טופולוגיה אלגברית

מבוא לטופולוגיה - חלק שני

נכתב ע״י שריה אנסבכר

תוכן העניינים

1 החבורה היסודית **2**

1.1 הומוטופיה 2

1.2 הגדרת החבורה היסודית 2

1.3 תלות החבורה היסודית בנקודת הבסיס 3

2 מרחבים כוויצים ומרחבים פשוטי קשר **4**

3 מרחבי מנה ומרחבי כיסוי **5**

תודתי נתונה לגלעד שרם על הסיכום המצוין שלו, נעזרתי בו רבות בכתיבת הסיכום שלפניכם.

***

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:

אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה

https://math.srayaa.com

1 החבורה היסודית

יהי $(\mathbb{X},\tau)$ מרחב טופולוגי.

1.1 הומוטופיה

הגדרה 1.1. יהי $(\mathbb{Y},\sigma)$ מרחב טפולוגי, ותהיינה $f_0,f_1:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ שתי פונקציות רציפות. נאמר ש-f_0 ו-f_1 הומוטופיות זו לזו, אם קיימת העתקה רציפה $H:[0,1]\times\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ כך שמתקיים $H(0,x)=f_0(x)$ ו-$H(1,x)=f_1(x)$ לכל $x\in\mathbb{X}$; במקרה כזה נאמר ש-H היא הומוטופיה בין f_0 ו-f_1.

מסקנה 1.2. יחס ההומוטופיה הוא יחס שקילות.

סימון: בהינתן שתי פונקציות הומוטופיות $f_0,f_1:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$, והומוטופיה $H:[0,1]\times\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ ביניהן, לכל $t\in[0,1]$ נסמן ב-H_t את הפונקציה המוגדרת ע"י $H_t(x):=H(t,x)$ לכל $x\in\mathbb{X}$.

הגדרה 1.3. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$, ותהיינה $\gamma_0,\gamma_1:[a,b]\to\mathbb{X}$ שתי מסילות[1]. נאמר ש-γ_1 ו-γ_2 הומוטופיות מסילתית, ונסמן $\gamma_1\sim\gamma_2$, אם קיימת הומוטופיה $H:[0,1]\times[a,b]\to\mathbb{X}$ בין γ_1 ל-γ_2 כך שמתקיים $H_t(a)=\gamma_1(a)=\gamma_2(a)$ ו-$H_t(b)=\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$ לכל $t\in[0,1]$.

סימון: לכל $x,y\in\mathbb{X}$ נסמן ב-$\Omega(\mathbb{X},x,y)$ את אוסף המסילות מהצורה $\gamma:[0,1]\to\mathbb{X}$ כך ש-$\gamma(0)=x$ ו-$\gamma(1)=y$, כמו כן נסמן $\Omega(\mathbb{X},x):=\Omega(\mathbb{X},x,x)$ לכל $x\in\mathbb{X}$, ונקרא לאיברי $\Omega(\mathbb{X},x)$ לולאות מבוססות ב-x.

מסקנה 1.4. יחס ההומוטופיה המסילתית הוא יחס שקילות.

הגדרה 1.5. תהיינה $\gamma_1,\gamma_2:[0,1]\to\mathbb{X}$, נאמר ש-$\gamma_2$ מתקבלת מ-γ_1 ע"י רה-פרמטריזציה, אם קיימת מסילה $\psi:[0,1]\to[0,1]$ כך ש-$\gamma_2=\gamma_1\circ\psi$; במקרה כזה ψ כזו תיקרא רה-פרמטריזציה של γ_1.

מסקנה 1.6. תהיינה $\gamma_1,\gamma_2:[0,1]\to\mathbb{X}$, אם γ_2 מתקבלת מ-γ_1 ע"י רה-פרמטריזציה, אז $\gamma_1\sim\gamma_2$.

1.2 הגדרת החבורה היסודית

סימון: לכל $x,y\in\mathbb{X}$ נסמן ב-$\pi_1(\mathbb{X},x,y)$ את אוסף מחלקות השקילות של יחס ההומוטופיה מסילתית, וכמו כן נסמן $\pi_1(\mathbb{X},x):=\pi_1(\mathbb{X},x)$ לכל $x\in\mathbb{X}$.

הגדרה 1.7. יהיו $x,y,z\in\mathbb{X}$, ותהיינה $\gamma_1\in\Omega(\mathbb{X},x,y)$ ו-$\gamma_2\in\Omega(\mathbb{X},y,z)$ שתי מסילות. שרשור המסילות $\gamma_1*\gamma_2$ הוא המסילה המוגדרת ע"י (לכל $t\in[0,1]$):

$$(\gamma_1*\gamma_2)(t):=\begin{cases}\gamma_1(2t) & t\le\frac{1}{2}\\ \gamma_2(2t-1) & t\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

טענה 1.8. יהיו $x,y,z\in\mathbb{X}$, תהיינה $\gamma_1,\tilde{\gamma_2}\in\Omega(\mathbb{X},x,y)$, ותהיינה $\gamma_2,\tilde{\gamma_2}\in\Omega(\mathbb{X},y,z)$. אם $\gamma_1\sim\tilde{\gamma_1}$ וגם $\gamma_2\sim\tilde{\gamma_2}$, אז גם $\gamma_1*\gamma_2\sim\tilde{\gamma_1}*\tilde{\gamma_2}$.

סימון: לכל $x\in\mathbb{X}$, ולכל $\gamma_1,\gamma_2\in\Omega(\mathbb{X},x)$, נסמן $[\gamma_1]\cdot[\gamma_2]:=[\gamma_1*\gamma_2]$; בכך אנו מגדירים פעולה דו-מקומית "$\cdot$" על $\pi_1(\mathbb{X},x)$.

טענה 1.9. לכל $x\in\mathbb{X}$, ולכל $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\in\Omega(\mathbb{X},x)$ מתקיים $([\gamma_1]\cdot[\gamma_2])\cdot[\gamma_3]=[\gamma_1]\cdot([\gamma_2]\cdot[\gamma_3])$.

סימון: לכל $x\in\mathbb{X}$ נסמן ב-c_x את המסילה הקבועה $c_x:[0,1]\to\mathbb{X}$ המוגדרת ע"י $c_x(t):=x$ לכל $t\in[0,1]$; מהגדרה $c_x\in\Omega(\mathbb{X},x)$.

טענה 1.10. לכל $x\in\mathbb{X}$, ולכל $\gamma\in\Omega(\mathbb{X},x)$ מתקיים $[c_x]\cdot[\gamma]=[\gamma]=[\gamma]\cdot[c_x]$.

סימון: לכל מסילה $\gamma:[0,1]\to\mathbb{X}$ נסמן ב-$\bar{\gamma}$ את המסילה $\bar{\gamma}:[0,1]\to\mathbb{X}$ המוגדרת ע"י $\bar{\gamma}(t):=\gamma(1-t)$ לכל $t\in[0,1]$.

טענה 1.11. יהיו $x\in\mathbb{X}$ ו-$\gamma\in\Omega(\mathbb{X},x)$. מתקיים $\bar{\gamma}\in\Omega(\mathbb{X},x)$, וכן $[\bar{\gamma}]\cdot[\gamma]=[c_x]=[\gamma]\cdot[\bar{\gamma}]$.

מסקנה 1.12. השלשה הסדורה $(\pi_1(\mathbb{X},x),\cdot,[c_x])$ היא חבורה.

הגדרה 1.13. החבורה $(\pi_1(\mathbb{X},x),\cdot,[c_x])$ תיקרא החבורה היסודית של $\mathbb{X}$ המבוססת ב-x.

[1] מסילה היא פונקציה **רציפה** מקטע סגור ב-$\mathbb{R}$ למרחב טופולוגי.

1.3 תלות החבורה היסודית בנקודת הבסיס

משפט 1.14. תהיינה $x, y \in \mathbb{X}$, אם קיימת מסילה $\alpha \in \Omega(\mathbb{X}, x, y)$, אז $\pi_1(\mathbb{X}, x) \cong \pi_1(\mathbb{X}, y)$.

הוכחה. האיזומורפיזם הוא הפונקציה $f_\alpha : \pi_1(\mathbb{X}, x) \to \pi_1(\mathbb{X}, y)$ המוגדרת ע"י $f_\alpha([\gamma]) := [\bar{\gamma}] * [\alpha] * [\gamma]$ לכל $\gamma \in \Omega(\mathbb{X}, x)$; כאשר $\alpha \in \Omega(\mathbb{X}, x, y)$. ■

טענה 1.15. יהי $(\mathbb{Y}, \sigma)$ מרחב טופולוגי, יהיו $x \in \mathbb{X}$ ו-$y \in \mathbb{Y}$, ותהא $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ פונקציה רציפה כך ש-$f(x) = y$. הפונקציה $\varphi : \pi_1(\mathbb{X}, x) \to \pi_1(\mathbb{Y}, y)$ המוגדרת ע"י $\varphi([\gamma]) := [f \circ \gamma]$ (לכל $\gamma \in \Omega(\mathbb{X}, x)$) היא הומיאומורפיזם בין חבורות.

מסקנה 1.16. יהי $(\mathbb{Y}, \sigma)$ מרחב טופולוגי הומיאומורפי ל-$(\mathbb{X}, \tau)$. לכל הומיאומורפיזם $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ בין $\mathbb{X}$ ל-$\mathbb{Y}$, ולכל $x \in \mathbb{X}$, מתקיים $\pi_1(\mathbb{X}, x) \cong \pi_2(\mathbb{X}, f(x))$.

2 מרחבים כוויצים ומרחבים פשוטי קשר

יהי $(\mathbb{X},\tau)$ מרחב טופולוגי.

הגדרה 2.1. נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב כוויץ אם קיימים $x_0\in\mathbb{X}$ ופונקציה רציפה $H:[0,1]\times\mathbb{X}\to\mathbb{X}$, כך שמתקיים $H(0,x)=x$ ו-$H(1,x)=x_0$ לכל $x\in\mathbb{X}$.

♣ מבחינה אינטואיטיבית מרחב כוויץ הוא כזה שניתן לכווץ אותו לנקודה אחת מבלי לקרוע אותו או להדביק חלקים שלו זה לזה.

מסקנה 2.2. התנאים הבאים שקולים:

- $(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב כוויץ.
- קיים $x_0\in\mathbb{X}$, כך שפונקציית הזהות $\mathrm{Id}_{\mathbb{X}}$ הומוטופית לפונקציה הקבועה $x\mapsto x_0$.
- לכל $x_0\in\mathbb{X}$, פונקציית הזהות $\mathrm{Id}_{\mathbb{X}}$ הומוטופית לפונקציה הקבועה $x\mapsto x_0$.

הגדרה 2.3. נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב פשוט קשר אם הוא קשיר מסילתית, ובנוסף, כל לולאה מבוססת בנקודה $x\in\mathbb{X}$ הומוטופית ל-c_x.

♣ זוהי הדרך הפורמלית לדרוש שאין במרחב חורים שניתן לאתר באמצעים חד-ממדיים. לדוגמה: המישור פחות נקודה אחת אינו פשוט קשר משום שלולאה המקיפה את הנקודה הזו אינה ניתנת לכיווץ לנקודה (כלומר אינה הומוטופית מסילה קבועה), אבל המרחב התלת-ממדי פחות נקודה הוא פשוט קשר משום שאפילו לולאה המקיפה את הנקודה הזו אפשר לכווץ לנקודה.

מסקנה 2.4. התנאים הבאים שקולים:

- $(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב פשוט קשר.
- $(\mathbb{X},\tau)$ קשיר מסילתית, ולכל $x\in\mathbb{X}$, החבורה היסודית $\pi_1(\mathbb{X},x)$ היא החבורה הטריוויאלית.
- $(\mathbb{X},\tau)$ קשיר מסילתית, וקיים $x\in\mathbb{X}$ כך שהחבורה היסודית $\pi_1(\mathbb{X},x)$ היא החבורה הטריוויאלית.

מסקנה 2.5. כל מרחב כוויץ הוא מרחב פשוט קשר.

♣ ההפך אינו נכון, לדוגמה: הסְפֵירָה S^2 היא מרחב פשוט קשר שאינו כוויץ.

הגדרה 2.6. תהא $A\subseteq\mathbb{X}$ תת-קבוצה, נסג-עיוות מ-$\mathbb{X}$ ל-A הוא פונקציה רציפה $H:[0,1]\times\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ המקיימת את שלושת התנאים הבאים:

1. $H(t,a)=a$ לכל $t\in[0,1]$ ולכל $a\in A$.
2. $H(0,x)=x$ לכל $x\in\mathbb{X}$.
3. $H(1,x)\in A$ לכל $x\in\mathbb{X}$.

כמו כן, נאמר ש-A היא נסג-עיוות של $\mathbb{X}$ אם קיימת H כנ"ל.

מסקנה 2.7. אם קיים $x\in\mathbb{X}$ כך ש-$\{x\}$ הוא נסג-עיוות של $\mathbb{X}$, אז $(\mathbb{X},\tau)$ כוויץ.

♣ ההפך אינו נכון! קיימים מרחבים כוויצים שאינם נסג-עיוות של אף אחד מהיחידונים שבהם. **להביא דוגמה.**

3 מרחבי מנה ומרחבי כיסוי

הגדרה 3.1. נאמר שמרחב טופולוגי $(\mathbb{Y},\sigma)$ הוא מרחב מנה של מרחב טופולוגי $(\mathbb{X},\tau)$, אם קיימת פונקציה $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ על $\mathbb{Y}$ ($\mathrm{Im}f=\mathbb{Y}$), כך שלכל קבוצה $A\subseteq\mathbb{Y}$, A פתוחה (ב-$\mathbb{Y}$) אס"ם $f^{-1}(A)$ פתוחה (ב-$\mathbb{X}$). במקרה כזה נאמר גם ש-f כזו היא העתקת מנה.

♣ הרעיון הוא שאנו מזהים שתי נקודות ב-$\mathbb{X}$ שתמונתן תחת f זהה כנקודה אחת, כך למשל ניתן לזהות את הנקודות 0 ו-2π כנקודה אחת ולקבל שמעגל היחידה הוא מרחב מנה של הקטע $[0,2\pi]$.

♣ העתקת מנה היא פונקציה רציפה, אך אינה בהכרח העתקה פתוחה.

טענה 3.2. יהי $(\mathbb{X},\tau)$ מרחב טופולוגי, ותהא Y קבוצה כלשהי. תהא $f:\mathbb{X}\to Y$ פונקציה, ונסמן $f_*\tau:=\left\{A\subseteq Y\mid f^{-1}(Y)\in\tau\right\}$. $f_*\tau$ היא טופולוגיה, והיא הטופולוגיה היחידה על Y כך ש-f היא העתקת מנה.

הגדרה 3.3. נאמר שמרחב טופולוגי E הוא מרחב כיסוי של מרחב טופולוגי B, אם קיימת פונקציה רציפה $p:E\to B$ על B ($\mathrm{Im}p=B$), המקיימת שלכל נקודה $b\in B$ יש סביבה פתוחה $U\subseteq B$, כך ש-$p^{-1}(U)$ היא איחוד זר של קבוצות פתוחות ב-E, שהצמצום של p לכל אחת מהן הוא הומיאומורפיזם בינה לבין U. במקרה כזה נאמר גם ש-p היא העתקת כיסוי, ושכל סביבה U כזו מכוסה אחיד ע"י p.

טענה 3.4. כל העתקת כיסוי היא העתקה פתוחה.

הוכחה. יהיו E ו-B מרחבים טופולוגיים כך ש-E הוא מרחב כיסוי של B, ותהא $p:E\to B$ העתקת כיסוי. תהא $A\subseteq E$ קבוצה פתוחה, ותהא $b\in p(A)$, מהיות p העתקת כיסוי נובע שיש ל-b סביבה פתוחה $U\subseteq B$ המכוסה אחיד ע"י p, אם כן תהא U כנ"ל, תהא $a\in A$ כך ש-$p(a)=b$, ותהא $V\subseteq\mathbb{X}$ קבוצה פתוחה כך ש-$a\in V$ והצמצום $p|_V$ הוא הומיאומורפיזם בין V ל-U. הקבוצה $A\cap V$ פתוחה ב-E ולכן פתוחה גם ב-V, ומכיוון ש-$p|_V$ הוא הומיאומורפיזם נדע ש-$p|_V(A\cap V)=p(A\cap V)$ היא קבוצה פתוחה ב-U, והיות ש-U פתוחה ב-B נובע מזה ש-$p(A\cap V)$ פתוחה גם היא ב-B, ומהגדרה מתקיים $b\in p(A\cap V)\subseteq p(A)$. כלומר לכל נקודה ב-$p(A)$ יש סביבה פתוחה המוכלת ב-$p(A)$ ולכן $p(A)$ היא קבוצה פתוחה. ■

משפט 3.5. יהיו E ו-B מרחבים טופולגיים כך ש-E הוא מרחב כיסוי של B, ותהא $p:E\to B$ העתקת כיסוי. תהא $Y\subseteq B$ תת-קבוצה, ונסמן $X:=p^{-1}(Y)$; הצמצום $p|_X:X\to Y$ הוא העתקת כיסוי.

הוכחה. p רציפה ולכן גם $p|_X$ רציפה, ומהגדרה $p|_X$ על Y, אם כן נותר לנו להוכיח שלכל נקודה $y\in Y$ יש סביבה פתוחה (ב-Y) $U\subseteq Y$ המכוסה אחיד ע"י $p|_X$. תהא $y\in U$, תהא $\tilde{U}\subseteq B$ סביבה פתוחה של y ויהי אוסף קבוצות פתוחות $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(E)$ כך ש-$p^{-1}\left(\tilde{U}\right)=\dot{\bigcup}\mathcal{S}$ כך שהצמצום של p לכל $V\in\mathcal{S}$ הוא הומיאומורפיזם בין V ל-$\tilde{U}$. מהגדרה $U:=Y\cap\tilde{U}$ היא סביבה פתוחה של y ב-Y, ומתקיים:

$$\begin{aligned}(p|_X)^{-1}(U)&=(p|_X)^{-1}\left(Y\cap\tilde{U}\right)=p^{-1}\left(Y\cap\tilde{U}\right)\\&=p^{-1}(Y)\cap p^{-1}\left(\tilde{U}\right)\\&=X\cap\left(\dot{\bigcup}_{V\in\mathcal{S}}V\right)=\dot{\bigcup}_{V\in\mathcal{S}}(X\cap V)\end{aligned}$$

ומכיוון שלכל $V\in\mathcal{S}$, $p|_V$ הוא הומיאומורפיזם בין V ל-$\tilde{U}$, נדע ש-$p|_{X\cap V}=(p|_X)|_{X\cap V}$ הוא הומיאומורפיזם בין $X\cap V$ ל-$U=Y\cap\tilde{U}$. ■

משפט 3.6. יהיו E,B,E',B' מרחבים טופולוגיים כך ש-E הוא מרחב כיסוי של B ו-E' הוא מרחב כיסוי של B'. תהיינה גם $p:E\to B$ ו-$p':E'\to B'$ העתקות כיסוי מתאימות. מרחב המכפלה $E\times E'$ הוא מרחב כיסוי של מרחב המכפלה $B\times B'$, וההעתקה $q:E\times E'\to B\times B'$ המוגדרת ע"י $q(x,x'):=(p(x),p(x'))$ (לכל $(x,x')\in E\times E'$) היא העתקת כיסוי.

הגדרה 3.7. תהיינה $f:X\to B$ ו-$p:E\to B$ העתקות רציפות, הרמה של f ע"י p היא היא פונקציה $\tilde{f}:X\to E$ המקיימת $p\circ\tilde{f}=f$.

משפט 3.8. משפט ההרמה של מסילות

תהא $p:E\to B$ העתקת כיסוי. לכל מסילה $\gamma:[0,1]\to B$ ולכל נקודה $e_0\in E$ כך ש-$p(e_0)=\gamma(0)$, קיימת הרמה (של γ ע"י p) יחידה $\tilde{\gamma}:[0,1]\to E$ כך ש-$\tilde{\gamma}(0)=e_0$.

משפט 3.9. יחידות הרמה של הומוטופיה בין מסילות

תהא $p : E \to B$ העתקת כיסוי, ותהא $H : [0,1] \times [0,1] \to B$ הומוטופיה בין מסילות ב-B. לכל $e_0 \in E$ כך ש-$H(0,0) = p(e_0)$, קיימת הרמה (של H ע"י p) יחידה $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to E$ כך ש-$\tilde{H}(0,0) = e_0$ ו-$\tilde{H}$ הומוטופיה בין מסילות.

מסקנה 3.10. תהא $p : E \to B$ העתקת כיסוי, ותהיינה $\alpha, \beta \in \Omega(B, b, c)$ שתי מסילות הומוטופיות ב-B. כל זוג הרמות של α ו-β המתחילות באותה נקודה גם מסתיימות באותה נקודה.