טופולוגיה קבוצתית

מבוא לטופולוגיה - חלק ראשון

נכתב ע״י שריה אנסבכר

תוכן העניינים

1 התחלה **2**

2 קבוצות במרחב טופולוגי **3**

3 בסיסים **5**

4 פונקציות **6**

4.1 רציפות 6

4.2 הומיאומורפיזמים ושיכונים 6

5 מרחבי מכפלה **8**

6 אקסיומות ההפרדה **9**

6.1 רגולריות ונורמליות 9

6.2 האקסיומות והשלכותיהן 9

6.3 דוגמאות לכך שאין שקילות בין אקסיומות ההפרדה 9

7 מסננים **10**

7.1 מסננים על קבוצות 10

7.2 מסננים על מרחבים טופולוגיים 10

8 קומפקטיות **12**

8.1 התחלה 12

8.2 קומפקטיפיקציה 14

9 דלילות **15**

10 אקסיומות המנייה **16**

11 קשירות **17**

11.1 קשירות רגילה 17

11.2 קשירות מסילתית 17

11.3 קשירות מקומית וקשירות מסילתית מקומית 18

תודתי נתונה לגלעד שרם על הסיכום המצוין שלו, נעזרתי בו רבות בכתיבת הסיכום שלפניכם.

***

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:

אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה

https://math.srayaa.com

1 התחלה

♣ כשעסקנו במרחבים מטריים ראינו שהקבוצות הפתוחות מקיימות את שלוש התכונות הבאות:

1. המרחב כולו והקבוצה הריקה הם קבוצות פתוחות.
2. כל איחוד של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.
3. כל חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

נראה כעת שבעזרת שלוש התכונות הללו ניתן להכליל את הרעיון של קבוצה פתוחה במקרה שבו אין מטריקה.

הגדרה 1.1. טופולוגיה
תהא $\mathbb{X}$ קבוצה לא ריקה, ותהא $\tau \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ משפחה של תתי-קבוצות של $\mathbb{X}$.
נאמר ש-τ היא טופולוגיה על $\mathbb{X}$, אם מתקיימות שלוש התכונות הבאות:

1. $\emptyset, \mathbb{X} \in \tau$.
2. τ סגורה לאיחודים - לכל אוסף $\mathcal{S} \subseteq \tau$ מתקיים $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \in \tau$.
3. τ סגורה לחיתוכים סופיים - לכל אוסף סופי $\mathcal{S} \subseteq \tau$ מתקיים $\bigcap_{U \in \mathcal{S}} U \in \tau$.[1]

דוגמה 1.2. על כל קבוצה לא ריקה $\mathbb{X}$ ניתן להגדיר שתי טופולוגיות פשוטות:

- הטופולוגיה הטריוויאלית - $\{\emptyset, \mathbb{X}\}$
- הטופולוגיה הדיסקרטית - $\mathcal{P}(\mathbb{X})$

הגדרה 1.3. תהיינה τ ו-σ שתי טופולוגיות על קבוצה לא ריקה $\mathbb{X}$. נאמר ש-τ עדינה / חזקה יותר מ-σ, וש-σ גסה / חלשה יותר מ-τ, אם $\sigma \subseteq \tau$.

♣ הרעיון הוא שככל שטופולוגיה עדינה יותר כך היא מיטיבה "להבחין" בין שתי נקודות שונות, כאשר "להבחין" פירושו שיש בטופולוגיה קבוצה שמבדילה בין שתי הנקודות (אחת מהן שייכת לה והאחרת איננה כזו). בהמשך הקורס נעסוק ביכולת של טופולוגיה להבחין בין נקודות ביתר פירוט.

הגדרה 1.4. מרחב טופולוגי
מרחב טופולוגי (להלן גם מ"ט) הוא זוג סדור $(\mathbb{X}, \tau)$ כאשר τ היא טופולוגיה על קבוצה לא ריקה $\mathbb{X}$, האיברים של $\mathbb{X}$ ייקראו לעיתים קרובות נקודות, ואילו איברי τ ייקראו קבוצות פתוחות.

סימון: לכל מרחב טופולוגי $(\mathbb{X}, \tau)$ ולכל תת-קבוצה $S \subseteq \mathbb{X}$ נסמן $\tau|_A := \{A \cap U : U \in \tau\}$.

הגדרה 1.5. תת-מרחב טופולוגי
יהי $(\mathbb{X}, \tau)$ מרחב מטרי ותהא $A \subseteq \mathbb{X}$, הזוג הסדור $(A, \tau|_A)$ נקרא תת-מרחב טופולוגי של $(\mathbb{X}, \tau)$.

♣ כמובן שהרעיון הוא ש-(Y, d_Y) הוא מרחב מטרי עם אותה מטריקה.

טענה 1.6. אוסף הקבוצות הפתוחות של מרחב מטרי הוא טופולוגיה על המרחב.

הגדרה 1.7. אוסף הקבוצות הפתוחות של מרחב מטרי ייקרא הטופולוגיה המושרית ע"י המטריקה המתאימה.

הגדרה 1.8. מרחב טופולוגי ייקרא מטריזבילי אם קיימת מטריקה המשרה את הטפולוגיה שלו.

[1] תכונה זו שקולה לכך שלכל $U, V \in \tau$ מתקיים $U \cap W \in \tau$.

2 קבוצות במרחב טופולוגי

יהי $(\mathbb{X},\tau)$ מרחב טופולוגי.

תזכורת: A^c היא הקבוצה המשלימה של A, כלומר $A^c=\mathbb{X}\setminus A$ (כמובן שהסימון תלוי הקשר משום שהוא תלוי בשאלה מיהי $\mathbb{X}$).

הגדרה 2.1. נקודות פנימיות, נקודות חיצוניות ונקודות קצה
תהא $A\subseteq\mathbb{X}$ תת-קבוצה, ותהא $x\in\mathbb{X}$ נקודה.

- נאמר ש-x היא נקודה פנימית של A, אם קיימת קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{X}$, כך ש-$x\in U\subseteq A$.
- נאמר ש-x היא נקודה חיצונית ל-A, אם קיימת קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{X}$, כך ש-$x\in U\subseteq A^c$.
- נאמר ש-x היא נקודת קצה של A, אם לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{X}$, קיימים $x_1,x_2\in U$ כך ש-$x_1\in A$ ו-$x_2\notin A$.
- נאמר ש-x היא נקודת הצטברות של A, אם לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$x\in U$ קיימת נקודה $x\neq a\in A$ כך ש-$a\in U$.

לא ראינו את ההגדרה שלעיל בכיתה.

הגדרה 2.2. נאמר שתת-קבוצה $C\subseteq\mathbb{X}$ היא קבוצה סגורה אם היא כוללת כל נקודה שאינה חיצונית לה.

♣ קבוצה יכולה להיות גם פתוחה וגם סגורה, וכמובן שיכולות להיות קבוצות שאינן פתוחות ואינן סגורות.

לא ראינו את ההגדרה שלעיל בכיתה, אלא הגדרנו מהי קבוצה סגורה ע"פ המסקנה הבאה.

מסקנה 2.3. תת-קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ היא סגורה אם"ם A^c היא קבוצה פתוחה.

מסקנה 2.4. אוסף הקבוצות הסגורות מקיים את שלוש התכונות הבאות:

1. $\emptyset$ ו-$\mathbb{X}$ הן קבוצות סגורות.
2. סגירות לחיתוכים - לכל אוסף $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{X})$ של קבוצות סגורות, הקבוצה $\bigcap_{C\in\mathcal{S}}C$ היא קבוצה סגורה.
3. סגירות לאיחודים סופיים - לכל אוסף סופי $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{X})$ של קבוצות סגורות, הקבוצה $\bigcap_{C\in\mathcal{S}}C$ היא קבוצה סגורה.

הגדרה 2.5.

- קבוצת הנקודות הפנימיות של תת-קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ תיקרא הפנים של A, ותסומן ב-A° או ב-$\mathrm{Int}(A)$.
- קבוצת הנקודות החיצוניות לתת-קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ תיקרא החוץ של A, ותסומן ב-$\mathrm{Ext}(A)$.
- קבוצת נקודות הקצה של תת-קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ תיקרא השפה של A, ותסומן ב-∂A.
- קבוצת נקודות ההצטברות של תת-קבוצה A תסומן ב-A'.
- קבוצת כל הנקודות שאינן חיצוניות לתת-קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ תיקרא הסגור של A ותסומן ב-$\overline{A}$ או ב-$\mathrm{Cl}(A)$.

לא ראינו את ההגדרה שלעיל בכיתה, אלא הגדרנו את הפנים והסגור לפי המסקנה הבאה, ואת השפה ע"פ המסקנה שלאחריה.

מסקנה 2.6. הפנים של קבוצה הוא איחוד כל הקבוצות הפתוחות המוכלות בה, ואילו הסגור של קבוצה הוא חיתוך כל הקבוצות הסגורות שמכילות אותה.

♣ כלומר A° הוא הקבוצה הפתוחה הכי גדולה שמוכלת ב-A, ו-$\overline{A}$ הוא הקבוצה הסגורה הכי קטנה שמכילה את A.

מסקנה 2.7. לכל $A\subseteq\mathbb{X}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\overline{A}&=A^\circ\uplus\partial A=A\cup A'\\ \partial A&=\overline{A}\setminus A^\circ\\ \mathbb{X}&=\mathrm{Int}(A)\uplus\partial A\uplus\mathrm{Ext}(A)\\ &=\mathrm{Cl}(A)\uplus\mathrm{Ext}(A)\end{aligned}$$

מסקנה 2.8. לכל שתי קבוצות $A, B \subseteq \mathbb{X}$ מתקיים:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \qquad A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$$

הגדרה 2.9. תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא <u>צפופה</u> אם לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{X}$ מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$.

בכיתה הגדרנו לפי המסקנה הבאה.

מסקנה 2.10. תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ היא צפופה אם"ם $\overline{A} = \mathbb{X}$.

3 בסיסים

♣ כשעסקנו במרחבים מטריים ראינו שקבוצה היא פתוחה אם״ם ניתן להציג אותה כאיחוד של כדורים פתוחים, מייד נראה שניתן להכליל זאת גם עבור מרחבים טופולוגיים.

תהא $\mathbb{X}$ קבוצה לא ריקה.

הגדרה 3.1. תהא τ טופולוגיה על $\mathbb{X}$. נאמר שמשפחה של קבוצות פתוחות $\mathcal{B} \subseteq \tau$ היא בסיס לטופולוגיה τ, וש-τ מושרית ע״י הבסיס $\mathcal{B}$, אם כל קבוצה פתוחה ניתנת להצגה כאיחוד של קבוצות מ-$\mathcal{B}$.

זו לא ההגדרה שראינו בכיתה, אבל ראינו שזוהי הגדרה שקולה.

מסקנה 3.2. קבוצת כל הכדורים הפתוחים במרחב מטרי[2] היא בסיס לטופולוגיה המושרית ע״י המטריקה.

הגדרה 3.3. יהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ אוסף תתי-קבוצות של $\mathbb{X}$, נאמר ש-$\mathcal{B}$ הוא בסיס של $\mathbb{X}$ אם מתקיימות שתי התכונות הבאות:

1. לכל $x \in \mathbb{X}$ קיימת $B \in \mathcal{B}$ כך ש-$x \in B$ (כלומר $\mathbb{X} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$).
2. לכל $A, B \in \mathcal{B}$ ולכל $x \in A \cap B$ קיימת $C \in \mathcal{B}$ כך ש-$x \in C \subseteq A \cap B$.

סימון: לכל $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ נסמן $\tau_{\mathcal{B}} := \left\{ U \subseteq \mathbb{X} \;\middle|\; \forall x \in U \; \exists B \in \mathcal{B} \; x \in B \subseteq U \right\}$.

מסקנה 3.4. לכל בסיס $\mathcal{S}$ של $\mathbb{X}$, לכל $U \in \tau_{\mathcal{B}}$, קיים אוסף $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ כך ש-$U = \bigcup_{B \in \mathcal{S}} B$.

משפט 3.5. יהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ אוסף תתי-קבוצות של $\mathbb{X}$. אם $\mathcal{B}$ הוא בסיס של $\mathbb{X}$, אז $\tau_{\mathcal{B}}$ היא טופולוגיה על $\mathbb{X}$, ו-$\mathcal{B}$ הוא בסיס לטפולוגיה $\tau_{\mathcal{B}}$.

דוגמה 3.6. האוסף $\left\{ a + d \cdot \mathbb{Z} \;\middle|\; a, d \in \mathbb{Z} \right\}$ הוא בסיס של $\mathbb{Z}$.

♣ נסמן $\mathcal{E} := \left\{ a + d \cdot \mathbb{Z} \;\middle|\; a, d \in \mathbb{Z} \right\}$, ונוכיח מתכונות הטופולוגיה $(\mathbb{Z}, \tau_{\mathcal{E}})$ שישנם אין-סוף מספרים ראשוניים.

- כל קבוצה ב-$\mathcal{E}$ היא קבוצה סגורה שכן לכל $a, d \in \mathbb{Z}$ מתקיים:

$$\mathbb{Z} \setminus (a + d \cdot \mathbb{Z}) = \bigcup_{i=1}^{d-1} (a + (d+i) \cdot \mathbb{Z})$$

מכאן שאיחוד סופי של קבוצות מ-$\mathcal{E}$ הוא קבוצה סגורה.

- לכל $m \in \mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}$ קיים $p \in \mathbb{Z}$ ראשוני כך ש-$m \in p \cdot \mathbb{Z}$, מכאן שמתקיים:

$$\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \text{Prime}} p \cdot \mathbb{Z}$$

ולכן אם יש מספר סופי של ראשוניים אז $\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}$ היא קבוצה סגורה, וממילא $\{1, -1\}$ פתוחה. אבל אנחנו יודעים ש-$\{1, -1\}$ אינה פתוחה, שהרי אין ב-$\mathcal{E}$ קבוצה המוכלת ב-$\{1. - 1\}$, ומכאן שיש אין-סוף ראשוניים.

הגדרה 3.7. יהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ אוסף תתי-קבוצות של $\mathbb{X}$, נאמר ש-$\mathcal{B}$ הוא תת-בסיס של $\mathbb{X}$, אם לכל $x \in \mathbb{X}$ קיימת $B \in \mathcal{B}$ כך ש-$x \in B$ (כלומר $\mathbb{X} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$).

מסקנה 3.8. לכל תת-בסיס $\mathcal{B}$ על $\mathbb{X}$, הקבוצה $\overline{\mathcal{B}} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} B_i \;\middle|\; B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{B} \right\}$ היא בסיס של $\mathbb{X}$.

[2] ניתן להחליף קבוצה זו בקבוצת כל הכדורים עם רדיוס רציונלי / מהצורה $\frac{1}{n}$.

4 פונקציות

יהיו $(\mathbb{X},\tau)$ ו-$(\mathbb{Y},\sigma)$ מרחבים טופולוגיים.

4.1 רציפות

הגדרה 4.1. פונקציה $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ תיקרא רציפה אם לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{Y}$ גם $f^{-1}(U)$ היא קבוצה פתוחה (כלומר לכל $U\in\sigma$ מתקיים $f^{-1}(U)\in\tau$).

הגדרה 4.2. קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ תיקרא סביבה של נקודה $x\in\mathbb{X}$, אם קיימת קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$x\in U\subseteq A$.

טענה 4.3. תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה, התנאים הבאים שקולים:

- f רציפה.
- לכל קבוצה סגורה $C\subseteq\mathbb{Y}$ גם $f^{-1}(C)$ סגורה.
- לכל $x\in\mathbb{X}$, ולכל סביבה $W\subseteq\mathbb{Y}$ של $f(x)$, הקבוצה $f^{-1}(W)$ היא סביבה של x.
- לכל תת-קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ מתקיים $f\left(\overline{A}\right)\subseteq\overline{f(A)}$.
- לכל בסיס $\mathcal{B}$ של σ, ולכל $B\in\mathcal{B}$, הקבוצה $f^{-1}(B)$ היא קבוצה פתוחה.
- קיים תת-בסיס $\mathcal{B}$ של σ, ולכל $B\in\mathcal{B}$, הפונקציה $f|_B$ רציפה.
- לכל n קבוצות סגורות $C_1,C_2,\ldots,C_n\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$\mathbb{X}=\bigcup_{i=1}^n C_i$, ולכל $n\geq i\in\mathbb{N}$, הפונקציה $f|_{C_i}$ רציפה.

מסקנה 4.4. הרכבה של פונקציות רציפות היא פונקציה רציפה.

מסקנה 4.5. תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה, ותהיינה τ^+ ו-σ^- טופולוגיות על $\mathbb{X}$ ו-$\mathbb{Y}$ בהתאמה. אם τ^+ עדינה יותר מ-τ ($\tau\subseteq\tau^+$) ו-σ^- גסה יותר מ-σ ($\sigma^-\subseteq\sigma$), אז f רציפה גם כפונקציה בין המרחבים הטופולוגיים $(\mathbb{X},\tau^+)$ ו-$(\mathbb{Y},\sigma^-)$.

משפט 4.6. למת ההדבקה
תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה; אם קיימות שתי קבוצות סגורות $A,B\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$\mathbb{X}=A\cup B$, ובנוסף $f|_A$ ו-$f|_B$ רציפות, אז f רציפה.

טענה 4.7. תהיינה X,Y קבוצות, ותהיינה $f:X\to\mathbb{Y}$ ו-$g:\mathbb{X}\to Y$ פונקציות.

- הקבוצה $\left\{f^{-1}(U)\mid U\in\sigma\right\}$ היא תת-בסיס של X, f רציפה תחת הטופולוגיה המושרית ממנו, וזוהי הטופולוגיה החלשה ביותר על X ש-f רציפה עבורה.
- הקבוצה $\left\{U\subseteq Y\mid g^{-1}(U)\in\tau\right\}$ היא תת-בסיס של $\mathbb{Y}$, g רציפה תחת הטופולוגיה המושרית ממנו, וזוהי הטופולוגיה החזקה ביותר על X ש-g רציפה עבורה.

טענה 4.8. תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה, ויהי $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה τ. אם f היא הומיאומורפיזם אז הקבוצה $\mathcal{C}:=\{f(B)\mid B\in\mathcal{B}\}$ היא בסיס לטופולוגיה σ.

4.2 הומיאומורפיזמים ושיכונים

הגדרה 4.9. תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה.

- f תיקרא העתקה פתוחה אם לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{X}$ גם $f(U)$ היא קבוצה פתוחה.
- f תיקרא העתקה סגורה אם לכל קבוצה סגורה $C\subseteq\mathbb{X}$ גם $f(C)$ היא קבוצה סגורה.

הגדרה 4.10. פונקציה $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ תיקרא הומיאומורפיזם בין $\mathbb{X}$ ל-$\mathbb{Y}$ אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. f רציפה
2. f חח״ע ועל

3. f^{-1} רציפה

הגדרה 4.11. פונקציה $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ תיקרא <u>שיכון</u> אם היא הומיאומורפיזם בין $\mathbb{X}$ ל-$f(\mathbb{X})$.

מסקנה 4.12. תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה רציפה והפיכה, התנאים הבאים שקולים:

- f היא שיכון (הומיאומורפיזם אם $f(\mathbb{X})=\mathbb{Y}$).
- f היא העתקה פתוחה.
- f היא העתקה סגורה.

5 מרחבי מכפלה

יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף קבוצות לא ריקות, ונסמן:

$$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha := \left\{ \ f : I \to \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha \ \middle| \ \forall \alpha \in I \ f(\alpha) \in X_\alpha \ \right\}$$

♣ אם נזכור שסדרה אין-סופית $(a_n)_{n=1}^\infty$ היא בעצם פונקציה מ-$\mathbb{N}$ לאיחוד כלשהו $\bigcup_{n=1}^\infty X_n$ כך ש-$a_n \in X_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$[3], נבין שהסימון שלעיל הוא בעצם הכללה של המכפלה הקרטזית הרגילה.

♣ כן, אנחנו מניחים כאן את אקסיומת הבחירה כדי ש-$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ לא תהיה ריקה.

כמו כן, לכל $\beta \in I$, נגדיר את הפונקציה $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to X_\beta$ ע"י $\pi_\beta(f) := f(\beta)$ (לכל $f \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$), ונקרא לה <u>ההטלה</u> על X_β.

יהי $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף כך ש-τ_α היא טופולוגיה על X_α לכל $\alpha \in I$, ונסמן גם:

$$\mathcal{B}_{\text{box}} := \left\{ \ \prod_{\alpha\in I} U_\alpha \ \middle| \ \forall \alpha \in I \ U_\alpha \in \tau_\alpha \ \right\}$$

$$\mathcal{B}_{\text{prod}} := \left\{ \ \prod_{\alpha\in I} U_\alpha \in \mathcal{B}_{\text{box}} \ \middle| \ \text{קבוצת האינדקסים ב- } I \text{ כך ש-} U_\alpha \neq X_\alpha \text{ היא קבוצה סופית} \ \right\}$$

מסקנה 5.1. אם I סופית אז $\mathcal{B}_{\text{box}} = \mathcal{B}_{\text{prod}}$.

טענה 5.2. $\mathcal{B}_{\text{box}}$ ו-$\mathcal{B}_{\text{prod}}$ הם בסיסים של $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

הגדרה 5.3. הטופולוגיה המושרית ע"י $\mathcal{B}_{\text{box}}$ תיקרא <u>טופולוגיית הקופסה</u>, הטופולוגיה המושרית ע"י $\mathcal{B}_{\text{prod}}$ תיקרא <u>טופולוגיית המכפלה</u>.

♣ טופולוגיית הקופסה היא הטופולוגיה הטבעית שהיינו רוצים להגדיר על מכפלה (נשים לב ש-$\mathcal{B}_{\text{box}}$ אינה טופולוגיה על $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, אלא רק בסיס).

♣ טופולוגיית המכפלה היא הטופולוגיה החלשה ביותר כך שההטלות תהיינה רציפות.

הסכמה: כשנדבר על מכפלה של מרחבים טופולוגיים מבלי להזכיר את הטופולוגיה של המכפלה כוונתנו לטופולוגיית המכפלה.

משפט 5.4. תהא $((\mathbb{X}_n, \rho_n))_{n=1}^\infty$ סדרת מרחבים מטריים, ונסמן $\mathbb{X} := \prod_{n=1}^\infty \mathbb{X}_n$. הפונקציה $\rho : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $x, y \in \mathbb{X}$):

$$\rho(x, y) := \sum_{n=1}^\infty \rho_n(x_n, y_n)$$

היא מטריקה על $\mathbb{X}$, והטופולוגיה המושרית על ידיה היא טופולוגיית המכפלה. בפרט, מרחב מכפלה של מרחבים מטריים הוא מרחב מטריזבילי.

[3] סדרה סופית $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ היא פונקציה מ-$\{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$ לאיחוד כשלהו $\bigcup_{k=1}^n X_k$ כך ש-$a_k \in X_k$ לכל $n \geq k \in \mathbb{N}$.

6 אקסיומות ההפרדה

יהי $(\mathbb{X},\tau)$ מרחב טופולוגי.

6.1 רגולריות ונורמליות

הגדרה 6.1. תהיינה $x,y\in\mathbb{X}$ ו-$A,B\subseteq\mathbb{X}$.

- נאמר ש-x ו-y ניתנות להפרדה זו מזו, אם קיימות שתי קבוצות פתוחות זרות $U,V\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$x\in U$ ו-$y\in V$.
- נאמר ש-x ו-A ניתנות להפרדה זו מזו, אם קיימות שתי קבוצות פתוחות זרות $U,V\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$x\in U$ ו-$A\subseteq V$.
- נאמר ש-A ו-B ניתנות להפרדה זו מזו, אם קיימות שתי קבוצות פתוחות זרות $U,V\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$A\subseteq U$ ו-$B\subseteq V$.

הגדרה 6.2. מרחב טופולוגי ייקרא רגולרי אם כל נקודה ניתנת להפרדה מכל קבוצה סגורה שאינה שייכת אליה.

טענה 6.3. $(\mathbb{X},\tau)$ רגולרי אס״ם לכל $x\in\mathbb{X}$, ולכל קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$x\in U$, קיימת קבוצה פתוחה $V\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$x\in V\subseteq\overline{V}\subseteq U$.

טענה 6.4. מכפלה של שני מרחבים רגולריים היא מרחב רגולרי.

הגדרה 6.5. מרחב טופולוגי ייקרא נורמלי אם כל שתי קבוצות סגורות ניתנות להפרדה זו מזו.

טענה 6.6. $(\mathbb{X},\tau)$ נורמלי אס״ם לכל קבוצה סגורה $C\subseteq\mathbb{X}$, ולכל קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$C\subseteq U$, קיימת קבוצה פתוחה $V\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$C\subseteq V\subseteq\overline{V}\subseteq U$.

6.2 האקסיומות והשלכותיהן

הגדרה 6.7. אסיומות ההפרדה

- נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב T_0, אם לכל שתי נקודות שונות במרחב, קיימת קבוצה פתוחה כך שבדיוק אחת משתי הנקודות שייכת אליה.
- נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב T_1, אם לכל שתי נקודות שונות במרחב, לכל אחת מהן קיימת קבוצה פתוחה כך שאותה נקודה שייכת אליה והאחרת אינה כזו.
- נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב T_2 או שהוא מרחב האוסדורף[4], אם כל שתי נקודות שונות ניתנות להפרדה.
- נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב T_3, אם הוא מרחב T_1 רגולרי.
- נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב T_4, אם הוא מרחב T_1 נורמלי.

מסקנה 6.8. כל מרחב מטריזבילי הוא מרחב T_4.

מסקנה 6.9. $(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב T_1 אס״ם כל יחידון הוא קבוצה סגורה.

מסקנה 6.10. לכל $4\geq i,j\in\mathbb{N}_0$ כך ש-$i>j$, כל מרחב T_i הוא מרחב T_j.

טענה 6.11. לכל $3\geq i\in\mathbb{N}_0$, כל תת-מרחב של מרחב T_i גם הוא מרחב T_i.

טענה 6.12. לכל $3\geq i\in\mathbb{N}_0$, מכפלה של שני מרחבי T_i היא מרחב T_i.

טענה 6.13. $(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב האוסדורף אס״ם הקבוצה $\left\{(x,y)\in\mathbb{X}^2\mid x=y\right\}$ היא קבוצה סגורה ב-$\mathbb{X}^2$.

משפט 6.14. הלמה של אוריסון[5]
אם $(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב נורמלי אז לכל שתי קבוצות סגורות זרות ולא ריקות $C,D\subseteq\mathbb{X}$ קיימת פונקציה רציפה $f:\mathbb{X}\to[0,1]$ כך ש-$f(C)=\{0\}$ ו-$f(D)=\{1\}$.

6.3 דוגמאות לכך שאין שקילות בין אקסיומות ההפרדה

יש לכתוב סעיף זה.

[4] על שם פליקס האוסדורף.
[5] על שם פאבל סמואילוביץ אוריסון.

7 מסננים

7.1 מסננים על קבוצות

תהא X קבוצה לא ריקה.

הגדרה 7.1. מסנן
קבוצה לא ריקה $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ תיקרא מסנן על X אם מתקיימות שלוש התכונות הבאות:

1. $\emptyset \notin F$.
2. סגירות כלפי מעלה - לכל $A, B \in \mathcal{P}(X)$, אם $A \in F$ ו-$A \subseteq B$ אז $B \in F$.
3. סגירות לחיתוכים סופיים - לכל $A, B \in F$ מתקיים $A \cap B \in F$.

♣ אינטואיטיבית ניתן לחשוב על מסנן כאילו הוא קובע איזו קבוצה נחשבת **גדולה** - זו הסיבה לכך שהמסנן אינו כולל את הקבוצה הריקה, ולכך שהוא סגור כלפי מעלה; גם התכונה השלישית אינטואיטיבית במידת מה.

מסקנה 7.2. לכל מסנן F על X, ולכל $A \in F$, מתקיים $A^c \notin F$.

הגדרה 7.3. נאמר שאוסף קבוצות $\mathcal{S}$ מקיים את תכונת החיתוך הסופי אם לכל תת-אוסף סופי $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ מתקיים $\cap\mathcal{S}' \neq \emptyset$.

סימון: לכל אוסף $D \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיים את תכונת החיתוך הסופי נסמן[6]

$$\langle D \rangle := \left\{ A \subseteq S \;\middle|\; \exists B_1, B_2, \ldots, B_n \in D \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq A \right\}$$

טענה 7.4. יהי $D \subseteq \mathcal{P}(X)$ אוסף המקיים את תכונת החיתוך הסופי. $\langle D \rangle$ הוא מסנן, וזהו המסנן הקטן ביותר שמכיל את D, כלומר לכל מסנן $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ כך ש-$D \subseteq F$ מתקיים $\langle D \rangle \subseteq F$.

סימון: לכל פונקציה $f : X \to Y$, ולכל מסנן F על X, נסמן $f_*F := \left\{ A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in F \right\}$.

טענה 7.5. לכל פונקציה $f : X \to Y$, ולכל מסנן F על X, גם f_*F הוא מסנן.

הגדרה 7.6. מסנן F על X ייקרא על-מסנן (על X) אם הוא מרבי ביחס להכלה, כלומר לכל מסנן F' על X כך ש-$F \subseteq F'$ מתקיים $F = F'$.

מסקנה 7.7. מסנן F על X הוא על-מסנן אם"ם לכל קבוצה $A \subseteq X$ מתקיים $A \in F$ או $A^c \in F$.

טענה 7.8. לכל על-מסנן F על X, ולכל $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq X$ כך ש-$X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, קיים $n \geq i \in \mathbb{N}$ כך ש-$A_i \in F$.

משפט 7.9 (הלמה של טרסקי[7]).
לכל מסנן F על X, קיים על-מסנן F' כך ש-$F \subseteq F'$.

הוכחה. יהי F מסנן על X, ונסמן ב-$\mathcal{S}$ את קבוצת המסננים על X המכילים את F - זוהי קבוצה לא ריקה שכן $F \in \mathcal{S}$. אם כן, $\mathcal{S}$ היא קבוצה לא ריקה סדורה חלקית ע"י יחס ההכלה, ובנוסף, בדיקה פשוטה מראה שלכל שרשרת $S \subseteq \mathcal{S}$, האיחוד $\cup S$ הוא מסנן המכיל את כל איברי S. מכאן שע"פ הלמה של צורן קיים מסנן F' על X המכיל כל מסנן שמכיל בעצמו את F, יהי F' מסנן כזה. כל מסנן שמכיל את F' מכיל גם F, ולכן מוכל ע"י F', ולכן F' הוא על מסנן ע"פ הגדרה. ■

7.2 מסננים על מרחבים טופולוגיים

יהי $(\mathbb{X}, \tau)$ מרחב טופולוגי.

למה 7.10. לכל $x \in \mathbb{X}$, קבוצת כל הסביבות של x (כלומר $\{N \subseteq \mathbb{X} \mid \exists U \in \tau \; x \in U \subseteq N\}$) היא מסנן.

הגדרה 7.11. קבוצת כל הסביבות של נקודה $x \in \mathbb{X}$ תיקרא מסנן הסביבות של x, ותסומן ב-F_x.

---

[6] כמובן שסימון זה תלוי הקשר היות שהוא תלוי ב-S, ולא רק ב-D.
[7] על שם אלפרד טרסקי.

הגדרה 7.12. נאמר שמסנן $F \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ מתכנס לנקודה $x \in \mathbb{X}$ אם $F_x \subseteq F$, ובמקרה כזה נסמן $F \to x$.

♣ מייד נראה שמסננים הם התחליף של סדרות במרחבים טופולוגיים, כשיש לשים לב לנקודה העדינה שהמקבילה של תת-סדרה היא מסנן גדול יותר המכיל את המסנן הנתון.

משפט 7.13. **"אפיון היינה" לרציפות של פונקציה**
יהי גם $(\mathbb{Y}, \sigma)$ מרחב טופולוגי, ותהא $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ פונקציה. f היא פונקציה רציפה אם"ם לכל מסנן F על $\mathbb{X}$ כך ש-$F \to x$ מתקיים $f_*F \to f(x)$.

טענה 7.14. תהא $A \subseteq \mathbb{X}$ תת-קבוצה, ויהי $x \in \mathbb{X}$. מתקיים $x \in A^\circ$ אם"ם לכל מסנן F על $\mathbb{X}$ המתכנס ל-x מתקיים $A \in F$. בפרט, A פתוחה אם"ם לכל $a \in A$ ולכל מסנן $F \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ המתכנס ל-a מתקיים $A \in F$.

מסקנה 7.15. תהא $A \subseteq \mathbb{X}$ תת-קבוצה, ויהי $x \in \mathbb{X}$. מתקיים $x \in \overline{A}$ אם"ם קיים מסנן F על $\mathbb{X}$ כך ש-$F \to x$ ו-$A \in F$.

טענה 7.16. התנאים הבאים שקולים:

- $(\mathbb{X}, \tau)$ הוא מרחב האוסדורף.
- לכל מסנן יש לכל היותר גבול אחד.
- לכל על-מסנן יש לכל היותר גבול אחד.

8 קומפקטיות

יהיו $(\mathbb{X},\tau)$ ו-$(\mathbb{Y},\sigma)$ מרחבים טופולוגיים.

8.1 התחלה

הגדרה 8.1. אוסף של קבוצות פתוחות $\mathcal{S}\subseteq\tau$, ייקרא כיסוי פתוח של קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ אם $A\subseteq\cup\mathcal{S}$. כמו כן, תת-קבוצה של כיסוי פתוח תיקרא תת-כיסוי שלו אם היא מהווה כיסוי פתוח בפני עצמה (עבור אותה קבוצה כמובן).

הגדרה 8.2. קבוצה $K\subseteq\mathbb{X}$ תיקרא קומפקטית, אם לכל כיסוי פתוח של K יש תת-כיסוי סופי. כמו כן $(\mathbb{X},\tau)$ ייקרא מרחב קומפקטי אם $\mathbb{X}$ היא קבוצה קומפקטית.

מסקנה 8.3. איחוד סופי של קבוצות קומפקטיות הוא קבוצה קומפקטית.

מסקנה 8.4. $(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב קומפקטי אם״ם לכל אוסף $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{X})$ של קבוצות סגורות המקיים את תכונת החיתוך הסופי, החיתוך $\cap\mathcal{S}$ אינו ריק.

הוכחה.

- $\Longleftarrow$

נניח ש-$(\mathbb{X},\tau)$ קומפקטי, ונניח בשלילה שקיים אוסף $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{X})$ של קבוצות סגורות המקיים את תכונת החיתוך הסופי, ומקיים בנוסף ש-$\cap\mathcal{S}$ ריק. מכאן שהאוסף $\mathcal{U}:=\{\mathbb{X}\setminus S\mid S\in\mathcal{S}\}$ הוא כיסוי פתוח של $\mathbb{X}$, ומהיות $\mathbb{X}$ קומפקטי נובע שיש ל-$\mathcal{U}$ תת-כיסוי סופי $\tilde{\mathcal{U}}$. אם כן $\tilde{\mathcal{S}}:=\left\{\mathbb{X}\setminus U\mid U\in\tilde{\mathcal{U}}\right\}$ הוא תת-אוסף סופי של $\mathcal{S}$ המקיים $\cap\tilde{\mathcal{S}}=\emptyset$, וזאת בסתירה לכך ש-$\mathcal{S}$ מקיים את תכונת החיתוך הסופי.

- $\Longrightarrow$

נניח ש-$(\mathbb{X},\tau)$ אינו קומפקטי, יהי $\mathcal{U}$ כיסוי פתוח של $\mathbb{X}$ שאין לו תת-כיסוי סופי, ונסמן $\mathcal{S}:=\{\mathbb{X}\setminus U\mid U\in\mathcal{U}\}$. $\mathcal{S}$ הוא אוסף של קבוצות סגורות, ומכיוון שאין ל-$\mathcal{U}$ תת-כיסוי סופי נדע ש-$\mathcal{S}$ מקיים את תכונת החיתוך הסופי ולמרות זאת מתקיים:

$$\bigcap_{C\in\mathcal{S}}C=\bigcap_{U\in\mathcal{U}}(\mathbb{X}\setminus U)=\mathbb{X}\setminus\bigcup_{U\in\mathcal{U}}U=\mathbb{X}\setminus\mathbb{X}=\emptyset$$

כלומר קיים אוסף $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{X})$ של קבוצות סגורות המקיים את תכונת החיתוך הסופי, ולמרות זאת החיתוך $\cap\mathcal{S}$ ריק.

■

משפט 8.5. יהי $(\mathbb{Y},\sigma)$ מרחב קומפקטי, ותהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה רציפה. לכל קבוצה קומפקטית $K\subseteq\mathbb{X}$ גם $f(K)$ היא קבוצה קומפקטית.

הוכחה. תהא $K\subseteq\mathbb{X}$ קבוצה קומפקטית, ויהי $\mathcal{U}$ כיסוי פתוח של $f(K)$. אם כן האוסף $\tilde{\mathcal{U}}:=\left\{f^{-1}(U)\mid U\in\mathcal{U}\right\}$ הוא כיסוי פתוח של K ולפיכך יש לו תת-כיסוי סופי $\hat{\mathcal{U}}$, ותת-כיסוי זה מקיים ש-$\left\{U\in\mathcal{U}\mid f^{-1}(U)\in\hat{\mathcal{U}}\right\}$ הוא תת-אוסף של $\mathcal{U}$ המהווה כיסוי פתוח של $f(K)$. ■

תזכורת: קבוצה $K\subseteq\mathbb{R}$ היא קומפקטית אם״ם היא סגורה וחסומה.

מסקנה 8.6 (משפט ויירשטראס[8]).
אם $(\mathbb{X},\tau)$ קומפקטי אז כל פונקציה רציפה $f:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ מקבלת מקסימום ומינימום ובפרט חסומה.

טענה 8.7. לכל קבוצה קומפקטית $K\subseteq\mathbb{X}$, כל קבוצה סגורה $C\subseteq K$ גם היא קומפקטית.

הוכחה. תהא $K\subseteq\mathbb{X}$ קבוצה קופמקטית, תהא $C\subseteq K$ קבוצה סגורה, ויהי $\mathcal{U}$ כיסוי פתוח של C. האוסף $\mathcal{U}\cup\{C^c\}$ הוא כיסוי פתוח של K, מכאן שקיים תת-כיסוי סופי $\tilde{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{U}\cup\{\mathbb{X}\setminus C\}$ של K, ועבורו מתקיים ש-$\tilde{\mathcal{U}}\setminus\{C^c\}$ הוא תת-אוסף סופי של $\mathcal{U}$ המהווה כיסוי פתוח של C. ■

מסקנה 8.8. במרחב קומפקטי כל חיתוך של קבוצות סגורות הוא קבוצה קומפקטית.

[8] על שם קארל ויירשטראס.

משפט 8.9. אם $(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב האוסדורף, אז כל קבוצה קומפקטית היא קבוצה סגורה.

הוכחה. נניח ש-$(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב האוסדרוף, ותהא $K\subseteq\mathbb{X}$ קבוצה קומפקטית. נוכיח שלכל $x\in\mathbb{X}\setminus K$ קיימת קבוצה פתוחה U המקיימת $x\in U\subseteq\mathbb{X}\setminus K$, ומכאן ש-$\mathbb{X}\setminus K$ קומפקטית. לכל $y\in K$ קיימות שתי קבוצות פתוחות זרות $U_y,V_y\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$x\in U_y$ ו-$y\in V_y$, אם כן נבחר קבוצות U_y,V_y כאלה לכל $y\in\mathbb{X}\setminus K$ ונקבל ש-$\{V_y\}_{y\in K}$ הוא כיסוי פתוח של K. מהיות K קומפקטית נובע שקיימים $y_1,y_2,\dots,y_n\in K$ כך ש-$\{V_{y_i}\}_{i\in[n]}$ הוא כיסוי פתוח של K, ומכאן שהקבוצות $U:=\bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ ו-$V:=\bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ הן קבוצות פתוחות זרות המקיימות $x\in U$ ו-$K\subseteq V$. ■

מסקנה 8.10. מרחב האוסדורף קומפקטי הוא נורמלי (ולכן גם T_4).

הוכחה. יהי $(\mathbb{X},\tau)$ מרחב האוסדורף קומפקטי.

- נוכיח תחילה ש-$(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב רגולרי. תהא $C\subseteq\mathbb{X}$ קבוצה סגורה, ותהא $x\in\mathbb{X}\setminus C$. מהיות $\mathbb{X}$ מרחב האוסדורף נובע שלכל $c\in C$ קיימות שתי קבוצות פתוחות זרות $U_c,V_c\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$c\in V_c$ ו-$x\in U_c$, נבחר קבוצות U_c,V_c כאלה עבור כל נקודה $c\in C$, ונקבל ש-$\{U_c\}_{c\in C}$ הוא כיסוי פתוח של C. מהיות $\mathbb{X}$ קומפקטי נובע שגם C קומפקטית (טענה 8.7), ולכן קיימים $c_1,c_2,\dots,c_n\in C$ כך ש-$\{U_{c_i}\}_{i\in[n]}$ הוא כיסוי פתוח של C. הקבוצות $U:=\bigcup_{i=1}^n U_{c_i}$ ו-$V:=\bigcap_{i=1}^n V_{c_i}$ הן קבוצות פתוחות זרות המקיימות $C\subseteq U$ ו-$x\in V$ כנדרש.
- כעת נוכיח ש-$(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב נורמלי. תהיינה $A,B\in\mathbb{X}$ שתי קבוצות סגורות זרות, מהיות $(\mathbb{X},\tau)$ רגולרי נובע שלכל $b\in B$ קיימות שתי קבוצות פתוחות זרות $W_b,O_b\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$b\in W_b$ ו-$A\subseteq O_b$, נבחר קבוצות W_b,O_b כאלה לכל $b\in B$, ונקבל ש-$\{W_b\}_{b\in B}$ הוא כיסוי פתוח של B. מהיות $\mathbb{X}$ קומפקטי נובע שגם B קומפקטית (טענה 8.7), ולכן קיימים $b_1,b_2,\dots,b_m\in B$ כך ש-$\{W_{b_i}\}_{i\in[m]}$ הוא כיסוי פתוח של B. הקבוצות $W:=\bigcup_{i=1}^m W_{b_i}$ ו-$O:=\bigcap_{i=1}^m O_{b_i}$ הן קבוצות פתוחות זרות המקיימות $A\subseteq O$ ו-$B\subseteq W$ כנדרש.

■

מסקנה 8.11. אם $(\mathbb{X},\tau)$ קומפקטי ו-$(\mathbb{Y},\sigma)$ הוא מרחב האוסדורף, אז כל פונקציה רציפה, חח״ע ועל $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ היא הומיאומורפיזם.

הוכחה. נוכיח ש-f היא העתקה סגורה, ולכן לפי מסקנה 4.12 היא הומיאומורפיזם (כבר נתון לנו ש-$\mathrm{Im}f=\mathbb{Y}$). תהא $C\subseteq\mathbb{X}$ קבוצה סגורה, מהיות $\mathbb{X}$ קומפקטי נובע שגם C קומפקטית (טענה 8.7), ולכן גם $f(C)$ קופמקטית (משפט 8.5), ומכאן שע״פ משפט 8.9 $f(C)$ היא קבוצה סגורה. ■

משפט 8.12. $(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב קומפקטי אם״ם כל על-מסנן F על $\mathbb{X}$ מתכנס.

משפט 8.13 (משפט טיכונוב[9]).
תהא $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ קבוצת מרחבים טופולוגיים, אם X_α קומפקטי לכל $\alpha\in I$, אז גם מרחב המכפלה $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ (עם טופולוגיית המכפלה) הוא מרחב קומפקטי.

הוכחה. **את ההוכחה שלהלן לא ראינו בכיתה, אני מביא אותה כאן כי פשוטה בהרבה מאלה שכן ראינו.**
נניח ש- X_α קומפקטי לכל $\alpha\in I$, יהי F על-מסנן על מרחב המכפלה $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$, ונסמן $F_\alpha:=\{\pi_\alpha(A)\mid A\in F\}$ לכל $\alpha\in I$. בדיקה פשוטה מראה שלכל $\alpha\in I$ - F_α הוא על-מסנן על X_α, ולכן לכל $\alpha\in I$ קיים $x_\alpha\in X_\alpha$ כך ש-$F_\alpha\to x_\alpha$; אם כן נשתמש באקסיומת הבחירה ונגדיר $x:=(x_\alpha)_{\alpha\in I}$[10]. כעת נוכיח ש-$F\to x$ ולכן ע״פ משפט 8.12 מרחב המכפלה $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ הוא מרחב קומפקטי.
תהא $W\subseteq\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ סביבה של x, ותהיינה $J\subseteq I$ קבוצת אינדקסים סופית ו-$\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ קבוצה המקיימת $U_\alpha\in\tau_\alpha$ לכל $\alpha\in J$, כך שמתקיים $x\in\prod_{\alpha\in I\setminus J}X_\alpha\times\prod_{\alpha\in J}U_\alpha\subseteq W$ (כך נראית קבוצת בסיס של טופולוגיית המכפלה ולכן קיימות J ו-$\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ כאלה). כעת נזכור שלכל $\alpha\in J$ מתקיים $F_\alpha\to x_\alpha$, ולכן גם קיימת $A_\alpha\in F$ כך ש-$\pi_\alpha(A_\alpha)=U_\alpha$, אם כן יהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ אוסף של קבוצות כאלה, ונסמן $A:=\bigcap_{\alpha\in J}A_\alpha$. מהגדרה מתקיים $A\in F$ ובנוסף:

$$A\subseteq\prod_{\alpha\in I\setminus J}X_\alpha\times\prod_{\alpha\in J}U_\alpha\subseteq W$$

ולכן מתכונת הסגירות כלפי מעלה נובע ש-$W\in F$. W הייתה סביבה שרירותית של x, ולכן כל סביבה של x שייכת ל-F, כלומר $F\to x$. ■

---

[9] על שם אנדריי טיחונוב

[10] כלומר x היא פונקציה $x:I\to\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ כך ש-$x(\alpha)\in X_\alpha$ ו-$F_\alpha\to x(\alpha)$ לכל $\alpha\in I$.

8.2 קומפקטיפיקציה

הגדרה 8.14 (קומפקטיפיקציה).
נאמר ש-$(\mathbb{Y},\sigma)$ הוא קומפקטיפיקציה של $(\mathbb{X},\tau)$ אם $\mathbb{Y}$ קומפקטי וקיים שיכון $\iota:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ כך ש-$\iota(\mathbb{X})$ צפופה ב-$\mathbb{Y}$.

סימון: נסמן[11]:

$$\hat{\mathbb{X}} := \mathbb{X} \uplus \{\infty\}$$
$$\hat{\tau} := \tau \uplus \left\{\hat{\mathbb{X}} \setminus K \mid K \subseteq \mathbb{X} \text{ היא קבוצה קומפקטית}\right\}$$

מסקנה 8.15. $\hat{\tau}$ היא טופולוגיה על $\hat{\mathbb{X}}$ (כלומר $\left(\hat{\mathbb{X}},\hat{\tau}\right)$ הוא מרחב טופולוגי), ומתקיים $\hat{\mathbb{X}}=\overline{\mathbb{X}}$.

הגדרה 8.16. המרחב $\left(\hat{\mathbb{X}},\hat{\tau}\right)$ ייקרא קומפקטיפיקציה חד-נקודתית של $(\mathbb{X},\tau)$.

הגדרה 8.17. $(\mathbb{X},\tau)$ ייקרא קומפקטי מקומית, אם לכל נקודה ב-$\mathbb{X}$ יש סביבה קומפקטית.

משפט 8.18. אם $(\mathbb{X},\tau)$ קומפקטי אז $\{\infty\}$ היא קבוצה פתוחה ב-$\left(\hat{\mathbb{X}},\hat{\tau}\right)$; ואם $(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית, אז $\left(\hat{\mathbb{X}},\hat{\tau}\right)$ הוא מרחב האוסדורף קומפקטי.

[11] ∞ הוא איבר כלשהו שאינו שייך ל-$\mathbb{X}$, ע״פ האקסיומות של תורת הקבוצות אכן קיימת קבוצה כזו (לדוגמה $\{\mathbb{X}\}$).

9 דלילות

יהי $(\mathbb{X},\tau)$ מרחב טופולוגי.

הגדרה 9.1. תת-קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ תיקרא דלילה אם $\left(\overline{A}\right)^{\circ}=\emptyset$.

מסקנה 9.2. תת-קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ היא דלילה אס״ם $\overline{A}$ דלילה.

מסקנה 9.3. קבוצה צפופה אינה דלילה, וקבוצה דלילה אינה צפופה.

מסקנה 9.4. איחוד סופי של קבוצות דלילות הוא קבוצה דלילה.

♣ הדבר אינו נכון עבור איחוד בן-מנייה, לדוגמה: יחידונים הם קבוצות דלילות ב-$\mathbb{R}$, ו-$\mathbb{Q}$ היא קבוצה צפופה המהווה איחוד בן-מנייה של יחידונים.

הגדרה 9.5. נאמר שתת-קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ היא מקטגוריה ראשונה אם A היא איחוד בן-מנייה של קבוצות דלילות, אחרת נאמר שהיא מקטגוריה שנייה.

הגדרה 9.6. מרחב בר[12]
נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב בר, אם לכל קבוצה מקטגוריה ראשונה, הפנים של הקבוצה ריק.

משפט 9.7. משפט הקטגוריה של בר
אם $(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב האוסדורף קומפקטי, או שהוא מרחב מטרי שלם, אז הוא מרחב בר.

הגדרה 9.8. נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ הוא מושלם, אם כל נקודה $x\in\mathbb{X}$ היא נקודת הצטברות של $\mathbb{X}\setminus\{x\}$.

מסקנה 9.9. אם $(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב קומפקטי האוסדורף מושלם אז $\mathbb{X}$ אינו בן-מנייה.

[12] על שם Baire René-Louis.

10 אקסיומות המנייה

יהי $(\mathbb{X},\tau)$ מרחב טופולוגי.

הגדרה 10.1. אוסף של קבוצות פתוחות $\mathcal{B}\subseteq\tau$ ייקרא בסיס מקומי לנקודה $x\in\mathbb{X}$, אם לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$x\in U$, קיימת קבוצה $B\in\mathcal{B}$ כך ש-$x\in B\subseteq U$.

הסכמה: בקורס זה קבוצה A תיקרא בת-מנייה אם $|A|\leq\aleph_0$, כלומר אם היא סופית או ש-$|A|=|\mathbb{N}|$.

הגדרה 10.2.

1. נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ מקיים את אקסיומת המנייה הראשונה, אם לכל נקודה יש בסיס מקומי בן-מנייה.
2. נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ מקיים את אקסיומת המנייה השנייה, אם יש לטופולוגיה שלו בסיס בן-מנייה.
3. נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב לינדלוף[13], אם לכל כיסוי פתוח של המרחב כולו יש תת-כיסוי בן-מנייה.
4. נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב ספרבילי, אם יש בו קבוצה צפופה בת-מנייה.

מסקנה 10.3. אם $(\mathbb{X},\tau)$ מקיים את אקסיומת המנייה השנייה אז הוא ספרבילי, מרחב לינדלוף ומקיים את אקסיומת המנייה הראשונה.

טענה 10.4. מרחב רגולרי המקיים את אקסיומת המנייה השנייה הוא מרחב נורמלי, ולכן גם T_4.

טענה 10.5. אם $(\mathbb{X},\tau)$ מרחב מטריזבילי אז התנאים הבאים שקולים:

- $(\mathbb{X},\tau)$ מקיימת את אקסיומת המנייה השנייה.
- $(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב לינדלוף.
- $(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב ספרבילי.

משפט 10.6. משפט המטריזביליות של אריסון
מרחב T_3 המקיים את אקסיומת המנייה השנייה הוא מרחב מטריזבילי.

הוכחה. **צריך לכתוב הוכחה.**
בהוכחה משתמשים בעובדה שהמרחב $[0,1]^{\mathbb{N}}$ עם טופולוגיית המכפלה הוא מרחב מטריזבילי (נובע ממשפט 5.4). ■

[13] על שם Lindelöf Leonard Ernst.

11 קשירות

יהי $(\mathbb{X},\tau)$ מרחב טופולוגי.

11.1 קשירות רגילה

הגדרה 11.1. קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ תיקרא קשירה אם לא קיימות שתי קבוצות פתוחות זרות ולא ריקות $U,V\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$A\subseteq U\uplus V$. כמו כן, נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב קשיר אם הקבוצה $\mathbb{X}$ קשירה.

מסקנה 11.2. קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ היא קשירה אם״ם לא קיימות שתי קבוצות פתוחות זרות $U,V\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$A=U\uplus V$.

מסקנה 11.3. הסגור של קבוצה קשירה גם הוא קשיר.

תזכורת: קבוצה $I\subseteq\mathbb{R}$ נקראת מקטע אם לכל $a,b\in I$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<x<b$ מתקיים $x\in I$.

מסקנה 11.4. קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ היא קשירה אם״ם A היא מקטע.

טענה 11.5. יהי גם $(\mathbb{Y},\sigma)$ מרחב טופולוגי, ותהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה. אם f רציפה אז לכל קבוצה קשירה $A\subseteq\mathbb{X}$ גם $f(A)$ קשירה.

טענה 11.6. מכפלה של מרחבים היא מרחב קשיר (בטופולוגיית המכפלה) אם״ם כל אחד מהמרחבים במכפלה קשיר בפני עצמו.

למה 11.7. $(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב קשיר אם״ם לכל מרחב דיסקרטי $(\mathbb{Y},\sigma)$, כל פונקציה רציפה $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ היא פונקציה קבועה.

מסקנה 11.8 (למת הכוכב).
יהי S אוסף קבוצות קשירות ב-$\mathbb{X}$, אם קיימת $A\in S$ כך ש-$A\cap B\neq\emptyset$ לכל $B\in S$, אז $\cup S$ קשירה.

הגדרה 11.9. קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ תיקרא רכיב קשירות ב-$\mathbb{X}$, אם היא קבוצה קשירה מרבית[14]. ע״פ **למת הכוכב**, לכל $x\in\mathbb{X}$ קיים רכיב קשירות יחיד $A\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$x\in A$[15], רכיב קשירות זה ייקרא רכיב הקשירות של x.

11.2 קשירות מסילתית

הגדרה 11.10. מסילה ב-$\mathbb{X}$ היא פונקציה רציפה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{X}$, עבור $a,b\in\mathbb{R}$ כלשהם המקיימים $a<b$; בהינתן מסילה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{X}$ נאמר שהיא מסילה מהנקודה $\gamma(a)$ אל הנקודה $\gamma(b)$.

הגדרה 11.11. קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ תיקרא קשירה מסילתית אם לכל $x,y\in A$ קיימת מסילה $\gamma:[a,b]\to A$ כך ש-$\gamma(a)=x$ ו-$\gamma(b)=y$. כמו כן, נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ הוא מרחב קשיר מסילתית אם $\mathbb{X}$ קשירה מסילתית.

מסקנה 11.12. אם קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ קשירה מסילתית אז היא קשירה, בפרט, אם $(\mathbb{X},\tau)$ קשיר מסילתית אז הוא קשיר.

♣ הכיוון ההפוך אינו נכון, לדוגמה הקבוצה $\{(0,0)\}\cup\left\{\left(x,\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mid x\in(0,1)\right\}$ היא קבוצה קשירה ב-$\mathbb{R}^2$ שאינה קשירה מסילתית.

מסקנה 11.13. יהי $(\mathbb{Y},\sigma)$ מרחב טופולוגי, ותהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$. אם f רציפה אז לכל קבוצה קשירה מסילתית $A\subseteq\mathbb{X}$ גם $f(A)$ קשירה מסילתית.

מסקנה 11.14. מכפלה של מרחבים קשירים מסילתית גם היא קשירה מסילתית.

הגדרה 11.15. קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ תיקרא רכיב קשירות מסילתית ב-$\mathbb{X}$, אם היא קבוצה קשירה מסילתית מרבית[16]. מהגדרה לכל $x\in\mathbb{X}$ קיים רכיב קשירות מסילתית יחיד $A\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$x\in A$[17], רכיב קשירות מסילתית זה ייקרא רכיב הקשירות המסילתית של x.

מסקנה 11.16. כל רכיב קשירות מסילתית מוכל ברכיב קשירות.

---

[14] לכל קבוצה קשירה $B\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$A\subseteq B$ מתקיים $A=B$.
[15] זהו האיחוד של כל הקבוצות הקשירות ש-x שייך אליהן.
[16] לכל קבוצה קשירה מסילתית $B\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-$A\subseteq B$ מתקיים $A=B$.
[17] A זו היא קבוצת כל הנקודות ב-x כך שקיימת מסילה מ-x אל הנקודה.

11.3 קשירות מקומית וקשירות מסילתית מקומית

הגדרה 11.17.

- נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ קשיר מקומית בנקודה $x \in \mathbb{X}$, אם לכל סביבה $W \subseteq \mathbb{X}$ של x, קיימת קבוצה פתוחה וקשירה $U \subseteq \mathbb{X}$ כך ש-$x \in U \subseteq W$.
- נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ קשיר מקומית אם הוא קשיר מקומית בכל נקודה.
- נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ קשיר מסילתית מקומית בנקודה $x \in \mathbb{X}$, אם לכל סביבה $W \subseteq \mathbb{X}$ של x, קיימת קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית $U \subseteq \mathbb{X}$ כך ש-$x \in U \subseteq W$.
- נאמר ש-$(\mathbb{X},\tau)$ קשיר מסילתית מקומית אם הוא קשיר מסילתית מקומית בכל נקודה.

מסקנה 11.18. אם $(\mathbb{X},\tau)$ קשיר מסילתית מקומית אז הוא קשיר מקומית.

מסקנה 11.19. אם $(\mathbb{X},\tau)$ קשיר מסילתית מקומית אז כל רכיב קשירות מסילתית הוא רכיב קשירות.

מסקנה 11.20. אם $(\mathbb{X},\tau)$ קשיר מקומית, אז כל רכיב קשירות הוא קבוצה פתוחה.

♣ ע״פ מסקנות 11.18 ו-11.19 המסקנה האחרונה נכונה (11.20) גם עבור קשירות מסילתית ורכיבי קשירות מסילתית.

טענה 11.21. אם $(\mathbb{X},\tau)$ קשיר וקשיר מסילתית מקומית, אז הוא קשיר מסילתית.