מרחבים מכוונים

גאומטריה אוקלידית - חלק ראשון

נכתב ע״י שריה אנסבכר

תוכן העניינים

1 היחס ״נמצאת בין״ ומרחבים מכוונים 2

1.1 היחס ״נמצאת בין״ 2

1.2 מרחבים מכוונים 5

2 קבוצות קוויות 6

3 ישרים 8

3.1 הגדרה ומסקנות פשוטות 8

3.2 הגדרות שקולות לישר 9

4 שלמות קווית והמספרים הממשיים 13

1 היחס "נמצאת בין" ומרחבים מכוונים

תזכורת: חבורה סדורה היא רביעייה סדורה $(G,\cdot,e,\leq)$ כך ש-$(G,\cdot,e)$ היא חבורה, ו-$\leq$ הוא יחס סדר מלא על G המקיים שלכל $a,b,c\in G$, אם $a\leq b$ אז $c\cdot a\leq c\cdot b$.

תזכורת: בהינתן חבורה סדורה $(G,+,0,\leq)$, מרחב G-מטרי הוא זוג סדור $(\mathbb{X},d)$ כך ש-$\mathbb{X}$ היא קבוצה לא ריקה, ו-$d:\mathbb{X}\times\mathbb{X}\to G$ היא פונקציה המקיימת את שלוש התכונות הבאות:

1. חיוביות בהחלט - לכל $a,b\in\mathbb{X}$ מתקיים $d(a,b)\geq 0$, ובנוסף $d(a,b)=0$ אם"ם $a=b$.
2. סימטריה - לכל $a,b\in\mathbb{X}$ מתקיים $d(a,b)=d(b,a)$.
3. אי-שוויון המשולש - לכל $a,b,c\in\mathbb{X}$ מתקיים $d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)$.

תהא $\mathcal{G}$ חבורה אבלית סדורה, ויהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב $\mathcal{G}$-מטרי.

1.1 היחס "נמצאת בין"

הגדרה 1.1. תהיינה $a,b,c\in\mathbb{X}$ שלוש נקודות כך ש-a ו-b שונות מ-c, נאמר ש-b נמצאת בין a ל-c אם מתקיים $d(a,c)=d(a,b)+d(b,c)$.

מסקנה 1.2. לכל שלוש נקודות, רק אחת מהן יכולה להיות בין שתי האחרות.

הגדרה 1.3. לכל $a,b\in\mathbb{X}$ נסמן:

$$\begin{aligned}(a,b)&:=\{x\in\mathbb{X}\mid x\text{ נמצאת בין }a\text{ ל-}b\}\\[a,b]&:=\{x\in\mathbb{X}\mid d(a,b)=d(a,x)+d(x,b)\}\\[a,b)&:=[a,b]\setminus\{b\}\\(a,b]&:=[a,b]\setminus\{a\}\end{aligned}$$

כל אחת מארבע הקבוצות הנ"ל תיקרא קטע, ובנוסף (a,b) תיקרא הקטע הפתוח שבין a ל-b ו-$[a,b]$ תיקרא הקטע הסגור שבין a ל-b.

♣ בהמשך נראה שכל קטע סגור הוא קבוצה סגורה, אך לעומת זאת קטע פתוח אינו בהכרח קבוצה פתוחה.

תהיינה $a,b,c\in\mathbb{X}$.

מסקנה 1.4. לכל $a,b\in\mathbb{X}$ מתקיים:

- $(a,b)=(b,a)=[a,b]\setminus\{a,b\}$
- $[a,b]=[b,a]=(a,b)\uplus\{a,b\}$
- $[a,a]=\{a\}$
- $(a,a)=[a,a)=(a,a]=\emptyset$

טענה 1.5. לכל $a,b\in\mathbb{X}$ הקטע $[a,b]$ הוא קבוצה סגורה וחסומה.

הוכחה. העובדה ש-$[a,b]$ חסומה היא טריוויאלית: לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $d(a,x)=d(a,b)-d(x,b)\leq d(a,b)$, אם כן נותר לנו להוכיח שהיא סגורה.
תהא $f:\mathbb{X}\to\mathcal{G}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(x):=d(a,x)+d(x,b)$ לכל $x\in\mathbb{X}$, תהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-$[a,b]$ המתכנסת לנקודה $x\in\mathbb{X}$. מאריתמטיקה של רציפות ומרציפות המטריקה נובע ש-f רציפה, ומהגדרת $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ נובע שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f(x_n)=d(a,x_n)+d(x_n,b)=d(a,b)$. כעת נקבל מאפיון היינה לרציפות של פונקציה בנקודה שמתקיים:

$$d(a,x)+d(x,b)=f(p)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=d(a,b)$$

כלומר $x\in[a,b]$. אם כן $[a,b]$ סגורה לגבולות ולכן סגורה. ■

טענה 1.6. לכל $a,b,c,x\in\mathbb{X}$ כך ש-$b\in(a,c)$, מתקיימת לכל היותר אחת משתי האפשרויות הבאות:

1. $x\in(a,b)$
2. $x\in(b,c)$

הוכחה. יהיו $a,b,c,x\in\mathbb{X}$ כך ש-$b\in(a,c)$, ונניח בשלילה ש-$b\in(a,c)$, $x\in(a,b)$ ו-$x\in(b,c)$.

$$\Rightarrow d(a,c)=d(a,b)+d(b,c)$$
$$\Rightarrow d(a,b)=d(a,x)+d(x,b)$$
$$\Rightarrow d(b,c)=d(b,x)+d(x,c)$$
$$\Rightarrow d(a,c)=d(a,x)+2\cdot d(b,x)+d(x,c)$$

מהנחת השלילה נובע ש-$b\neq x$, כלומר $d(b,x)>0$ ומכאן ש-$d(a,c)>d(a,x)+d(x,c)$ בסתירה לא"ש המשולש. ■

מסקנה 1.7. לכל $a,b,x,y\in\mathbb{X}$ כך ש-$x,y\in(a,b)$, מתקיימת בדיוק אחת משלוש האפשרויות הבאות:

1. $x=y$
2. $x\in(a,y)$ ו-$y\in(x,b)$
3. $x\in(y,b)$ ו-$y\in(a,x)$

הוכחה. האפשרות הראשונה סותרת את שתי האחרות לפי הגדרה, ואילו השנייה והשלישית סותרות זו את זו ע"פ המסקנה הקודמת (1.6); מכאן שמתקיימת לכל היותר אחת משלוש האפשרויות, אם כן נותר להוכיח שאחת מהן מתקיימת.
יהיו $a,b,x,y\in\mathbb{X}$ כך ש-$x,y\in(a,b)$, ונניח ש-$x\neq y$. אם כן מהמסקנה הקודמת (1.6) נובע ש-$y\in(a,x)$ ו/או $y\in(b,x)$ וכמו כן $x\in(a,y)$ ו/או $x\in(b,y)$. מהגדרה לא ייתכן ש-$y\in(a,x)$ וגם $x\in(a,y)$, וכמו כן לא ייתכן ש-$y\in(b,x)$ וגם $x\in(b,y)$, כלומר שתי האפשרויות היחידות הן:

1. $x\in(b,y)$ ו-$y\in(a,x)$
2. $x\in(a,y)$ ו-$y\in(b,x)$

■

טענה 1.8. לכל $a,b,c\in\mathbb{X}$ כך ש-$b\in(a,c)$ מתקיים $(a,b)\subseteq(a,c)$ ו-$(b,c)\subseteq(a,c)$.

הוכחה. נוכיח ש-$(a,b)\subseteq(a,c)$, ההוכחה שמתקיים גם $(b,c)\subseteq(a,c)$ זהה עד כדי החלפת a ו-c בכל מקום.
תהא $p\in(a,b)$ ונניח בשלילה ש-$p\notin(a,c)$, כלומר $d(a,c)<d(a,p)+d(p,c)$.

$$\Rightarrow d(a,p)+d(p,c)>d(a,c)=d(a,b)+d(b,c)$$
$$=d(a,p)+d(p,b)+d(b,c)$$
$$\Rightarrow d(p,c)>d(p,b)+d(b,c)$$

אך זוהי סתירה לא"ש המשולש. מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$p\in(a,b)$, כלומר $(a,b)\subseteq(a,c)$. ■

טענה 1.9. לכל $a,b,c,x\in\mathbb{X}$ כך ש-$b\in(a,c)$ ו-$c\in(b,x)$, מתקיים $(a,c)\cap(b,x)=(b,c)$.

הוכחה. תהיינה $a,b,c,x\in\mathbb{X}$, כך ש-$b\in(a,c)$ ו-$c\in(b,x)$.

- תהא $p\in(a,c)\cap(b,x)$ ונוכיח ש-$p\in(b,c)$.
  - $b\in(a,c)$ ו-$p\in(a,c)$, ע״פ המסקנה הקודמת (1.7) מתקיימת אחת משתי האפשרויות הבאות:
    - $p\in(b,c)$ ו-$b\in(a,p)$ - במקרה זה סיימנו.
    - $b\in(p,c)$ ו-$p\in(a,b)$.
  - $c\in(b,x)$ ו-$p\in(b,x)$, ע״פ המסקנה הקודמת (1.7) מתקיימת אחת משתי האפשרויות הבאות:
    - $p\in(b,c)$ ו-$c\in(p,x)$ - במקרה זה סיימנו.
    - $c\in(b,p)$ ו-$p\in(c,x)$.
  - אם כן נניח בשלילה שמתקיים $c\in(b,p)$ ו-$p\in(a,b)$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow d(a,c)&=d(a,b)+d(b,c)\\&=d(a,p)+d(p,c)+d(b,c)\\&=d(a,p)+d(b,c)+d(c,p)\\&=d(a,p)+d(b,p)\\&=d(a,p)+d(p,b)\\&=d(a,b)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(b,c)=d(a,c)-d(a,b)=0$$

בסתירה לכך ש-$b\neq c$.

- תהא $q\in(b,c)$ ונוכיח ש-$q\in(a,c)\cap(b,x)$.
  - מהטענה הקודמת (1.8), ומהעובדה ש-$b\in(a,c)$ ו-$q\in(b,c)$, נובע ש-$q\in(a,c)$.
  - מהטענה הקודמת (1.8), ומהעובדה ש-$c\in(b,x)$ ו-$q\in(b,c)$, נובע ש-$q\in(b,x)$.

■

1.2 מרחבים מכוונים

♣ נדמיין שאנו מסדרים שלושה כדורים a, b, c בשורה בדיוק בסדר שבה הם מוצגים בתחילת המשפט[1]. בהינתן כדור נוסף - x, איננו יודעים היכן נמצא כדור זה ביחס לאחרים, אך נדע לומר שאם c נמצא בין x ל-b הרי ש-x נמצא מימין ל-c, ולכן c נמצא גם בין x ל-a; ולהפך: אם c נמצא בין x ל-a שוב ניתן להסיק ש-x נמצא מימין ל-c ולפיכך c נמצא בין x ל-b.
הבעיה היא שהגדרת היחס "נמצאת בין" אינה מספיקה כדי שאכן נוכל להסיק ממנה את הנ"ל - נתבונן במרחב המטרי $(\{a, b, c, x\}, d)$, כאשר d מוגדרת ע"י:

$$d(b,c) = 1 \qquad d(a,b) = 1$$
$$d(b,x) = 2 \qquad d(a,c) = 2$$
$$d(c,x) = 1 \qquad d(a,x) = 1$$

ניתן לדמיין את המרחב המטרי הזה כאילו ארבע הנקודות נמצאות על מעגל שאורך חצי ההיקף שלו הוא 2, והמרחק בין כל שתי נקודות הוא אורך הקשת הקצרה ביותר המחברת ביניהם[2].

הגדרה 1.10. קבוצה $O \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא מכוונת, אם לכל $a, b, c, x \in O$ כך ש-$b \in (a, c)$ מתקיים:

$$c \in (b, x) \iff c \in (a, x)$$

כמו כן, נאמר ש-$(\mathbb{X}, d)$ הוא מרחב $\mathcal{G}$-מטרי מכוון אם $\mathbb{X}$ היא קבוצה מכוונת.

מסקנה 1.11. תת-קבוצה של קבוצה מכוונת גם היא מכוונת.

מסקנה 1.12. כל קבוצה בת שלושה איברים או פחות, היא קבוצה מכוונת.

נניח ש-$(\mathbb{X}, d)$ הוא מרחב $\mathcal{G}$-מטרי מכוון[3].

מסקנה 1.13. לכל $a, b, c, x \in \mathbb{X}$ כך ש-$b \in (a, c)$ ו-$c \in (b, x)$, מתקיים $b, c \in (a, x)$.

הוכחה. יהיו $a, b, c, x \in \mathbb{X}$ כך ש-$b \in (a, c)$ ו-$c \in (b, x)$. העובדה ש-$c \in (a, x)$ היא פשוט ההגדרה של מרחב מכוון בנוסח שלעיל, כדי לקבל את העובדה ש-$b \in (a, x)$ יש להחליף בכל מקום בין a ל-x ובין b ל-c. ■

מסקנה 1.14. לכל $a, b, c, x \in \mathbb{X}$ כך ש-$b \in (a, c)$ ו-$c \in (b, x)$, מתקיים $[b, c] \subseteq (a, x)$.

הוכחה. תהיינה $a, b, c, x \in \mathbb{X}$, כך ש-$b \in (a, c)$ ו-$c \in (b, x)$, אם כן לפי המסקנה הקודמת (1.13) מתקיים $b, c \in (a, x)$.
תהא $p \in [b, c]$, אם $p = b$ או ש-$p = c$ הרי שכבר הוכחנו את המבוקש בשורה הקודמת, לכן נוכל להניח ש-$p \in (b, c)$.

- $p \in (c, b)$ ו-$b \in (c, a)$, מכאן ש-$b \in (p, a)$.
- $p \in (b, c)$ ו-$c \in (b, x)$, מכאן ש-$c \in (p, x)$.
- $c \in (x, p)$ ו-$p \in (c, b)$, מכאן ש-$p \in (x, b)$.
- $b \in (a, p)$ ו-$p \in (b, x)$, מכאן ש-$p \in (a, x)$.

■

מסקנה 1.15. לכל $a, b, c, x \in \mathbb{X}$ כך ש-$b \in (a, c)$ ו-$c \in (a, x)$, מתקיים $c \in (b, x)$ ו-$b \in (a, x)$.

הוכחה. תהיינה $a, b, c, x \in \mathbb{X}$ ונניח ש-$b \in (a, x)$ ו-$c \in (b, x)$.
העובדה ש-$c \in (b, x)$ היא פשוט ההגדרה של מרחב מכוון בנוסח שלעיל. כדי לקבל את העובדה ש-$b \in (a, x)$ יש לשים לב לכך ש-$b \in (a, c)$ ו-$c \in (b, x)$, ולהשתמש במסקנה 1.13. ■

---

[1] כלומר b נמצא בין a ל-c, a נמצאת משמאל ל-b ו-c נמצאת מימין ל-b.
[2] מנקודת מבט זו הזוגות a, c ו-b, x הם זוגות של נקודות אנטיפודיות.
[3] לאורך כל הפרק הזה והבאים אחריו ניתן להניח ש-$\mathbb{X}$ הוא תת-בקבוצה מכוונת של מרחב $\mathcal{G}$-מטרי כללי, כך שלא איבדנו את הכלליות - זהו רק עניין של נוחות.

2 קבוצות קוויות

תהא $\mathcal{G}$ חבורה אבלית סדורה, ויהי $(\mathbb{X}, d)$ מרחב $\mathcal{G}$-מטרי מכוון.

הגדרה 2.1. תת-קבוצה $S \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא קוויית, אם לכל שלוש נקודות שונות ב-S, אחת משלוש הנקודות נמצאת בין שתי האחרות. כמו כן, נאמר ש-n נקודות $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{X}$ הן קוויות, אם הקבוצה $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ קוויית.

הגדרה 2.2. נאמר שקבוצה קוויית $S \subseteq \mathbb{X}$ היא קבוצה קוויית מרבית (או קבוצה קוויית מקסימלית), אם לכל קבוצה קוויית $T \subseteq \mathbb{X}$ כך ש-$S \subseteq T$ מתקיים $S = T$.

מסקנה 2.3. תת-קבוצה $S \subseteq \mathbb{X}$ היא קוויית אם"ם לכל שלוש נקודות $a, b, c \in S$ מתקיים לפחות אחת משלושת השוויונות הבאים:

$$d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$$
$$d(a,b) = d(a,c) + d(c,b)$$
$$d(b,c) = d(b,a) + d(a,c)$$

ובאופן שקול: מתקיים $d(a,b) = |d(a,c) \pm d(c,b)|$.

מסקנה 2.4. תת-קבוצה של קבוצה קוויית גם היא קוויית.

מסקנה 2.5. כל קבוצה בת שני איברים או פחות, היא קבוצה קוויית.

מסקנה 2.6. תהא $S \subseteq \mathbb{X}$, התנאים הבאים שקולים:

1. S קוויית.
2. לכל שלוש נקודות שונות ב-S, בדיוק אחת משלוש הנקודות נמצאת בין שתי האחרות.
3. כל שלוש נקודות ב-S הן קוויות.

מסקנה 2.7. תהא $S \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה קוויית. לכל ארבע נקודות $a, b, c, x \in S$ כך ש-$b \in (a,c)$ ו-x שונה מ-a, b, c, מתקיימת בדיוק אחת מארבע האפשרויות הבאות:

1. $a \in (x,b)$ ו-$a \in (x,c)$
2. $x \in (a,b)$ ו-$x \in (a,c)$
3. $x \in (b,c)$ ו-$x \in (a,c)$
4. $c \in (b,x)$ ו-$c \in (a,x)$

♣ בכל אחת מארבע האפשרויות, מהיות $\mathbb{X}$ מרחב מכוון נובע שהחלק הראשון גורר את השני:

1. אם $b \in (c,a)$ ו-$a \in (b,x)$, אז $a \in (c,x)$.
2. אם $x \in (a,b)$ ו-$b \in (a,c)$, אז $x \in (a,c)$ (מסקנה 1.15).
3. אם $x \in (c,b)$ ו-$b \in (c,a)$ אז $x \in (c,a)$ (מסקנה 1.15).
4. אם $b \in (a,c)$ ו-$c \in (b,x)$, אז $c \in (a,x)$.

הוכחה. השילובים של כל שתיים מבין ארבע האפשרויות, מלבד השילוב של אפשרויות 2 ו-3, מהווים סתירה למסקנה 1.2 (נשים לב לחלק השני של כל אחת מהאפשרויות). ואילו השילוב של אפשרויות 2 ו-3 מהווה סתירה לפי טענה 1.6 (נשים לב לחלק הראשון של שתי האפשרויות). אם כן הוכחנו שמתקיימת **לכל היותר** אחת מארבע האפשרויות.

נניח בשלילה שאף אחת מן האפשרויות אינה מתקיימת. מהעובדה שאפשרויות 1 ו-4 אינן מתקיימות נובע ש-$x \in (c,a)$, ומהעובדה שאפשרויות 3 ו-4 אינן מתקיימות נובע ש-$b \in (c,x)$ (מסקנה 2.6). ולכן מהיות $\mathbb{X}$ מרחב מכוון נובע ש-$x \in (b,a)$, כלומר אפשרות 2 מתקיימת בסתירה להנחת השלילה. ■

מסקנה 2.8. תהא $S \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה קווית. לכל $a, b, c, x \in S$ כך ש-$b \in (a, c)$, ו-x שונה מ-a, b, c. מתקיים:

- אם $b \in (a, x)$ אז $x \in (b, c)$ או ש-$c \in (b, x)$.
- אם $b \in (x, c)$ אז $x \in (a, b)$ או ש-$a \in (x, b)$.

הוכחה. נובע ישירות מהמסקנה הקודמת (2.7). ■

למה 2.9. תהיינה $a, b, x, y \in \mathbb{X}$ כך ש-$a \neq b$. אם $\{a, b, x\}$ ו-$\{a, b, y\}$ קוויות אז גם $\{a, b, x, y\}$ קווית.

הוכחה. נניח ש-$\{a, b, x\}$ ו-$\{a, b, y\}$ קוויות; אם $x \in \{a, b\}$ או ש-$y \in \{a, b\}$ אז הטענה טריוויאלית, לכן נניח שהמצב אינו כזה, ונניח בהג"כ ש-$x \in (a, b)$ או $b \in (a, x)$. כעת נחלק למקרים (מהיות $\{a, b, y\}$ קווית נובע שאלו כל המקרים).

- נניח ש-$y \in (a, b)$.
  - אם $x \in (a, b)$ אז ע"פ מסקנה 1.7 מתקיימת בדיוק אחת משלוש האפשרויות הבאות:
    1. $x = y$ - במקרה זה הטענה טריוויאלית.
    2. $x \in (a, y)$ ו-$y \in (b, x)$ - במקרה זה בדיקה פשוטה מראה ש-$\{a, b, x, y\}$ קווית ע"פ הגדרה.
    3. $x \in (b, y)$ ו-$y \in (a, x)$ - במקרה זה בדיקה פשוטה מראה ש-$\{a, b, x, y\}$ קווית ע"פ הגדרה.
  - ואם $b \in (a, x)$ אז ע"פ טענה 1.9 מתקיים $y \in (a, b) \subseteq (a, x)$, ומהיות $\mathbb{X}$ מרחב מכוון נובע ש-$\boldsymbol{b} \in (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (כי $\boldsymbol{y} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ו-$\boldsymbol{b} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$).
- נניח ש-$a \in (y, b)$.
  - אם $x \in (a, b)$ אז ע"פ טענה 1.9 מתקיים $x \in (a, b) \subseteq (y, b)$, ומהיות $\mathbb{X}$ מרחב מכוון נובע ש-$\boldsymbol{a} \in (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (כי $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ ו-$\boldsymbol{a} \in (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y})$).
  - ואם $b \in (a, x)$ אז לפי מסקנה 1.13 מתקיים $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (כי $\boldsymbol{a} \in (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b})$ ו-$\boldsymbol{b} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$).
- המקרה שבו $b \in (y, a)$ שקול למקרה הקודם (נחליף את a ו-b בכל מקום).

■

משפט 2.10. יהי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ אוסף של קבוצות קוויות. אם קיימות שתי נקודות שונות $a, b \in \mathbb{X}$, כך ש-$a, b \in S$ לכל $S \in \mathcal{S}$, אז $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ היא קבוצה קווית.

הוכחה. נניח שקיימות שתי נקודות שונות $a, b \in \mathbb{X}$ כך ש-$a, b \in S$ לכל $S \in \mathcal{S}$, ותהיינה $a, b \in \mathbb{X}$ כאלה.
תהיינה $x, y, z \in \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$, ע"פ הלמה (2.9) $\{a, b, x, y\}$ ו-$\{a, b, x, z\}$ קוויות, וממילא $\{b, x, y\}$ ו-$\{b, x, z\}$ גם הן קוויות. ושוב נקבל מהלמה ש-$\{b, x, y, z\}$ קווית וממילא $\{x, y, z\}$ קווית. x, y, z היו שרירותיות ולכן ע"פ מסקנה 2.6 הקבוצה $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ קווית. ■

מסקנה 2.11. לכל שתי נקודות שונות $a, b \in \mathbb{X}$ קיימת קבוצה קווית מרבית יחידה $S \subseteq \mathbb{X}$ כך ש-$a, b \in S$.
ובאופן שקול: לכל שתי קבוצות קוויות מרביות שונות יש לכל היותר נקודת חיתוך[4] אחת.

משפט 2.12. לכל קבוצה קווית $S \subseteq \mathbb{X}$ קיים שיכון $f : S \hookrightarrow \mathcal{G}$.

הוכחה. **צריך לכתוב הוכחה.** ■

מסקנה 2.13. כל קבוצה קווית סגורה וחסומה היא קבוצה קומפקטית, בפרט כל קטע סגור הוא קבוצה קומפקטית.

מסקנה 2.14. לכל נקודה $a \in \mathbb{X}$ ולכל קבוצה קווית סגורה $S \subseteq \mathbb{X}$, קיימת נקודה $b \in S$ כך שמתקיים:

$$d(a, b) = \min \{d(a, x) \mid x \in S\}$$

כלומר קיימת נקודה ב-S שמרחקה מ-a הוא המינימלי מבין כל הנקודות ב-S.

[4] תזכורת: נקודת חיתוך של שתי קבוצות היא נקודה השייכת לחיתוך שלהן, כמובן שעבור סתם שתי קבוצות אין הכרח שתהיה נקודה כזו או שתהיה רק אחת.

3 ישרים

תהא $\mathcal{G}$ חבורה אבלית סדורה, ויהי $(\mathbb{X}, d)$ מרחב $\mathcal{G}$-מטרי מכוון.

3.1 הגדרה ומסקנות פשוטות

למה 3.1. תהא $S \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה קווית. לכל שתי נקודות שונות $a, b \in S$, ולכל $0 < r_1, r_2 \in \mathcal{G}$ כך ש-$|r_1 \pm r_2| = d(a,b)$ קיימת לכל היותר נקודה אחת $x \in S$ כך ש-$d(a,x) = r_1$ ו-$d(b,x) = r_2$.

הוכחה. תהיינה $a, b \in S$ שתי נקודות שונות, יהיו $0 < r_1, r_2 \in \mathcal{G}$ כך ש-$|r_1 \pm r_2| = d(a,b)$. ותהיינה $x, y \in S$ כך ש-$d(a,x) = r_1$ ו-$d(a,y) = r_2$ ו-$d(b,x) = d(b,y)$.[5]
נניח בשלילה ש-$x \neq y$, כלומר $d(x,y) \neq 0$. מהיות S קבוצה קווית נובע כי $|d(x,y)| = |d(x,a) \pm d(a,y)| = |r_1 \pm r_1|$, ולכן מהנחת השלילה נקבל ש-$|d(x,y)| = 2r_1$ וש-$a \in (x,y)$. באותו אופן נקבל ש-$2r_1 = |d(x,y)|$ וש-$b \in (x,y)$, ולכן נוכל לסמן $r := r_1 = r_2$. ע"פ מסקנה 1.7 מתקיימת אחת משתי האפשרויות הבאות:

1. $a \in (x,b)$ ו-$b \in (a,y)$ -

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2r &= d(x,y) = d(x,a) + d(a,y) \\ &= d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) \\ &= 2r + d(a,b) \end{aligned}$$

מכאן ש-$d(a,b) = 0$, וזאת בסתירה לכך ש-a ו-b שונות זו מזו. מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$x = y$, כלומר קיימת לכל היותר נקודה אחת $x \in S$ כך ש-$d(a,x) = r_1$ ו-$d(b,x) = r_2$.

2. $b \in (x,a)$ ו-$a \in (b,y)$ - מקרה זה שקול לראשון (נחליף את a ו-b בכל מקום).

■

הגדרה 3.2. קבוצה $L \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא <u>ישר</u> אם היא מקיימת את שלושת התנאים הבאים:

1. L קווית.
2. יש ב-L שתי נקודות שונות.
3. לכל שתי נקודות שונות $a, b \in L$, ולכל $0 < r_1, r_2 \in \mathcal{G}$ כך ש-$|r_1 \pm r_2| = d(a,b)$, קיימת נקודה $x \in L$ כך ש-$d(a,x) = r_1$ ו-$d(b,x) = r_2$.

♣ כלומר ישר הוא קבוצה קווית שאין בה "חורים".

מסקנה 3.3. לכל ישר $L \subseteq \mathbb{X}$, לכל שתי נקודות שונות $a, b \in L$, ולכל $0 < r_1, r_2 \in \mathcal{G}$ כך ש-$|r_1 \pm r_2| = d(a,b)$, קיימת נקודה יחידה $x \in L$ כך ש-$d(a,x) = r_1$ ו-$d(b,x) = r_2$.

מסקנה 3.4. תהא $S \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה קווית. לכל שתי נקודות שונות $a, b \in S$, ולכל ישר $L \subseteq \mathbb{X}$; אם $a, b \in L$ אז $S \subseteq L$.

מסקנה 3.5. כל ישר הוא קבוצה קווית מרבית.

מסקנה 3.6. לכל שני ישרים שונים יש לכל היותר נקודת חיתוך אחת.

♣ או במילים אחרות: "דרך שתי נקודות עובר ישר אחד לכל היותר".

♣ מכאן ואילך נוכל לומר "נקודת **ה**חיתוך" (בה"א הידיעה) עבור שני ישרים שונים שאינם זרים.

משפט 3.7. כל ישר איזומטרי ל-$\mathcal{G}$ עם המטריקה הסטנדרטית, בפרט:

- כל ישר הוא קבוצה אין-סופית.
- לכל ישר $L \subseteq \mathbb{X}$, ולכל $a, b \in L$, מתקיים $[a,b] \subseteq L$.
- כל ישר הוא קבוצה סגורה.

הוכחה. **צריך לכתוב הוכחה.** ■

[5] אם אין ב-S שתי נקודות שונות הטענה נכונה באופן ריק, ואם לא קיימות x ו-y כנ"ל, הטענה טריוויאלית.

3.2 הגדרות שקולות לישר

♣ בתת-פרק זה נוכיח שתי הגדרות שקולות לישר:

1. קבוצה קווית לא ריקה ש**יש** בה שתי נקודות שונות המקיימות את הסעיף השלישי בהגדרת הישר (כלומר "**קיימות** שתי נקודות שונות..." במקום "**לכל** שתי נקודות שונות...")
2. קבוצה קווית שיש בה נקודה המקיימת שלכל מרחק חיובי קיימות שתי נקודות שונות בקבוצה הקווית הנמצאות במרחב זה מן הנקודה הראשונה.

למה 3.8. תהא $S \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה קווית. אם קיימות שתי נקודות שונות $a, b \in S$ המקיימות שלכל $0 < r_1, r_2 \in \mathcal{G}$ כך ש-$|r_1 \pm r_2| = d(a,b)$, קיימת נקודה $y \in S$ המקיימת $d(a,y) = r_1$ ו-$d(b,y) = r_2$; אז לכל נקודה $x \in S$, ולכל $0 < r_1, r_2 \in \mathcal{G}$ כך ש-$|r_1 \pm r_2| = d(a,x)$, קיימת נקודה $y \in S$ המקיימת $d(a,y) = r_1$ ו-$d(x,y) = r_2$.

הוכחה. תהיינה $a, b \in S$ כנ"ל (נניח שיש כאלה), מכאן ש-$S \nsubseteq \{a,b\}$; אם כן תהא $x \in S$ נקודה שלישית ($x \notin \{a,b\}$), יהיו $0 < r_1, r_2 \in \mathcal{G}$ כך ש-$|r_1 \pm r_2| = d(a,x)$, ונחלק למקרים (ע"פ מסקנה 2.6 אלו אכן כל המקרים).

1. נניח ש-$a \in (b,x)$ (בפרט $d(b,x) = d(b,a) + d(a,x)$).

(א) אם $r_1 \pm r_2 = d(a,x)$, נבחר נקודה $y \in S$ המקיימת $d(a,y) = r_1$ ו-$d(b,y) = d(b,a) + r_1$. מכאן ש-$a \in (b,y)$, ולכן $b \notin (a,y)$ וגם $y \notin (a,b)$.

i. כעת, אם $r_1 + r_2 = d(a,x)$ אז $y \in (a,x)$, כלומר $r_1 + r_2 = d(a,x) = d(a,y) + d(y,x) = r_1 + d(x,y)$, וממילא $d(x,y) = r_2$ כנדרש.

ii. ואם $r_1 - r_2 = d(a,x)$ אז $y \notin (a,x)$, ולכן ע"פ טענה 2.7 $x \in (a,y)$.

$$\Rightarrow d(a,y) = d(a,x) + d(x,y) = r_1 - r_2 + d(x,y)$$

$$\Rightarrow d(x,y) = d(a,y) - r_1 + r_2 = r_2$$

(ב) אם $r_2 - r_1 = d(a,x)$, נבחר נקודה $y \in S$ המקיימת $d(a,y) = r_1$ ו-$d(b,y) = |d(b,a) - r_1|$.

i. כעת, אם $d(b,y) = d(b,a) - r_1$ אז $y \in (a,b)$, ולכן גם $y \in (b,x)$ (אקסיומת הסדר הראשונה).

$$\begin{aligned}\Rightarrow d(b,x) &= d(b,y) + d(y,x) = d(b,a) - r_1 + d(x,y)\\ &= d(b,a) + d(a,x) - r_2 + d(x,y)\\ &= d(b,x) - r_2 + d(x,y)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(x,y) = r_2 + d(b,x) - d(b,x) = r_2$$

ii. ואם $d(b,y) = r_1 - d(b,a)$ אז $b \in (a,y)$, ולכן גם $b \in (x,y)$ (אקסיומת הסדר הראשונה).

$$\begin{aligned}\Rightarrow d(x,y) &= d(x,b) + d(b,y) = d(x,a) + d(a,b) + r_1 - d(b,a)\\ &= d(a,x) + r_1 = r_2 - r_1 + r_1 = r_2\end{aligned}$$

2. נניח ש-$b \in (a,x)$ (בפרט $d(a,x) = d(a,b) + d(b,x)$).

(א) אם $r_1 \pm r_2 = d(a,x)$, נבחר נקודה $y \in S$ המקיימת $d(a,y) = r_1$ ו-$d(b,y) = |d(b,a) - r_1|$.

i. בנוסף, אם $d(b,y) = d(b,a) - r_1$ אז $y \in (a,b)$, ולכן גם $y \in (a,x)$ (אקסיומת הסדר הראשונה).

$$\begin{aligned}
\Rightarrow d(a,x) &= d(a,y) + d(y,x) \\
&= r_1 + d(y,x) > r_1 \\
\Rightarrow d(a,x) &= r_1 + r_2 \\
\Rightarrow r_1 + r_2 = d(a,y) + d(y,x) &= r_1 + d(x,y) \\
\Rightarrow d(x,y) &= r_1 + r_2 - r_1 = r_2
\end{aligned}$$

ii. ואם $d(b,y) = r_1 - d(b,a)$ אז $b \in (a,y)$, ולכן $y \in (b,x)$ או ש-$x \in (b,y)$ נמצאת בין B ל-a (מסקנה 2.8). לא ייתכן ש-$x \in (b,y)$ וגם $r_1 + r_2 = d(a,x)$ משום שאז נקבל:

$$\begin{aligned}
r_1 = d(a,y) &= d(a,b) + d(b,y) \\
&= d(a,b) + d(b,x) + d(x,y) \\
&= d(a,x) + d(x,y) \\
&= r_1 + r_2 + d(x,y) > r_1
\end{aligned}$$

וכמו כן, לא ייתכן ש-$y \in (b,x)$ וגם $r_1 - r_2 = d(a,x)$ משום שאז נקבל:

$$\begin{aligned}
r_1 = d(a,y) &= d(a,b) + d(b,y) \\
&= d(a,b) + d(b,x) - d(x,y) \\
&= d(a,x) - d(x,y) \\
&= r_1 - r_2 - d(x,y) < r_1
\end{aligned}$$

מכאן שמתקיימת אחת משתי האפשרויות הבאות:

- $d(b,x) = d(b,y) + d(y,x)$ וגם $d(a,x) = r_1 + r_2 = d(a,y) + r_2 = d(a,b) + d(b,y) + r_2$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow d(a,x) &= d(a,b) + d(b,x) - d(y,x) + r_2 \\
&= d(a,x) - d(x,y) + r_2 \\
\Rightarrow d(x,y) &= d(a,x) - d(a,x) + r_2 = r_2
\end{aligned}$$

- $d(b,y) = d(b,x) + d(x,y)$ וגם $d(a,x) = r_1 - r_2 = d(a,y) - r_2 = d(a,b) + d(b,y) - r_2$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow d(a,x) &= d(a,b) + d(b,x) + d(x,y) - r_2 \\
&= d(a,x) + d(x,y) - r_2 \\
\Rightarrow d(x,y) &= d(a,x) - d(a,x) + r_2 = r_2
\end{aligned}$$

(ב) אם $r_2 - r_1 = d(a,x)$, נבחר נקודה $y \in S$ המקיימת $d(a,y) = r_1$ ו-$d(b,y) = d(b,a) + r_1$. מכאן ש-$a \in (b,y)$, ולכן גם $a \in (x,y)$ (אקסיומת הסדר הראשונה).

$$\Rightarrow d(x,y) = d(x,a) + d(a,y) = r_2 - r_1 + r_1 = r_2$$

3. נניח ש-$x \in (a,b)$ (בפרט $d(a,b) = d(a,x) + d(x,b)$).

(א) אם $r_1 \pm r_2 = d(a,x)$, נבחר נקודה $y \in S$ המקיימת $d(a,y) = r_1$ ו-$d(b,y) = |d(b,a) - r_1|$.

i. כעת, אם $d(b,y) = d(b,a) - r_1$ אז $y \in (a,b)$, ולכן מתקיימת אחת משתי האפשרויות הבאות (מסקנה 1.7):

- $y \in (a,x)$, ו-$x \in (b,y)$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow r_1 \pm r_2 &= d(a,x) = d(a,y) + d(y,x) \\
&= r_1 + d(x,y) > r_1 \\
\Rightarrow r_1 + r_2 &= d(a,x) = r_1 + d(x,y) \\
\Rightarrow d(x,y) &= r_1 + r_2 - r_1 = r_2
\end{aligned}$$

- $x \in (a,y)$ ו-$y \in (b,x)$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow r_1 \pm r_2 &= d(a,x) = d(a,y) - d(x,y) \\
&= r_1 - d(x,y) < r_1 \\
\Rightarrow r_1 - r_2 &= d(a,x) = r_1 - d(x,y) \\
\Rightarrow d(x,y) &= r_1 - r_1 + r_2 = r_2
\end{aligned}$$

ii. ואם $d(b,y) = r_1 - d(a,b)$ אז $b \in (a,y)$, ולכן גם $x \in (a,y)$ (מסקנה 1.15).

$$\begin{aligned}
\Rightarrow r_1 = d(a,y) &= d(a,x) + d(x,y) = r_1 \pm r_2 + d(x,y) \\
\Rightarrow d(x,y) &= r_1 - r_1 \mp r_2 = \mp r_2 \\
\Rightarrow d(x,y) &= r_2
\end{aligned}$$

(ב) אם $r_2 - r_1 = d(a,x)$ נבחר נקודה $y \in S$ המקיימת $d(a,y) = r_1$ ו-$d(b,y) = d(b,a) + r_1$. מכאן ש-$a \in (b,y)$, ולכן גם $a \in (x,y)$ (מסקנה 1.15).

$$\Rightarrow d(x,y) = d(x,a) + d(a,y) = r_2 - r_1 + r_1 = r_2$$

■

מסקנה 3.9. תהא $S \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה קווית. אם קיימות שתי נקודות שונות $a, b \in S$ המקיימות שלכל $0 < r_1, r_2 \in \mathcal{G}$ כך ש-$|r_1 \pm r_2| = d(a,b)$, קיימת נקודה $c \in S$ המקיימת $d(a,c) = r_1$ ו-$d(b,c) = r_2$; אז לכל שתי נקודות $x, y \in S$, ולכל $0 < r_1, r_2 \in \mathcal{G}$ כך ש-$|r_1 \pm r_2| = d(x,y)$, קיימת נקודה $z \in L$ המקיימת $d(x,z) = r_1$ ו-$d(y,z) = r_2$.

מסקנה 3.10. קבוצה קווית $S \subseteq \mathbb{X}$ היא ישר אם״ם קיימות שתי נקודות שונות $a, b \in S$ המקיימות שלכל $0 < r_1, r_2 \in \mathcal{G}$ כך ש-$|r_1 \pm r_2| = d(a,b)$, קיימת נקודה $c \in L$ המקיימת $d(a,c) = r_1$ ו-$d(b,c) = r_2$.

למה 3.11. תהא $S \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה קווית. לכל נקודה $a \in S$, ולכל $0 < r \in \mathcal{G}$, קיימות לכל היותר שתי נקודות שונות $b, c \in S$ כך ש-$d(a,b) = d(b,c) = r$.

הוכחה. יהיו $a \in S$ ו-$0 < r \in \mathcal{G}$, ונניח בשלילה שקיימות שלוש נקודות שונות $x, y, z \in S$ כך ש-$d(a,x) = d(a,y) = d(a,z) = r$. מכאן ש-$a$ נמצאת בין כל שתיים משלוש הנקודות הללו[6], אך זה עומד בסתירה לטענה 2.7. מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה וקיימות לכל היותר שתי נקודות כאלה. ■

[6] שכן ע״פ שוויונות המשולש המנוון אם אחת משלוש הנקודות הללו נמצאת בין a לנקודה אחרת הרי שמרחקה של זו גדול מ-r.

מסקנה 3.12. לכל ישר $L \subseteq \mathbb{X}$, לכל נקודה $a \in L$ ולכל $0 < r \in \mathcal{G}$, קיימות בדיוק שתי נקודות שונות $b, c \in L$ כך ש-$d(a,b) = d(b,c) = r$.

הוכחה. יהי $L \subseteq \mathbb{X}$ ישר, ותהא $a \in L$ נקודה שעליו, ויהי $0 < r \in \mathcal{G}$. מהיות L ישר נובע שיש ב-L נקודה נוספת מלבד a - תהא a' כנ״ל. מהיות L ישר נובע גם שקיימות שתי נקודות $b, c \in L$ המקיימות:

$$d(a,b) = r \qquad d(a',b) = |d(a,a') - r|$$
$$d(a,c) = r \qquad d(a',c) = d(a,a') + r$$

מכיוון ש-$a \neq a'$ נדע ש-$d(a,a') \neq 0$ ו-$d(a',b) \neq d(a',c)$, ומכאן ש-$b \neq c$. ■

משפט 3.13. תהא $L \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה קווית, התנאים הבאים שקולים:

1. L היא ישר.
2. L אינה ריקה, ובנוסף לכל נקודה $a \in L$, ולכל $0 < r \in \mathcal{G}$, קיימות שתי נקודות שונות $b, c \in L$ כך ש-$d(a,b) = d(a,c) = r$.
3. קיימת נקודה $a \in L$ כך שלכל $0 < r \in \mathcal{G}$, קיימות שתי נקודות שונות $b, c \in L$ המקיימות $d(a,b) = d(a,c) = r$.
4. קיימות שתי נקודות שונות $a, b \in S$ המקיימות שלכל $0 < r_1, r_2 \in \mathcal{G}$ כך ש-$|r_1 \pm r_2| = d(a,b)$, קיימת נקודה $c \in L$ המקיימת $d(a,c) = r_1$ ו-$d(b,c) = r_2$.

הוכחה.

- $1 \to 2$
  נובע מהמסקנה האחרונה (3.12).
- $2 \to 3$
  הגרירה טריוויאלית שכן L אינה ריקה.
- $3 \to 4$
  תהא $a \in L$ המקיימת את תנאי 3, תהא $a \neq a' \in L$ (ע״פ התנאי קיימת a' כזו), ויהיו $0 < r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ כך ש-$|r_1 \pm r_2| = d(a,a')$. כמו כן תהיינה $b, c \in L$ שתי נקודות שונות המקיימות $d(a,b) = d(a,c) = r_1$, מהיות b ו-c נקודות שונות במרחק זהה מ-a, ומהיות L קבוצה קווית, נובע ש-a נמצאת בין b ל-c. ע״פ טענה 2.7 מתקיימת בדיוק אחת מארבע האפשרויות הבאות:
  1. $b \in (a,a')$, מכאן ש-$d(a,b) < d(a,a')$, ולכן $d(a,b) + r_2 = d(a,a') = d(a,b) + d(b,a')$, וממילא $d(b,a') = r_2$.
  2. $a' \in (a,b)$, מכאן ש-$d(a,b) > d(a,a')$, ולכן $d(a,b) - r_2 = d(a,a') = d(a,b) - d(a',b)$, וממילא $d(a',b) = r_2$.
  3. $a' \in (a,c)$, מכאן ש-$d(a,c) > d(a,a')$, ולכן $d(a,c) - r_2 = d(a,a') = d(a,c) - d(a',c)$, וממילא $d(a',c) = r_2$.
  4. $c \in (a,a')$, מכאן ש-$d(a,c) < d(a,a')$, ולכן $d(a,c) + r_2 = d(a,a') = d(a,c) + d(c,a')$, וממילא $d(c,a') = r_2$.
- $4 \to 1$
  את השקילות בין תנאי 1 לתנאי 4 ראינו כבר במסקנה 3.10, בפרט תנאי 4 גורר את תנאי 1.

■

4 שלמות קווית והמספרים הממשיים

יהי $(\mathbb{X}, d)$ מרחב $\mathcal{G}$-מטרי מכוון.

הגדרה 4.1. נאמר ששתי קבוצות קוויות לא ריקות $A, B \subseteq \mathbb{X}$ הן נפרדות אם לא קיימים $a_1, a_2 \in A$ ו-$b \in B$ כך ש-$b \in [a_1, a_2]$, וגם לא קיימים $a \in A$ ו-$b_1, b_2 \in B$ כך ש-$a \in [b_1, b_2]$.

הגדרה 4.2. נאמר שמרחב $\mathcal{G}$-מטרי $(\mathbb{X}, d)$ הוא מרחב שלם קווית אם מתקיימות שתי התכונות הבאות:

- יש ב-$\mathbb{X}$ שתי נקודות שונות וכל קבוצה קווית מרבית $S \subseteq \mathbb{X}$ היא ישר.
- לכל ישר $L \subseteq \mathbb{X}$, ולכל שתי קבוצות נפרדות $A, B \subseteq L$, קיים $c \in L$ כך ש-$c \in [a, b]$ לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$.

נניח ש-$(\mathbb{X}, d)$ הוא מרחב שלם קווית.

♣ בכך אנו מניחים את שתי האקסיומות הראשונות של אוקלידס:

1. בין כל שתי נקודות אפשר להעביר קטע ישר.
2. כל קטע יכול להמשיך ללא גבול כקו ישר.

מסקנה 4.3. דרך כל שתי נקודות עובר ישר אחד ויחיד
לכל שתי נקודות שונות $a, b \in \mathbb{X}$ קיים ישר יחיד $L \subseteq \mathbb{X}$ כך ש-$a, b \in L$.

סימון: לכל שתי נקודות שונות $a, b \in \mathbb{X}$, נסמן ב-L_{ab} את הישר היחיד המקיים $a, b \in L_{ab}$.

צריך להמשיך את הפרק עד להגדרה שקולה של הממשיים באופן גאומטרי.