהם **קטן** ממש מ-1 - בנוסף לסיבוב הם **מכווצים** את הרדיוס של המספר המורכב, כלומר **מקטינים** אותו ע"י כפל באותו הרדיוס.
   המספרים שבקבוצה זו הם אלו שבתוך מעגל היחידה במישור המרוכב (לא כולל).
3. מספרים שהרדיוס שלהם **שווה** ל-1 - מבצעים סיבוב בלבד, ללא מתיחה/כיווץ של המספר המרוכב.
   המספרים שבקבוצה זו הם אלו המהווים את מעגל היחידה במישור המרוכב.

♣ החלוקה שבהערה הקודמת נותנת לנו עוד קבוצה מיוחדת ב-$\mathbb{C}$ מלבד הממשיים והמדומים - הקבוצה החדשה היא מעגל היחידה המרוכב, וכך מבחינה גאומטרית הקבוצות המיוחדות במישור הן הצירים ומעגל היחידה.

הוכחה. מהגדרת הכפל של מספרים מרוכבים ומהזהויות הטריגונומטריות של קוסינוס וסינוס של סכום זוויות[6] נובע כי:

$$\begin{aligned}\text{cis}\,(\theta_1) \cdot \text{cis}\,(\theta_2) &= (\cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2) + i \cdot (\cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) = \text{cis}\,(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$

וממילא:

$$z \cdot w = (r_1 \cdot \text{cis}\,(\theta_1)) \cdot (r_2 \cdot \text{cis}\,(\theta_2)) = (r_1 \cdot r_2) \cdot (\text{cis}\,(\theta_1) \cdot \text{cis}\,(\theta_2)) = (r_1 \cdot r_2) \cdot \text{cis}\,(\theta_1 + \theta_2)$$

■

מסקנה 2.6. יהיו $z := r_1 \cdot \text{cis}\,(\theta_1) \in \mathbb{C}$ ו-$0 \neq w := r_2 \cdot \text{cis}\,(\theta_2)$, מתקיים:

$$\frac{z}{w} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \text{cis}\,(\theta_1 - \theta_2)$$

מסקנה 2.7. משפט דה-מואבר[7]

יהי $0 \neq z := r \cdot \text{cis}\,(\theta) \in \mathbb{C}$, מתקיים (לכל $n \in \mathbb{Z}$):

$$z^n = r^n \cdot \text{cis}\,(n \cdot \theta)$$

♣ כמובן שהנוסחה תקפה גם עבור 0 בחזקה טבעית.

---

[6] לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

[7] ערך בוויקיפדיה: אברהם דה-מואבר

מסקנה 2.8. הוצאת שורש מרוכב באמצעות הצגה קוטבית

יהי $z := r \cdot \operatorname{cis}(\theta) \in \mathbb{C}$ מתקיים (לכל $n \in \mathbb{N}$):

$$\{x \in \mathbb{C} \mid x^n = z\} = \left\{ \sqrt[n]{r} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

♣ כלומר קיימים בדיוק n מספרים מרוכבים המהווים שורש n-י של מספר מרוכב נתון שאינו 0, והם נתונים ע״י הנוסחה:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)$$

עבור $n > k \in \mathbb{N}_0$.

♣ מבחינה גאומטרית השורשים מהווים את קודקודיו של מצולע משוכלל בעל n צלעות, החסום ע״י מעגל שמרכזו בראשית הצירים ואורך הרדיוס שלו הוא $\sqrt[n]{r}$, כאשר אחד מהרדיוסים היוצאים אל הקודקודים יוצר זווית של $\frac{\theta}{n}$ רדיאנים עם החלק החיובי של ציר ה-x.

כדאי להוסיף המחשה.

♣ א״כ השורשים ה-n-יים של מספר ממשי $0 \neq a \in \mathbb{R}$ הם (כאשר $a > 0$):

$$\sqrt[n]{a},\ \sqrt[n]{a} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right),\ \sqrt[n]{a} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{n}\right),\ \sqrt[n]{a} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{6\pi}{n}\right), \ldots,\ \sqrt[n]{a} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

או (כאשר $a < 0$):

$$\sqrt[n]{|a|} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{n}\right),\ \sqrt[n]{|a|} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{n}\right),\ \sqrt[n]{|a|} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{n}\right),\ \sqrt[n]{|a|} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{n}\right), \ldots,\ \sqrt[n]{|a|} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{(2n-1)\pi}{n}\right)$$

♣ בפרט מעניינים אותנו בהקשר זה המספרים הנקראים <u>שורשי היחידה</u> שהם השורשים ה-n-יים של 1, כלומר:

$$\left\{ \sqrt[n]{1} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi k + 0}{n}\right) \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \operatorname{cis}\left(2\pi \cdot \frac{k}{n}\right) \;\middle|\; n > k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

שורשי היחידה יוצרים מצולע משוכלל החסום ע״י מעגל היחידה שאחד מקודקודיו נמצא על החלק החיובי של ציר ה-x והוא 1 עצמו כמובן.

הוכחה. העובדה שלכל $k \in \mathbb{Z}$ מתקיים:

$$\left(\sqrt[n]{r} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi k + \theta}{n}\right)\right)^n = r \cdot \operatorname{cis}(2\pi k + \theta) = r \cdot \operatorname{cis}(\theta)$$

נובעת ישירות ממשפט דה-מואבר.

נוכיח שאין ל-z שורשים נוספים, אם $z = 0$ אז הטענה טריוויאלית (בכל שדה יש ל-0 שורש n-י יחיד והוא 0) ולכן נוכל להניח ש-$z \neq 0$.

יהי $w := \tilde{r} \cdot \operatorname{cis}\left(\tilde{\theta}\right) \in \mathbb{C}$ כך ש-$w^n = z$, ממשפט דה-מואבר נובע שמתקיים:

$$\tilde{r}^n \cdot \operatorname{cis}\left(n \cdot \tilde{\theta}\right) = w^n = z = r \cdot \operatorname{cis}(\theta)$$

שוויון בין שני מספרים מרוכבים בהצגה קוטבית אומר שהרדיוסים שלהם שווים וגם הזוויות שלהם זהות (עד כדי הוספת כפולה של 2π), מכאן שמתקיים $\tilde{r}^n = r$ ו-$n \cdot \tilde{\theta} = \theta + 2\pi k$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ כלשהו.

מהגדרה r ו-$\tilde{r}$ הם מספרים ממשיים חיוביים ולכן מהשורה הקודמת נובע ש-$\tilde{r} = \sqrt[n]{r}$, בנוסף ניתן להסיק מהשורה הקודמת שקיים $k \in \mathbb{Z}$ כך שמתקיים:

$$\tilde{\theta} = \frac{\theta + 2\pi k}{n}$$

כלומר w אכן שייך לקבוצה הנ"ל ולכן מהיותו שרירותי נובע שהיא כוללת את כל השורשים ה-n-יים של z. ■

משפט 2.9. חוקי חזקות

יהיו $0 \neq z, w \in \mathbb{C}$ ו-$n, m \in \mathbb{Z}$, מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. $z^m \cdot z^n = z^{m+n}$
2. $(z^m)^n = z^{m \cdot n}$
3. $(z \cdot w)^n = z^n \cdot w^n$

♣ ההוכחה שראינו באינפי' 1 עבור חוקי חזקות במעריך שלם הסתמכה אך ורק על 9 אקסיומות השדה ולא על 4 האקסיומות הנוספות של שדה סדור ולפיכך היא תקפה גם כאן, מי שזה לא מספיק לו מוזמן להוכיח את חוקי החזקות באמצעות טענה 2.5 ומשפט דה-מואבר.

3 דוגמאות לפתרון משוואות מעל המרוכבים

3.1 הגדרות

אין הגדרות בפרק זה.

דוגמה 3.1. ניתן להוכיח את **הזהויות הטריגונומטריות** של קוסינוס וסינוס של סכום זוויות[8] באמצעות התובנה הבאה:

- כפל במספר מרוכב שקול לכפל במטריצת סיבוב ומתיחה, אם המספר המרוכב נמצא על מעגל היחידה אז הכפל בו שקול למטריצת סיבוב בלבד.
- כפל מטריצות מקיים את חוק הקיבוץ, מכאן נובע שהכפלה במספר מרוכב אחד ואחריה הכפלה במספר מרוכב שני שקולה לכפל במספר המרוכב שהמטריצה המתאימה לו היא המטריצה המתאימה לסיבוב בסכום הזוויות ומתיחה במכפלת הרדיוסים (זהו נימוק **גאומטרי**); אם שני המספרים נמצאים על מעגל היחידה הכפל של שניהם שקול למטריצת הסיבוב בסכום הזוויות המתאימות להם.
- קיימת העתקה חח"ע ועל בין מספרים מרוכבים למטריצות הסיבוב והמתיחה המתאימות להם, מכאן שלכל $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים:
$$\operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{cis}(\theta_1) \cdot \operatorname{cis}(\theta_2)$$
- כל שוויון בין שני מספרים מרוכבים מגדיר שני שוויונות בין מספרים ממשיים, וזאת משום שההצגה הקרטזית של מספר מרוכב היא יחידה ולמעשה היא מהווה זוג סדור של מספרים ממשיים; מסיבה זו ניתן לקחת כל משוואה מעל המרוכבים ולהפוך אותה לשתי משוואות מעל הממשיים.

$$\Rightarrow \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) = (\cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \sin\theta_2)$$
$$\Rightarrow \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) = (\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2) + i \cdot (\cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2)$$

$$\Rightarrow \cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2$$
$$\Rightarrow \sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \cos(\theta_1 \pm \theta_2) &= \cos\theta_1 \cdot \cos(\pm\theta_2) - \sin\theta_1 \cdot \sin(\pm\theta_2) \\
&= \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot (-\sin\theta_2) \\
&= \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \mp \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \\
\Rightarrow \sin(\theta_1 \pm \theta_2) &= \sin\theta_1 \cdot \cos(\pm\theta_2) + \cos\theta_1 \cdot \sin(\pm\theta_2) \\
&= \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \cdot (-\sin\theta_2) \\
&= \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \pm \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2
\end{aligned}$$

---

[8] לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

♣ לכאורה רימיתי כאן, את הנוסחה $\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)=\operatorname{cis}(\theta_1)\cdot\operatorname{cis}(\theta_2)$ אני מכיר מטענה 2.5 ואותה הוכחנו באמצעות הזהויות הטריגונומטריות הנ״ל, זהו נימוק מעגלי!
אז זהו, שלא, הנימוק לכך שצריך להתקיים $\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)=\operatorname{cis}(\theta_1)\cdot\operatorname{cis}(\theta_2)$ הגיע מעולם אחר - מעולם הגאומטריה, שם ברור שלסובב פעם אחת ב-θ_1 רדיאנים ואח״כ לסובב ב-θ_2 רדיאנים שקול לסיבוב ב-$\theta_1+\theta_2$ רדיאנים, ומכיוון שהכפל במספר מרוכב הנמצא על מעגל היחידה שקול לסיבוב המישור השוויון $\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)=\operatorname{cis}(\theta_1)\cdot\operatorname{cis}(\theta_2)$ מוכרח להתקיים משום שאחרת נקבל סתירה למה שידוע לנו מן הגאומטריה.

♣ האמת היא שאין שום צורך במרוכבים בשביל הוכחה זו, ניתן לכתוב את אותה הוכחה בשפה של מטריצות סיבוב (וכך אכן עשינו בליניארית 1 כשעסקנו בהן); הסיבה האמיתית לכך שהבאתי את הדוגמה הזו כאן היא כדי להדגים את הרעיון שכל משוואה בנעלם אחד מעל המרוכבים היא שתי משוואות בשני נעלמים מעל הממשיים.

דוגמה 3.2. אין שום סיבה שפתרון **משוואה ריבועית** מעל המרוכבים יהיה שונה מפתרונה מעל הממשיים, בשני המקרים מדובר בשדות ואנו יודעים להוציא בהם שורש, אין צורך ביותר מזה; לפיכך ניחוש מושכל הוא שהפתרונות למשוואה הריבועית $ax^2+bx+c=0$ כאשר הוא $a,b,c\in\mathbb{C}$ ו-$a\neq 0$ הם:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm d}{2a}$$

כאשר d הוא אחד משני המספרים המרוכבים המקיימים $d^2=b^2-4ac$ (ראינו כבר איך מוצאים d כנ״ל, שני המספרים הללו נגדיים ולכן אין זה משנה איזה מביניהם נבחר).
אין צורך לחזור כאן על כל ההוכחה מן ההתחלה מפני שהיא הסתמכה אך ורק על אקסיומות השדה ועל הקיום של d כנ״ל[9], וכפי שראינו ב-$\mathbb{C}$ בהכרח קיים d כנ״ל ולכן תמיד יש למשוואה ריבועית לפחות פתרון אחד ובנוסף אנחנו יודעים לומר שיש לה פתרון יחיד אם״ם $d=0$ וזה קורה אם״ם $b^2-4ac=0$.

[9] מי שבכל זאת רוצה לחזור על ההוכחה מוזמן לעיין בסופו של הקובץ ״על פתרון משוואות ונוסחת השורשים״.