משתנים מקריים

תורת ההסתברות (1) - חלק שני

נכתב ע״י שריה אנסבכר

תוכן העניינים

1 התחלה **2**

1.1 הגדרות בסיסיות 2

1.2 התפלגות 2

2 הסתברות מותנית ואי-תלות **3**

3 סוגים של משתנים מקריים **4**

3.1 משתנים מקריים בדידים 4

3.2 פונקציית ההתפלגות המצטברת 4

3.3 משתנים מקריים רציפים 5

3.4 משתנים מקריים רציפים בהחלט ופונקציות צפיפות 5

3.5 פונקציית צפיפות משותפת 6

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:

אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה

https://math.srayaa.com

1 התחלה

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, ויהי $(E, \mathcal{F}_E)$ **מרחב מדיד**.

1.1 הגדרות בסיסיות

♣ עד כה, בכל פעם שרצינו לתאר שתי שאלות הסתברותיות שונות, היינו צריכים להגדיר שתי פונקציות הסתברות שונות אפילו אם מבחינה מעשית שתי השאלות חלו על אותו "ניסוי". לדוגמה: מטילים שתי קוביות, מהי ההסתברות שבאחת הקוביות יצא המספר 2? ומהי ההסתברות שסכום המספרים שיצאו הוא 2?
זה היה די מייגע, ולכן נרצה למצוא דרך לפרמל שתי שאלות על אותו "ניסוי" ע"י מרחב הסתברות יחיד, הדרך לכך היא הגדרת משתנים מקריים.

הגדרה 1.1. משתנה מקרי
פונקציה מדידה $X : \Omega \to E$ תיקרא משתנה מקרי, ובמקרה שבו $E = \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) נאמר גם ש-X היא וקטור מקרי.

♣ כך למשל במקרה של הטלת שתי הקוביות נשתמש בפונקציית ההסתברות האחידה $\mathbb{P} : [6]^2 \to \mathbb{R}$ על $\left([6]^2, \mathcal{P}\left([6]^2\right)\right)$, ונגדיר שני משתנים מקריים:

$$X\left((\omega_1, \omega_2)\right) := \begin{cases} 1 & \omega_1 = 2 \vee \omega_2 = 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$Y\left((\omega_1, \omega_2)\right) := \omega_1 + \omega_2$$

כעת ההסתברות לכך שבאחת משתי הקוביות יצא 2 היא $\mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\{1\}\right)\right)$, וההסתברות לכך שסכום שתי הקוביות הוא 2 היא $\mathbb{P}\left(Y^{-1}\left(\{2\}\right)\right)$.

♣ עוד דבר מייגע שהיה בשיטה הקודמת הוא שבכל פעם שרצינו לדבר על מאורע היינו צריכים להגדיר קבוצה שתתאר את אותו מאורע, כאשר הרבה יותר נוח לכתוב פסוק המתאר את המאורע.

תזכורת: משפט (או טענה) הוא פסוק שמנוסח באופן כללי ע"י שימוש במשתנה שאינו מוגדר, ורק לאחר שמגדירים את המשתנה הופך המשפט לפסוק. לדוגמה: $x^2 = x$ אינו פסוק (שכן x אינו מוגדר), אך הוא אכן משפט.

סימון: לכל משפט P נתייחס ל-P כמאורע $\{\omega \in \Omega \mid P(\omega) = \text{True}\}$ (ניתן להבדיל בין שתי המשמעויות לפי ההקשר).

♣ בדרך כלל נשתמש בסימון זה יחד עם משתנים מקריים, כך לדוגמה ההסתברות $\mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\{1\}\right)\right)$ שהוזכרה לעיל ניתנת לתיאור באמצעות $\mathbb{P}(X = 1)$.

תזכורת: הפונקציה המציינת של קבוצה A המוכלת בקבוצה B (ביחס ל-B), היא הפונקציה $\chi_A : B \to \{0, 1\}$ המוגדרת ע"י (לכל $b \in B$):

$$\chi_A(b) := \begin{cases} 1 & b \in A \\ 0 & b \notin A \end{cases}$$

סימון מקובל נוסף לפונקציה המציינת הוא $\mathbb{1}_A$ או $\mathbb{1}(A)$.

הגדרה 1.2. משתנה מציין של מאורע $A \in \mathcal{F}$ הוא הפונקציה המציינת של A.

1.2 התפלגות

הגדרה 1.3. התפלגות
יהי $X : \Omega \to E$ משתנה מקרי; הפונקציה $\mathbb{P}_X : \mathcal{F}_E \to \mathbb{R}$, המוגדרת ע"י (לכל $S \in \mathcal{F}_E$):

$$\mathbb{P}_X(S) := \mathbb{P}\left(X^{-1}(S)\right) = \mathbb{P}(X \in S)$$

תיקרא ההתפלגות של X.

הסכמה: בהינתן קבוצות A ו-B, ופונקציה $f : A \to B^n$, נסמן ב-$f_1, f_2, \ldots, f_n$ את הפונקציות המקיימות $f(a) = (f_1(a), f_2(a), \ldots, f_n(a))$ (לכל $a \in A$). ולהפך, בהינתן פונקציות $f_1, f_2, \ldots, f_n : A \to B$, נסמן ב-$f$ את הפונקציה המוגדרת ע"י $f(a) := (f_1(a), f_2(a), \ldots, f_n(a))$ לכל ($a \in A$).

הגדרה 1.4. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to E^k$ משתנים מקריים, $\mathbb{P}_X$ תיקרא <u>ההתפלגות המשותפת</u> של $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ו-$\mathbb{P}_{X_1}, \mathbb{P}_{X_2}, \ldots, \mathbb{P}_{X_n}$ תיקראנה <u>ההתפלגויות השוליות</u> של X.

טענה 1.5. לכל משתנה מקרי $X : \Omega \to E$, פונקציית ההתפלגות $\mathbb{P}_X$ היא פונקציית הסתברות על $(E, \mathcal{F}_E)$, כלומר $(E, \mathcal{F}_E, \mathbb{P}_X)$ הוא מרחב הסתברות.

הגדרה 1.6.

- נאמר ששני משתנים מקריים $X, Y : \Omega \to E$ <u>שווים כמעט תמיד</u>, אם $\mathbb{P}(X = Y) = 1$, ובמקרה כזה נסמן $X \overset{\text{a.s.}}{=} Y$.
  ובאופן כללי, נאמר ש-X ו-Y <u>מקיימים יחס $\sim$ כמעט תמיד</u>, ונסמן $X \overset{\text{a.s.}}{\sim} Y$ אם $\mathbb{P}(X \sim Y) = 1$.
- נאמר ש-X ו-Y <u>שווי-התפלגות</u> אם $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$, ובמקרה כזה נסמן $X \overset{\text{d}}{=} Y$.

מסקנה 1.7. לכל שני משתנים מקריים $X, Y : \Omega \to E$ כך ש-$X \overset{\text{a.s.}}{=} Y$, מתקיים גם $X \overset{\text{d}}{=} Y$.

טענה 1.8. לכל שני משתנים מקריים $X, Y : \Omega \to E$ כך ש-$X \overset{\text{d}}{=} Y$, ולכל פונקציה $f : E \to E$, מתקיים $f \circ X \overset{\text{d}}{=} f \circ Y$.

2 הסתברות מותנית ואי-תלות

סימון: יהי $A \in \mathcal{F}$ מאורע (או משפט המייצג מאורע כדלעיל) כך ש-$\mathbb{P}(A) > 0$, כשנכתוב $X \mid A$ נתכוון ל-X כמשתנה מקרי מעל מרחב ההסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_A)$. בפרט ההתפלגות של $X \mid A$ היא הפונקציה $\mathbb{P}_{X|A}$ המוגדרת ע"י (לכל $S \in \mathcal{F}_E$):

$$\mathbb{P}_{X|A}(S) = \mathbb{P}_A(X \in S)$$

טענה 2.1. לכל שני משתנים מקריים $X, Y : \Omega \to E$ כך ש-$X \overset{\text{d}}{=} Y$, ולכל $S \in \mathcal{F}_E$ כך ש-$\mathbb{P}(X \in S) > 0$, מתקיים $X \mid X \in S \overset{\text{d}}{=} Y \mid Y \in S$.

הגדרה 2.2. נאמר שמשתנים מקריים $X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to E$ <u>בלתי-תלויים</u>, אם לכל $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathcal{F}_E$ המאורעות $X_1 \in S_1, X_2 \in S_2, \ldots, X_n \in S_n$ בלתי-תלויים.

הגדרה 2.3. נאמר שקבוצת משתנים מקריים $\mathcal{A} \subseteq E^\Omega$ (לאו דווקא סופית) היא <u>בלתי-תלויה</u>, אם כל תת-קבוצה סופית של $\mathcal{A}$ היא בלתי-תלויה.

טענה 2.4. יהיו $X, Y : \Omega \to E$ משתנים מקריים. אם לכל $S_1, S_2 \in \mathcal{F}_E$ מתקיים $(Y \mid X \in S_1) \overset{\text{d}}{=} (Y \mid X \in S_2)$, אז X ו-Y בלתי-תלויים, ולכל $S \in \mathcal{F}_E$ מתקיים $Y \overset{\text{d}}{=} (Y \mid X \in S)$.

יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to E$ משתנים מקריים.

טענה 2.5. אם $X_1, X_2, \ldots, X_n$ בלתי-תלויים אם"ם לכל $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathcal{F}_E$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(\forall n \geq i \in \mathbb{N}\ X_i \in S_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in S_i)$$

מסקנה 2.6. אם $X_1, X_2, \ldots, X_n$ בלתי-תלויים, אז ההתפלגות המשותפת שלהם נקבעת ביחידות ע"י ההתפלגויות שלהם. כלומר אם $X_1, X_2, \ldots, X_n$ בלתי-תלויים, אז לכל k משתנים מקריים בלתי-תלויים $X'_1, X'_2, \ldots, X'_k : \Omega \to E$ כך ש-$X'_i \overset{\text{d}}{=} X_i$ לכל $k \geq i \in \mathbb{N}$ מתקיים $(X_1, X_2, \ldots, X_k) \overset{\text{d}}{=} (X'_1, X'_2, \ldots, X'_k)$.

טענה 2.7. אם $X_1, X_2, \ldots, X_n$ בלתי-תלויים, אז לכל $f_1, f_2, \ldots, f_n : E \to E$, גם המשתנים המקריים $f_1 \circ X_1, f_2 \circ X_2, \ldots, f_n \circ X_n$ בלתי-תלויים.

מסקנה 2.8. יהיו $b_0, b_1, \ldots, b_l \in \mathbb{N}_0$ כך ש-$0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_l = n$,
ולכל $l \geq i \in \mathbb{N}_0$ נסמן $Y_i := \left(X_{b_{i-1}+1}, X_{b_{i-1}+2}, \ldots, X_{b_i}\right)$.
אם $X_1, X_2, \ldots, X_n$ בלתי-תלויים אז גם $Y_1, Y_2, \ldots, Y_l$ בלתי-תלויים.

טענה 2.9. לכל סדרת משתנים מקריים בלתי-תלויים, $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, ולכל סדרת תתי-קבוצות $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ של E מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(\forall n \in \mathbb{N}\ X_n \in S_n\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X_n \in S_n\right)$$

מסקנה 2.10. אם $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ הוא מרחב הסתברות בדידה, אז לא קיימת קבוצה אין-סופית של משתנים מקריים בלתי-תלויים בעלי התפלגות זהה שאינה התפלגות קבועה.

3 סוגים של משתנים מקריים

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

3.1 משתנים מקריים בדידים

יהי $(E, \mathcal{F}_E)$ מרחב מדיד.

הגדרה 3.1. משתנה מקרי בדיד
משתנה מקרי $X : \Omega \to E$ ייקרא <u>בדיד</u>, אם פונקציית ההתפלגות שלו ($\mathbb{P}_X$) היא פונקציית הסתברות בדידה.
במקרה כזה פונקציית ההסתברות הנקודתית המתאימה ל-$\mathbb{P}_X$, שתסומן ב-p_X, תיקרא <u>ההתפלגות הנקודתית</u> של X; והתומך של p_X, שיסומן ב-$\mathrm{Supp}\left(X\right)$, ייקרא גם <u>התומך</u> של X.

מסקנה 3.2. משתנה מקרי $X : \Omega \to E$ הוא בדיד אס"ם $\sum_{x \in E} \mathbb{P}\left(X = x\right) = 1$.

טענה 3.3. משתנה מקרי $X : \Omega \to E^n$ הוא בדיד אס"ם $X_1, X_2, \ldots, X_n$ הם משתנים מקריים בדידים.

משפט 3.4. נוסחת ההסתברות השלמה - גרסה בדידה
יהיו $X, Y : \Omega \to E$ שני משתנים מקריים בדידים, לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$p_X\left(x\right) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}\left(X = x \wedge Y = y\right)$$

ואם נסמן $\tilde{E} := \{y \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\left(Y = y\right) > 0\}$ אז מתקיים גם:

$$p_X\left(x\right) = \sum_{y \in \tilde{E}} \mathbb{P}\left(Y = y\right) \cdot \mathbb{P}\left(X = x \mid Y = y\right)$$

3.2 פונקציית ההתפלגות המצטברת

הגדרה 3.5. יהי $X : \Omega \to \mathbb{R}$ משתנה מקרי.

- <u>פונקציית ההתפלגות המצטברת</u> של X היא הפונקציה $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $a \in \mathbb{R}$):

$$F_X\left(a\right) := \mathbb{P}\left(X \leq a\right)$$

- <u>פונקציית ההתפלגות השיורית</u> של X היא הפונקציה $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $a \in \mathbb{R}$):

$$\overline{F_X}\left(a\right) := \mathbb{P}\left(X > a\right)$$

מסקנה 3.6. משתנה מקרי $X : \Omega \to \mathbb{R}$ הוא בדיד אס"ם מתקיים (לכל $a \in \mathbb{R}$):

$$F_X\left(a\right) = \sum_{x \in (-\infty, a]} p_X\left(x\right)$$

משפט 3.7. תכונות פונקציית ההתפלגות המצטברת
יהי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ משתנה מקרי, מתקיימות התכונות הבאות:

- F_X מונוטונית עולה.
- $\lim_{s\to-\infty}F_X(s)=0$ ו-$\lim_{s\to\infty}F_X(s)=1$.
- F_X רציפה מימין בכל נקודה.
- $F_X(a)-\lim_{s\to a^-}F_X(s)=\mathbb{P}(X=a)$ לכל $a\in\mathbb{R}$.
- $F_X(b)-F_X(a)=\mathbb{P}(a<X\le b)$ לכל $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a\le b$.

משפט 3.8. תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, אם F מקיימת את שלוש התכונות הראשונות במשפט הקודם (3.7), אז קיים משתנה מקרי על מרחב הסתברות כלשהו כך ש-F היא פונקציית ההתפלגות המצטברת שלו.

טענה 3.9. יהיו $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ שני משתנים מקריים, מתקיים $X\overset{d}{=}Y$ אם"ם $F_X=F_Y$.

3.3 משתנים מקריים רציפים

הגדרה 3.10. משתנה מקרי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ ייקרא <u>רציף</u> אם F_X היא פונקציה רציפה.

מסקנה 3.11. יהי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ משתנה מקרי, התנאים הבאים שקולים:

- X הוא משתנה מקרי רציף
- F_X רציפה משמאל בכל נקודה
- $\mathbb{P}(X=a)=0$ לכל $a\in\mathbb{R}$
- $\sum_{a\in\mathbb{R}}\mathbb{P}(X=a)=0$

מסקנה 3.12. יהי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ משתנה מקרי, אם X רציף אז לכל $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a\le b$ מתקיים:

$$\begin{aligned}F_X(b)-F_X(a)&=\mathbb{P}(a<X\le b)=\mathbb{P}(a<X<b)\\&=\mathbb{P}(a\le X<b)=\mathbb{P}(a\le X\le b)\end{aligned}$$

3.4 משתנים מקריים רציפים בהחלט ופונקציות צפיפות

הגדרה 3.13. משתנה מקרי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ ייקרא <u>רציף בהחלט</u> אם F_X היא פונקציה **רציפה בהחלט**.

מסקנה 3.14. משתנה מקרי רציף בהחלט הוא בפרט משתנה מקרי רציף.

תזכורת: פונקציה $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא רציפה בהחלט אם"ם קיימת פונקציה אינטגרבילית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שמתקיים (לכל $a\in\mathbb{R}$):

$$F(a)=\int_{-\infty}^{a}f(s)\ ds$$

הגדרה 3.15. יהי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ משתנה מקרי רציף בהחלט, פונקציה אינטגרבילית $f_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת (לכל $a\in\mathbb{R}$):

$$F_X(a)=\int_{-\infty}^{a}f_X(s)\ ds$$

תיקרא <u>פונקציית צפיפות</u> של X.

♣ נשים לב לדמיון בין פונקציית צפיפות לבין פונקציית ההתפלגות הנקודתית, כפי שמשתקף בדמיון שבין הגדרת הראשונה לבין מסקנה 3.6. דמיון זה עתיד לחזור על עצמו פעמים רבות בזוגות של משפטים מקבילים שבאחד תופיע פונקציית ההתפלגות הנקודתית עבור משתנה מקרי בדיד, ובשני תופיע פונקציית הצפיפות עבור משתנה מקרי רציף בהחלט.

סימון: פונקציית צפיפות של משתנה מקרי אינה יחידה, לדוגמה: בהינתן אחת כזו - כל שינוי שלה במספר סופי של נקודות יניב גם הוא פונקציית צפיפות[1]. למרות זאת אנחנו נדבר על פונקציית **ה**צפיפות של משתנה מקרי רציף בהחלט, ונסמן אותה ב-f_X, מפני שכל פונקציות הצפיפות שלו זהות בכל נקודה למעט בקבוצה ממידה אפס.

מסקנה 3.16. יהי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ משתנה מקרי רציף בהחלט. לכל $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a\le b$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(a<X<b\right)=F_X\left(b\right)-F_X\left(a\right)=\int\limits_a^b f_X\left(s\right)\ ds$$

$$\mathbb{P}\left(X>a\right)=1-F_X\left(a\right)=\int\limits_a^\infty f_X\left(s\right)\ ds$$

משפט 3.17. כל פונקציית צפיפות היא פונקציה אי-שלילית, ולכל פונקציה אינטגרבילית ואי-שלילית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(s\right)\ ds=1$$

קיים משתנה מקרי רציף בהחלט על מרחב הסתברות כלשהו כך ש-f היא פונקציית צפיפות שלו.

3.5 פונקציית צפיפות משותפת

הגדרה 3.18. נאמר שלשני משתנים מקריים $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ יש <u>צפיפות משותפת</u>, אם קיימת פונקציה אינטגרבילית ואי-שלילית $f_{X,Y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ כך שמתקיים (לכל $a,b\in\mathbb{R}$):

$$\mathbb{P}\left(X\le a\wedge Y\le b\right)=\int\limits_{-\infty}^{a}\int\limits_{-\infty}^{b} f_{X,Y}\left(x,y\right)dydx$$

פונקציה כזו תיקרא <u>פונקציית צפיפות משותפת</u> של X ו-Y.

♣ נשים לב לדמיון בין פונקציית צפיפות לבין הפונקציה $(x,y)\mapsto\mathbb{P}\left(X=x\wedge Y=y\right)$ עבור משתנים מקריים בדידים, זו האחרונה מקיימת:

$$\mathbb{P}\left(X\le a\wedge Y\le b\right)=\sum_{x\in(-\infty,a]}\sum_{y\in(-\infty,b]}\mathbb{P}\left(X=x\wedge Y=y\right)$$

סימון: כפי שפונקציית צפיפות של משתנה מקרי אינה יחידה, גם פונקציית צפיפות משותפת של שני משתנים מקריים אינה יחידה. למרות זאת אנחנו נדבר על פונקציית **ה**צפיפות **ה**משותפת של משתנים מקריים X ו-Y, ונסמן אותה ב-$f_{X,Y}$, מפני שכל פונקציות הצפיפות המשותפות שלהם זהות בכל נקודה למעט בקבוצה ממידה אפס.

יהיו $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ שני משתנים מקריים.

מסקנה 3.19. לכל $x,y\in\mathbb{R}$ כך ש-$f_Y\left(y\right)\neq 0$ ו-f_Y רציפה ב-Y, מתקיים:

$$f_{X|Y=y}\left(x\right)=\frac{f_{X,Y}\left(x,y\right)}{f_Y\left(y\right)}$$

מסקנה 3.20. חוק בייס[2] - גרסה רציפה

לכל $x,y\in\mathbb{R}$ כך ש-$f_X\left(x\right)\neq 0$, $f_Y\left(y\right)\neq 0$, ובנוסף f_X רציפה ב-x ו-f_Y רציפה ב-y, מתקיים:

$$f_{X|Y=y}\left(x\right)=\frac{f_X\left(x\right)}{f_Y\left(y\right)}\cdot f_{Y|X=x}\left(y\right)$$

---

[1] למעשה כל שינוי שלה בקבוצה ממידה אפס יניב פונקציית צפיפות - בתנאי שאינו פוגע באינטגרביליות של הפונקציה. אם נפרש את האינטגרל שבהגדרה כ**אינטגרל לבג** (ולא כאיטגרל רימן), הרי שאין צורך בהסתייגות זו משום ששינוי של הפונקציה בקבוצה ממידה אפס אכן לא יפגע באינטגרביליות.

[2] על שם תומאס בייס.

משפט 3.21. נוסחת ההסתברות השלמה - גרסה רציפה
אם X ו-Y בעלי צפיפות משותפת אז הם רציפים בהחלט, ומתקיים (לכל $x \in \mathbb{R}$):

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

וכן (לכל $y \in \mathbb{R}$):

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

בנוסף, אם נסמן $R_X = \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X = x) > 0\}$ ו-$R_Y = \{y \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(Y = y) > 0\}$, אז מתקיים גם:

$$f_X(x) = \int_{y \in R_Y} f_Y(y) \cdot f_{X|Y=y}(x)\,dy$$
$$f_Y(y) = \int_{x \in R_X} f_X(x) \cdot f_{Y|X=x}(y)\,dx$$

מסקנה 3.22. התנאים הבאים שקולים:

- X ו-Y רציפים בהחלט ובלתי-תלויים.
- X ו-Y בעלי צפיפות משותפת ומתקיים $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ (לכל $x, y \in \mathbb{R}$ כך ש-$f_X(x) \neq 0$, $f_Y(y) \neq 0$, ובנוסף f_X רציפה ב-x ו-f_Y רציפה ב-y).
- X ו-Y רציפים בהחלט, ולכל $y \in \mathbb{R}$ כך ש-$f_Y(y) \neq 0$ ו-f_Y רציפה ב-y מתקיים $f_{X|Y=y}(x) = f_X(x)$.

טענה 3.23. אם X ו-Y בעלי צפיפות משותפת אז גם X ו-$Z := X+Y$ בעלי צפיפות משותפת, ומתקיים $f_{X,Z}(x,z) = f_{X,Y}(x, z-x)$ (לכל $x, z \in \mathbb{R}$).

מסקנה 3.24. נוסחת הקונבולוציה
אם X ו-Y רציפים בהחלט ובלתי-תלויים, אז $Z := X + Y$ הוא משתנה מקרי רציף בהחלט, ומתקיים (לכל $z \in \mathbb{R}$):

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\,dx$$

טענה 3.25. תהא $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית, ונסמן $Z := g(X,Y)$[3]. אם X ו-Y בעלי צפיפות משותפת אז:

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \cdot f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$$

[3] כלומר $Z(\omega) := g(X(\omega), Y(\omega))$ לכל $\omega \in \Omega$.