מרחבי מכפלה פנימית

אלגברה לינארית (2) - חלק שלישי

נכתב ע״י שריה אנסבכר

תוכן העניינים

1 מכפלות פנימיות 2

1.1 הגדרות בסיסיות 2

1.2 דוגמאות חשובות 4

1.3 ניצבות 5

1.4 נורמה ומרחק 6

1.5 בסיסים אורתונורמליים 9

1.6 הטלות אורתוגונליות 13

2 מרחבים דואליים וההעתקה הצמודה 15

2.1 במרחבים וקטוריים כלליים 15

2.2 במרחבי מכפלה פנימית 18

3 העתקות אוניטריות 23

3.1 העתקות אוניטריות שאינן בהכרח אופרטורים 23

3.2 אופרטורים אוניטריים 27

4 אופרטורים הרמיטיים ואופרטורים נורמליים 32

4.1 התחלה 32

4.2 המשפט הספקטרלי 37

4.2.1 ליכסון בבסיס אורתונורמלי 37

4.2.2 במרחבים הרמיטיים 37

4.2.3 במרחבים אוקלידיים 39

4.3 אלגוריתם לליכסון אורתוגונלי/אוניטרי 40

5 רשימות לזיכרון 41

תודתי נתונה לגלעד שרם על סיכומיו המצוינים שהיו לי לעזר רב עד כדי כך שניתן לומר שהסיכום הזה מבוסס על סיכומיו.

סיכומי קורס זה מוקדשים לאהרון כהן;
אהרון, הידיעה שתקרא את הסיכומים הללו דרבנה אותי לאורך כל הדרך.
בהצלחה!

***

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:
אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה
https://math.srayaa.com

1 מכפלות פנימיות

1.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1. מכפלה פנימית מעל הממשיים
יהי V מ״ו מעל $\mathbb{R}$, פונקציה $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ תיקרא מכפלה פנימית על V אם לכל $v, w, u \in V$ ולכל $\lambda \in \mathbb{R}$ מתקיימות התכונות הבאות:

1. בי-לינאריות:

$$\begin{aligned}\langle v \mid w+u \rangle &= \langle v \mid w \rangle + \langle v \mid u \rangle \\ \langle v \mid \lambda \cdot w \rangle &= \lambda \cdot \langle v \mid w \rangle \\ \langle v+u \mid w \rangle &= \langle v \mid w \rangle + \langle u \mid w \rangle \\ \langle \lambda \cdot v \mid w \rangle &= \lambda \cdot \langle v \mid w \rangle\end{aligned}$$

2. סימטריה:

$$\langle w \mid v \rangle = \langle v \mid w \rangle$$

3. חיוביות בהחלט:

$$\langle v \mid v \rangle \geq 0$$

$$\langle v \mid v \rangle = 0 \iff v = 0_V$$

מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, שמוגדרת עליו מכפלה פנימית, נקרא מרחב מכפלה פנימית (להלן גם: ממ״פ), ואם הוא נוצר סופית נקרא גם מרחב אוקלידי.

♣ אם נקבע את אחד הרכיבים נקבל העתקה לינארית: ההעתקה $l_v : V \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע״י $l_v(w) := \langle v \mid w \rangle = \langle w \mid v \rangle$ לכל $w \in V$ היא העתקה לינארית - הלינאריות נובעת מהלינאריות של המכפלה הפנימית ברכיב השני.

הגדרה 1.2. מכפלה פנימית מעל המרוכבים
יהי V מ״ו מעל $\mathbb{C}$, פונקציה $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ תיקרא מכפלה פנימית או מכפלה הרמיטית[1] על V אם היא לכל $v, w, u \in V$ ולכל $\lambda \in \mathbb{C}$ מתקיימות התכונות הבאות:

1. לינאריות למחצה[2]:

$$\begin{aligned}\langle v \mid w+u \rangle &= \langle v \mid w \rangle + \langle v \mid u \rangle \\ \langle v \mid \lambda \cdot w \rangle &= \lambda \cdot \langle v \mid w \rangle \\ \langle v+u \mid w \rangle &= \langle v \mid w \rangle + \langle u \mid w \rangle \\ \langle \lambda \cdot v \mid w \rangle &= \overline{\lambda} \cdot \langle v \mid w \rangle\end{aligned}$$

2. סימטריה הרמיטית:

$$\langle w \mid v \rangle = \overline{\langle v \mid w \rangle}$$

3. חיוביות בהחלט:

$$\langle v \mid v \rangle \geq 0$$

$$\langle v \mid v \rangle = 0 \iff v = 0_V$$

מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$, שמוגדרת עליו מכפלה פנימית, נקרא גם הוא מרחב מכפלה פנימית (להלן גם: ממ״פ), ואם הוא נוצר סופית נקרא בנוסף מרחב הרמיטי או מרחב אוניטרי.

[1] על שם שארל הרמיט.
[2] תכונה זו נקראת גם ״אנטי-לינארית״ או ״לינארית-צמודה״.

♣ נשים לב שלכל $v \in V$ מתקיים $\overline{\langle v \mid v \rangle} = \langle v \mid v \rangle$ ולכן $\langle v \mid v \rangle \in \mathbb{R}$, מסיבה זו לא היינו צריכים לדרוש ש-$\langle v \mid v \rangle \in \mathbb{R}$ לכל $v \in V$ במסגרת החיוביות בהחלט.

♣ אם נקבע את הרכיב השמאלי נקבל העתקה לינארית: ההעתקה $l_v : V \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $l_v(w) := \langle v \mid w \rangle$ לכל $w \in V$ היא העתקה לינארית - הלינאריות נובעת מהלינאריות של המכפלה הפנימית ברכיב הימני.

♣ במקומות אחרים (כמו ויקיפדיה) מחליפים בין שני הרכיבים: ברכיב השמאלי יש לינאריות מלאה וברכיב הימני מתקיים $\langle v \mid \lambda \cdot w \rangle = \overline{\lambda} \cdot \langle v \mid w \rangle$.

♣ ניתן היה להגדיר את שתי המכפלות בבת אחת בצורה המינימליסטית הבאה:

הגדרה. יהי V מ"ו מעל לשדה $\mathbb{F}$ כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, פונקציה $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ תיקרא <u>מכפלה פנימית</u> על V אם היא לכל $v, w, u \in V$ ולכל $\lambda \in \mathbb{F}$ מתקיימות התכונות הבאות:

1. לינאריות ברכיב הימני:

$$\langle v \mid w + u \rangle = \langle v \mid w \rangle + \langle v \mid u \rangle$$
$$\langle v \mid \lambda \cdot w \rangle = \lambda \cdot \langle v \mid w \rangle$$

2. סימטריה הרמיטית:

$$\langle w \mid v \rangle = \overline{\langle v \mid w \rangle}$$

3. חיוביות בהחלט:

$$\langle v \mid v \rangle \geq 0$$
$$\langle v \mid v \rangle = 0 \iff v = 0_V$$

כשמדובר ב-$\mathbb{R}$ ההצמדה של הסימטריה ההרמיטית אינה משנה דבר ומדובר בסימטריה רגילה, אנחנו נשתמש בקיצור הדרך הזה פעמים רבות מבלי להזכיר זאת.

את הלינאריות למחצה ברכיב השמאלי היינו מקבלים מהלינאריות ברכיב הימני ומהסימטריה ההרמיטית:

$$\langle v + u \mid w \rangle = \overline{\langle w \mid v + u \rangle} = \overline{\langle w \mid v \rangle + \langle w \mid u \rangle} = \overline{\langle w \mid v \rangle} + \overline{\langle w \mid u \rangle} = \langle v \mid w \rangle + \langle u \mid w \rangle$$
$$\langle \lambda \cdot v \mid w \rangle = \overline{\langle w \mid \lambda \cdot v \rangle} = \overline{\lambda \cdot \langle w \mid v \rangle} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\langle w \mid v \rangle} = \overline{\lambda} \cdot \langle v \mid w \rangle$$

למעשה זוהי הסיבה לכך שלא היינו יכולים לדרוש לינאריות מלאה ברכיב השמאלי (במכפלה ההרמיטית), היינו מקבלים סתירה.

♣ אי אפשר לדרוש סימטריה רגילה במקום סימטריה הרמיטית (מעל $\mathbb{C}$) מפני שתכונת החיוביות במכפלה הפנימית מחייבת ש-$\langle v \mid v \rangle \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ לכל $v \in V$ (שהרי $\mathbb{C}$ אינו שדה סדור), ולכן הדרישה לסימטריה רגילה תוביל לדרישת הסימטריה ההרמיטית שכן לכל $v, w \in V$ יתקיים:

$$\overline{\langle v \mid v \rangle} + \overline{\langle v \mid w \rangle} + \overline{\langle w \mid v \rangle} + \overline{\langle w \mid w \rangle} = \overline{\langle v + w \mid v + w \rangle} = \langle v + w \mid v + w \rangle = \langle v \mid v \rangle + \langle v \mid w \rangle + \langle w \mid v \rangle + \langle w \mid w \rangle$$
$$\Rightarrow \overline{\langle v \mid w \rangle} + \overline{\langle w \mid v \rangle} = \langle v \mid w \rangle + \langle w \mid v \rangle$$

סימטריה רגילה תיתן כאן $2 \cdot \overline{\langle v \mid w \rangle} = 2 \cdot \langle v \mid w \rangle$ ומכאן שנקבל סימטריה הרמיטית.

1.2 דוגמאות חשובות

יהי $\mathbb{F}$ אחד משני השדות $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.

דוגמה 1.3. הדוגמה הקלאסית למכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$ היא פונקציית המכפלה הסקלרית[3] $\cdot : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ המוגדרת ע"י (לכל $x, y \in \mathbb{F}^n$):

$$x \cdot y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \overline{x_1} \cdot y_1 + \overline{x_2} \cdot y_2 + \ldots + \overline{x_n} \cdot y_n$$

סימון: לכל $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ נסמן ב-A^* את המטריצה המוגדרת ע"י $[A^*]_{ij} := \overline{[A^t]_{ij}}$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ ולכל $m \geq j \in \mathbb{N}$ (כלומר A^* היא A לאחר שחלוף והצמדת כל איבר ולכן אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז $A^* = A^t$), A^* נקראת הצמודה ההרמיטית של A ופעולה זו נקראת הצמדת מטריצה. מהלינאריות של פעולת ההצמדה במרוכבים נובעות כל התכונות של המטריצה המשוחלפת, לכל $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ולכל מטריצה הפיכה $P \in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים:

$$(A^*)^* = A \qquad (A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$$
$$(A + B)^* = A^* + B^* \qquad \left(P^{-1}\right)^* = (P^*)^{-1}$$
$$(\lambda \cdot A)^* = \overline{\lambda} \cdot A^*$$

♣ כך ניתן להסתכל על המכפלה הסקלרית ככפל מטריצות - מתקיים $x \cdot y = x^* \cdot y$ כאשר הכפל באגף שמאל הוא המכפלה הסקלרית והכפל באגף ימין הוא מכפלת מטריצת שורה במטריצת עמודה ואנו משתמשים באיזומורפיזם בין $M_1(\mathbb{F})$ ל-$\mathbb{F}$.

דוגמה 1.4. הפונקציה $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : M_n(\mathbb{F}) \times M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ המוגדרת ע"י (לכל $A, B \in M_n(\mathbb{F})$)[4]:

$$\langle A \mid B \rangle := \operatorname{tr}(A^* \cdot B)$$

היא מכפלה פנימית על המרחב הווקטורי $M_n(\mathbb{F})$.

הגדרה 1.5. יהיו $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ממ"פ מעל ל-$\mathbb{F}$ (נסמן ב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_i$ את המכפלה הפנימית של V_i לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$) - בקורס הקודם ראינו ש-$V := V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ הוא מרחב וקטורי מעל ל-$\mathbb{F}$ כשהחיבור הווקטורי והכפל בסקלר מוגדרים איבר איבר, הפונקציה $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ המוגדרת ע"י (לכל $(v_1, v_2, \ldots, v_n), (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in V$):

$$\langle (v_1, v_2, \ldots, v_n) \mid (w_1, w_2, \ldots, w_n) \rangle := \langle v_1 \mid w_1 \rangle_1 + \langle v_2 \mid w_2 \rangle_2 + \ldots + \langle v_n \mid w_n \rangle_n$$

היא מכפלה פנימית על המרחב הווקטורי $V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$.

♣ נניח לרגע ש-$V_i = \mathbb{F}^m$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$, אם כן ראינו בקורס הקודם ש-V איזומורפי למרחב הווקטורי $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ (ניתן להסתכל על מטריצה ב-$M_{m \times n}(\mathbb{F})$ כסדרה באורך n של וקטורים ב-$\mathbb{F}^m$), וראו איזה פלא - ע"פ אותו איזומורפיזם המכפלה הפנימית של V זהה למכפלה הפנימית של $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ($\langle A \mid B \rangle := \operatorname{tr}(A^* \cdot B)$).

דוגמה 1.6. יהי $C[a, b]$ מרחב הפונקציות הרציפות על קטע סגור $[a, b]$, הפונקציה $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י (לכל $f, g \in C[a, b]$):

$$\langle f \mid g \rangle := \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx$$

היא מכפלה פנימית על המרחב הווקטורי $C[a, b]$ מעל $\mathbb{R}$.

♣ ראינו באינפי' 2 ש-$R[a, b]$ (קבוצת הפונקציות האינטגרביליות רימן על $[a, b]$) היא מרחב וקטורי, הסיבה לדרישה שהפונקציות תהיינה רציפות דווקא היא החיוביות בהחלט של המכפלה הפנימית: אם נתיר גם לפונקציות לא רציפות להצטרף יהיו לנו וקטורים (פונקציות) שונים מאפס שהמכפלה הפנימית שלהם עם עצמם היא 0, לעומת זאת ראינו שפונקציית האפס היא הפונקציה הרציפה היחידה שמקיימת $\int_a^b f(x) \cdot f(x)\, dx = 0$.

---

[3] במקורות מסוימים המכפלה הסקלרית היא שם נרדף למכפלה פנימית, בסיכום זה אנחנו נפריד בין המושגים: המושג "מכפלה סקלרית" יתייחס אך ורק למכפלה הפנימית המסוימת שמוצגת כאן, ואילו המושג "מכפלה פנימית" יהווה שם כולל (כלומר המכפלה הסקלרית היא **מקרה פרטי** של מכפלה פנימית.

[4] נזכיר ש-$\operatorname{tr}(M)$ היא העקבה (trace) של המטריצה M, כלומר זהו סכום האיברים על האלכסון הראשי שלה.

1.3 ניצבות

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל לשדה $\mathbb{F}$.

הגדרה 1.7. לכל $v, w \in V$, ולכל $S, T \subseteq V$:

1. נאמר ש-v ו-w מאונכים זה לזה ונסמן $v \perp w$ אם מתקיים $\langle v \mid w \rangle = 0$.
2. נאמר ש-v מאונך ל-S ונסמן $v \perp S$ אם $v \perp s$ לכל $s \in S$.
3. נאמר ש-S ו-T מאונכות זו לזו ונסמן $S \perp T$ אם מתקיים $s \perp t$ לכל $s \in S$ ולכל $t \in T$.

♣ מי שלמד פיזיקה בתיכון או למד וקטורים כחלק מ-5 יחידות מתמטיקה אולי זוכר שב-$\mathbb{R}^3$[5] לכל שני וקטורים v ו-w מתקיים $v \cdot w = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta$ עבור המכפלה הסקלרית (באגף שמאל) כאשר θ היא הזווית שבין v ל-w על המישור שפורשים שניהם ואז אכן מתקיים $v \cdot w = 0$ אם"ם $\cos\theta = 0$[6], כלומר כאשר $\theta = \frac{\pi}{2}$ (הוכחה והסבר מפורט של כל זה מופיעה בהקדמה).

♣ מההערה הקודמת ניתן להבין שהמכפלה הפנימית בעצם בודקת עד כמה שני וקטורים מצביעים באותו כיוון (כאשר מושג הזווית והכיוון מוגדר ע"י המכפלה הפנימית).

מסקנה 1.8. יהי $v \in V$, מתקיים $v \perp w$ לכל $w \in V$ אם"ם $v = 0_V$.

מסקנה 1.9. יהיו $v_1, v_2 \in V$, מתקיים $\langle v_1 \mid w \rangle = \langle v_2 \mid w \rangle$ לכל $w \in V$ אם"ם $v_1 = v_2$.

מסקנה 1.10. תהא $S \subseteq V$, הקבוצה $\{v \in V \mid \forall s \in S \; v \perp s\}$ היא תמ"ו של V.

הגדרה 1.11. נסמן $S^\perp := \{v \in V \mid \forall s \in S \; v \perp s\}$ ונקרא ל-$S^\perp$ בשם המפתיע המרחב הניצב ל-S[7].

טענה 1.12. לכל $v \in V$, ולכל $S, T \subseteq V$, מתקיים:

1. $v \perp S$ אם"ם $v \perp \text{span}S$.
2. $S \perp T$ אם"ם $\text{span}S \perp \text{span}T$.
3. אם $S \subseteq T$ אז $T^\perp \subseteq S^\perp$.

טענה 1.13. יהי $0_V \neq w \in V$, לכל $v \in V$ קיים סקלר $c \in \mathbb{F}$ יחיד כך שמתקיים $(v - c \cdot w) \perp w$. סקלר זה הוא:

$$c = \frac{\langle w \mid v \rangle}{\langle w \mid w \rangle}$$

♣ נשים לב: $v = (v - c \cdot w) + c \cdot w$, כלומר $c \cdot w$ הוא הרכיב של v בכיוון של w ו-$v - c \cdot w$ הוא הרכיב של v בכיוון המאונך על המישור שפורשים שניהם.

הוכחה. לכל $c \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$0 = \langle w \mid v - c \cdot w \rangle = \langle w \mid v \rangle - c \cdot \langle w \mid w \rangle \iff c = \frac{\langle w \mid v \rangle}{\langle w \mid w \rangle}$$

■

[5] המשוואה הזו מתקיימת גם עבור ממדים גבוהים יותר.
[6] בהנחה שאף אחד מהם אינו וקטור האפס.
[7] ראינו גם את הביטוי העילג "S-ניצב".

הגדרה 1.14. פונקציית ההטלה האורתוגונלית של וקטור $0_V \neq w \in V$ היא הפונקציה $p_w : V \to V$ המוגדרת ע"י (לכל $v \in V$):

$$p_w(v) := \frac{\langle w \mid v \rangle}{\langle w \mid w \rangle} \cdot w$$

♣ זוהי אכן הטלה שכן לכל $v \in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned} p_w(p_w(v)) &= \frac{\langle w \mid p_w(v) \rangle}{\langle w \mid w \rangle} \cdot w = \frac{\left\langle w \;\middle|\; \frac{\langle w \mid v \rangle}{\langle w \mid w \rangle} \cdot w \right\rangle}{\langle w \mid w \rangle} \cdot w \\ &= \frac{\langle w \mid v \rangle}{\langle w \mid w \rangle} \cdot \frac{\langle w \mid w \rangle}{\langle w \mid w \rangle} \cdot w = \frac{\langle w \mid v \rangle}{\langle w \mid w \rangle} \cdot w = p_w(v) \end{aligned}$$

1.4 נורמה ומרחק

הגדרה 1.15. לכל $v \in V$ נגדיר את הנורמה של v ע"י $|v| := \|v\| := \sqrt{\langle v \mid v \rangle}$.

♣ הנורמה היא בעצם "האורך" של וקטור, עבור המכפלה הסקלרית על $\mathbb{R}^3$ זה ממש מתקיים גאומטרית (ראינו את ההסבר לכך בהקדמה), עבור ממדים גבוהים יותר זה עדיין ממש מתקיים גאומטרית אולם קשה יותר לראות זאת, ועבור מכפלות פנימיות אחרות היא רק מקיימת את התכונות שהיינו מצפים מאורך לקיים (ראו מסקנה 1.23).

מסקנה 1.16. לכל $v \in V$ ולכל $c \in \mathbb{F}$ מתקיים $\|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\|$.

משפט 1.17 (משפט הקוסינוסים).
לכל $v, w \in V$ מתקיים:

$$\|v \pm w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \pm 2 \cdot \operatorname{Re} \langle v \mid w \rangle$$

♣ בקובץ ההקדמה ראינו שעבור המכפלה הסקלרית מעל הממשיים מתקיים $\langle v \mid w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta$, כאשר θ היא הזווית שבין v ל-w. מכאן שבמשולש שקודקודיו הם $0_V, v, w$, אורך הצלע שממול לזווית זו הוא $\|v - w\|$, ולכן ע"פ משפט הקוסינוסים הטריגונומטרי מתקיים:

$$\begin{aligned} \|v - w\|^2 &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2 \cdot \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2 \cdot \langle v \mid w \rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2 \cdot \operatorname{Re} \langle v \mid w \rangle \end{aligned}$$

הוכחה. לכל $v, w \in V$ מתקיים:

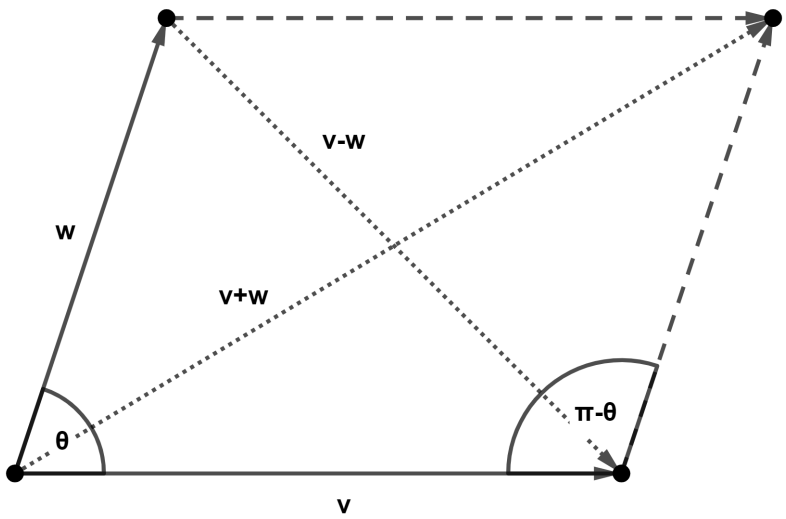
$$\begin{aligned} \|v \pm w\|^2 &= \left(\sqrt{\langle v \pm w \mid v \pm w \rangle}\right)^2 = \langle v \pm w \mid v \pm w \rangle \\ &= \langle v \mid v \pm w \rangle \pm \langle w \mid v \pm w \rangle \\ &= \langle v \mid v \rangle \pm \langle v \mid w \rangle \pm \langle w \mid v \rangle + \langle w \mid w \rangle \\ &= \langle v \mid v \rangle \pm \left(\langle v \mid w \rangle + \overline{\langle v \mid w \rangle}\right) + \langle w \mid w \rangle \\ &= \left(\sqrt{\langle v \mid v \rangle}\right)^2 \pm 2 \cdot \operatorname{Re} \langle v \mid w \rangle + \left(\sqrt{\langle w \mid w \rangle}\right)^2 \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 \pm 2 \cdot \operatorname{Re} \langle v \mid w \rangle \end{aligned}$$

■

מסקנה 1.18 (חוק המקבילית).
לכל $v, w \in V$ מתקיים:

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2 \cdot \left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$$

♣ כמו משפט פיתגורס, גם חוק הוא משפט בגאומטריה אוקלידית, נוכיח אותו במישור[8]:



איור 1: חוק המקבילית

ממשפט הקוסינוסים נובע שמתקיים (כאשר θ היא הזווית הקטנה שבין v ו-w):

$$\begin{aligned}
\|v-w\|^2 &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2 \cdot \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\theta) \\
\|v+w\|^2 &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2 \cdot \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\pi - \theta) \\
&= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \cdot \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\theta)
\end{aligned}$$

ולכן $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2 \cdot \left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$.

מסקנה 1.19 (משפט פיתגורס).
לכל $v, w \in V$ מתקיימים שני הפסוקים הבאים:

- אם $v \perp w$ אז $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.
- אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \iff v \perp w$.

♣ למי שתהה לעצמו: המשפט והמסקנה האחרונים אינם מאפשרים להוכיח את משפט פיתגורס הגאומטרי ואת משפט הקוסינוסים הטריגונומטרי, הרי הגדרנו את הנורמה ע"פ משפט פיתגורס ($\|v\| := \sqrt{\langle v \mid v \rangle}$).

מסקנה 1.20. יהי $0_V \neq w \in V$, לכל $v \in V$ מתקיים $\|v\|^2 = \|v - p_w(v)\|^2 + \|p_w(v)\|^2$.

[8] נשתמש בסימונים v ו-w כווקטורים ב-$\mathbb{R}^2$ אך ההוכחה לא תעשה שום שימוש בתכונות של מרחבים וקטוריים אלא בטריגונומטריה בלבד.

משפט 1.21. אי-שוויון קושי-שוורץ[9]

לכל $v, w \in V$ מתקיים $|\langle v \mid w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$, ומתקיים שוויון אם"ם v ו-w תלויים ליניארית.

♣ א"ש קושי-שוורץ הוא בעצם ההכללה של השוויון $v \cdot w = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta$ ב-$\mathbb{R}^n$ (כאשר θ היא הזווית הקטנה בין v ל-w)[10], והוא מאפשר לנו להגדיר זווית בממ"פ כללי (לא עשינו זאת בכיתה):

$$\theta := \arccos\left(\frac{\langle v \mid w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}\right)$$

הוכחה. אם $w = 0_V$ אז המשפט טריוויאלי, אחרת ע"פ טענה 1.13 והמסקנה האחרונה (1.20) מתקיים $\|v\|^2 = \|v - c \cdot w\|^2 + \|c \cdot w\|^2$ כאשר $c := \frac{\langle w|v\rangle}{\langle w|w\rangle}$.

$$\Rightarrow \|c \cdot w\|^2 \leq \|v\|^2$$

נשים לב שמתקיים $\|c \cdot w\|^2 = \|v\|^2$ אם"ם $\|v - c \cdot w\|^2 = 0$ וזה קורה אם"ם $v - c \cdot w = 0_V$, כלומר כאשר v ו-w תלויים ליניארית.
ע"פ הגדרת c מתקיים:

$$\begin{aligned}
\|c \cdot w\|^2 = |c|^2 \cdot \|w\|^2 &= \left|\frac{\langle w \mid v\rangle}{\langle w \mid w\rangle}\right|^2 \cdot \|w\|^2 \\
&= \left|\frac{\langle w \mid v\rangle}{\|w\|^2}\right|^2 \cdot \|w\|^2 = \frac{|\langle w \mid v\rangle|^2}{\|w\|^2} \\
\Rightarrow \frac{|\langle w \mid v\rangle|^2}{\|w\|^2} \leq \|v\|^2 &\Rightarrow \langle w \mid v\rangle^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \\
&\Rightarrow |\langle v \mid w\rangle| = |\langle w \mid v\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|
\end{aligned}$$

מכאן שלכל $v, w \in V$ מתקיים $|\langle v \mid w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$, ומתקיים שוויון אם"ם v ו-w תלויים ליניארית. ■

משפט 1.22. אי-שוויון המשולש

לכל $v, w \in V$ מתקיים $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, ומתקיים שוויון אם"ם קיים $0 \leq c \in \mathbb{R}$ כך ש-$v = c \cdot w$.

הוכחה. יהיו $v, w \in V$, מתקיים:

$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 &= \langle v + w \mid v + w\rangle = \langle v \mid v\rangle + \langle v \mid w\rangle + \langle w \mid v\rangle + \langle w \mid w\rangle \\
&= \langle v \mid v\rangle + \langle v \mid w\rangle + \overline{\langle v \mid w\rangle} + \langle w \mid w\rangle \\
&= \|v\|^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}\,\langle v \mid w\rangle + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2 \cdot |\langle v \mid w\rangle| + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2 \cdot \|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 \\
&= (\|v\| + \|w\|)^2 \\
&\Rightarrow \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|
\end{aligned}$$

נשים לב שמתקיים שוויון אם"ם $\mathrm{Re}\,\langle v \mid w\rangle = |\langle v \mid w\rangle| = \|v\| \cdot \|w\|$; השוויון הימני מתקיים אם"ם v ו-w תלויים ליניארית (א"ש קושי-שוורץ), והשמאלי מתקיים אם"ם $0 \leq \mathrm{Re}\,\langle v \mid w\rangle$ וגם v ו-w תלויים ליניארית (שאז $\langle v \mid w\rangle \in \mathbb{R}$ ולכן $\mathrm{Re}\,\langle v \mid w\rangle = \langle v \mid w\rangle$), וזה קורה אם"ם קיים $0 \leq c \in \mathbb{R}$ כך ש-$v = c \cdot w$. ■

---

[9] ערך בוויקיפדיה: הרמן שוורץ.

[10] וזאת מכיוון ש-$|\cos\theta| \leq 1$ ו-$\theta > \frac{\pi}{2}$ (מה שגורר את $\cos\theta < 0$) אם"ם $v \cdot w < 0$.

מסקנה 1.23. לכל $v, w \in V$ ולכל $c \in \mathbb{F}$ מתקיימים שני הפסוקים הבאים:

1. חיוביות בהחלט - $\|v\| \geq 0$ ו-$\|v\| = 0 \iff v = 0_V$
2. הומוגניות - $\|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\|$
3. אי-שוויון המשולש - $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

מסקנה 1.24. לכל $v, w, u \in V$ מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים[11]:

1. סימטריה - $\|v - w\| = \|w - v\|$
2. חיוביות בהחלט $\|v - w\| \geq 0$ ו-$\|v - w\| = 0 \iff v = w$
3. אי-שוויון המשולש - $\|v - w\| \leq \|v - u\| + \|u - w\|$

הגדרה 1.25. מרחק
לכל $v, w \in V$ נגדיר את <u>המרחק</u> בין v ל-w ע"י $d(v, w) := \|v - w\|$.

♣ אם כן הנורמה של וקטור היא המרחק שלו מווקטור האפס.

הגדרה 1.26. לכל שתי קבוצות $\emptyset \neq S, T \subseteq V$ ולכל $v \in V$ <u>המרחק</u> בין S ל-v מוגדר להיות $d(v, S) := \inf\{d(v, w) \mid w \in S\}$ ו<u>המרחק</u> בין S ל-T מוגדר להיות $d(S, T) := \inf\{d(v, w) \mid v \in S,\ w \in T\}$.

1.5 בסיסים אורתונורמליים

הגדרה 1.27. קבוצה/סדרה של וקטורים ב-V תיקרא <u>אורתוגונלית</u> אם כל שני וקטורים בה מאונכים זה לזה.

למה 1.28. יהיו $0_V \neq v, w \in V$ כך ש-$v \perp w$, v ו-w אינם תלויים לינארית.

מסקנה 1.29. קבוצה/סדרה אורתוגונלית שאינה מכילה את וקטור האפס היא קבוצה/סדרה בת"ל.

הגדרה 1.30. וקטור $v \in V$ יקרא <u>וקטור יחידה</u> אם $\|v\| = 1$.

הגדרה 1.31. קבוצה/סדרה אורתוגונלית של וקטורים ב-V תיקרא <u>אורתונורמלית</u> אם כל וקטור בה הוא וקטור יחידה.

מסקנה 1.32. קבוצה/סדרה אורתונורמלית היא קבוצה/סדרה בת"ל.

♣ ניתן לראות בקלות יחסית שלכל בסיס $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ של $\mathbb{F}^n$ יש מכפלה פנימית המגדירה אותו כבסיס אורתונורמלי, השיטה היא כזו: נשים את וקטורי הבסיס בעמודות מטריצה $U \in M_n(\mathbb{F})$ ונגדיר את הפונקציה $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_U : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ ע"י (לכל $v, w \in \mathbb{F}^n$):

$$\langle v \mid w \rangle_U := v^* \cdot \left(U^{-1}\right)^* \cdot U^{-1} \cdot w$$

כאשר אנו משתמשים באיזומורפיזם בין $M_1(\mathbb{F})$ ל-$\mathbb{F}$. מהגדרת כפל מטריצות מתקיימת תכונת הבי-לינאריות / לינאריות ברכיב הימני, הסימטריה נובעת מן התכונות של שחלוף מטריצות[12]:

$$\begin{aligned}
\langle w \mid v \rangle_U &= w^* \cdot \left(U^{-1}\right)^* \cdot U^{-1} \cdot v \\
&= \left(w^* \cdot \left(U^{-1}\right)^* \cdot U^{-1} \cdot v\right)^t \\
&= v^t \cdot \left(U^{-1}\right)^t \cdot \left(\left(U^{-1}\right)^*\right)^t \cdot (w^*)^t \\
&= \overline{v^* \cdot (U^{-1})^* \cdot U^{-1} \cdot w} = \overline{\langle v \mid w \rangle_U}
\end{aligned}$$

את תכונת החיוביות בהחלט נוכיח בעוד רגע, אך נשים לב כבר עכשיו לכך שמתקיים:

$$U^* \cdot \left(U^{-1}\right)^* \cdot U^{-1} \cdot U = \left(U^{-1} \cdot U\right)^* \cdot \left(U^{-1} \cdot U\right) = I_n$$

[11] אלו שלוש התכונות שהיינו מצפים שכל פונקציית מרחק תקיים.
[12] לכל $A \in M_1(\mathbb{F})$ מתקיים $A^t = A$.

ולכן $\langle u_i \mid u_j \rangle_U = \delta_{ij}$ לכל $n \geq i, j \in \mathbb{N}$, כלומר $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ הוא בסיס אורתונורמלי (בהנחה שאכן מדובר במכפלה פנימית).

כעת נסיים להוכיח שמדובר במכפלה פנימית, לשם כך עלינו להוכיח את תכונת החיוביות בהחלט, נציג את v כצר״ל של $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ - $v = \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot u_i$ ומכאן שמתקיים:

$$\begin{aligned}
\langle v \mid v \rangle_U &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot u_i \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} z_j \cdot u_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{z_i} \cdot z_j \cdot \langle u_i \mid u_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} \cdot z_i = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

כמו כן ניתן לראות מהשורה הקודמת ש- $\langle v \mid v \rangle = 0 \iff v = 0_V$.

♣ ההערה הקודמת נותנת לנו אינטואיציה כיצד למצוא - בכל מ״ו נ״ס V מעל לשדה $\mathbb{F}$ (כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או $\mathbb{F} = \mathbb{C}$), ולכל בסיס $\mathcal{B}$ של V - מכפלה פנימית על V כך ש-$\mathcal{B}$ הוא בסיס אורתונורמלי; נגדיר את הפונקציה $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathcal{B}} : V \times V \to \mathbb{F}$ ע״י (לכל $v, w \in V$):

$$\langle v \mid w \rangle := ([v]_{\mathcal{B}})^* \cdot \left(([\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}})^{-1} \right)^* \cdot ([\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}})^{-1} \cdot [w]_{\mathcal{B}}$$

מההערה הקודמת נובע שזוהי אכן מכפלה פנימית, ומאותה סיבה שראינו לעיל $\mathcal{B}$ הוא בסיס אורתונורמלי ביחס אליה.

♣ אנחנו נראה בהמשך (בהערה שאחרי משפט 1.37) שלא רק שלכל בסיס קיימת מכפלה פנימית המגדירה אותו כאורתונורמלי, אלא שקיימת מכפלה יחידה כזו; הדבר מאפשר להגדיר יחס שקילות על בסיסים של מ״ו נ״ס מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ - שני בסיסים יהיו שקולים זה לזה אם הם מוגדרים כאורתונורמליים ע״י אותה מכפלה פנימית.

משפט 1.33. תהא $U := (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ סדרה אורתונורמלית של וקטורים ב-V, מתקיימים שני הפסוקים הבאים:

1. לכל $v \in V$ ולכל $n \geq r \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left(v - \sum_{i=1}^{r} \langle u_i \mid v \rangle \cdot u_i \right) \perp \operatorname{span}(u_1, u_2, \ldots, u_r)$$

2. אם V נ״ס ו-$n = \dim V$ (כלומר U הוא בסיס סדור אורתונורמלי) אז לכל $v \in V$ מתקיים:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i \mid v \rangle \cdot u_i$$

הוכחה. הפסוק הראשון נובע מהשוויון (לכל $r \geq j \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
\left\langle u_j \;\middle|\; v - \sum_{i=1}^{r} \langle u_i \mid v \rangle \cdot u_i \right\rangle &= \langle u_j \mid v \rangle - \sum_{i=1}^{r} \left(\langle u_i \mid v \rangle \cdot \langle u_j \mid u_i \rangle \right) \\
&= \langle u_j \mid v \rangle - \sum_{i=1}^{r} \left(\langle u_i \mid v \rangle \cdot \delta_{ij} \right) \\
&= \langle u_j \mid v \rangle - \langle u_j \mid v \rangle = 0
\end{aligned}$$

והשני נובע מהעובדה שווקטור האפס הוא היחיד שמאונך לכל המרחב (מסקנה 1.8). ■

מסקנה 1.34. תהא $\mathcal{B} := (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ סדרה אורתוגונלית של וקטורים ב-V כך ש-$b_i \neq 0_V$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$, מתקיימים שני הפסוקים הבאים:

1. לכל $v \in V$ ולכל $n \geq r \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left(v - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle b_i \mid v \rangle}{\langle b_i \mid b_i \rangle} \cdot b_i\right) \perp \operatorname{span}(b_1, b_2, \ldots, b_r)$$

כלומר:

$$\left(v - \sum_{i=1}^{r} p_{b_i}(v)\right) \perp \operatorname{span}(b_1, b_2, \ldots, b_r)$$

2. אם V נ״ס ו-$n = \dim V$ (כלומר $\mathcal{B}$ הוא בסיס סדור אורתוגונלי) אז לכל $v \in V$ מתקיים:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle b_i \mid v \rangle}{\langle b_i \mid b_i \rangle} \cdot b_i = \sum_{i=1}^{n} p_{b_i}(v)$$

הוכחה. שני הפסוקים נובעים מהמשפט האחרון (1.33) ומהעובדה שלכל $v \in V$ ולכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ מתקיים[13]:

$$p_{b_i}(v) = \frac{\langle b_i \mid v \rangle}{\langle b_i \mid b_i \rangle} \cdot b_i = \frac{\langle b_i \mid v \rangle}{\|b_i\|^2} \cdot b_i = \left\langle \frac{1}{\|b_i\|} \cdot b_i \;\middle|\; v \right\rangle \cdot \frac{1}{\|b_i\|} \cdot b_i$$

והרי $\frac{1}{\|b_i\|} \cdot b_i$ הוא וקטור יחידה. ■

אלגוריתם 1 תהליך גרם-שמידט (Gram–Schmidt)

תהא $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ סדרת וקטורים בת״ל ב-V, נרצה למצוא סדרה אורתונורמלית $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ כך שלכל $m \geq r \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_r) = \operatorname{span}(u_1, u_2, \ldots, u_r)$$

יהי $m \geq r \in \mathbb{N}$, נסמן $u_1 := \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1$ (מהגדרה $v_1 \neq 0_V$ ולכן $\|v_1\| \neq 0$) ו-$k := 2$.
כל עוד $k \leq r$:

- נסמן:

$$v'_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k \mid u_i \rangle \cdot u_i$$
$$u_k := \frac{1}{\|v'_k\|} \cdot v'_k$$

כעת $v'_k \perp u_i$ לכל $k - 1 \geq i \in \mathbb{N}$ ולכן u_k הוא וקטור יחידה המאונך ל-u_i לכל $k - 1 \geq i \in \mathbb{N}$ ולכן $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ היא סדרה אורתונורמלית.
בנוסף, מכיוון שבשלב הקודם התקיים $\operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) = \operatorname{span}(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1})$ ו-u_k הוא צר״ל של $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ **שאינו** צר״ל של $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ נדע שמתקיים $\operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \operatorname{span}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$.

♣ אם אנחנו רוצים רק סדרה אורתוגונלית שאינה בהכרח אורתונורמלית ניתן לוותר על הנרמול להמשיך עם v'_k.

- נסמן $k := k + 1$ ונעבור לשלב הבא בלולאה.

לאחר שנסתיימה ריצת הלולאה נקבל ש-$(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ היא סדרה אורתונורמלית המקיימת את הנדרש.

---

[13] אין צורך להצמיד את $\frac{1}{\|b_i\|}$ מפני שהוא מספר ממשי מהגדרתו.

משפט 1.35. תהליך גרם-שמידט[14]
לכל סדרת וקטורים בת״ל $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ ב-V, תהליך גרם-שמידט מחזיר סדרה אורתונורמלית $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ כך שלכל $m \geq r \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\text{span}\,(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \text{span}\,(u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

הוכחה. למעשה ההסבר שניתן בגוף האלגוריתם אמור להספיק, מי שמתעקש לקבל הסבר פורמלי מלא מתבקש להמשיך לקרוא.
ע״פ המשפט הקודם (1.33), בכל שלב של הלולאה מתקיים $v'_k \perp \text{span}\,(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1})$ ולכן גם $u_k \perp \text{span}\,(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1})$
ומכאן ש-$(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ היא סדרה אורתונורמלית ובפרט בת״ל, אך מהגדרה מתקיים:

$$\begin{aligned}
\text{span}\,(u_1, u_2, \ldots, u_k) &\subseteq \text{span}\,(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, v_k) \\
&\subseteq \text{span}\,(u_1, u_2, \ldots u_{k-2}, v_{k-1}, v_k) \\
&\subseteq \ldots \\
&\subseteq \text{span}\,(u_1, u_2, \ldots u_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k) \\
&\subseteq \text{span}\,(v_1, v_2, \ldots, v_k)
\end{aligned}$$

ומכיוון ש-$\dim(\text{span}\,(u_1, u_2, \ldots, u_k)) = k = \dim(\text{span}\,(v_1, v_2, \ldots, v_k))$
נדע שמתקיים $\text{span}\,(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \text{span}\,(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. ■

מסקנה 1.36. אם V נוצר סופית אז יש ל-V בסיס אורתונורמלי.

נניח ש-V נוצר סופית.

משפט 1.37. יהי $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ בסיס אורתונורמלי של V, לכל $v, w \in V$ ולכל $n \geq m \in \mathbb{N}$ מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. זהות פרסבל (Parseval)[15]:

$$\langle v \mid w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle u_i \mid v \rangle} \cdot \langle u_i \mid w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v \mid u_i \rangle \cdot \langle u_i \mid w \rangle$$

2. זהות בסל (Bessel)[16]:

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle u_i \mid v \rangle|^2 = \|v\|^2$$

3. א״ש בסל:

$$\sum_{i=1}^{m} |\langle u_i \mid v \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

♣ הפסוק השלישי במשפט 1.33 והראשון במשפט זה (זהות פרסבל) מראים לנו שאם V נ״ס אז לכל בסיס של V קיימת מכפלה פנימית יחידה כך שאותו בסיס יהיה אורתונורמלי. נניח ש-$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ הוא בסיס כלשהו של V ואנו רוצים להגדיר מכפלה פנימית $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to V$ כך שהוא יהיה בסיס אורתונורמלי, יהיו $v, w \in V$ ויהיו $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ ו-$b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים: $v = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i$ ו-$w = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot u_i$. ממשפט 1.33 נובע שאם קיימת מכפלה פנימית כזו אז היא צריכה לקיים $\langle u_i \mid v \rangle = a_i$ ו-$\langle u_i \mid w \rangle = b_i$ ואז מזהות פרסבל נובע שהיא מוכרחת לקיים גם:

$$\langle v \mid w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle u_i \mid v \rangle} \cdot \langle u_i \mid w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} \cdot b_i$$

ולכן אם היא קיימת אז היא יחידה, מצד שני ברור שזוהי מכפלה פנימית מאותן סיבות שהמכפלה הסקלרית היא מכפלה פנימית.

---

[14] ערכים בוויקיפדיה: Gram Pedersen Jørgen (אנגלית) וארהרד שמידט (עברית).
[15] על שם מארק אנטואן פרסבל.
[16] על שם פרידריך בסל.

הוכחה. יהיו $v, w \in V$, ממשפט 1.33 נובע שמתקיים:

$$\begin{aligned}\langle v \mid w\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle u_i \mid v\rangle \cdot u_i \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} \langle u_j \mid w\rangle \cdot u_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\langle u_i \mid v\rangle} \cdot \langle u_j \mid w\rangle \cdot \langle u_i \mid u_j\rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\langle u_i \mid v\rangle} \cdot \langle u_j \mid w\rangle \cdot \delta_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle u_i \mid v\rangle} \cdot \langle u_i \mid w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v \mid u_i\rangle \cdot \langle u_i \mid w\rangle\end{aligned}$$

אם כן הוכחנו את זהות פרסבל.

כדי להוכיח את זהות בסל נזכור ש-$|z|^2 = \overline{z} \cdot z$ לכל $z \in \mathbb{F}$ (נזכור ש-$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או ש-$\mathbb{F} = \mathbb{C}$) ולכן מזהות פרסבל נובע שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle v \mid u_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle u_i \mid v\rangle} \cdot \langle u_i \mid v\rangle = \langle v \mid v\rangle = \|v\|^2$$

א״ש בסל נובע מהעובדה שכל המחוברים באגף שמאל הם ממשיים וחיוביים. ■

מסקנה 1.38. לכל בסיס אורתונורמלי U של V ולכל $v, w \in V$ מתקיים[17]:

$$\langle v \mid w\rangle = [v]_U \cdot [w]_U$$

1.6 הטלות אורתוגונליות

טענה 1.39. יהי $W \subseteq V$ תמ״ו, מתקיים $V = W \oplus W^{\perp}$.

הוכחה. ניקח בסיס של W, נרחיב אותו לבסיס של V ונפעיל על הבסיס המורחב את אלגוריתם גרם-שמידט, אם כן קיבלנו סדרה אורתונורמלית $(w_1, w_2, \ldots, w_k; u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n)$ המקיימת:

$$\begin{aligned} W &= \operatorname{span}(w_1, w_2, \ldots, w_k) \\ V &= \operatorname{span}(w_1, w_2, \ldots, w_k; u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n)\end{aligned}$$

נשים לב לכך שמהגדרה מתקיים:

$$V = \operatorname{span}(w_1, w_2, \ldots, w_k) \oplus \operatorname{span}(u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n)$$

$$\operatorname{span}(w_1, w_2, \ldots, w_k) \perp \operatorname{span}(u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n)$$

ומכאן ש-$\operatorname{span}(u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n) \subseteq W^{\perp}$. מצד שני לכל $v \in W^{\perp}$ מתקיים (משפט 1.33):

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{k} \langle w_i \mid v\rangle \cdot w_i + \sum_{j=k+1}^{n} \langle u_j \mid v\rangle \cdot u_j \\ &= \sum_{j=k+1}^{n} \langle u_j \mid v\rangle \cdot u_j \in \operatorname{span}(u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n) \\ &\Rightarrow W^{\perp} = \operatorname{span}(u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n) \\ &\Rightarrow V = W \oplus W^{\perp}\end{aligned}$$

■

מסקנה 1.40. לכל תמ״ו $W \subseteq V$ מתקיים $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$.

הגדרה 1.41. יהי $W \subseteq V$ תמ״ו, $W^{\perp}$ ייקרא <u>המשלים האורתוגונלי</u> של W.

[17] הכפל באגף ימין הוא המכפלה הסקלרית.

תזכורת: בהינתן תמ״יים $W,U \subseteq V$ כך ש-$V = W \oplus U$, <u>ההטלה על</u> W <u>במקביל</u> ל-U היא הפונקציה $p : V \to V$ המוגדרת ע״י $p(w+u) := w$ לכל $w \in W$ ולכל $u \in U$, כלומר p מפרקת כל וקטור $v \in V$ לרכיביו ב-W וב-U ומחזירה את הרכיב שב-W בלבד.

הגדרה 1.42. הטלה אורתוגונלית על תמ״ו

<u>ההטלה האורתוגונלית</u> על תמ״ו היא ההטלה עליו במקביל למשלים האורתוגונלי שלו, כלומר עבור תמ״ו $W \subseteq V$ זוהי ההטלה : p_W $V \to V$ (זהו הסימון המקובל) המוגדרת ע״י $p_W(v) := w$ כאשר w הוא הווקטור היחיד ב-W שעבורו קיים $w^\perp \in W^\perp$ המקיים $v = w + w^\perp$.

משפט 1.43. יהי $W \subseteq V$ תמ״ו, בהינתן בסיס אורתוגונלי $(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ של W מתקיים (לכל $v \in V$):

$$p_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w_i \mid v \rangle}{\langle w_i \mid w_i \rangle} \cdot w_i = \sum_{i=1}^{k} p_{w_i}(v)$$

♣ אם $(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ אורתונורמלי נקבל:

$$p_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle w_i \mid v \rangle \cdot w_i$$

הוכחה. יהי $v \in V$ ויהי $(u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_n)$ בסיס אורתוגונלי של $W^\perp$, אם כן $(w_1, w_2, \ldots, w_k; u_{k+1}, u_2, \ldots, u_n)$ הוא בסיס אורתוגונלי של V ולכן מתקיים:

$$\begin{aligned}
p_W(v) &= p_W\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w_i \mid v \rangle}{\langle w_i \mid w_i \rangle} \cdot w_i + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\langle u_j \mid v \rangle}{\langle u_j \mid u_j \rangle} \cdot u_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w_i \mid v \rangle}{\langle w_i \mid w_i \rangle} \cdot p_W(w_i) + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\langle u_j \mid v \rangle}{\langle u_j \mid u_j \rangle} \cdot p_W(u_j) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w_i \mid v \rangle}{\langle w_i \mid w_i \rangle} \cdot w_i + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\langle u_j \mid v \rangle}{\langle u_j \mid u_j \rangle} \cdot 0_V \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w_i \mid v \rangle}{\langle w_i \mid w_i \rangle} \cdot w_i = \sum_{i=1}^{k} p_{w_i}(v)
\end{aligned}$$

■

משפט 1.44. יהי $W \subseteq V$ תמ״ו, לכל $v \in V$ מתקיים $d(v, W) = \|p_{W^\perp}(v)\|$.

הוכחה. יהי $v \in V$, לכל $w \in W$ מתקיים $p_{W^\perp}(v) \perp (p_W(v) - w)$ ולכן ע״פ **משפט פיתגורס** מתקיים גם:

$$\begin{aligned}
\|v - w\|^2 &= \|p_{W^\perp}(v) + p_W(v) - w\|^2 \\
&= \|p_{W^\perp}(v)\|^2 + \|p_W(v) - w\| \geq \|p_{W^\perp}(v)\|^2
\end{aligned}$$

כלומר לכל $w \in W$ מתקיים $d(v,w) = \|v - w\| \geq \|p_{W^\perp}(v)\|$, ולכן $d(v,W) = \inf\{d(v,w) \mid w \in W\} \geq \|p_{W^\perp}(v)\|$. מצד שני $d(v, p_W(v)) = \|v - p_W(v)\| = \|p_{W^\perp}(v)\|$, ומכאן ש-$d(v,W) = \inf\{d(v,w) \mid w \in W\} = \|p_{W^\perp}(v)\|$ (שהרי $p_W(v) \in W$). ■

2 מרחבים דואליים וההעתקה הצמודה

♣ אנחנו לוקחים כעת הפסקה מהמכפלות הפנימיות, ועוברים לעסוק במרחב הדואלי של מרחב וקטורי - שהוא מרחב ההעתקות הלינאריות מהמרחב לשדה, בהמשך נראה כיצד נושא מתקשר למרחבי מכפלה פנימית.
רוב מה שנכתב בפרק זה לא היה חלק מהקורס כשלמדתי אותו - החלק הפשוט של מרחבים דואליים נלמד אצל ערן נבו בקורס הקודם, ואת השאר מצאתי ברשת או גיליתי בעצמי. למרות זאת, ראיתי לנכון להביא את הפרק במלואו מפני שהוא ענה על שאלה שהציקה לי במשך יותר משנה: מהי המשמעות הגאומטרית של שחלוף מטריצה???

תזכורת: בקורס הקודם הגדרנו את $\mathrm{Hom}\left(V,W\right)$ להיות מרחב ההעתקות הלינאריות מ-V ל-W (כאשר V ו-W הם מרחבים וקטוריים מעל לשדה $\mathbb{F}$), וראינו שאם V ו-W נ"ס אז מתקיים:

$$\dim\left(\mathrm{Hom}\left(V,W\right)\right)=\dim\left(V\right)\cdot\dim\left(W\right)$$

שכן הממד של מרחב ההעתקות הוא בדיוק הממד של מרחב המטריצות המתאים למטריצות המייצגות של ההעתקות הללו.
נזכיר גם שכל שדה הוא מ"ו מעל עצמו כאשר החיבור והכפל של השדה משמשים כחיבור וקטורי וכפל בסקלר.

יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים מעל לשדה $\mathbb{F}$.

2.1 במרחבים וקטוריים כלליים

הגדרה 2.1. <u>המרחב הדואלי</u> של V מוגדר ע"י $V^*:=\mathrm{Hom}\left(V,\mathbb{F}\right)$, איברי V^* נקראים <u>פונקציונלים</u>.

♣ נשים לב שאם V נ"ס אז $\dim V^*=\dim V$.

סימון: המרחב הדואלי של המרחב הדואלי של V ($\left(V^*\right)^*=\mathrm{Hom}\left(V^*,\mathbb{F}\right)$) מסומן ב-$V^{**}$ וכן הלאה ($V^{***}:=\left(V^{**}\right)^*$), בהמשך אנחנו נראה שאין שום עניין להמשיך מעבר ל-V^{**}.

הגדרה 2.2. נניח ש-V נ"ס יהי $\mathcal{B}:=\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)$ בסיס של V, <u>הבסיס הדואלי</u> (של V^*) ביחס ל-$\mathcal{B}$ הוא $\mathcal{B}^*:=\left(v_1^*,v_2^*,\ldots,v_n^*\right)$ כאשר, לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$, v_i^* היא ההעתקה לינארית המוגדרת ע"י (לכל $n\geq j\in\mathbb{N}$):

$$v_i^*\left(v_j\right)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

♣ $\mathcal{B}^*$ הוא אכן בסיס של V^* שכן מדובר בסדרה בת"ל בגודל הממד של V שהוא הממד של V^*.

♣ כבר ראינו שהעתקת בסיס במרחב אחד לבסיס של מרחב אחר כאשר שניהם מאותו ממד היא **איזומורפיזם** בין שני המרחבים הללו, א"כ V^* איזומורפי ל-V אך מכיוון שהאיזומורפיזם תלוי בבחירת הבסיס כל איזומורפיזם כזה אינו טבעי, בהמשך נראה שבנוכחות מכפלה פנימית קיים איזומורפיזם טבעי בין מרחב מכפלה פנימית למרחב ההעתקות ממנו לשדה.

משפט 2.3. אם V נ"ס אז לכל $0\neq f\in V^*$ מתקיים $\dim\left(\ker f\right)=\dim V-1$.

סימון: לכל תמ"ו $U\subseteq V$, נסמן $U^0:=\left\{f\in V^*\mid f\left(U\right)=\left\{0\right\}\right\}$, כלומר U^0 היא קבוצת כל הפונקציונלים שמתאפסים על U (נקראת גם <u>המאפס</u> של U).

סימון: לכל $v \in V$ נגדיר את ההעתקה הלינארית $f_v : V^* \to \mathbb{F}$ ע״י $f_v(T) := T(v)$ לכל $T \in V^*$ (מהגדרה $f_v \in V^{**}$).

♣ הלינאריות של f_v נובעת מהלינאריות של ההעתקות ב-V^*, לכל $T_1, T_2 \in V^*$ ולכל $\lambda \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$f_v(T_1 + T_2) = (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) = f_v(T_1) + f_v(T_2)$$
$$f_v(\lambda \cdot T_1) = (\lambda \cdot T)(v) = \lambda \cdot T(v) = \lambda \cdot f_v(T_1)$$

♣ נשים לב לכך ש-$f_v \in V^{**}$ - א״כ מצאנו דרך קלה ״לייצר״ איברים ב-V^{**}, במשפט הבא נראה שאם V נ״ס אז כל האיברים ב-V^{**} ניתנים להצגה בצורה זו.

טענה 2.4. לכל תמ״ו $U \subseteq V$, U^0 הוא תמ״ו של V^*.

משפט 2.5. אם V נ״ס אז לכל תמ״ו $U \subseteq V$ מתקיים $\dim U + \dim U^0 = \dim V$.

הוכחה. נניח ש-V נ״ס, יהי $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ בסיס של U ($k := \dim U$), ויהיו $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n$ כך ש-$\mathcal{B} := (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ הוא בסיס של V ($n := \dim V$).
מהגדרת הבסיס הדואלי לכל $i, j \in \mathbb{N}$ כך ש-$i \leq k < j \leq n$ מתקיים $v_j^*(v_i) = 0$ ולכן $\operatorname{span}\left(v_{k+1}^*, v_{k+2}^*, \ldots, v_n^*\right) \subseteq U^0$, מצד שני יהי $f \in U^0$ ויהיו $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i^*$$

לכל $k \geq j \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$0 = f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i^*(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \delta_{ij} = \lambda_j$$

ומכאן ש-$f \in \operatorname{span}\left(v_{k+1}^*, v_{k+2}^*, \ldots, v_n^*\right)$, כלומר $\operatorname{span}\left(v_{k+1}^*, v_{k+2}^*, \ldots, v_n^*\right) = U^0$, וממילא $\dim U^0 = n - k = \dim V - \dim U$. ■

משפט 2.6. נניח ש-V נ״ס ותהא $\varphi : V \to V^{**}$ **העתקת ההצבה** המוגדרת ע״י $\varphi(v) := f_v$ (לכל $v \in V$), φ היא איזומורפיזם בין V ל-V^{**}.

♣ מבלבל למדי, נכון? שימו לב: φ לוקחת וקטור ב-V וצריכה להחזיר וקטור ב-V^{**}, אבל וקטור ב-V^{**} הוא העתקה ליניארית המקבלת העתקה ליניארית ב-V^* ומחזירה סקלר ב-$\mathbb{F}$, כעת נזכור שגם וקטור ב-V^* הוא העתקה ליניארית המקבלת וקטור ב-V ומחזירה סקלר ב-$\mathbb{F}$ - לכן טבעי מאד ש-φ תחזיר העתקה ליניארית ב-V^{**} שפעולתה היא להציב את הווקטור המתקבל מ-V בכל ה״ל ב-V^*.
כן, אני מודע לכך שגם ההסבר המפורט יותר עדיין מבלבל, אין מה לעשות, קחו נשימה ארוכה וקראו את הכל לאט לאט.

♣ המשפט מראה שאם V נ״ס אז ישנו איזומורפיזם טבעי בין V ל-V^{**}, מהמשפט נובע גם שאין שום טעם לדבר על V^{***} (וכן הלאה) שכן ישנו איזומורפיזם טבעי בין V^* ל-V^{***}.

הוכחה. יהיו $v, w \in V$ ו-$\lambda \in \mathbb{F}$, מתקיים:

$$\varphi(v + w) = f_{v+w} = f_v + f_w = \varphi(v) + \varphi(w)$$
$$\varphi(\lambda \cdot v) = f_{\lambda \cdot v} = \lambda \cdot f_v = \lambda \cdot \varphi(v)$$

שהרי לכל $T \in V^*$ מתקיים:

$$f_{v+w}(T) = T(v + w) = T(v) + T(w) = f_v(T) + f_w(T)$$
$$f_{\lambda \cdot v}(T) = T(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot T(v) = \lambda \cdot f_v(T)$$

אם כן φ היא העתקה ליניארית.
בנוסף, φ חח״ע שכן לכל $0_V \neq v \in V$ קיימת ה״ל $T \in V^*$ כך ש-$T(v) = 1$ ולכן לכל $0_V \neq v \in V$ ההעתקה f_v אינה העתקת האפס, כלומר $\ker \varphi = \{0_V\}$; מהעובדה ש-φ חח״ע נובע מיד שהיא על שהרי $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$. ■

הגדרה 2.7. תהא $T : V \to W$ העתקה לינארית, <u>ההעתקה הצמודה (הרמיטית)</u> של T (נקראת גם <u>האופרטור הצמוד</u> של T אם $V = W$) היא ההעתקה הלינארית $T^* : W^* \to V^*$ המוגדרת ע"י (לכל $f \in W^*$):

$$T^*(f) := f \circ T$$

♣ $f \circ T$ הוא אכן פונקציונל ב-V^*: התחום שלו הוא V שהרי זהו התחום של T והטווח שלו הוא $\mathbb{F}$ משום שזהו הטווח של f (כמובן שהוא העתקה לינארית).

סימון: ההעתקה הצמודה של ההעתקה הצמודה של T ($(T^*)^*$) מסומנת ב-T^{**} וכן הלאה ($T^{***} := (T^{**})^*$), אך כפי שראינו אין שום עניין מעבר ל-V^{**} ולכן גם אין שום עניין לאחר T^{**}.

♣ מהגדרה התחום של T^{**} הוא V^{**}, הטווח שלו הוא W^{**} והוא מוגדר ע"י $T^{**}(f) := f \circ T^*$ לכל $f \in V^{**}$, טבעי מאד לצפות לכך שאם V ו-W נ"ס אז ע"פ אותו איזומורפיזם בין V ל-V^{**} ובין W ל-W^{**} (העתקת ההצבה שבמשפט לעיל) גם T ו-T^{**} יהיו איזומורפיים זה לזה, ציפייה זו אכן תתממש ונראה אותה מייד.

משפט 2.8. נניח ש-V ו-W נ"ס ותהא $\varphi : W \to W^{**}$ העתקת ההצבה כפי שהוגדרה לעיל, מתקיים $\varphi(T(v)) = T^{**}(f_v)$ לכל $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ולכל $v \in V$.

♣ כלומר T^{**} (שהיא העתקה מ-V^{**} ל-W^{**}) איזומורפית ל-T (שהיא העתקה מ-V ל-W) בדיוק ע"י אותו איזומורפיזם שבין V ל-V^{**} ובין W ל-W^{**}.

הוכחה. לכל $v \in V$, לכל $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ולכל $g \in W^*$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
\varphi(T(v))\, g &= f_{T(v)}(g) = g(T(v)) \\
&= (g \circ T)(v) = f_v(g \circ T) \\
&= f_v(T^*(g)) = (f_v \circ T^*)\, g \\
&= T^{**}(f_v)\, g
\end{aligned}$$

■

משפט 2.9. תכונות של ההעתקה הצמודה

תהא $T : V \to W$ העתקה ליניארית.

1. מתקיים $\mathrm{Id}_V^* = \mathrm{Id}_{V^*}$.
2. יהיו $S : V \to W$ העתקה ליניארית ו-$\lambda \in \mathbb{F}$, מתקיים:

$$\begin{aligned}
(S + T)^* &= S^* + T^* \\
(\lambda \cdot T)^* &= \lambda \cdot T^*
\end{aligned}$$

3. יהי U גם הוא ממ"פ מעל ל-$\mathbb{F}$ ותהא $S : W \to U$ העתקה ליניארית, מתקיים:

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$$

4. אם T הפיכה אז גם T^* הפיכה ומתקיים $(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$.

הוכחה.

1. לכל $f \in V^*$ מתקיים $\mathrm{Id}_V^*(f) = f \circ \mathrm{Id}_V = \mathrm{Id}_{V^*}(f)$.

2. לכל $f \in W^*$ מתקיים:

$$(S+T)^*(f) = f \circ (S+T) = f \circ S + f \circ T$$
$$(\lambda \cdot T)^*(f) = f \circ (\lambda \cdot T) = \lambda \cdot (f \circ T) = \lambda \cdot T^*(f)$$

3. לכל $f \in U^*$ מתקיים:

$$(T \circ S)^*(f) = f \circ (T \circ S) = (f \circ T) \circ S = S^*(f \circ T) = S^*(T^*(f)) = (S^* \circ T^*)(f)$$

4. נניח ש-T הפיכה, מהסעיף הקודם ומהסעיף הראשון נובע שמתקיים:

$$\left(T^{-1}\right)^* \circ T^* = \left(T \circ T^{-1}\right)^* = \mathrm{Id}_W^* = \mathrm{Id}_{W^*}$$
$$T^* \circ \left(T^{-1}\right)^* = \left(T^{-1} \circ T\right)^* = \mathrm{Id}_V^* = \mathrm{Id}_{V^*}$$

■

2.2 במרחבי מכפלה פנימית

נניח ש-V ו-W הם מרחבי מכפלה פנימית (בפרט $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או ש-$\mathbb{F} = \mathbb{C}$), ונסמן ב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$ וב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_W$ את המכפלות הפנימיות שלהם[18].

הגדרה 2.10. פונקציה $f : V_1 \to V_2$ בין שני מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{C}$ נקראת אנטי-לינארית אם היא מקיימת (לכל $v, w \in V_1$ ולכל $\lambda \in \mathbb{C}$):

$$f(v+w) = f(v) + f(w)$$
$$f(\lambda \cdot v) = \overline{\lambda} \cdot f(v)$$

ואם היא גם חח״ע ועל אז תיקרא גם אנטי-איזומורפיזם.

סימון: לכל מרחב מכפלה פנימית V ולכל $v \in V$ נסמן ב-l_v את ההעתקה $l_v : V \to \mathbb{F}$ המוגדרת ע״י $l_v(w) := \langle v \mid w \rangle$ לכל $w \in V$ (מהגדרה $l_v \in V^*$).

נניח ש-V ו-W נוצרים סופית.

משפט 2.11 (משפט ההצגה של ריס). [19]
לכל $l \in V^*$ קיים $v \in V$ יחיד כך ש-$l(w) = \langle v \mid w \rangle$ לכל $w \in V$ (כלומר $l = l_v$).

♣ זה לא כל כך מפתיע כשזוכרים שפונקציונל $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ הוא בעצם כפל במטריצה מגודל $1 \times n$ (וקטור שורה), וכפל מטריצות כזה שקול לחלוטין למכפלה הסקלרית עם המשוחלפת שלה (כווקטור עמודה), כלומר כל פונקציונל הוא בעצם הטלה על הכיוון של וקטור מסוים (כדי לקבל איבר ב-$\mathbb{F}$) ואז כפל בגודל של אותו וקטור (ראו בהקדמה).

[18] את המכפלה הפנימית של V נסמן גם ב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ כשנעסוק בו בלבד.
[19] ערך בוויקיפדיה: פרידיש ריס.

הוכחה. יהי $l \in V^*$, יהי $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ בסיס אורתונורמלי של V ונסמן:

$$v := \sum_{i=1}^{n} \overline{l(u_i)} \cdot u_i$$

מכאן שלכל $n \geq j \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\langle v \mid u_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \overline{l(u_i)} \cdot u_i \;\middle|\; u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} l(u_i) \cdot \langle u_i \mid u_j \rangle = l(u_j)$$

מכאן שלכל $w \in V$ מתקיים:

$$l(w) = l\left(\sum_{i=1}^{n} \langle u_i \mid w \rangle \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i \mid w \rangle \cdot l(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i \mid w \rangle \cdot \langle v \mid u_i \rangle = \langle v \mid w \rangle$$

אם כן הוכחנו את הקיום של v כנ"ל; נוכיח כעת את היחידות, יהיו $v_1, v_2 \in V$ כך ש-$l(w) = \langle v_1 \mid w \rangle = \langle v_2 \mid w \rangle$ לכל $w \in V$, מכאן שלכל $w \in W$ מתקיים:

$$0 = \langle v_1 \mid w \rangle - \langle v_2 \mid w \rangle = \langle v_1 - v_2 \mid w \rangle$$

ולכן $v_1 - v_2 = 0_V$, כלומר $v_1 = v_2$. ■

סימון: לכל $l \in V^*$, נסמן ב-v_l את אותו וקטור יחיד $v \in V$ המקיים $l = l_v$.

מסקנה 2.12. תהא $\varphi : V \to V^*$ פונקציה המוגדרת ע"י $\varphi(v) := l_v$ (לכל $v \in V$), אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז φ היא איזומורפיזם בין V ל-V^*, ואם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז φ היא אנטי-איזומורפיזם בין V ל-V^*.

♣ זהו איזומורפיזם / אנטי-איזומורפיזם טבעי מאד, ממש כשם שהאיזומורפיזם בין V ל-V^{**} היה טבעי, אך מכיוון שהוא טבעי רק **אחרי** הגדרת מכפלה פנימית על V אין בו שום דבר קנוני משום שכפי שראינו כבר הגדרת מכפלה פנימית שקולה לבחירת בסיס - לכל בסיס של V קיימת מכפלה פנימית המגדירה אותו כאורתונורמלי.

♣ נשים לב: לכל בסיס אורתונורמלי $\mathcal{B} := (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ של V מתקיים (לכל $n \geq i, j \in \mathbb{N}$):

$$l_{u_i}(v_j) = \langle u_i \mid u_j \rangle = \delta_{ij}$$

ולכן $\mathcal{B}^* = (l_{u_1}, l_{u_2}, \ldots, l_{u_n})$, כלומר φ מעתיקה כל בסיס אורתונורמלי של V לבסיס הדואלי שלו ב-V^*; ניתן היה להסיק מכאן ש-φ הפיכה אך מכיוון ש-φ עלולה להיות אנטי-ליניארית זה היה דורש מעט עבודה.

♣ זהו איזומורפיזם / אנטי-איזומורפיזם טבעי מאד, ממש כשם שהאיזומורפיזם בין V ל-V^{**} היה טבעי, אך מכיוון שהוא טבעי רק **אחרי** הגדרת מכפלה פנימית על V אין בו שום דבר קנוני משום שכפי שראינו כבר הגדרת מכפלה פנימית שקולה לבחירת בסיס - לכל בסיס של V קיימת מכפלה פנימית המגדירה אותו כאורתונורמלי.

הוכחה. ההפיכות של φ נובעת ישירות מ**משפט ההצגה של ריס**, אם כן נעבור להוכיח שאם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז φ היא העתקה ליניארית ואם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז היא העתקה אנטי-ליניארית.
לכל $v, w, u \in V$, לכל $\lambda \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$l_{v+w}(u) = \langle v + w \mid u \rangle = \langle v \mid u \rangle + \langle w \mid u \rangle = l_v(u) + l_w(u)$$
$$l_{\lambda \cdot v}(w) = \langle \lambda \cdot v \mid w \rangle = \overline{\lambda} \cdot \langle v \mid w \rangle = \overline{\lambda} \cdot l_v(w)$$

ומכאן שלכל $v, w \in V$ ולכל $\lambda \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$\varphi(v + w) = l_{v+w} = l_v + l_w = \varphi(v) + \varphi(w)$$
$$\varphi(\lambda \cdot v) = l_{\lambda \cdot v} = \overline{\lambda} \cdot l_v = \overline{\lambda} \cdot \varphi(v)$$

■

משפט 2.13. יהי $U \subseteq V$ תמ״ו, ותהא φ אותה פונקציה שהוגדרה במסקנה הקודמת (2.12). אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז הצמצום של φ ל-$U^{\perp}$ ($\varphi|_{U^{\perp}}$) הוא איזומורפיזם בין $U^{\perp}$ ל-U^0 ואם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז $\varphi|_{W^{\perp}}$ הוא אנטי-איזומורפיזם בין $W^{\perp}$ ל-W^0.

♣ כזכור, הגדרנו את ההעתקה הצמודה של העתקה לינארית $T : V \to W$, בתור הפונקציה $T^* : W^* \to V^*$ המוגדרת ע״י $T^*(f) := f \circ T$. הפונקציה φ שמוגדרת במסקנה האחרונה () נותנת לנו מוטיבציה להגדיר את ההעתקה הצמודה באופן שונה מעט כאשר אנו עוסקים במרחבי מכפלה פנימית: במקום שהתחום והטווח של T^* יהיו W^* ו-V^*, טבעי להגדיר את T^* מ-W ל-V כאשר $T^*(w)$ יהיה הווקטור היחיד ב-V שעבורו יתקיים $l_v = l_w \circ T$.

הגדרה 2.14. נניח ש-V ו-W נ״ס ותהא $T : V \to W$ העתקה לינארית <u>ההעתקה הצמודה</u> של T (נקראת גם <u>האופרטור הצמוד</u> של T אם $V = W$) היא ההעתקה הלינארית $T^* : W \to V$ המוגדרת ע״י (לכל $w \in W$):

$$T^*(w) = v_{(l_w \circ T)}$$

כלומר $T^*(w)$ הוא הווקטור היחיד ב-V המקיים (לכל $v \in V$):

$$\begin{aligned}\langle T^*(w) \mid v\rangle_V &= l_{T^*(w)}(v) = (l_w \circ T)(v)\\ &= l_w(T(v)) = \langle w \mid T(v)\rangle_W\end{aligned}$$

♣ כלומר כדי לדעת מיהו $T^*(w)$ עלינו לשאול את עצמנו איזה וקטור ב-V יקיים שהמכפלה הפנימית איתו (ב-V) תהיה שווה למכפלה הפנימית עם w (ב-W) - כשלפני ביצוע המכפלה הפנימית עם w אנו מפעילים את T כדי לקבל וקטורים ב-W.

♣ שימו לב: העובדה שאם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז V **אנטי-איזומורפי** ל-V^* אומרת ש-T^* כפי שהוגדר על ממ״פ **אינו איזומורפי** ל-T^* כפי שהוגדר מעל מרחבים וקטוריים כלליים אלא **אנטי-איזומורפי** אליו, כלומר מתקיים $(\lambda \cdot T)^* = \overline{\lambda} \cdot T^*$.

תהא $T : V \to W$ העתקה ליניארית.

טענה 2.15. תהא גם $S : W \to V$ העתקה לינארית, התנאים הבאים שקולים:

1. $S = T^*$
2. לכל $v \in V$ ולכל $w \in W$ מתקיים $\langle S(w) \mid v\rangle_V = \langle w \mid T(v)\rangle_W$
3. לכל $v \in V$ ולכל $w \in W$ מתקיים $\langle v \mid S(w)\rangle_V = \langle T(v) \mid w\rangle_W$

הוכחה.

- התנאי הראשון גורר את השני ע״פ הגדרה.
- התנאי השני גורר את הראשון לפי מסקנה 1.9.
- התנאים השני והשלישי שקולים:
  - אם לכל $v \in V$ ולכל $w \in W$ מתקיים $\langle S(w) \mid v\rangle_V = \langle w \mid T(v)\rangle_W$, אז גם:

$$\langle v \mid S(w)\rangle_V = \overline{\langle S(w) \mid v\rangle_V} = \overline{\langle w \mid T(v)\rangle_W} = \langle T(v) \mid w\rangle_W$$

  - אם לכל $v \in V$ ולכל $w \in W$ מתקיים $\langle v \mid S(w)\rangle_V = \langle T(v) \mid w\rangle_W$, אז גם:

$$\langle S(w) \mid v\rangle_V = \overline{\langle v \mid S(w)\rangle_V} = \overline{\langle T(v) \mid w\rangle_W} = \langle w \mid T(v)\rangle_W$$

■

משפט 2.16. תכונות של ההעתקה הצמודה מעל מרחבי מכפלה פנימית

1. מתקיים $\mathrm{Id}_V^* = \mathrm{Id}_V$.
2. יהיו $S : V \to W$ העתקה ליניארית ו-$\lambda \in \mathbb{F}$, מתקיים:
$$\begin{aligned}(S+T)^* &= S^* + T^* \\ (\lambda \cdot T)^* &= \lambda \cdot T^*\end{aligned}$$
3. יהי U גם הוא ממ״פ מעל ל-$\mathbb{F}$, ותהא $S : W \to U$ העתקה ליניארית; מתקיים:
$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$$
4. אם T הפיכה אז גם T^* הפיכה ומתקיים $(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$.
5. מתקיים $(T^*)^* = T$.
6. $\mathrm{Im} T^* = (\ker T)^\perp$.
7. יהיו $f : V \to V$ אופרטור ו-$U \subseteq V$ תמ״ו; אם $U \subseteq V$ הוא תמ״ו שמור תחת f, אז $U^\perp$ שמור תחת f^*.

הוכחה. יהיו $v, v' \in V$, $w \in W$ ו-$\lambda \in \mathbb{F}$, מתקיים:

1.
$$\langle \mathrm{Id}_V^*(v) \mid v' \rangle = \langle v \mid \mathrm{Id}_V(v') \rangle$$

2.
$$\begin{aligned}\langle (S^* + T^*)(w) \mid v \rangle_V &= \langle S^*(w) + T^*(w) \mid v \rangle_V = \langle S^*(w) \mid v \rangle_V + \langle T^*(w) \mid v \rangle_V \\ &= \langle w \mid S(v) \rangle_W + \langle w \mid T(v) \rangle_W = \langle w \mid S(v) + T(v) \rangle_W = \langle w \mid (S+T)(v) \rangle_W \\ \left\langle \left(\overline{\lambda} \cdot T^*\right)(w) \mid v \right\rangle_V &= \left\langle \overline{\lambda} \cdot T^*(w) \mid v \right\rangle_V = \lambda \cdot \langle T^* \mid v \rangle_V = \lambda \cdot \langle w \mid T(v) \rangle_W \\ &= \langle w \mid \lambda \cdot T(v) \rangle_W = \langle w \mid (\lambda \cdot T)(v) \rangle_W\end{aligned}$$

3. נסמן ב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_U$ את המכפלה הפנימית של U ויהי $u \in U$,
$$\begin{aligned}\langle (T^* \circ S^*)(u) \mid v \rangle_V &= \langle T^*(S^*(u)) \mid v \rangle_V = \langle S^*(u) \mid T(v) \rangle_W \\ &= \langle u \mid S(T(v)) \rangle_U = \langle u \mid (S \circ T)(v) \rangle_U\end{aligned}$$

4. נניח ש-T הפיכה, מהסעיף הקודם ומהסעיף הראשון נובע שמתקיים:
$$\begin{aligned}\left(T^{-1}\right)^* \circ T^* &= \left(T \circ T^{-1}\right)^* = \mathrm{Id}_W^* = \mathrm{Id}_W \\ T^* \circ \left(T^{-1}\right)^* &= \left(T^{-1} \circ T\right)^* = \mathrm{Id}_V^* = \mathrm{Id}_V\end{aligned}$$

5. מהגדרה מתקיים $\left\langle (T^*)^*(v) \mid w \right\rangle_W = \langle v \mid T^*(w) \rangle_V$ ולכן מטענה 2.15 נובע ש-$(T^*)^* = T$.

6. מהגדרה מתקיים $\langle T^*(w) \mid v \rangle_V = \langle w \mid T(v) \rangle_W$ ולכן אם $v \in \ker T$ (כלומר $T(v) = 0_W$) אז $\langle T^*(w) \mid v \rangle_V = 0$, כלומר $T^*(w) \perp v$.

7. לכל $u \in U$ ולכל $u^\perp \in U^\perp$ מתקיים:
$$\left\langle f^*\left(u^\perp\right) \mid u \right\rangle = \left\langle u^\perp \mid f(u) \right\rangle = 0$$

משום ש-$f(u) \in u$, ומכאן ש-$U^\perp$ שמור תחת f^*.

בסעיפים 1-3 צריך להוסיף ולהסביר שהמבוקש נובע מטענה 2.15; בכל הסעיפים מלבד ב-8 יש להשתמש בעובדה ש-v ו-w (ובסעיף 2 גם v' ו-λ) שרירותיים. ■

מסקנה 2.17. הצמצום של T ל-$\mathrm{Im}T^*$ ($T\mid_{\mathrm{Im}T^*}:\mathrm{Im}T^*\to\mathrm{Im}T$) הוא העתקה חח"ע ועל.

♣ למעשה רק הצמצום הזה מעניין אותנו משום ש-$(\mathrm{Im}T^*)^\perp=\ker T$.

מסקנה 2.18. נוסחה מפורשת להעתקה הצמודה

יהי $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ בסיס אורתונורמלי של V, לכל $w\in W$ מתקיים:

$$T^*(w)=\sum_{i=1}^{n}\langle T(u_i)\mid w\rangle_W\cdot u_i$$

הוכחה. יהי $w\in W$, ממשפט 1.33 נובע שמתקיים:

$$T^*(w)=\sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid T^*(w)\rangle_V\cdot u_i$$

ולכן ע"פ טענה 2.15 מתקיים:

$$T^*(w)=\sum_{i=1}^{n}\langle T(u_i)\mid w\rangle_W\cdot u_i$$

■

מסקנה 2.19. נניח ש-V ו-W נ"ס ויהיו $\mathcal{B}$ ו-$\mathcal{C}$ בסיסים אורתונורמליים של V ו-U בהתאמה, מתקיים:

$$[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}=\left([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^*$$

הוכחה. נגדיר $\mathcal{B}:=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ ו-$\mathcal{C}:=(w_1,w_2,\ldots,w_m)$.
ממשפט 1.33 ומהגדרת המטריצה המייצגת נובע שהשורה ה-i ב-$\left([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^*$ היא (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$):

$$([T(v_i)]_{\mathcal{C}})^*=\left(\begin{bmatrix}\langle w_1\mid T(v_i)\rangle_W\\ \langle w_2\mid T(v_i)\rangle_W\\ \vdots\\ \langle w_m\mid T(v_i)\rangle_W\end{bmatrix}\right)^*=\begin{bmatrix}\overline{\langle w_1\mid T(v_i)\rangle_W} & \overline{\langle w_2\mid T(v_i)\rangle_W} & \cdots & \overline{\langle w_m\mid T(v_i)\rangle_W}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\langle T(v_i)\mid w_1\rangle_W & \langle T(v_i)\mid w_2\rangle_W & \cdots & \langle T(v_i)\mid w_m\rangle_W\end{bmatrix}$$

אם כן הקואורדינטה ה-ij במטריצה $\left([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^*$ היא $\langle T(v_i)\mid w_j\rangle$ (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ ולכל $m\geq j\in\mathbb{N}$).
מצד שני ע"פ הנוסחה המפורשת של ההעתקה הצמודה ומהגדרת המטריצה המייצגת נובע שהעמודה ה-j ב-$[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ היא (לכל $m\geq j\in\mathbb{N}$):

$$[T^*(w_j)]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}\langle T(v_1)\mid w_j\rangle_W\\ \langle T(v_2)\mid w_j\rangle_W\\ \vdots\\ \langle T(v_n)\mid w_j\rangle_W\end{bmatrix}$$

ולכן הקואורדינטה ה-ij במטריצה $[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ היא $\langle T(v_i)\mid w_j\rangle_W$ (לכל $n\geq i\in\mathbb{N}$ ולכל $m\geq j\in\mathbb{N}$) ולכן המטריצות שוות. ■

♣ במובן מסוים אני הופך כאן את היוצרות כשאני מציג את השקילות בין הצמדת מטריצה להצמדת העתקה לינארית כמסקנה מהנוסחה המפורשת של ההעתקה הצמודה, לפני שאסביר זאת הרשו לי לספר סיפור קטן.
כשלמדנו על מטריצות בקורס הקודם מצאנו כמעט לכל הגדרה בעולם המטריצות $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ קשר ישיר להעתקות ליניאריות מ-$\mathbb{F}^m$ ל-$\mathbb{F}^n$: מטריצת היחידה היא העתקת הזהות, כפל מטריצות הוא הרכבה, מטריצה הפיכה היא ה"ל הפיכה וההופכית שלה היא ההעתקה ההופכית, העמודות של כל מטריצה הן האיברים אליהם נשלחים איברי הבסיס הסטנדרטי, מטריצות דומות מייצגות את אותן ה"ל אך בבסיסים שונים, למטריצות אלכסוניות ולמטריצות משולשיות יש אינטואיציה גאומטרית חזקה ועוד (שכחתי משהו?).
רק הגדרה אחת יצאה מן הכלל הזה: המטריצה המשוחלפת (ומטריצות סימטריות/אנטי-סימטריות שתלויות בה), מהרגע שלמדנו עליה ועד ליום שבו גיליתי את הנוסחה המפורשת להעתקה הצמודה (יותר משנה) "שברתי" את הראש כדי להבין מה הקשר בין מטריצה למשוחלפת שלה. כשלמדתי את הקורס אצל איתמר צביק הגדרנו את האופרטור הצמוד בתור האופרטור היחיד המקיים $\langle f^*(v)\mid w\rangle=\langle v\mid f(w)\rangle$ (לכל $v,w\in V$)[20], בצורה זו היה קל להוכיח שבבסיס אורתונורמלי U

[20] שימו לב שזה אומר שהצמוד מוגדר רק אופרטורים מעל מרחב מכפלה פנימית ולא עבור העתקות ליניאריות כלליות או אופרטורים על מרחבים אחרים.

מתקיים $[f^*]_U = ([f]_U)^*$[21] אך לא הייתה לזה שום משמעות גאומטרית.
יום אחד קראתי בוויקיפדיה על האופרטור הצמוד במרחבים כלליים שם הוא הוגדר על המרחבים הדואליים ופעולתו הייתה להרכיב את האופרטור המקורי מימין, הסיכוי לכך שלא יהיה שום קשר בין שני הצמודים הללו אחרי שמסמנים אותם באופן זהה נראה לי אפסי וכך הבנתי שבמרחבי מכפלה פנימית T^* מעתיק את הווקטור w לווקטור שהמכפלה הפנימית איתו תהיה שקולה למכפלה הפנימית עם w **כאשר לפני הפעלת המכפלה הפנימית מפעילים את** T. נרעש מן ההבנה הזו הבנתי שזה בדיוק מה שקורה בהצמדת מטריצות, הקואורדינטה ה-i של הווקטור $A^* \cdot v$ היא המכפלה הסקלרית $\langle A \cdot e_i \mid v \rangle$ ולכן:

$$A^* \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \langle A \cdot e_i \mid v \rangle \cdot e_i$$

ואם המטריצה הצמודה אכן מייצגת את האופרטור הצמוד הנוסחה הזו צריכה להתקיים גם עבורו.
לנוסחה הזו יש כמובן פירוש גאומטרי פשוט מאד: אנו מבצעים מכפלה פנימית עם כל אחת מהתמונות של וקטורי הבסיס האורתונורמלי (כבר ראינו מה זה אומר מבחינה גאומטרית), כופלים בווקטור הבסיס המתאים בכל פעם וסוכמים את הכל.

3 העתקות אוניטריות

♣ בקורס הקודם למדנו על העתקות לינאריות שהן פונקציות בין שני מרחבים וקטוריים המשמרות את המבנה שלהן, כשאנו עוסקים במרחבי מכפלה פנימית טבעי מאד לעסוק בפונקציות המשמרות את לא רק את המבנה שלהם כמרחבים וקטוריים אלא גם כמרחבי מכפלה פנימית.

יהיו V ו-W מרחבי מכפלה פנימית מעל לשדה $\mathbb{F}$, ונסמן ב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$ וב-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_W$ את המכפלות הפנימיות שלהם.

3.1 העתקות אוניטריות שאינן בהכרח אופרטורים

הגדרה 3.1. העתקה לינארית $T : V \to W$ תיקרא <u>העתקה אוניטרית</u> (<u>אופרטור אוניטרי</u> אם $V = W$) אם לכל $v_1, v_2 \in V$ מתקיים:

$$\langle T(v_1) \mid T(v_2) \rangle_W = \langle v_1 \mid v_2 \rangle_V$$

אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ נאמר גם ש-T היא <u>העתקה אורתוגונלית</u> (<u>אופרטור אורתוגונלי</u> אם $V = W$).

תהא $T : V \to W$ העתקה לינארית.

מסקנה 3.2. יהי U גם הוא ממ"פ מעל ל-$\mathbb{F}$, ותהא $S : W \to U$ העתקה לינארית. אם S ו-T אוניטריות, אז גם $S \circ T$ אוניטרית.

מסקנה 3.3. העתקה אוניטרית מעתיקה סדרות אורתוגונליות לסדרות אורתוגונליות, וסדרות אורתונורמליות לסדרות אורתונורמליות.
כלומר אם T אוניטרית אז:

- לכל סדרה אורתוגונלית $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ב-V, גם הסדרה $(T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n))$ הוא סדרה אורתוגונלית ב-W.
- לכל סדרה אורתונורמלית $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ב-V, גם הסדרה $(T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n))$ הוא סדרה אורתונורמלית ב-W.

---

[21] יהי $g : V \to V$ אופרטור כך ש-$[g]_U = ([f]_U)^*$ מתקיים (נשתמש באיזומרפיזם בין $M_1(\mathbb{F})$ ל-$\mathbb{F}$):

$$\begin{aligned}
\langle g(v) \mid w \rangle &= ([g(v)]_U)^* \cdot [w]_U \\
&= ([g]_U \cdot [v]_U)^* \cdot [w]_U \\
&= (([f]_U)^* \cdot [v]_U)^* \cdot [w]_U \\
&= (([v]_U)^* \cdot [f]_U) \cdot [w]_U \\
&= ([v]_U)^* \cdot ([f]_U \cdot [w]_U) \\
&= ([v]_U)^* \cdot [f(w)]_U = \langle v \mid f(w) \rangle
\end{aligned}$$

טענה 3.4. אם T אוניטרית אז T חח״ע.

הוכחה. נניח ש-T אוניטרית, ויהי $v \in V$ כך ש-$T(v) = 0_W$. אם כן לכל $v' \in V$ מתקיים:

$$\langle v \mid v' \rangle_V = \langle T(v) \mid T(v') \rangle_W = \langle 0_W \mid T(v') \rangle_W = 0$$

מכאן ש-$v = 0_V$, כלומר $\ker T = \{0_V\}$ ולכן T חח״ע. ■

משפט 3.5. נניח ש-V נ״ס, שלושת התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1. T אוניטרית.
2. לכל בסיס אורתונורמלי $U := (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ של V, גם $(T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n))$ היא סדרה אורתונורמלית ב-W.
3. קיים בסיס אורתונורמלי $U := (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ של V, כך ש-$(T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n))$ היא סדרה אורתונורמלית ב-W.

הוכחה. סעיף 1 גורר את סעיף 2 ישירות מהגדרת העתקה אורתוגונלית, ומכיוון שיש ל-V בסיס אורתונורמלי גם סעיף 2 גורר את סעיף 3; אם כן נותר לנו להוכיח שסעיף 3 גורר את סעיף 1. נניח שקיים בסיס אורתונורמלי U של V כך ש-$(T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n))$ הוא בסיס אורתונורמלי של W ויהי $U := (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ בסיס כנ״ל, ע״פ משפט 1.33 וזהות פרסבל מתקיים (לכל $v_1, v_2 \in V$):

$$\begin{aligned}
\langle T(v_1) \mid T(v_2) \rangle_W &= \left\langle T\left(\sum_{i=1}^{n} \langle u_i \mid v_1 \rangle_V \cdot u_i\right) \middle| T\left(\sum_{j=1}^{n} \langle u_j \mid v_2 \rangle_V \cdot u_j\right) \right\rangle_W \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle u_i \mid v_1 \rangle_V \cdot T(u_i) \middle| \sum_{j=1}^{n} \langle u_j \mid v_2 \rangle_V \cdot T(u_j) \right\rangle_W \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\langle u_i \mid v_1 \rangle_V} \cdot \langle u_j \mid v_2 \rangle_V \cdot \langle T(u_i) \mid T(u_j) \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\langle u_i \mid v_1 \rangle_V} \cdot \langle u_j \mid v_2 \rangle_V \cdot \delta_{ij} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle u_i \mid v_1 \rangle_V} \cdot \langle u_i \mid v_2 \rangle_V = \langle v_1 \mid v_2 \rangle_V
\end{aligned}$$

■

מסקנה 3.6. אם T אוניטרית, ובנוסף V ו-W נ״ס ובעלי ממד זהה, אז T מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי ולכן הפיכה.

הגדרה 3.7. אם V ו-W נ״ס ובעלי ממד זהה נאמר גם ש-T היא <u>איזומטריה לינארית</u> וש-V ו-W <u>איזומטריים</u> זה לזה.

♣ איזומטריה היא איזומורפיזם על מרחבי מכפלה פנימית: היא הפיכה, משמרת את החיבור הווקטורי והכפל בסקלר מהיותה העתקה לינארית, ומשמרת את המכפלה הפנימית מהיותה העתקה אוניטרית.

♣ ראינו בקורס הקודם שכל בסיס של מ״ו נ״ס מגדיר איזומורפיזם בינו לבין $\mathbb{F}^n$ (כאשר $\mathbb{F}$ הוא השדה שמעליו נמצא המרחב הווקטורי), כעת אנו רואים שכל בסיס אורתונורמלי מגדיר איזומטריה בין מרחב אוקלידי ל-$\mathbb{R}^n$: כשהראינו לעיל (בסוף הסעיף ״ניצבות״) שלכל בסיס $\mathcal{B}$ של מ״ו נ״ס V מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ יש מכפלה פנימית המגדירה אותו כאורתונורמלי, מה שעשינו הוא בעצם להגדיר העתקה לינארית T המעתיקה את $\mathcal{B}$ לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^n/\mathbb{R}^n$ ואז הגדרנו את המכפלה הפנימית ב-V ע״י המכפלה הסקלרית ב-$\mathbb{C}^n/\mathbb{R}^n$; במובן הזה המכפלה הסקלרית היא המכפלה הפנימית היחידה על מ״ו נ״ס (עד כדי איזומורפיזם).

♣ כל אופרטור על ממ״פ נ״ס הוא איזומטריה לינארית מהמרחב לעצמו, יחד עם העובדה שאופרטור הזהות הוא אוניטרי נקבל שקבוצת האופרטורים האוניטריים על V, שתסומן ב-$\mathrm{O}(V)$, היא חבורה כאשר פעולת הכפל של החבורה היא ההרכבה.

מסקנה 3.8. כל מרחב מכפלה פנימית נ״ס V איזומטרי ל-$\mathbb{F}^n$ עם המכפלה הסקלרית (כאשר V מ״ו מעל $\mathbb{F}$ ו-$n := \dim V$).

משפט 3.9. תהא $f:V\to W$ **פונקציה**, אם f מקיימת את שני התנאים הבאים אז f היא **העתקה ליניארית** אוניטרית הפיכה. שני התנאים הם:

1. קיים בסיס אורתונורמלי $U:=(U_1,U_2,\ldots,U_n)$ של V כך ש-$(f(u_1),f(u_2),\ldots,f(u_n))$ היא בסיס אורתונורמלי של W.[22]
2. לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים $\langle f(v_1)\mid f(v_2)\rangle_W=\langle v_1\mid v_2\rangle_V$.

הוכחה. נניח ש-f מקיימת את שני התנאים.
יהי $U:=(U_1,U_2,\ldots,U_n)$ בסיס אורתונורמלי של V כך ש-$(f(u_1),f(u_2),\ldots,f(u_n))$ הוא בסיס אורתונורמלי של W. אם f אכן העתקה לינארית, אז היא אוניטרית ע"פ הגדרה, והפיכותה נובעת מהיותה העתקה לינארית המעתיקה בסיס לבסיס; לכן כל מה שנותר לנו הוא להוכיח שהיא אכן לינארית. מההנחה, וממשפט 1.33, נובע שלכל $v\in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned}v&=\sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid v\rangle_V\cdot u_i\\ f(v)&=\sum_{i=1}^{n}\langle f(u_i)\mid f(v)\rangle_W\cdot f(u_i)\\ &=\sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid v\rangle_V\cdot f(u_i)\end{aligned}$$

מכאן שלכל $v,v_0\in V$ ולכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}f(v+v_0)&=\sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid v+v_0\rangle_V\cdot f(u_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\langle u_i\mid v\rangle_V+\langle u_i\mid v_0\rangle_V\right)\cdot f(u_i)\\ &=\sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid v\rangle_V\cdot f(u_i)+\sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid v_0\rangle_V\cdot f(u_i)=f(v)+f(v_0)\\ f(\lambda\cdot v)&=\sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid \lambda\cdot v\rangle_V\cdot f(u_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda\cdot\langle u_i\mid v\rangle_V\cdot f(u_i)\\ &=\lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}\langle u_i\mid v\rangle_V\cdot f(u_i)=\lambda\cdot f(v)\end{aligned}$$

■

משפט 3.10. נוסחת הפולריזציה
אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז לכל $v,w\in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\langle v\mid w\rangle&=\frac{\|v+w\|^2-\left(\|v\|^2+\|w\|^2\right)}{2}\\ \langle v\mid w\rangle&=\frac{\|v+w\|^2-\|v-w\|^2}{4}\end{aligned}$$

ואם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז לכל $v,w\in V$ מתקיים:

$$\langle v\mid w\rangle=\frac{\|v+w\|^2-\|v-w\|^2-i\cdot\left(\|v+i\cdot w\|^2-\|v-i\cdot w\|^2\right)}{4}$$

♣ כל האלגברה הזו לא באמת מעניינת, הנקודה שצריך לקחת בכאן היא שהעתקה ליניארית היא אוניטרית (כלומר שומרת על המכפלה הפנימית) אס"ם היא שומרת על הנורמה.

[22] בפרט V ו-W נ"ס ובעלי ממד זהה.

הוכחה. יהיו $v,w\in V$, ע״פ **חוק המקבילית** מתקיים:

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2-\|v\|^2-\|w\|^2&=\|v\|^2+\|w\|^2-\|v-w\|^2\\&=\langle v\mid v\rangle+\langle w\mid w\rangle-\langle v-w\mid v-w\rangle\\&=\langle v\mid v\rangle+\langle w\mid w\rangle-(\langle v\mid v\rangle-\langle v\mid w\rangle-\langle w\mid v\rangle+\langle w\mid w\rangle)\\&=\langle v\mid w\rangle+\langle w\mid v\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\|v+w\|^2-\|v-w\|^2&=2\cdot\left(\|v\|^2+\|w\|^2\right)-2\cdot\|v-w\|^2\\&=2\cdot\left(\|v\|^2+\|w\|^2-\|v-w\|^2\right)\\&=2\cdot(\langle v\mid w\rangle+\langle w\mid v\rangle)\end{aligned}$$

- נניח ש-$\mathbb{F}=\mathbb{R}$, כלומר $\langle v\mid w\rangle=\langle w\mid v\rangle$ ולכן:

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2-\|v\|^2-\|w\|^2&=2\cdot\langle v\mid w\rangle\\\|v+w\|^2-\|v-w\|^2&=4\cdot\langle v\mid w\rangle\end{aligned}$$

וממילא:

$$\begin{aligned}\langle v\mid w\rangle&=\frac{\|v+w\|^2-\|v\|^2-\|w\|^2}{2}\\\langle v\mid w\rangle&=\frac{\|v+w\|^2-\|v-w\|^2}{4}\end{aligned}$$

- נניח ש-$\mathbb{F}=\mathbb{C}$, אם כן ע״פ מה שהוכחנו לעיל מתקיים:

$$\begin{aligned}-i\cdot\left(\|v+i\cdot w\|^2-\|v-i\cdot w\|^2\right)&=-i\cdot2\cdot(\langle v\mid i\cdot w\rangle+\langle i\cdot w\mid v\rangle)\\&=-i\cdot2\cdot(i\cdot\langle v\mid w\rangle-i\cdot\langle w\mid v\rangle)\\&=2\cdot\left(-i^2\cdot\langle v\mid w\rangle+i^2\cdot\langle w\mid v\rangle\right)\\&=2\cdot(\langle v\mid w\rangle-\langle w\mid v\rangle)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\|v+w\|^2-\|v-w\|^2-i\cdot\left(\|v+i\cdot w\|^2-\|v-i\cdot w\|^2\right)=2\cdot(\langle v\mid w\rangle+\langle w\mid v\rangle+\langle v\mid w\rangle-\langle w\mid v\rangle)=4\cdot\langle v\mid w\rangle$$

$$\Rightarrow\langle v\mid w\rangle=\frac{\|v+w\|^2-\|v-w\|^2-i\cdot\left(\|v+i\cdot w\|^2-\|v-i\cdot w\|^2\right)}{4}$$

■

מסקנה 3.11. נסמן ב-$\|\cdot\|_V$ וב-$\|\cdot\|_W$ את הנורמות של V ו-W, שלושת התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1. T אוניטרית.
2. לכל $v\in V$ מתקיים $\|T(v)\|_W=\|v\|_V$.
3. לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים $\|T(v_1-v_2)\|_W=\|v_1-v_2\|_V$.

הוכחה. העובדה שסעיף 1 גורר את סעיף 2 נובעת ישירות מהגדרת העתקה אורתוגונלית ומהגדרת הנורמה, סעיף 2 ו-3 הם מקרים פרטיים זה של זה, ולכן כל מה שנותר לנו הוא להוכיח שסעיף 2 גורר את סעיף 1.

נניח שלכל $v\in V$ מתקיים $\|T(v)\|_W=\|v\|_V$, מנוסחת הפולריזציה נובע שאם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\langle v_1\mid v_2\rangle_V&=\frac{(\|v_1+v_2\|_V)^2-(\|v_1\|_V)^2-(\|V_2\|_2)^2}{2}\\&=\frac{(\|T(v_1+v_2)\|_W)^2-(\|T(v_1)\|_W)^2-(\|T(v_2)\|_W)^2}{2}\\&=\frac{(\|T(v_1)+T(v_2)\|_W)^2-(\|T(v_1)\|_W)^2-(\|T(v_2)\|_W)^2}{2}=\langle T(v_1)\mid T(v_2)\rangle_W\end{aligned}$$

ואם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אז לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\langle v_1 \mid v_2\rangle_V &= \frac{\left(\|v_1+v_2\|_V\right)^2-\left(\|v_1-v_2\|_V\right)^2-i\cdot\left(\left(\|v_1+i\cdot v_2\|_V\right)^2-\left(\|v_1-i\cdot v_2\|_V\right)^2\right)}{4}\\ &= \frac{\left(\|T(v_1+v_2)\|_W\right)^2-\left(\|S(v_1-v_2)\|_W\right)^2-i\cdot\left(\left(\|T(v_1+i\cdot v_2)\|_W\right)^2-\left(\|T(v_1-i\cdot v_2)\|_W\right)^2\right)}{4}\\ &= \frac{\left(\|T(v_1)+T(v_2)\|_W\right)^2-\left(\|T(v_1)-T(v_2)\|_W\right)^2-i\cdot\left(\left(\|T(v_1)+i\cdot T(v_2)\|_W\right)^2-\left(\|T(v_1)-i\cdot T(v_2)\|_W\right)^2\right)}{4}\\ &= \langle T(v_1) \mid T(v_2)\rangle_W\end{aligned}$$

■

טענה 3.12. אם $T^*\circ T=\mathrm{Id}_V$ אז T אוניטרית.

הוכחה. נניח ש-$T^*\circ T=\mathrm{Id}_V$, אם כן לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים:

$$\langle T(v_1) \mid T(v_2)\rangle_W=\langle T^*(T(v_1)) \mid v_2\rangle_V=\langle v_1 \mid v_2\rangle_V$$

■

מסקנה 3.13. אם T אוניטרית, ובנוסף V ו-W נ״ס בעלי ממד זהה, אז:

1. T הפיכה
2. T^{-1} אוניטרית
3. $T^{-1}=T^*$

הוכחה. נניח ש-T אוניטרית וש-V ו-W נ״ס בעלי ממד זהה, ראינו לעיל (טענה 3.4) ש-T חח״ע ולכן T על וממילא הפיכה. מכאן שלכל $w_1,w_2\in W$ מתקיים:

$$\left\langle T^{-1}(w_1) \mid T^{-1}(w_2)\right\rangle_V=\left\langle T\left(T^{-1}(w_1)\right) \mid T\left(T^{-1}(w_2)\right)\right\rangle_W=\langle w_1 \mid w_2\rangle_V$$

אם כן T^{-1} אוניטרית. בנוסף, לכל $v\in V$ ולכל $w\in W$ מתקיים:

$$\left\langle T^{-1}(w) \mid v\right\rangle_V=\left\langle T\left(T^{-1}(w)\right) \mid T(v)\right\rangle_W=\langle w \mid T(v)\rangle_W$$

ומכאן ש-$T^{-1}=T^*$. ■

3.2 אופרטורים אוניטריים

מסקנה 3.14. לכל אופרטור $f:V\to V$, f אוניטרי אם״ם $f^*\circ f=\mathrm{Id}_V=f\circ f^*$.

הגדרה 3.15. מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ תיקרא <u>אוניטרית</u> אם $A^*\cdot A=I_n=A\cdot A^*$, אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ נאמר גם ש-A <u>אורתוגונלית</u>.

♣ מטריצה אוניטרית מגדירה אופרטור אוניטרי על $\mathbb{F}^n$ ביחס מכפלה הסקלרית, לכל $v,w\in\mathbb{F}^n$ מתקיים:

$$\langle T_A(v) \mid T_A(w)\rangle=(A\cdot v)^*\cdot(A\cdot w)=v^*\cdot A^*\cdot A\cdot w=v^*\cdot I_n\cdot w=v^*\cdot w=\langle v \mid w\rangle$$

כאשר אנו משתמשים באיזומורפיזם בין $M_1(\mathbb{F})$ ל-$\mathbb{F}$.
כמובן, כל זה עובד כל כך יפה מפני שכפל מטריצות הוגדר כך שכל כניסה במטריצה היא בעצם מכפלה סקלרית של שני וקטורים (מעל $\mathbb{C}$ יש צורך גם בהצמדה לפני כן).

♣ למעשה ניתן היה להסתפק בדרישה ש-$A^*\cdot A=I_n$ משום שאז $A^*=A^{-1}$ ולכן ודאי ש-$A\cdot A^*=I_n$.

♣ נשים לב מה קורה כאן: השוויון $A^*\cdot A=I_n$ אומר שלכל עמודה ב-A המכפלה הסקלרית שלה עם עצמה (כווקטור ב-$\mathbb{F}^n$) היא 1 והמכפלה הסקלרית שלה עם כל עמודה אחרת היא 0, כלומר העמודות של A מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ ביחס למכפלה הסקלרית.

♣ נניח ש-V נ״ס, אופרטור $f : V \to V$ הוא אופרטור אוניטרי אם״ם לכל בסיס אורתונורמלי U המטריצה $[f]_U$ אוניטרית, לסיכום: מטריצות אוניטריות הן מטריצות מייצגות של העתקות אוניטריות בבסיסים אורתונורמליים (איזה כיף לומר משפטים מבלבלים כאלה: ״גנן גידל דגן בגן...״, ״שרה שרה שיר שמח...״).
הסיבה לכך היא כפי שראינו לעיל: לייצג את f בבסיס אורתונורמלי שקול להעתקת וקטורי הבסיס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$.

יהי $f : V \to V$ אופרטור אוניטרי.

טענה 3.16. מתקיים $\sigma(f) \subseteq \{z \in \mathbb{F} : |z| = 1\}$.

♣ כלומר אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ו-$\lambda \in \sigma(f)$ אז $\lambda = \pm 1$, ואם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז הספקטרום של f מוכל במעגל היחידה המרוכב.

♣ חשוב לזכור שאם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז ייתכן ש-$\sigma(f) = \emptyset$.

הוכחה. נניח ש-$\sigma(f) \neq \emptyset$ (אחרת הטענה טריוויאלית) ויהי $v \in V$ וקטור עצמי של f בעל ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ (מהגדרה $v \neq 0_V$ ולכן $\langle v \mid v \rangle \neq 0$).

$$\Rightarrow \langle v \mid v \rangle = \langle f(v) \mid f(v) \rangle = \langle \lambda \cdot v \mid \lambda \cdot v \rangle = \overline{\lambda} \cdot \lambda \cdot \langle v \mid v \rangle$$

$$\Rightarrow |\lambda|^2 = \overline{\lambda} \cdot \lambda = \frac{\langle v \mid v \rangle}{\langle v \mid v \rangle} = 1$$

כעת נזכור שמהגדרת הערך המוחלט $0 \leq |\lambda| \in \mathbb{R}$ ולכן מהעובדה ש-$|\lambda|^2 = 1$ נובע ש-$|\lambda| = 1$. ■

משפט 3.17. לכל $\lambda, \mu \in \sigma(f)$ כך ש-$\lambda \neq \mu$ מתקיים $V_\lambda \perp V_\mu$.

♣ אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז המשפט יכול להתקיים רק כאשר $\sigma(f) = \{-1, 1\}$ ואז $V_1 \perp V_{-1}$.

הוכחה. נניח של-f יש שני ערכים עצמיים שונים λ ו-μ ויהיו $v \in V_\lambda$ ו-$w \in V_\mu$.

$$\Rightarrow \langle v \mid w \rangle = \langle f(v) \mid f(w) \rangle = \langle \lambda \cdot v \mid \mu \cdot w \rangle = \overline{\lambda} \cdot \mu \cdot \langle v \mid w \rangle$$

ראינו כבר ש-$\ker f = \{0_V\}$ ולכן $0 \notin \sigma(f)$ - כלומר $\lambda \neq 0$ ו-$\mu \neq 0$ - ומכאן שגם $\overline{\lambda} \cdot \mu \neq 0$.
נניח בשלילה ש-$\langle v \mid w \rangle \neq 0$ וממילא $\overline{\lambda} \cdot \mu = 1$.

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{\overline{\lambda}} = \frac{\lambda}{\overline{\lambda} \cdot \lambda} = \frac{\lambda}{|\lambda|^2} = \lambda$$

בסתירה לכך ש-$\lambda \neq \mu$, מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$\langle v \mid w \rangle = 0$ כלומר $v \perp w$.
v ו-w הנ״ל היו שרירותיים ולכן $V_\lambda \perp V_\mu$. ■

נניח ש-V נ״ס.

משפט 3.18. יהי $U \subseteq V$ תמ״ו, אם U שמור תחת f אז גם $U^\perp$ שמור תחת f.

הוכחה. נניח ש-U שמור תחת f ויהי $v \in U^\perp$.
f הפיך ולכן גם $f|_U$ הפיך, מכאן שלכל $u \in U$ קיים $u' \in U$ כך ש-$f(u') = u$ ולכן גם:

$$\langle f(v) \mid u \rangle = \langle f(v) \mid f(u') \rangle = \langle v \mid u' \rangle = 0$$

אם כן $f(v) \in U^\perp$ ומהגדרה $U^\perp$ שמור תחת f. ■

משפט 3.19. קיימת סדרת תתי-מרחבים $(W_1, W_2, \ldots, W_r)$ שמורים תחת f כך שמתקיים:

1. $W_i \perp W_j$ לכל $r \geq i, j \in \mathbb{N}$ כך ש-$i \neq j$.
2. $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$.
3. תלוי במקרה:
   - אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז $\dim(W_i) = 1$ או ש-$\dim(W_i) = 2$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.
   - אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז $\dim(W_i) = 1$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על הממד של V, אם $\dim V = 1$ הטענה טריוויאלית לכן נעבור ישירות לצעד האינדוקציה.
נניח שהטענה מתקיימת לכל ממ"פ נ"ס מממד קטן ממש מ-$\dim V$, ראינו בחלק שעסק באופרטורים שאם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז יש ל-f תמ"ו שמור ממימד 1 ואם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז יש ל-f תמ"ו שמור ממימד 1 או 2 - יהי $W \subseteq V$ תמ"ו כזה.
מהעובדה ש-$V = W \oplus W^{\perp}$ נובע ש-$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W \leq \dim V - 1$, אם כן הנחת האינדוקציה מתקיימת עבור $W^{\perp}$.
תהא $(W_1, W_2, \ldots, W_r)$ סדרת תתי-מרחבים המקיימת את הנדרש עבור $W^{\perp}$, מכאן ש-$(W_1, W_2, \ldots, W_r, W)$ היא סדרת תתי-מרחבים המקיימת את הנדרש עבור V:

1. מתקיים $W_i \perp W_j$ לכל $r \geq i, j \in \mathbb{N}$ כך ש-$i \neq j$ מהגדרה ומתקיים $W \perp W_i$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ שכן $W_i \subseteq W^{\perp}$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.
2. מתקיים $V = W \oplus W^{\perp} = W \oplus (W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r) = W \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$.
3. הגדרנו את W כך שיעמוד בתנאי השלישי ו-W_i מקיים את התנאי גם הוא ע"פ הגדרתו (לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$).

■

מסקנה 3.20. אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז f לכסין אוניטרית.

משפט 3.21. יהי $g : V \to V$ אופרטור, g אוניטרי אם"ם לכל בסיס אורתונורמלי U של V המטריצה $[g]_U$ היא מטריצה אוניטרית.

הוכחה. הגרירה מימין לשמאל נובעת ישירות ממסקנה 3.14 ומהקשר בין הרכבת העתקות ליניאריות לכפל מטריצות, לכן נוכיח רק את הגרירה בכיוון ההפוך.
נניח שלכל בסיס אורתונורמלי U של V המטריצה $[g]_U$ היא מטריצה אוניטרית ויהי U בסיס אורתונורמלי.
לכל $v, w \in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
\langle g(v) \mid g(w) \rangle &= ([g(v)]_U)^* \cdot [g(w)]_U \\
&= ([g]_U \cdot [v]_U)^* \cdot [g]_U \cdot [w]_U \\
&= ([v]_U)^* \cdot ([g]_U)^* \cdot [g]_U \cdot [w]_U \\
&= ([v]_U)^* \cdot I_n \cdot [w]_U \\
&= ([v]_U)^* \cdot [w]_U = \langle v \mid w \rangle
\end{aligned}$$

■

משפט 3.22. תכונות של מטריצות אוניטריות
תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה.

1. A אוניטרית אם״ם סדרת עמודותיה היא בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ עם המכפלה הסקלרית.
2. A אוניטרית אם״ם A^* אוניטרית.
3. A אוניטרית אם״ם A הפיכה ובנוסף $A^{-1} = A^*$.
4. I_n אוניטרית.
5. תהא $B \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה אוניטרית, גם $A \cdot B$ אוניטרית; כלומר קבוצת המטריצות האוניטריות מסדר n סגורה לכפל מטריצות.
6. קבוצת המטריצות האוניטריות מסדר n, שתסומן ב-$\mathrm{O}(n)$, היא חבורה כאשר פעולת הכפל המתאימה היא כפל מטריצות.
7. אם A אוניטרית אז $\det A^* = \overline{\det A}$.
8. אם A אוניטרית אז $|\det A| = 1$.
   כלומר: אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז $\det A = \pm 1$, ואם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז $\det A$ נמצא על מעגל היחידה המרוכב.
9. $\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det A = 1\}$ היא תת-חבורה של $\mathrm{O}(n)$.
10. אם A אוניטרית אז $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{F} : |z| = 1\}$.
    כלומר: אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ו-$\lambda \in \sigma(A)$ אז $\lambda = \pm 1$, ואם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז הספקטרום של A מוכל במעגל היחידה המרוכב.
11. אם A אוניטרית אז לכל $\lambda, \mu \in \sigma(A)$ כך ש-$\lambda \neq \mu$ מתקיים $V_\lambda \perp V_\mu$.

הוכחה. נוכיח רק את תכונות 7 ו-8, שאר התכונות נובעות מהתכונות המקבילות עבור אופרטורים אוניטריים או שהוסברו כבר כשהצגנו את ההגדרה של מטריצה אוניטרית.
מתקיים:

$$\begin{aligned} 1 &= \det(I_n) = \det\left(A^{-1} \cdot A\right) = \det A^{-1} \cdot \det A \\ &= \det A^* \cdot \det A = \overline{\det A^t} \cdot \det A \\ &= \overline{\det A} \cdot \det A = |\det A|^2 \end{aligned}$$

וכפי שהזכרנו בעבר נובע מזה ש-$|\det A| = 1$. ■

♣ ממשפט 3.19 ומהעובדה שהדטרמיננטה של מטריצה אורתוגונלית היא ± 1 נובע שניתן למיין את האופרטורים האורתוגונליים על מרחבים אוקלידיים ע״פ פעולתם על מרחבים מממד 1 או 2, כלומר ע״פ המטריצות המייצגות שלהם על מרחבים כאלו.
נניח ש-f אורתוגונלי ו-V ממד 1 או 2.

- נניח ש-$\dim V = 1$ ויהי $0_V \neq v \in V$ ($\{v\}$ הוא בסיס של V), ראינו ש-$\sigma(f) \subseteq \{-1, 1\}$ ומכיוון שבממד 1 אופרטור הוא פשוט כפל בסקלר נובע מכאן ש-$f(v) = \pm v$, כלומר $f = \mathrm{Id}_V$ או ש-$f = -\mathrm{Id}_V$ (שיקוף דרך הראשית).
- נניח ש-$\dim V = 2$ ויהי U בסיס אורתונורמלי של V, נגדיר:

$$A := \begin{bmatrix} c & a \\ s & b \end{bmatrix} := [f]_U$$

מכיוון שסדרת העמודות של A היא אורתונורמלית נדע שמתקיים:

$$\begin{aligned} 1 &= c^2 + s^2 \\ 1 &= a^2 + b^2 \\ 0 &= ac + bs \end{aligned}$$

נניח בהג"כ ש-$c \neq 0$,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a = -\frac{bs}{c} \Rightarrow 1 = \left(-\frac{bs}{c}\right)^2 + b^2 \\
&\Rightarrow 1 = b^2 \cdot \left(1 + \frac{s^2}{c^2}\right) = b^2 \cdot \frac{c^2 + s^2}{c^2} = b^2 \cdot \frac{1}{c^2} \\
&\Rightarrow b^2 = c^2 \Rightarrow b = \pm c \Rightarrow a = \mp s
\end{aligned}$$

אם כן ישנן שתי אפשרויות:

$$A = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix}$$

נזכור ש-$\det A = \pm 1$ ונשים לב שהאפשרות הראשונה מתאימה עבור $\det A = 1$:

$$\det A = c^2 - (-s) \cdot s = c^2 + s^2 = 1$$

ואילו השנייה מתאימה עבור $\det A = -1$:

$$\det A = c \cdot (-c) - s^2 = -\left(c^2 + s^2\right) = -1$$

על כל פנים מהשוויון $1 = c^2 + s^2$ נובע שקיימת $\theta \in [0, 2\pi)$ כך ש-$c = \cos\theta$ ו-$s = \sin\theta$[23], כלומר נקבל את אחת משתי האפשרויות:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

האפשרות הראשונה היא סיבוב ב-θ רדיאנים נגד כיוון השעון והשנייה היא שיקוף ביחס לציר ה-x ואז סיבוב ב-θ רדיאנים נגד כיוון השעון (נזכור שהכפלת מטריצות שקולה להרכבה), למעשה ניתן להציג את השנייה כשיקוף דרך הישר $y = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot x = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot x$ (אם $\theta = \pi$ אז מדובר בשיקוף דרך ציר ה-y).
לסיכום: כל האופרטורים האורתוגונליים על מרחבים אוקלידיים מתפרקים לסיבובים (אם הדטרמיננטה היא 1) ושיקופים (אם הדטרמיננטה היא -1) על תתי-מרחבים שמורים מממד 1 או 2.

♣ אם A היא מטריצת סיבוב אז אין לה ערכים עצמיים אלא אם $\theta = 0$ (מדובר במטריצת היחידה ולכן $\sigma(A) = \{1\}$) או ש-$\theta = \pi$ (מדובר במטריצה הנגדית של מטריצה היחידה ולכן $\sigma(A) = \{-1\}$);
אם A היא מטריצת שיקוף אז $\sigma(A) = \{-1, 1\}$ משום שציר השיקוף מועתק לעצמו והציר המאונך מועתק לנגדי שלו:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\theta) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin(\theta) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos(\theta) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin(\theta) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin(\theta) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos(\theta) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

מסקנה 3.23. אם f אופרטור אורתוגונלי אז קיים בסיס אורתונורמלי U של V כך שמתקיים:

$$[f]_U = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}$$

כאשר $A_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}$ עבור $\theta_i \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ לכל $r \geq i \in \mathbb{N}$, $p = \dim V_1$, $q = \dim V_{-1}$[24] ו-$p + q + 2r = \dim V$.

[23] הגרירה נובעת ממשפט פיתגורס ההפוך: אם משולש מקיים את השוויון $a^2 + b^2 = c^2$ (כאשר a, b, c הן אורכי הצלעות של המשולש) אז הוא ישר זווית (ו-c הוא אורך היתר), העובדה שניתן לבנות מצלעות באורכים אלו משולש כלשהו נובעת מזה שהשוויון גורר את $c + a > b$, את $c + b > a$ ואת $a + b > c$ (ראו מה שכתבתי על כך בהסבר על שמו של א"ש המשולש בסיכום הקורס אינפי' 1).

[24] בכל שיקוף ציר השיקוף כלול ב-V_1 והציר המאונך לו כלול ב-V_{-1}, בסיבוב ב-0 רדיאנים כל התמ"ו השמור כלול ב-V_1.

4 אופרטורים הרמיטיים ואופרטורים נורמליים

4.1 התחלה

♣ בפרק הקודם ראינו שאופרטור אורתוגונלי אינו לכסין בהכרח מפני שבמקרים מסוימים יש לו תתי-מרחבים שמורים שעליהם הוא פועל כאופרטור סיבוב, לעומתו ראינו שם שכל אופרטור אוניטרי מעל המרוכבים דווקא לכסין תמיד. הסיבה להבדל הזה היא שבעוד שבממשיים אי אפשר לתאר סיבוב ככפל בסקלר הרי שבמרוכבים כל כפל בסקלר הוא סיבוב ומתיחה של המרחב, בואו נתבונן בזה מקרוב.

כשהגדרנו את המרוכבים אמרנו ש-$\mathbb{C}$ הוא $\mathbb{R}^2$ עם פעולת החיבור הווקטורי שלו שעליו אנו מגדירים פעולת כפל חדשה:

$$\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := (c+is)(x+iy) = (cx+sy) + i\cdot(sx+cy) = \begin{bmatrix} cx-sy \\ sx+cy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

כלומר כל פונקציית כפל בקבוע $z \in \mathbb{C}$ שקולה כפל במטריצת הסיבוב והמתיחה[25] $r \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ כאשר $z =$ $r\cdot\text{cis}\theta$, עם קצת עבודה נוספת ניתן להראות שהשקילות הנ"ל מגדירה איזומורפיזם מ-$\mathbb{C}$ לקבוצת מטריצות הסיבוב והמתיחה על $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ r \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \;\middle|\; 0 \le r \in \mathbb{R},\quad \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

בשדה המרוכבים יש לנו שלוש קבוצות מיוחדות: הממשיים הטהורים, המדומים הטהורים ומעגל היחידה מרוכב, איך זה מתבטא במטריצת הסיבוב שלהם?

יהי $z \in \mathbb{C}$ ויהיו $0 \le r \in \mathbb{R}$ ו-$\theta \in [0, 2\pi)$ כך ש-$z = r \cdot \text{cis}\theta$,

- אם z הוא ממשי טהור אז $\theta = 0$ או ש-$\theta = \pi$ ולכן המטריצה המתאימה היא:

$$\begin{bmatrix} \pm r & 0 \\ 0 & \pm r \end{bmatrix}$$

נשים לב לכך שכל מטריצות הסיבוב הסימטריות מוכרחות להיות מהצורה הזו.

- אם z הוא מדומה טהור אז $\theta = \frac{\pi}{2}$ או ש-$\theta = \frac{3\pi}{2}$ ולכן המטריצה מתאימה היא:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mp r \\ \pm r & 0 \end{bmatrix}$$

נשים לב לכך שכל מטריצות הסיבוב האנטי-סימטריות מוכרחות להיות מהצורה הזו.

- אם z נמצא על מעגל היחידה המרוכב אז $r = 1$ ולכן המטריצה המתאימה היא:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

נשים לב לכך שאלו כל מטריצות הסיבוב שאינן מבצעות מתיחה ובכך הן שומרות על הערך המוחלט של המספר המרוכב ועל הזוויות שלו ביחס למספרים מרוכבים אחרים.

אחד הדברים שמייחדים את מעגל היחידה המרוכב משאר המישור הוא שלכל איבר במעגל היחידה ההופכי שלו הוא גם הצמוד שלו, כעת הדמיון לעולם האופרטורים זועק לשמיים: לא רק שכבר ראינו שכל מטריצה כזו היא אופרטור אוניטרי על $\mathbb{R}^2$ אלא גם ההופכית שלה היא בדיוק המטריצה המתאימה לצמוד המרוכב ממש כמו שעבור אופרטור אוניטרי ההופכי שלו הוא האופרטור הצמוד.

האם גם שתי הקבוצות הראשונות מקבילות לסוג מסוים של אופרטורים?

[25] יהי $z \in \mathbb{C}$ ותהא $f_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f_z(w) := z \cdot w$ לכל $w \in \mathbb{C}$.

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל לשדה $\mathbb{F}$.

הגדרה 4.1. אופרטורים ומטריצות הרמיטיים

- אופרטור $f : V \to V$ יקרא אופרטור הרמיטי או צמוד לעצמו אם $f^* = f$ (אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ נאמר גם ש-f סימטרי).
- מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ תיקרא מטריצה הרמיטית או צמודה לעצמה אם $A^* = A$ (אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז $A = A^* = A^t$ וכבר קראנו למטריצה כזו סימטרית).

♣ נניח ש-V נ"ס ויהי $f : V \to V$ אופרטור, f הוא אופרטור הרמיטי / צמוד לעצמו אם"ם לכל בסיס U אורתונורמלי המטריצה $[f]_U$ הרמיטית / צמודה לעצמה.

♣ אופרטורים הרמיטיים הם סוג האופרטורים המקביל לממשיים טהורים - לכל מספר ממשי מתקיים $\overline{z} = z$.

הגדרה 4.2. אופרטורים ומטריצות אנטי-הרמיטיים

- אופרטור $f : V \to V$ יקרא אופרטור אנטי-הרמיטי אם $f^* = -f$ (אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ נאמר גם ש-f אנטי-סימטרי).
- מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ תיקרא מטריצה אנטי-הרמיטית אם $A^* = -A$ (אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז $-A = A^* = A^t$ וכבר קראנו למטריצה כזו אנטי-סימטרית).

♣ נניח ש-V נ"ס ויהי $f : V \to V$ אופרטור, f הוא אופרטור אנטי-הרמיטי אם"ם לכל בסיס U אורתונורמלי המטריצה $[f]_U$ אנטי-הרמיטית.

♣ אופרטורים אנטי-הרמיטיים הם סוג האופרטורים המקביל למדומים טהורים - לכל מספר מדומה $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $\overline{z} = -z$.

♣ כמו ש-$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ ו-$\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2}$ לכל $z \in \mathbb{C}$ כך גם $\frac{f+f^*}{2}$ הוא אופרטור הרמיטי ו-$\frac{f-f^*}{2}$ הוא אופרטור אנטי-הרמיטי לכל $f \in \mathrm{End}(V)$, ובנוסף בשני המקרים מתקיים:

$$z = \frac{z+\overline{z}}{2} + \frac{z-\overline{z}}{2}$$
$$f = \frac{f+f^*}{2} + \frac{f-f^*}{2}$$

כלומר כמו שניתן להציג כל מספר מרוכב כסכום של ממשי ומדומה כך ניתן להציג כל אופרטור כסכום של הרמיטי ואנטי-הרמיטי.

הגדרה 4.3. אופרטורים ומטריצות נורמליים

- אופרטור $f : V \to V$ יקרא אופרטור נורמלי אם $f \circ f^* = f^* \circ f$.
- מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ תיקרא מטריצה נורמלית אם $A \cdot A^* = A^* \cdot A$.

♣ נניח ש-V נ"ס ויהי $f : V \to V$ אופרטור, f הוא אופרטור נורמלי אם"ם לכל בסיס U אורתונורמלי המטריצה $[f]_U$ נורמלית.

♣ אופרטורים אוניטריים, הרמיטיים ואנטי-הרמיטיים הם בפרט אופרטורים נורמליים.

האם גם לאופרטורים הנורמליים יש קבוצה מקבילה במרוכבים???

יהי $f:V\to V$ אופרטור.

משפט 4.4. שקילויות של אופרטורים נורמליים, הרמיטיים ואנטי-הרמיטיים

1. f נורמלי אם״ם לכל $v,w\in V$ מתקיים $\langle f^*(v)\mid f^*(w)\rangle=\langle f(v)\mid f(w)\rangle$.
2. f הרמיטי אם״ם לכל $v,w\in V$ מתקיים $\langle f(v)\mid w\rangle=\langle v\mid f(w)\rangle$.
3. f הרמיטי אם״ם לכל $v,w\in V$ מתקיים $\langle v\mid f(w)\rangle=\langle f(v)\mid w\rangle$.
4. f אנטי-הרמיטי אם״ם לכל $v,w\in V$ מתקיים $\langle -f(v)\mid w\rangle=\langle v\mid f(w)\rangle$.
5. f אנטי-הרמיטי אם״ם לכל $v,w\in V$ מתקיים $\langle v\mid -f(w)\rangle=\langle f(v)\mid w\rangle$.
6. נניח ש-V נ״ס,
   - f נורמלי אם״ם לכל בסיס אורתונורמלי U של V המטריצה $[f]_U$ היא מטריצה נורמלית.
   - f הרמיטי אם״ם לכל בסיס אורתונורמלי U של V המטריצה $[f]_U$ היא מטריצה הרמיטית.
   - f אנטי-הרמיטי אם״ם לכל בסיס אורתונורמלי U של V המטריצה $[f]_U$ היא מטריצה אנטי-הרמיטית.

הוכחה.

- לכל $v,w\in V$ מתקיים:

$$\langle f^*(f(v))\mid w\rangle=\langle v\mid f(f^*(w))\rangle\iff\langle f(v)\mid f(w)\rangle=\langle f^*(v)\mid f^*(w)\rangle$$

אם כן הוכחנו את הגרירה מימין לשמאל בסעיף 1, כדי להוכיח את הגרירה משמאל לימין נשים לב לכך שאם לכל $v,w\in V$ מתקיים:

$$\langle f^*(f(v))\mid w\rangle=\langle v\mid f(f^*(w))\rangle$$

אז מטענה 2.15 נובע ש-$f^*\circ f=(f\circ f^*)^*$והרי מתכונות הצמוד (סעיף 3 במשפט 2.16) מתקיים:

$$(f\circ f^*)^*=(f^*)^*\circ f^*=f\circ f^*$$

- סעיפים 2-5 הם מקרים פרטיים של טענה 2.15 ושל סעיף 5 במשפט 2.16 בהתאמה.
- סעיף 6 נובע ישירות ממסקנה 2.19 ומהקשר של הרכבת העתקות ליניאריות לכפל מטריצות.

■

משפט 4.5. תכונות של אופרטורים נורמליים

נניח ש-f נורמלי, מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. לכל $v\in V$ מתקיים$\|f^*(v)\|=\|f(v)\|$.
2. לכל $j,k\in\mathbb{N}$ מתקיים $f^k\circ(f^*)^j=(f^*)^j\circ f^k$.
3. לכל $P\in\mathbb{F}[x]$ גם $P(f)$ הוא אופרטור נורמלי.
4. לכל $v\in V$ ולכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים

$$f(v)=\lambda\cdot v\iff f^*(v)=\overline{\lambda}\cdot v$$

ובפרט $\lambda\in\sigma(f)\iff\overline{\lambda}\in\sigma(f^*)$.

5. לכל $\lambda,\mu\in\sigma(f)$ כך ש-$\lambda\neq\mu$ מתקיים $V_\lambda\perp V_\mu$.

♣ נזכיר שוב שאופרטורים הרמיטיים ואופרטורים אוניטריים הם בפרט אופרטורים נורמליים ולכן אלו גם תכונות שלהם.

♣ אפילו אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אין זה מוכרח שקיימים $\lambda,\mu\in\sigma(f)$ כך ש-$\lambda\neq\mu$, במקרה כזה סעיף 4 מתקיים באופן ריק (כמובן שאם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז יכול להיות של-f אין ערכים עצמיים בכלל).

הוכחה.

1. נובע ישירות מהגדרת הנורמה ומסעיף 1 במשפט הקודם (4.4).

2. הרכבה מקיימת את חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) וכש-f נורמלי ההרכבה שלו עם f^* מקיימת גם את חוק החילוף (קומוטטיביות).

3. יהי $P\in\mathbb{F}[T]$ ויהיו $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ כך ש-$P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot x^k$.

$$\Rightarrow (P(f))^*=\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot f^k\right)^*=\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\cdot f^k\right)^*=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}\cdot\left(f^k\right)^*=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}\cdot(f^*)^k$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow P(f)\circ(P(f))^*&=\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot f^k\right)\circ\left(\sum_{j=0}^{n}\overline{a_k}\cdot(f^*)^k\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\cdot f^k\circ\sum_{j=0}^{n}\overline{a_j}\cdot(f^*)^j\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}a_k\cdot f^k\circ\left(\overline{a_j}\cdot(f^*)^j\right)\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}a_k\cdot\overline{a_j}\cdot\left(f^k\circ(f^*)^j\right)\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}a_k\cdot\overline{a_j}\cdot\left((f^*)^j\circ f^k\right)\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\overline{a_j}\cdot(f^*)^j\right)\circ\left(a_k\cdot f^k\right)\right)\\&=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\overline{a_j}\cdot(f^*)^j\right)\circ\left(a_k\cdot f^k\right)\right)=\sum_{j=0}^{n}\left(\overline{a_j}\cdot(f^*)^j\circ\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\cdot f^k\right)\right)\\&=\left(\sum_{j=0}^{n}\overline{a_j}\cdot(f^*)^j\right)\circ\left(\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\cdot f^k\right)\right)=(P(f))^*\circ P(f)\end{aligned}$$

ומהגדרה נקבל ש-$P(f)$ נורמלי.

4. מהסעיף הקודם נובע שגם $f-\mathrm{Id}_V$ הוא אופרטור נורמלי, נניח של-f יש ערך עצמי $\lambda\in\mathbb{F}$ ויהי $v\in V$ כך ש-$f(v)=\lambda\cdot v$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow 0_V&=f(v)-\lambda\cdot v=(f-\lambda\cdot\mathrm{Id}_V)(v)=\left(f^*-(\lambda\cdot\mathrm{Id}_V)^*\right)(v)\\&=\left(f^*-\overline{\lambda}\cdot\mathrm{Id}_V^*\right)(v)=f^*(v)-\overline{\lambda}\cdot\mathrm{Id}_V(v)=f^*(v)-\overline{\lambda}\cdot v\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f^*(v)=\overline{\lambda}\cdot v$$

הגרירה בכיוון ההפוך נובעת מהעובדה ש-$(f^*)^*=f$ ו-$\overline{\overline{\lambda}}=\lambda$.

5. נניח של-f יש לו שני ערכים עצמיים שונים $\lambda,\mu\in\mathbb{F}$ ובהג"כ נניח ש-$\mu\neq 0$, אם כן יהיו $v\in V_\lambda$ ו-$w\in V_\mu$.

$$\Rightarrow\langle v\mid w\rangle=\left\langle v\mid\frac{1}{\mu}\cdot\mu\cdot w\right\rangle=\frac{1}{\mu}\cdot\langle v\mid f(w)\rangle=\frac{1}{\mu}\cdot\langle f^*(v)\mid w\rangle=\frac{1}{\mu}\cdot\langle\overline{\lambda}\cdot v\mid w\rangle=\frac{\lambda}{\mu}\cdot\langle v\mid w\rangle$$

כעת נניח בשלילה ש-$\langle v\mid w\rangle\neq 0$,

$$\Rightarrow\mu=\mu\cdot\frac{\langle v\mid w\rangle}{\langle v\mid w\rangle}=\lambda$$

בסתירה לכך ש-$\mu\neq\lambda$. מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$\langle v\mid w\rangle=0$, כלומר $v\perp w$ ומכיוון ש-v ו-w היו שרירותיים נובע מזה ש-$V_\lambda\perp V_\mu$.

■

מסקנה 4.6. אם f הרמיטי אז כל הערכים העצמיים שלו ממשיים, ואם f אנטי-הרמיטי אז כל הערכים העצמיים שלו מדומים.

משפט 4.7. נניח ש-V נ"ס, מתקיימים שני הפסוקים הבאים:

1. אם f הרמיטי או אנטי-הרמיטי אז $\mathrm{Im}f=(\ker f)^\perp$.

2. אם f הרמיטי או אנטי-הרמיטי אז לכל תמ"ו $W\subseteq V$ שמור תחת f גם $W^\perp$ שמור תחת f.

הוכחה. בשביל אופרטורים הרמיטיים סעיף 1 נובע ישירות מסעיף 7 במשפט 2.16, סעיף 2 נובע מסעיף 8 במשפט זה, ובשביל אופרטורים אנטי-הרמיטיים יש לשים לב לכך ש-$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(-f)$ ושתמ"ו $W\subseteq V$ שמור תחת f אם"ם הוא שמור תחת $-f$. ■

טענה 4.8. נניח ש-V נ"ס ונביא לטענה זו שני ניסוחים שקולים:

- כל הטלה אורתוגונלית על תמ"ו היא אופרטור הרמיטי.
- אם $f^2 = f$ ו-$\mathrm{Im}f = (\ker f)^{\perp}$ אז f הרמיטי.

♣ העובדה ש-$f^2 = f$ אומרת ש-f הוא אופרטור הטלה ואילו העובדה ש-$\mathrm{Im}f = (\ker f)^{\perp}$ אומרת שזוהי ההטלה האורתוגונלית על התמ"ו $\mathrm{Im}f$.

הוכחה. <u>הוכחה 1 - ע"פ הנוסחה המפורשת של האופרטור הצמוד</u>

תהא $p_W : V \to V$ הטלה אורתוגונלית על תמ"ו $W \subseteq V$ (כלומר $(p_W)^2 = p_W$ ובנוסף $W = \mathrm{Im}p_W$ ו-$W^{\perp} = \ker P_W$) ונניח ש-$f = p_W$.

נדגיש שכל התכונות של p_W כהטלה אורתוגונלית נובעות מהעובדה ש-$(p_W)^2 = p_W$ וש-$\mathrm{Im}p_W = (\ker p_W)^{\perp}$, לכן כשהנחנו ש-$f = p_W$ לא הנחנו שום דבר מלבד ש-$f^2 = f$ ו-$\mathrm{Im}f = (\ker f)^{\perp}$.

יהי $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ בסיס אורתונורמלי של W ויהי $(u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_n)$ בסיס אורתונורמלי של $W^{\perp}$, אם כן $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ הוא בסיס אורתונורמלי של V.

יהי $v \in V$ ויהיו $w \in W$ ו-$w^{\perp} \in W^{\perp}$ כך ש-$v = w + w^{\perp}$, אם כן $p_W(v) = w$.

מהנוסחה המפורשת של הצמוד, ממשפט 1.33 ומתכונות ההטלה נובע שמתקיים (לכל $v \in V$):

$$\begin{aligned}
(p_W)^*(v) &= \sum_{i=1}^{k} \langle p_W(u_i) \mid v\rangle \cdot u_i + \sum_{i=k+1}^{n} \langle p_W(u_i) \mid v\rangle \cdot u_i = \sum_{i=1}^{k} \langle u_i \mid v\rangle \cdot u_i + \sum_{i=k+1}^{n} \langle 0_V \mid v\rangle \cdot u_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \langle u_i \mid v\rangle \cdot u_i + \sum_{i=k+1}^{n} 0 \cdot u_i = \sum_{i=1}^{k} \langle u_i \mid v\rangle \cdot u_i = \sum_{i=1}^{k} \left\langle u_i \mid w + w^{\perp}\right\rangle \cdot u_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(\langle u_i \mid w\rangle + \left\langle u_i \mid w^{\perp}\right\rangle\right) \cdot u_i = \sum_{i=1}^{k} \left(\langle u_i \mid w\rangle + 0\right) \cdot u_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \langle u_i \mid w\rangle \cdot u_i = \sum_{i=1}^{k} \langle u_i \mid w\rangle \cdot u_i + \sum_{i=k+1}^{n} 0 \cdot u_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \langle u_i \mid w\rangle \cdot u_i + \sum_{i=k+1}^{n} \langle u_i \mid w\rangle \cdot u_i = w = p_W(v)
\end{aligned}$$

■

הוכחה. <u>הוכחה 2 - אלגברית</u>

לכל $v \in V$ מתקיים:

$$f(v - f(v)) = f(v) - f^2(v) = f(v) - f(v) = 0_V$$

מכאן שלכל $v \in V$ מתקיים $v - f(v) \in \ker(T) = (\mathrm{Im}T)^{\perp}$ ולכן גם (לכל $w \in V$):

$$\langle v - f(v) \mid f(w)\rangle = 0$$

אם כן לכל $v, w \in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
\langle v \mid f(w)\rangle &= \langle f(v) + (v - f(v)) \mid f(w)\rangle = \langle f(v) \mid f(w)\rangle + \langle v - f(v) \mid f(w)\rangle = \langle f(v) \mid f(w)\rangle \\
\langle f(v) \mid w\rangle &= \langle f(v) \mid f(w) + (w - f(w))\rangle = \langle f(v) \mid f(w)\rangle + \langle f(v) \mid w - f(w)\rangle = \langle f(v) \mid f(w)\rangle
\end{aligned}$$

מכאן שלכל $v, w \in V$ מתקיים $\langle f(v) \mid w\rangle = \langle f(v) \mid f(w)\rangle = \langle v \mid f(w)\rangle$ ומטענה 2.15 נובע ש-$f^* = f$. ■

טענה 4.9. אם f נורמלי אז לכל $\lambda \in \sigma(f)$ התמ"ויים V_λ ו-$(V_\lambda)^{\perp}$ שמורים הן תחת f והן תחת f^*.

הוכחה. נניח ש-f נורמלי ויהי $\lambda \in \sigma(f)$ (אם אין כזה הטענה טריוויאלית), V_λ שמור תחת f מהגדרה וכבר ראינו שזה אומר ש-$(V_\lambda)^{\perp}$ שמור תחת f^* (סעיף 8 במשפט 2.16). נוכיח ש-V_λ שמור תחת f^*, מסעיף 5 במשפט 4.5 נובע שלכל $v \in V_\lambda$ מתקיים:

$$f(f^*(v)) = f^*(f(v)) = f^*(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f^*(v)$$

כלומר $f^*(v) \in V_\lambda$ ומכאן ש-V_λ שמור תחת f^*. נוכיח ש-$(V_\lambda)^\perp$ שמור תחת f, לכל $v \in V_\lambda$ ולכל $w \in (V_\lambda)^\perp$ מתקיים:

$$\langle v \mid f(w)\rangle = \langle f^*(v) \mid w\rangle = \langle \overline{\lambda} \cdot v \mid w\rangle = \lambda \cdot \langle v \mid w\rangle = 0$$

■

4.2 המשפט הספקטרלי

4.2.1 ליכסון בבסיס אורתונורמלי

הגדרה 4.10. ליכסון בבסיס אורתונורמלי
נניח ש-V נ"ס ויהי $f : V \to V$ אופרטור.

- נאמר ש-f לכסין בבסיס אורתונורמלי אם קיים בסיס אורתונורמלי U של V כך ש-$[f]_U$ אלכסונית,
אם V אוקלידי ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$) נאמר גם ש-f לכסין אורתוגונלית ואם V הרמיטי ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$) נאמר גם ש-f לכסין אוניטרית.
- נאמר שמטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ לכסינה אורתוגונלית אם קיימת מטריצה אורתוגונלית $O \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש-$O^{-1}AO$ היא מטריצה אלכסונית (כלומר האופרטור T_A לכסין אורתוגונלית).
- נאמר שמטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה אוניטרית $U \in M_n(\mathbb{C})$ כך ש-$U^{-1}AU$ היא מטריצה אלכסונית (כלומר האופרטור T_A לכסין אוניטרית).

♣ כלומר f לכסין בבסיס אורתונורמלי אם"ם קיים בסיס אורתונורמלי שכל איבריו הם וקטורים עצמיים של f.

♣ בליכסון רגיל אחרי שמצאנו את הבסיס המלכסן היינו יכולים לשים את הבסיס בעמודות מטריצה P ולקבל שמתקיים $P^{-1}AP = D$ (כאשר D היא הצורה האלכסונית של A), אבל איזו מטריצה היא P^{-1}? - זו שאלה חשובה, כפי שראינו בחלק שעסק באופרטורים התשובה לה מאפשר לנו להעלות מטריצות לכסינות בחזקות באופן מהיר מאד, מתקיים:

$$A^n = \left(P^{-1}DP\right)\left(P^{-1}DP\right)\ldots\left(P^{-1}DP\right) = P^{-1}D^nP$$

ולהעלות מטריצה אלכסונית בחזקה זה פשוט מאד - מעלים את הערכים שעל האלכסון הראשי באותה חזקה.
כדי למצוא את P^{-1} היינו צריכים לדרג את P - זה אמנם אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי[26] אבל לא כ"כ כיף לביצוע באופן ידני, היופי בלכסון אורתוגונלי/אוניטרי הוא שאם מצאנו בדרך פלא בסיס מלכסן (אנחנו נראה בקובץ הטענות דרך פלא כזו) אז מתקיים $P^{-1} = P^*$, והצמדת מטריצה היא פעולה פשוטה מאד.

4.2.2 במרחבים הרמיטיים

נניח ש-V הרמיטי, כלומר V נ"ס ו-$\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

משפט 4.11. המשפט הספקטרלי

- f נורמלי אם"ם f לכסין אוניטרית.
- מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ היא נורמלית אם"ם היא לכסינה אוניטרית.

הוכחה.

- $\Longleftarrow$

נניח ש-f נורמלי ונוכיח את הטענה באינדוקציה על הממד של V, אם $\dim V = 1$ הטענה טריוויאלית ולכן נעבור ישר לצעד האינדוקציה. נניח שהמשפט נכון לכל ממ"פ מממד קטן ממש מ-$\dim V$ ויהי $\lambda \in \sigma(f)$ (נזכור שמעל המרוכבים $\sigma(f) \neq \emptyset$), בטענה הקודמת (4.9) ראינו ש-V_λ ו-$(V_\lambda)^\perp$ שמורים תחת f ותחת f^*ולכן הצמצום של f ל-V_λ מתחלף עם הצמצום של f^* ל-V_λ ואותו הדבר נכון גם עבור $(V_\lambda)^\perp$, כלומר הצמצומים של f ל-V_λ ול-$(V_\lambda)^\perp$ (בנפרד) הם אופרטורים נורמליים ולכן ע"פ הנחת האינדוקציה הם לכסינים אוניטרית. כלומר קיימים בסיסים אורתונורמליים של V_λ ו-$(V_\lambda)^\perp$ שכל איבריהם הם וקטורים עצמיים של f, השרשור של בסיסים אלו הוא בסיס אורתונורמלי של V שכל איבריו הם וקטורים עצמיים של f ומכאן ש-f לכסין אוניטרית.

[26] $O(n^3)$ אם לדייק - ראו כאן.

- $\Longrightarrow$
נניח ש-f לכסין אוניטרית, יהי $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ בסיס אורתונורמלי מלכסן שלו ויהיו $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ כך ש-$f(u_i) = \lambda_i \cdot u_i$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.
מכאן שלכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ מתקיים $f^*(u_i) = \overline{\lambda_i} \cdot u_i$ ולכן גם:

$$\begin{aligned} f(f^*(u_i)) &= f\left(\overline{\lambda_i} \cdot u_i\right) = \overline{\lambda_i} \cdot f(u_i) = \overline{\lambda_i} \cdot \lambda_i \cdot u_i = \lambda_i \cdot \overline{\lambda_i} \cdot u_i \\ &= \lambda_i \cdot f^*(u_i) = f^*(\lambda_i \cdot u_i) = f^*(f(u_i)) \end{aligned}$$

וממילא $f \circ f^* = f^* \circ f$, כלומר f נורמלי.

- המשפט עבור מטריצות נובע ישירות מהמשפט עבור אופרטורים ומהעובדה שמעבר בסיס במטריצות מתבצע ע"י כפל במטריצה הפיכה מצד אחד ובהופכית שלה מהצד השני.

■

מסקנה 4.12. אם f נורמלי אז $f = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot p_i$, כאשר p_i היא ההטלה האורתוגונלית על V_{λ_i} לכל $r \geq i \in \mathbb{N}$ ו-$\sigma(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$.

מסקנה 4.13.

- באופרטורים ומטריצות הרמיטיים:
  - f הרמיטי אם"ם קיים בסיס אורתונורמלי שכל איבריו הם וקטורים עצמיים של f עם ערכים עצמיים ממשיים.
  - מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ היא הרמיטית אם"ם קיימת מטריצה אוניטרית $U \in M_n(\mathbb{C})$ כך ש-$U^{-1}AU$ אלכסונית וממשית.
- באופרטורים ומטריצות אנטי-הרמיטיים:
  - f אנטי-הרמיטי אם"ם קיים בסיס אורתונורמלי שכל איבריו הם וקטורים עצמיים של f עם ערכים עצמיים מדומים.
  - מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ היא אנטי-הרמיטית אם"ם קיימת מטריצה אוניטרית $U \in M_n(\mathbb{C})$ כך ש-$U^{-1}AU$ אלכסונית ומדומה[27].
- באופרטורים ומטריצות אוניטריים:
  - f אוניטרי אם"ם קיים בסיס אורתונורמלי שכל איבריו הם וקטורים עצמיים של f בעלי ערכים עצמיים שערכם המוחלט הוא 1 (כלומר נמצאים על מעגל היחידה במישור המרוכב).
  - מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ היא אוניטרית אם"ם קיימת מטריצה אוניטרית $U \in M_n(\mathbb{C})$ כך ש-$U^{-1}AU$ אלכסונית שאיבריה על האלכסון בעלי ערך מוחלט 1 (כלומר נמצאים על מעגל היחידה במישור המרוכב).

♣ **שימו לב (!):** בלבול נפוץ מאד (לא תאמינו כמה פעמים טעיתי בזה...) הוא לחשוב שהעובדה שהערך המוחלט של ערך עצמי הוא 1 אומרת שמדובר ב-± 1, זה לא נכון שכן כל המספרים המרוכבים שעל מעגל היחידה במישור המרוכב מקיימים זאת. כמובן שהסיבה לבלבול היא שאנו רגילים לעבוד בממשיים...

מסקנה 4.14.

1. f נורמלי אם"ם קיים בסיס U אורתונורמלי המטריצה $[f]_U$ אלכסונית.
2. f הרמיטי אם"ם קיים בסיס U אורתונורמלי המטריצה $[f]_U$ אלכסונית וממשית.
3. f אנטי-הרמיטי אם"ם קיים בסיס U אורתונורמלי המטריצה $[f]_U$ אלכסונית ומדומה.
4. f אוניטרי אם"ם קיים בסיס U אורתונורמלי המטריצה $[f]_U$ אלכסונית שאיבריה על האלכסון הם בעלי ערך מוחלט 1 (כלומר נמצאים על מעגל היחידה במישור המרוכב).

[27] כלומר בכל הקואורדינטות שלה יש מספרים מדומים.

4.2.3 במרחבים אוקלידיים

נניח ש-V אוקלידי, כלומר V נ״ס ו-$\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

♣ ההוכחה של המשפט הספקטרלי מעל המרוכבים הסתמכה על שלוש נקודות חשובות:

1. לכל תמ״ו $W \subseteq V$ שמור תחת f יש ל-$f|_W$ ערך עצמי, כלומר קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש-V_λ אינו טריוויאלי (ראינו בחלק שעסק באופרטורים שא״א לומר זאת בוודאות מעל $\mathbb{R}$).
2. אם f נורמלי אז מרחבים עצמיים שונים מאונכים זה לזה (סעיף 5 במשפט 4.5).
3. אם f נורמלי אז תתי המרחבים הווקטוריים V_λ ו-$(V_\lambda)^\perp$ שמורים תחת f ותחת f^* (טענה 4.9).

כשאנו רוצים להעתיק את המשפט לאופרטורים נורמליים מעל הממשיים אנחנו נתקלים בבעיה בנקודה הראשונה, ואכן ישנם אופרטורים נורמליים מעל הממשיים שאין להם ערכים עצמיים כלל ולכן אינם לכסינים - הדוגמה הקלאסית היא אופרטור הסיבוב בזווית ישרה נגד כיוון השעון (שהיא מטריצה אורתוגונלית):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

זו הסיבה לכך שהמשפט יהיה נכון אך ורק עבור אופרטורים ומטריצות סימטריים משום שרק אצלם כל הערכים העצמיים ממשיים.

טעות נפוצה בניסיון להוכיח שלמטריצות סימטריות יש ערכים עצמיים היא לומר שכל מטריצה סימטרית מעל הממשיים היא גם מטריצה הרמיטית מעל המרוכבים ואז כפי שראינו יש לה ערך עצמי ממשי ולכן גם כמטריצה מעל הממשיים יש לה את אותו ערך עצמי; **זה פשוט לא נכון!**

בואו ננתח את זה ביסודיות: העובדה שלמטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ יש ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{R}$ אומרת שקיים וקטור $v \in \mathbb{C}^n$ כך ש-$A \cdot v = \lambda \cdot v$ אבל ייתכן ש-$v \notin \mathbb{R}^n$ ולכן לא הצלחנו להוכיח שום דבר לגבי A כמטריצה מעל הממשיים.

למעשה רימיתי מעט כאמרתי שנימוק זה אינו נכון, האמת היא (כפי שהזכרתי בחלק שעסק באופרטורים) שאם למטריצה ממשית יש צורת ז'ורדן ממשית אז יש לה גם בסיס מז'רדן ממשי[28], מסיבה זו ורק מסיבה זו הנימוק הנ״ל דווקא תקף: ניקח את הבסיס המז'רדן של המטריצה הסימטרית שהוא למעשה בסיס מלכסן ונפעיל על כל מרחב עצמי את אלגוריתם גרם-שמידט[29]. הבעיה בנימוק הזה היא שהוא מסתמך על מתמטיקה גבוהה יותר שלא למדנו עדיין ולכן העדפתי הוכחה אחרת.

משפט 4.15.

- f סימטרי אם״ם f לכסין אורתוגונלית.
- מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ היא סימטרית אם״ם היא לכסינה אורתוגונלית.

הוכחה. את הגרירה מימין לשמאל קל יותר להוכיח עבור מטריצות ואת הגרירה ההפוכה נוח יותר להוכיח עבור אופרטורים, מכיוון שיש לנו שקילות מוחלטת בין מטריצות לאופרטורים אין כאן שום בעיה.

- $\Longleftarrow$

נניח ש-A סימטרית ונוכיח את הטענה באינדוקציה על n, אם $n=1$ הטענה טריוויאלית ולכן נעבור ישירות לצעד האינדוקציה, כלומר נניח באינדוקציה שהטענה מתקיימת לכל $n > k \in \mathbb{N}$. כמטריצה מעל הממשיים A היא גם מטריצה מעל המרוכבים וכזו יש לה ערך עצמי מעל המרוכבים, ממסקנה 4.6 נובע שכל ערך עצמי כזה הוא ממשי ולכן לפולינום האופייני של A יש שורש ממשי. כעת נשים לב לכך שהפולינום האופייני של A כמטריצה מעל המרוכבים זהה לפולינום האופייני שלה כמטריצה מעל המרוכבים, מכאן שיש ל-A כמטריצה מעל הממשיים ערך עצמי. אם כן יהי $W \subseteq \mathbb{R}^n$ תמ״ו שמור תחת T_A מממד 1, כפי שראינו (משפט 4.7) גם $W^\perp$ שמור תחת T_A[30] מכאן שהצמצומים של T_A ל-W ול-$W^\perp$ הם אופרטורים סימטריים ולכן ע״פ הנחת האינדוקציה הם לכסינים אורתוגונלית; כלומר קיימים בסיסים אורתונורמליים של W ו-$W^\perp$ שכל איבריהם הם וקטורים עצמיים של T_A, והשרשור של בסיסים אלו הוא בסיס אורתונורמלי של V שכל איבריו הם וקטורים עצמיים של T_A ומכאן ש-T_A לכסין אורתוגונלית וכך גם A.

---

[28] את המשפט הזה ראיתי בוויקיפדיה בערך ״דמיון מטריצות״, וכפי שניתן לראות שם - עדיין לא למדנו את המתמטיקה הדרושה להוכחתו.

[29] הנה לכם עוד נימוק לעובדה שמטריצה הרמיטית מעל המרוכבים היא לכסינה אוניטרית מבלי להסתמך על ההוכחה שהבאנו לעיל בשביל אופרטורים נורמליים.

[30] כזכור T_A היה ההעתקה הליניארית המוגדרת ע״י כפל המטריצה A בווקטור, כמו כן בכל הנוגע למטריצות אנחנו עובדים עם המכפלה הסקלרית ולכן $W^\perp$ מוגדר על פיה.

- $\Longrightarrow$

נניח ש-f לכסין אורתוגונלית: יהי $U := (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ בסיס אורתונורמלי מלכסן של $\mathbb{R}^n$ ויהיו $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ כך ש-$f(\lambda_i) = \lambda_i \cdot u_i$ לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$. מכאן שלכל $n \geq i \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$f(u_i) = \lambda_i \cdot u_i = \overline{\lambda_i} \cdot u_i = f^*(u_i)$$

וממילא $f = f^*$, כלומר f סימטרי.

■

4.3 אלגוריתם לליכסון אורתוגונלי/אוניטרי

אלגוריתם 2 אלגוריתם לליכסון אורתוגונלי/אוניטרי

נתון אופרטור f על ממ"פ V מעל לשדה $\mathbb{F}$, עלינו לקבוע אם f לכסין אורתוגונלית/אוניטרית ואם כן אז גם למצוא את הצורה האלכסונית של f ובסיס אורתונורמלי מלכסן.
כדי לבדוק אם f לכסין אורתוגונלית/אוניטרית ניקח בסיס $\mathcal{B}$ של V ונסמן $A := [f]_{\mathcal{B}}$, כעת:

- אם $A^* = A$ אז f לכסין אורתוגונלית/אוניטרית.
- אחרת:
  - אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז f אינו לכסין אורתוגונלית.
  - אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ וגם $A^*A = I_n$ ו/או $A^*A = AA^*$ אז f לכסין אוניטרית, אחרת f אינו לכסין אוניטרית.

אם f לכסין אורתוגונלית/אוניטרית נפעל ע"פ השלבים הבאים:

1. נחשב את χ_f, כעת אנחנו יודעים מהם הערכים העצמיים של f אך יותר מזה - מספר ההופעות של כל אחד מהם בצורה האלכסונית הוא הריבוי האלגברי שלו ב-χ_f - לכן כבר עכשיו אנחנו יודעים בדיוק איך נראית הצורה האלכסונית של f (עוד לפני שמצאנו בסיס מלכסן), נסמן אותה ב-D.
2. לכל $\lambda \in \sigma(f)$:
   - נמצא בסיס ל-$V_\lambda = \ker(f - \lambda)$ ע"י מציאת בסיס למרחב הפתרונות של הממ"ל:

$$([f]_{\mathcal{B}} - \lambda \cdot I_n) \cdot x = 0$$

   וחילוץ הווקטורים המתאימים ב-V (כל וקטור בבסיס של מרחב הפתרונות הוא וקטור קואורדינטות של וקטור ב-V ע"פ הבסיס $\mathcal{B}$).
   - נפעיל את אלגוריתם גרם-שמידט למציאת בסיס אורתונורמלי של V_λ.
3. נשרשר את הבסיסים זה לזה לבסיס אחד U, מסעיף 5 במשפט 4.5 נובע ש-U הוא בסיס אורתונורמלי.

5 רשימות לזיכרון

♣ בקובץ זה הגדרנו אובייקטים מתמטיים רבים ונתנו להם שמות דומים למדי ופעמים שאלו שמות מטעים, כמו כן בניגוד לרבים מן השמות שאנו נפגשים בהם בקורסי מתמטיקה כאן לא כל כך ברור מהי הסיבה הלשונית לשם זה, בפרק זה נסדר קצת את כל השמות ונסביר מה עומד מאחוריהם. תודה לאיתמר סלהוב שהאיר את עיניי בראותו לי את הצורך בפרק זה.

מכפלה סקלרית

- מקור לשוני: בניגוד לכל פעולה על וקטורים שראינו עד כה פעולה זו מחזירה סקלר.
- אוריינטציה:
  - המספרים הממשיים (גאומטריה אוקלידית)
  - המספרים המרוכבים
- משמעות פורמלית:
  - מעל הממשיים

$$x \cdot y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} := x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta$$

  * מעל המרוכבים

$$x \cdot y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} := \overline{x_1} \cdot y_1 + \overline{x_2} \cdot y_2 + \ldots + \overline{x_n} \cdot y_n$$

- הערה: ראינו שעל ממ״פ נ״ס זוהי המכפלה הפנימית היחידה עד כדי איזומורפיזם.

מכפלה פנימית

- מקור לשוני: בניגוד לכל פעולת כפל שנעשתה עד כה על וקטורים (כפל בסקלר וכפל מטריצה בווקטור) פעולה זו היא פנימית למרחב - היא נעשית בין שני וקטורים.
- אוריינטציה:
  - אורך
  - זווית
- משמעות פורמלית:
  פעולה דו-מקומית על שני וקטורים המקיימת שלוש תכונות:
  - בי-לינאריות (מעל הממשיים) או לינאריות למחצה (מעל המרוכבים)
  - סימטריה (מעל הממשיים) או סימטריה הרמיטית (מעל המרוכבים)
  - חיוביות בהחלט
- הערה: מכפלה פנימית היא הכללה של המכפלה הסקלרית ובממ"פ נ"ס היא תמיד איזומורפית אליה.

נורמה

- מקור לשוני: **צריך לבדוק**
- אוריינטציה:
  - אורך
  - מרחק
- משמעות פורמלית:
  - האורך (נורמה של וקטור) הוא השורש של המכפלה הפנימית של וקטור עם עצמו ($\|v\| := \sqrt{\langle v \mid v \rangle}$).
  - המרחק בין שני וקטורים הוא האורך של וקטור ההפרש ביניהם
- הערה: הנורמה הוגדרה דווקא כך בגלל משפט פיתגורס והמכפלה הסקלרית ב-$\mathbb{R}^3$.

ניצב

- מקור לשוני: עברית פשוטה, עבור המכפלה הסקלרית ב-$\mathbb{R}^3$ לניצבות יש את אותה משמעות שיש לה בגאומטריה.
- אוריינטציה:
  - וקטורים
  - קבוצות של וקטורים
  - תתי-מרחבים וקטוריים
- משמעות פורמלית:
  - המכפלה הפנימית של וקטורים ניצבים היא 0.
  - מרחב ניצב לקבוצה (ובפרט לתמ״ו) הוא המרחב שמכיל את כל הווקטורים הניצבים לכל הווקטורים בקבוצה.
  - תמ״ו והתמ״ו הניצב לו מהווים סכום ישר בממ״פ נ״ס.
- הערה: ניצבות של וקטורים הוגדרה דווקא כך מפני שזה המצב במכפלה הסקלרית, המכפלה הסקלרית של שני וקטורים ניצבים (גאומטרית) היא 0.

אורתוגונלי

- מקור לשוני: אנגלית (orthogonal), ״ortho״ היא תחילית שמשמעויותיה הן אנכי, ניצב, ישר, נכון (webster) ; ו-״gon״ היא ״noun combining form״[31] שמקורה במילה היוונית לזווית (webster).
- אוריינטציה:
  - וקטורים
  - העתקות לינאריות
  - מטריצות
  - המספרים הממשיים
- משמעות פורמלית:
  - קבוצה/סדרה אורתוגונלית היא קבוצה/סדרה שבה כל זוג וקטורים שונים ניצבים זה לזה.
  - העתקה אורתוגונלית היא העתקה לינארית מעל הממשיים השומרת על המכפלה הפנימית - $\langle T(v_1) \mid T(v_2)\rangle_W = \langle v_1 \mid v_2\rangle_V$.
  - מטריצה אורתוגונלית היא מטריצה שהכפל בה מגדיר העתקה אורתוגונלית על $\mathbb{R}^n$ ביחס למכפלה הסקלרית.
- הערה: העתקה אורתוגונלית מעתיקה קבוצות/סדרות אורתונורמליות לקבוצות/סדרות אורתונורמליות, העתקה לינארית שידוע עליה רק שהיא מעתיקה קבוצות/סדרות אורתוגונליות לקבוצות/סדרות אורתוגונליות אינה בהכרח העתקה אורתוגונלית!

[31] איך אומרים את זה בעברית?

אורתונורמלי

- מקור לשוני: אנגלית (orthonormal), "ortho" היא תחילית שמשמעויותיה הן אנכי, ניצב, ישר, נכון (webster); ו-"normal" הוא עומד בתקן או אנך - שניהם מתאימים לנו כאן מפני שאנו רוצים וקטורי באורך 1 המאונכים זה לזה.
- אוריינטציה:
  - וקטורים ניצבים
  - וקטורי יחידה
- משמעות פורמלית: קבוצה/סדרה אורתונורמלית היא קבוצה/סדרה שכל איבריה הם וקטורי יחידה (הנורמה שלהם היא 1) שכולם ניצבים זה לזה.
- הערה: העתקה המעתיקה קבוצות/סדרות אורתונורמליות נקראת אוניטרית ומעל הממשיים גם אורתוגונלית.

צמוד

- מקור לשוני: התואר "צמוד" ניתן לצמד אובייקטים מתמטיים המקיימים תכונות מסוימות באופן הדדי, הפעם הראשונה שבה אנו נפגשים בתואר זה הוא בצמוד המרוכב אך כפי שראינו ישנם צמדים נוספים.
- אוריינטציה:
  - העתקות לינאריות
  - מטריצות
  - המספרים המרוכבים
- משמעות פורמלית:
  - ההעתקה הצמודה של העתקה $T : V \to W$ היא ההעתקה $T^* : W^* \to V^*$ המוגדרת ע"י $T^*(f) = f \circ T$ לכל $f \in W^*$.
    מעל ממ"פ כל $v \in V$ וכל $w \in W$ מגדירים פונקציות ע"י המכפלה הפנימית - $l_v(\cdot) := \langle v \mid \cdot \rangle_V$ ו-$l_w(\cdot) := \langle w \mid \cdot \rangle_W$,
    וכל האיברים ב-V^* וב-W^* הם מצורה זו; מה ש-T^* עושה במקרה כזה הוא:
    $$\langle T^*(w) \mid \cdot \rangle_V = T^*(\langle w \mid \cdot \rangle_W) = T^*(l_w) = l_w \circ T = \langle w \mid T(\cdot) \rangle_W = \overline{\langle T(\cdot) \mid w \rangle_W}$$
  - המטריצה הצמודה מוגדרת ע"י $[A^*]_{ij} = \overline{[A^t]_{ij}} = \overline{[A]_{ji}}$.
  - הצמוד המרוכב של מספר $x + iy = r \cdot \operatorname{cis}(\theta)$ הוא $x - iy = r \cdot \operatorname{cis}(-\theta)$.

אוקלידי

- מקור לשוני: אוקלידס, מתמטיקאי יווני הנחשב לאבי הגאומטריה, כתב את הספר "יסודות" שעוסק בגאומטריה האינטואיטיבית לכולנו אך נכתב בצורה אקסיומטית; בתחילת המאה ה-19 הבינו המתמטיקאים שאין כל הכרח לקבל את כל האקסיומות של אוקלידס וכך נתגלו גאומטריות נוספות, לפיכך הגאומטריה האינטואיטיבית נקראת גאומטריה אוקלידית ואילו גאומטריות אחרות נקראות גאומטריות לא אוקלידיות.
- אוריינטציה: המספרים הממשיים.
- משמעות פורמלית: מרחב אוקלידי הוא ממ"פ נ"ס מעל הממשיים.
- הערה: מרחבים אוקלידיים איזומטריים ל-$\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלרית ושם עובדת אותה גאומטריה אוקלידית של $\mathbb{R}^3$.

אוניטרי

- מקור לשוני: אנגלית (unitary), מלשון unit - יחידה (כמו וקטור יחידה).
- אוריינטציה:
  - מרחבים וקטוריים
  - העתקות לינאריות
  - המספרים המרוכבים
- משמעות פורמלית:
  - מרחב אוניטרי הוא ממ"פ נ"ס מעל המרוכבים.
  - העתקה אוניטרית היא העתקה לינארית השומרת על המכפלה הפנימית - $\langle T(v_1) \mid T(v_2)\rangle_W = \langle v_1 \mid v_2\rangle_V$, מכיוון שלהעתקה כזו מעל הממשיים קוראים "אורתוגונלית" לניסוח "העתקה אוניטרית" יש אוריינטציה למספרים המרוכבים.
- הערה: מרחבים אוניטריים איזומטריים ל-$\mathbb{C}^n$ עם המכפלה הסקלרית.

הרמיטי

- מקור לשוני: שארל הרמיט - מתמטיקאי צרפתי שעל שמו נקראת תכונות הסימטריה ההרמיטית (סימטריה ביחס להצמדה).
- אוריינטציה:
  - מרחבים וקטוריים
  - אופרטורים
  - המספרים המרוכבים
- משמעות פורמלית:
  - מרחב הרמיטי הוא ממ״פ נ״ס מעל המרוכבים.
  - אופרטור על ממ״פ נקרא הרמיטי אם הוא שווה לצמוד שלו, מכיוון שלאופרטור כזה מעל הממשיים קוראים ״סימטרי״ לניסוח ״אופרטור הרמיטי״ יש אוריינטציה למספרים המרוכבים.
  - אופרטור על ממ״פ נקרא אנטי-הרמיטי אם הוא נגדי לצמוד שלו, מכיוון שלאופרטור כזה מעל הממשיים קוראים ״אנטי-סימטרי״ לניסוח ״אופרטור אנטי-הרמיטי״ יש אוריינטציה למספרים המרוכבים.

נורמלי

- מקור לשוני: **צריך לבדוק**
- אוריינטציה: אופרטורים.
- משמעות פורמלית: אופרטור על ממ״פ נקרא נורמלי אם הוא מתחלף עם הצמוד שלו.