סדרות של התפלגויות

תורת ההסתברות (1) - חלק רביעי

נכתב ע״י שריה אנסבכר

תוכן העניינים

1 התרחשויות אסימפטוטיות **2**

2 התכנסות סדרות של משתנים מקריים **4**

1 התרחשויות אסימפטוטיות

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

הגדרה 1.1. תהא $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מאורעות.

- המאורע המתאר ש-A_n מתרחשת באופן שכיח / אין-סוף פעמים הוא המאורע:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \left\{\ \omega\in\Omega \ \middle|\ \forall n\in\mathbb{N}\,\exists n\le m\in\mathbb{N}\,\omega\in A_m\ \right\}$$

- המאורע המתאר ש-A_n מתרחשת מקום מסוים ואילך / עבור n גדול דיו / כמעט תמיד הוא המאורע:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \left\{\ \omega\in\Omega \ \middle|\ \exists n\in\mathbb{N}\,\forall n\le m\in\mathbb{N}\,\omega\in A_m\ \right\}$$

♣ אנחנו נראה מייד מדוע נבחרו הסימונים $\limsup_{n\to\infty} A_n$ ו-$\liminf_{n\to\infty} A_n$.

מסקנה 1.2. לכל סדרת מאורעות $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ מתקיים:

$$\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c = \liminf_{n\to\infty}(A_n)^c$$
$$\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right)^c = \limsup_{n\to\infty}(A_n)^c$$

מסקנה 1.3 (הלמה של פאטו[1]).
לכל סדרת מאורעות $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \ge \limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)$$
$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \le \liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)$$

הוכחה.

1. מרציפות פונקציית ההסתברות נובע כי:

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right)$$
$$= \limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \ge \limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהעובדה שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ ולכן גם $\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \ge \mathbb{P}(A_n)$.

2. החלק השני נובע באופן ישיר מהחלק הראשון ומהמסקנה הקודמת (1.2):

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right)^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}(A_n)^c\right)$$
$$\le 1 - \limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\left((A_n)^c\right) = 1 - \limsup_{n\to\infty}\left(1-\mathbb{P}(A_n)\right)$$
$$= 1 - 1 - \limsup_{n\to\infty}\left(-\mathbb{P}(A_n)\right) = -\limsup_{n\to\infty}\left(-\mathbb{P}(A_n)\right)$$
$$= \liminf_{n\to\infty}\left(\mathbb{P}(A_n)\right)$$

■

משפט 1.4. הלמות של בורל-קנטלי[2]
תהא $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מאורעות.

[1] על שם Pierre Fatou.
[2] על שם אמיל בורל ופרנצ'סקו פאולו קנטלי.

1. <u>הלמה הראשונה</u> - אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(A_n\right)$ מתכנס במובן הצר, אז $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=0$.

2. <u>הלמה השנייה</u> - אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(A_n\right)$ מתבדר לאין-סוף, ובנוסף $\left(A_n\right)_{n=1}^{\infty}$ בלתי-תלויה, אז $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=1$.

הוכחה.

1. כפי שראינו בהוכחת **הלמה של פאטו**[3] (בחלק הראשון), מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m\right)$$

ע״פ חסם האיחוד מתקיים (לכל $n\in\mathbb{N}$):

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m\right)\leq\sum_{m=n}^{\infty}\mathbb{P}\left(A_m\right)$$

כעת ניזכר שאם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(A_n\right)$ מתכנס במובן הצר אז מתקיים $\lim_{n\to\infty}\sum_{m=n}^{\infty}\mathbb{P}\left(A_m\right)=0$, כלומר:

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m\right)\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{m=n}^{\infty}\mathbb{P}\left(A_m\right)=0$$

וממילא $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=0$.

2. ממסקנה 1.2, ומרציפות פונקציית ההסתברות, נובע כי:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)&=1-\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty}\left(A_n\right)^c\right)=1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\left(A_m\right)^c\right)\\&=1-\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\left(A_m\right)^c\right)\end{aligned}$$

בנוסף, מהיות $\left(A_n\right)_{n=1}^{\infty}$ בלתי-תלויה נובע שגם $\left(\left(A_n\right)^c\right)_{n=1}^{\infty}$ בלתי-תלויה ולכן (לכל $n\in\mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\left(A_m\right)^c\right)&=\prod_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\left(A_m\right)^c\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\mathbb{P}\left(A_m\right)\right)\\&\leq\exp\left(-\sum_{m=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_m\right)\right)\end{aligned}$$

כאשר האי״ש נובע מהעובדה ש-$1-x\leq e^{-x}$ לכל $x\in\mathbb{R}$. כעת נשים לב שאם $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(A_n\right)=\infty$ אז מרציפות האקספוננט נובע כי:

$$\lim_{n\to\infty}\exp\left(-\sum_{m=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_m\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\exp\left(x\right)=0$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\left(A_m\right)^c\right)=0\\&\Rightarrow\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=1-0=1\end{aligned}$$

■

[3] על שם Pierre Fatou.

2 התכנסות סדרות של משתנים מקריים

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.
תהא $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים מ-Ω ל-$\mathbb{R}$, ויהי $X : \Omega \to \mathbb{R}$ משתנה מקרי נוסף.

הגדרה 2.1.

- נאמר ש-$(X_n)_{n=1}^{\infty}$ <u>מתכנסת</u> ל-X <u>כמעט תמיד</u>, ונסמן $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, אם מתקיים:
$$\mathbb{P}\left(\left\{\ \omega \in \Omega \ \middle|\ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\ \right\}\right) = 1$$
- נאמר ש-$(X_n)_{n=1}^{\infty}$ <u>מתכנסת</u> ל-X <u>בהסתברות</u>, ונסמן $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$, אם לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ מתקיים:
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\ \omega \in \Omega \ \middle|\ |X_n(\omega) - X(\omega)| \le \varepsilon\ \right\}\right) = 1$$
- נאמר ש-$(X_n)_{n=1}^{\infty}$ <u>מתכנסת</u> ל-X <u>בהתפלגות</u>, ונסמן $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$, אם לכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש-F_X רציפה ב-x, מתקיים:
$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

צריך להסביר למה התכנסות בהסתברות והתכנסות כמעט תמיד מוגדרות היטב: מי אמר שהקבוצות הללו אכן שייכות לסיגמא-אלגברה?

♣ יחידות הגבול אינה תקפה כאן!

- אם $X \overset{\text{a.s.}}{=} Y$ אז $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ אס"ם $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$.
- אם $X \overset{\text{a.s.}}{=} Y$[4] אז $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$ אס"ם $X_n \xrightarrow{\text{p}} Y$.
- אם $X \overset{\text{d}}{=} Y$ אז $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ אס"ם $X_n \xrightarrow{\text{d}} Y$.

♣ הגדרת ההתכנסות בהתפלגות - $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ אומרת בדיוק שהסדרה $(F_{X_n})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל-F_X בכל נקודת רציפות של F_X. הסיבה לכך שאנו דורשים זאת רק בנקודות רציפות היא בגלל מקרים כגון סדרת משתנים מקריים $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $X_n \sim \text{Unif}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right)$ לכל $n \in \mathbb{N}$: טבעי לחשוב שסדרה זו מתכנסת בהתפלגות למשתנה הקבוע $X \equiv 0$, אבל $F_{X_n}(0) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ בעוד ש-$F_X(0) = 1$.

למה 2.2. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$, לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים:
$$F_X(a-\varepsilon) - \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \le F_{X_n}(a) \le F_X(a+\varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$$

הוכחה. יהיו $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ו-$n \in \mathbb{N}$, ו-$a \in \mathbb{R}$.
ממונוטוניות פונקציית ההסבתרות נובע כי:
$$\begin{aligned} F_{X_n}(a) &= \mathbb{P}(X_n \le a) = \mathbb{P}(X_n \le a \wedge X \le a+\varepsilon) + \mathbb{P}(X_n \le a \wedge X > a+\varepsilon) \\ &\le \mathbb{P}(X \le a+\varepsilon) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon) = F_X(a+\varepsilon) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon) \end{aligned}$$
ובאותו אופן:
$$\begin{aligned} F_X(a-\varepsilon) &= \mathbb{P}(X \le a-\varepsilon) = \mathbb{P}(X_n \le a \wedge X \le a-\varepsilon) + \mathbb{P}(X_n > a \wedge X \le a-\varepsilon) \\ &\le \mathbb{P}(X_n \le a) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon) = F_{X_n}(a) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon) \\ &\Rightarrow F_X(a-\varepsilon) - \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \le F_{X_n}(a) \end{aligned}$$

■

מסקנה 2.3. אם $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$ אז $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$.

[4] **האם אפשר להחליף כאן את ה"שוויון כמעט תמיד" במושג מקביל (כפי ששוויון כמעט תמיד גורר את השקילות בהתכנסות כמעט-תמיד?**

הוכחה. נניח ש-$X_n \xrightarrow{\text{p}} X$, מכאן ש-$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0$, ולכן ע״פ הלמה האחרונה (2.2) מתקיים:

$$F_X\left(a-\varepsilon\right) \leq \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}\left(a\right) \leq \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}\left(a\right) \leq F_X\left(a+\varepsilon\right)$$

וזאת לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ולכל נקודת רציפות $a \in \mathbb{R}$ של F_X. מכיוון ש-a היא נקודת רציפות של F_X נקבל מהאי-שוויונות הנ״ל שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}\left(a\right) = \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}\left(a\right) = \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}\left(a\right) = F_X\left(a\right)$$

■

טענה 2.4. אם $X : \Omega \to \mathbb{R}$ הוא משתנה מקרי קבוע, ו-$X_n \xrightarrow{\text{d}} X$, אז $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$.

הוכחה. נניח ש-X הוא משתנה מקרי קבוע, ויהי $c \in \mathbb{R}$ אותו קבוע. מהגדרה מתקיים (לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|X_n - c| \leq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(c-\varepsilon \leq X_n \leq c+\varepsilon\right)\\ &= \mathbb{P}\left(X_n \leq c+\varepsilon\right) - \mathbb{P}\left(X_n < c-\varepsilon\right)\\ &\geq \mathbb{P}\left(X_n \leq c+\varepsilon\right) - \mathbb{P}\left(X_n \leq c-\varepsilon\right)\end{aligned}$$

כעת נניח ש-$X_n \xrightarrow{\text{d}} X$, כלומר (לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F_{X_n}\left(c+\varepsilon\right) &= F_X\left(c+\varepsilon\right) = 1\\ \lim_{n\to\infty} F_{X_n}\left(c-\varepsilon\right) &= F_X\left(c-\varepsilon\right) = 0\end{aligned}$$

ולכן גם $\mathbb{P}\left(|X_n - c| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - 0 = 1$, וממילא $\mathbb{P}\left(|X_n - c| \leq \varepsilon\right) = 1$, וזוהי בדיוק ההגדרה של $X_n \xrightarrow{\text{p}} c$. ■

למה 2.5. נסמן $A_n^k := \left\{\omega \in \Omega : |X_n\left(\omega\right) - X\left(\omega\right)| \leq \frac{1}{k}\right\}$ לכל $n, k \in \mathbb{N}$.

- מתקיים $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ אם״ם לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n^k\right) = 1$.
- מתקיים $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ אם״ם לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_n^k\right) = 1$.

הוכחה.

- מתקיים:

$$\left\{\ \omega \in \Omega \ \middle|\ \lim_{n\to\infty} X_n\left(\omega\right) = X\left(\omega\right)\ \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^k$$

כלומר התנאי $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ שקול לכך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^k\right) = \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n^k\right) = 1$$

- העובדה שהתנאי $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ שקול לכך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_n^k\right) = 1$, נובעת כמעט מהגדרה.

■

מסקנה 2.6. אם $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ אז $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$ (וממילא גם $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$).

הוכחה. נניח ש-$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, ע״פ הלמה האחרונה (2.5), מתקיים (לכל $k \in \mathbb{N}$):

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^k\right) = \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n^k\right) = 1$$

ולכן ע״פ **הלמה של פאטו**[5] מתקיים (לכל $k \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}1 = \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n^k\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_n^k\right) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_n^k\right) \leq 1\\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_n^k\right) = 1\end{aligned}$$

[5] על שם Pierre Fatou.

ושוב נקבל מהלמה האחרונה (2.5) ש-$X_n \xrightarrow{\text{d}} X$. ■

משפט 2.7. החוק החלש של המספרים הגדולים

- אם איברי $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ בלתי-מתואמים בזוגות, בעלי שונות סופית זהה, ובעלי תוחלת סופית זהה $\mu \in \mathbb{R}$, אז:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\text{p}} \mu$$

בפרט הדבר מתקיים אם איברי $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ בלתי-מתואמים, שווי-התפלגות, ובעלי שונות סופית.

- אם איברי $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ בלתי-תלויים, שווי-התפלגות, ובעלי תוחלת סופית $\mu \in \mathbb{R}$, אז:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\text{p}} \mu$$

♣ כלומר כאשר חוזרים על ניסוי שוב ושוב ללא תלות בתוצאות הקודמות, ההסתברות שממוצע תוצאות הניסוי יהיה קרוב לתוחלת שואפת ל-1 ככל שחוזרים על הניסוי פעמים רבות יותר.

הוכחה.

- נסמן ב-σ^2 את השונות של איברי $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, מהעובדה שהם בלתי-מותאמים בזוגות נובע שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\text{Var}\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \text{Var}(X_k)}{n^2} = \frac{n \cdot \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

ומלינאריות התוחל נובע כי (לכל $n \in \mathbb{N}$):

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \frac{n \cdot \mu}{n} = \mu$$

מא״ש צ׳בישב נובע כי (לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| > \varepsilon\right) &\leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \\
&\leq \frac{\text{Var}\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| \leq \varepsilon\right) &= 1
\end{aligned}$$

- **לא ראינו את ההוכחה בכיתה**

■

משפט 2.8. החוק החזק של המספרים הגדולים

אם איברי $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ בלתי-תלויים, שווי-התפלגות, בעלי תוחלת סופית $\mu \in \mathbb{R}$, ובנוסף קיים $M \in \mathbb{R}$ כך ש-$|X_n| \overset{\text{a.s.}}{\leq} M$ לכל $n \in \mathbb{N}$; אז מתקיים:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_i \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu$$

הוכחה. **צריך לכתוב הוכחה** ■