מרחבים מכוונים ומרחבים סְפֵּירִיִּים

גאומטריה אוקלידית - חלק ראשון

נכתב ע״י שריה אנסבכר

תוכן העניינים

1 היחס ״נמצאת בין״ ומרחבים מכוונים 2

1.1 היחס ״נמצאת בין״ 2

1.2 מרחבים מכוונים 5

2 קבוצות קוויות 6

3 מרחבים סְפֵּירִיִּים 8

3.1 הגדרות 8

3.2 נקודות אנטיפודיות ונקודות משלימות 8

3.3 קבוצות מעגליות 10

לסיכומים נוספים היכנסו לאתר:

אקסיומת השלמות - סיכומי הרצאות במתמטיקה

https://math.srayaa.com

1 היחס "נמצאת בין" ומרחבים מכוונים

תזכורת: חבורה סדורה היא רביעייה סדורה $(G,\cdot,e,\leq)$ כך ש-$(G,\cdot,e)$ היא חבורה, ו-$\leq$ הוא יחס סדר מלא על G המקיים שלכל $a,b,c\in G$, אם $a\leq b$ אז $c\cdot a\leq c\cdot b$.

תזכורת: חבורה סדורה $(G,\cdot,e,\leq)$ נקראת ארכימדית אם לכל $e<g,h\in G$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$h^n>g$.

תזכורת: בהינתן חבורה אבלית סדורה $(\Lambda,+,0,\leq)$, מרחב Λ-מטרי הוא זוג סדור $(\mathbb{X},d)$ כך ש-$\mathbb{X}$ היא קבוצה לא ריקה, ו-$d:\mathbb{X}\times\mathbb{X}\to\Lambda$ היא פונקציה המקיימת את שלוש התכונות הבאות:

1. חיוביות בהחלט - לכל $a,b\in\mathbb{X}$ מתקיים $d(a,b)\geq 0$, ובנוסף $d(a,b)=0$ אם"ם $a=b$.
2. סימטריה - לכל $a,b\in\mathbb{X}$ מתקיים $d(a,b)=d(b,a)$.
3. אי-שוויון המשולש - לכל $a,b,c\in\mathbb{X}$ מתקיים $d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)$.

יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב Λ-מטרי.

1.1 היחס "נמצאת בין"

הגדרה 1.1. תהיינה $a,b,c\in\mathbb{X}$ שלוש נקודות כך ש-a ו-b שונות מ-c, נאמר ש-b נמצאת בין a ל-c אם מתקיים $d(a,c)=d(a,b)+d(b,c)$.

מסקנה 1.2. לכל שלוש נקודות, רק אחת מהן יכולה להיות בין שתי האחרות.

הגדרה 1.3. לכל $a,b\in\mathbb{X}$ נסמן:

$$\begin{aligned}(a,b)&:=\{x\in\mathbb{X}\mid x\text{ נמצאת בין }a\text{ ל-}b\}\\ [a,b]&:=\{x\in\mathbb{X}\mid d(a,b)=d(a,x)+d(x,b)\}\\ [a,b)&:=[a,b]\setminus\{b\}\\ (a,b]&:=[a,b]\setminus\{a\}\end{aligned}$$

כל אחת מארבע הקבוצות הנ"ל תיקרא קטע, ובנוסף (a,b) תיקרא הקטע הפתוח שבין a ל-b ו-$[a,b]$ תיקרא הקטע הסגור שבין a ל-b.

♣ בהמשך נראה שכל קטע סגור הוא קבוצה סגורה, אך לעומת זאת קטע פתוח אינו בהכרח קבוצה פתוחה.

תהיינה $a,b,c\in\mathbb{X}$.

מסקנה 1.4. לכל $a,b\in\mathbb{X}$ מתקיים:

- $(a,b)=(b,a)=[a,b]\setminus\{a,b\}$
- $[a,b]=[b,a]=(a,b)\cup\{a,b\}$
- $[a,a]=\{a\}$
- $(a,a)=[a,a)=(a,a]=\emptyset$

טענה 1.5. לכל $a,b\in\mathbb{X}$ הקטע $[a,b]$ הוא קבוצה סגורה וחסומה.

הוכחה. העובדה ש-$[a,b]$ חסומה היא טריוויאלית: לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $d(a,x)=d(a,b)-d(x,b)\leq d(a,b)$, אם כן נותר לנו להוכיח שהיא סגורה.

תהא $f:\mathbb{X}\to\Lambda$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(x):=d(a,x)+d(x,b)$ לכל $x\in\mathbb{X}$, תהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-$[a,b]$ המתכנסת לנקודה $x\in\mathbb{X}$. מאריתמטיקה של רציפות ומרציפות המטריקה נובע ש-f רציפה, ומהגדרת $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ נובע שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f(x_n)=d(a,x_n)+d(x_n,b)=d(a,b)$. כעת נקבל מאפיון היינה לרציפות של פונקציה בנקודה שמתקיים:

$$d(a,x)+d(x,b)=f(p)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=d(a,b)$$

כלומר $x\in[a,b]$. אם כן $[a,b]$ סגורה לגבולות ולכן סגורה. ■

טענה 1.6. לכל $a,b,c,x \in \mathbb{X}$ כך ש-$b \in (a,c)$, מתקיימת לכל היותר אחת משתי האפשרויות הבאות:

1. $x \in (a,b)$
2. $x \in (b,c)$

הוכחה. יהיו $a,b,c,x \in \mathbb{X}$ כך ש-$b \in (a,c)$, ונניח בשלילה ש-$b \in (a,b)$ ו-$x \in (b,c)$.

$$\Rightarrow d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$$
$$\Rightarrow d(a,b) = d(a,x) + d(x,b)$$
$$\Rightarrow d(b,c) = d(b,x) + d(x,c)$$
$$\Rightarrow d(a,c) = d(a,x) + 2 \cdot d(b,x) + d(x,c)$$

מהנחת השלילה נובע ש-$b \neq x$, כלומר $d(b,x) > 0$ ומכאן ש-$d(a,c) > d(a,x) + d(x,c)$ בסתירה לא"ש המשולש. ■

מסקנה 1.7. לכל $a,b,x,y \in \mathbb{X}$ כך ש-$x,y \in (a,b)$, מתקיימת בדיוק אחת משלוש האפשרויות הבאות:

1. $x = y$
2. $x \in (a,y)$ ו-$y \in (x,b)$
3. $x \in (y,b)$ ו-$y \in (a,x)$

הוכחה. האפשרות הראשונה סותרת את שתי האחרות לפי הגדרה, ואילו השנייה והשלישית סותרות זו את זו ע"פ המסקנה הקודמת (1.6); מכאן שמתקיימת לכל היותר אחת משלוש האפשרויות, אם כן נותר להוכיח שאחת מהן מתקיימת.
יהיו $a,b,x,y \in \mathbb{X}$ כך ש-$x,y \in (a,b)$, ונניח ש-$x \neq y$. אם כן מהמסקנה הקודמת (1.6) נובע ש-$y \in (a,x)$ ו/או $y \in (b,x)$ וכמו כן $x \in (a,y)$ ו/או $x \in (b,y)$. מהגדרה לא ייתכן ש-$y \in (a,x)$ וגם $x \in (a,y)$, וכמו כן לא ייתכן ש-$y \in (b,x)$ וגם $x \in (b,y)$, כלומר שתי האפשרויות היחידות הן:

1. $x \in (b,y)$ ו-$y \in (a,x)$
2. $x \in (a,y)$ ו-$y \in (b,x)$

■

טענה 1.8. לכל $a,b,c \in \mathbb{X}$ כך ש-$b \in (a,c)$ מתקיים $(a,b) \subseteq (a,c)$ ו-$(b,c) \subseteq (a,c)$.

הוכחה. נוכיח ש-$(a,b) \subseteq (a,c)$, ההוכחה שמתקיים גם $(b,c) \subseteq (a,c)$ זהה עד כדי החלפת a ו-c בכל מקום.
תהא $p \in (a,b)$ ונניח בשלילה ש-$p \notin (a,c)$, כלומר $d(a,c) < d(a,p) + d(p,c)$.

$$\Rightarrow d(a,p) + d(p,c) > d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$$
$$= d(a,p) + d(p,b) + d(b,c)$$
$$\Rightarrow d(p,c) > d(p,b) + d(b,c)$$

אך זוהי סתירה לא"ש המשולש. מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$p \in (a,b)$, כלומר $(a,b) \subseteq (a,c)$. ■

טענה 1.9. לכל $a,b,c,x\in\mathbb{X}$ כך ש-$b\in(a,c)$ ו-$c\in(b,x)$, מתקיים $(a,c)\cap(b,x)=(b,c)$.

הוכחה. תהיינה $a,b,c,x\in\mathbb{X}$, כך ש-$b\in(a,c)$ ו-$c\in(b,x)$.

- תהא $p\in(a,c)\cap(b,x)$ ונוכיח ש-$p\in(b,c)$.
  - $b\in(a,c)$ ו-$p\in(a,c)$, ע״פ המסקנה הקודמת (1.7) מתקיימת אחת משתי האפשרויות הבאות:
    - $p\in(b,c)$ ו-$b\in(a,p)$ - במקרה זה סיימנו.
    - $b\in(p,c)$ ו-$p\in(a,b)$.
  - $c\in(b,x)$ ו-$p\in(b,x)$, ע״פ המסקנה הקודמת (1.7) מתקיימת אחת משתי האפשרויות הבאות:
    - $p\in(b,c)$ ו-$c\in(p,x)$ - במקרה זה סיימנו.
    - $c\in(b,p)$ ו-$p\in(c,x)$.
  - אם כן נניח בשלילה שמתקיים $c\in(b,p)$ ו-$p\in(a,b)$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow d(a,c)&=d(a,b)+d(b,c)\\&=d(a,p)+d(p,c)+d(b,c)\\&=d(a,p)+d(b,c)+d(c,p)\\&=d(a,p)+d(b,p)\\&=d(a,p)+d(p,b)\\&=d(a,b)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(b,c)=d(a,c)-d(a,b)=0$$

בסתירה לכך ש-$b\neq c$.

- תהא $q\in(b,c)$ ונוכיח ש-$q\in(a,c)\cap(b,x)$.
  - מהטענה הקודמת (1.8), ומהעובדה ש-$b\in(a,c)$ ו-$q\in(b,c)$, נובע ש-$q\in(a,c)$.
  - מהטענה הקודמת (1.8), ומהעובדה ש-$c\in(b,x)$ ו-$q\in(b,c)$, נובע ש-$q\in(b,x)$.

■

1.2 מרחבים מכוונים

♣ נדמיין שאנו מסדרים שלושה כדורים a, b, c בשורה בדיוק בסדר שבה הם מוצגים בתחילת המשפט[1]. בהינתן כדור נוסף - x, איננו יודעים היכן נמצא כדור זה ביחס לאחרים, אך נדע לומר שאם c נמצא בין x ל-b הרי ש-x נמצא מימין ל-c, ולכן c נמצא גם בין x ל-a; ולהפך: אם c נמצא בין x ל-a שוב ניתן להסיק ש-x נמצא מימין ל-c ולפיכך c נמצא בין x ל-b.
הבעיה היא שהגדרת היחס "נמצאת בין" אינה מספיקה כדי שאכן נוכל להסיק ממנה את הנ"ל - נתבונן במרחב המטרי $(\{a, b, c, x\}, d)$, כאשר d מוגדרת ע"י:

$$d(b,c) = 1 \qquad d(a,b) = 1$$
$$d(b,x) = 2 \qquad d(a,c) = 2$$
$$d(c,x) = 1 \qquad d(a,x) = 1$$

ניתן לדמיין את המרחב המטרי הזה כאילו ארבע הנקודות נמצאות על מעגל שאורך חצי ההיקף שלו הוא 2, והמרחק בין כל שתי נקודות הוא אורך הקשת הקצרה ביותר המחברת ביניהם[2].

הגדרה 1.10. קבוצה $O \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא מכוונת, אם לכל $a, b, c, x \in O$ כך ש-$b \in (a, c)$ מתקיים:

$$c \in (b, x) \iff c \in (a, x)$$

כמו כן, נאמר ש-$(\mathbb{X}, d)$ הוא מרחב Λ-מטרי מכוון אם $\mathbb{X}$ היא קבוצה מכוונת.

מסקנה 1.11. תת-קבוצה של קבוצה מכוונת גם היא מכוונת.

מסקנה 1.12. כל קבוצה בת שלושה איברים או פחות, היא קבוצה מכוונת.

נניח ש-$(\mathbb{X}, d)$ הוא מרחב Λ-מטרי מכוון[3].

מסקנה 1.13. לכל $a, b, c, x \in \mathbb{X}$ כך ש-$b \in (a, c)$ ו-$c \in (b, x)$, מתקיים $b, c \in (a, x)$.

הוכחה. יהיו $a, b, c, x \in \mathbb{X}$ כך ש-$b \in (a, c)$ ו-$c \in (b, x)$. העובדה ש-$c \in (a, x)$ היא פשוט ההגדרה של מרחב מכוון בנוסח שלעיל, כדי לקבל את העובדה ש-$b \in (a, x)$ יש להחליף בכל מקום בין a ל-x ובין b ל-c. ■

מסקנה 1.14. לכל $a, b, c, x \in \mathbb{X}$ כך ש-$b \in (a, c)$ ו-$c \in (b, x)$, מתקיים $[b, c] \subseteq (a, x)$.

הוכחה. תהיינה $a, b, c, x \in \mathbb{X}$, כך ש-$b \in (a, c)$ ו-$c \in (b, x)$, אם כן לפי המסקנה הקודמת (1.13) מתקיים $b, c \in (a, x)$.
תהא $p \in [b, c]$, אם $p = b$ או ש-$p = c$ הרי שכבר הוכחנו את המבוקש בשורה הקודמת, לכן נוכל להניח ש-$p \in (b, c)$.

- $p \in (c, b)$ ו-$b \in (c, a)$, מכאן ש-$b \in (p, a)$.
- $p \in (b, c)$ ו-$c \in (b, x)$, מכאן ש-$c \in (p, x)$.
- $c \in (x, p)$ ו-$p \in (c, b)$, מכאן ש-$p \in (x, b)$.
- $b \in (a, p)$ ו-$p \in (b, x)$, מכאן ש-$p \in (a, x)$.

■

מסקנה 1.15. לכל $a, b, c, x \in \mathbb{X}$ כך ש-$b \in (a, c)$ ו-$c \in (a, x)$, מתקיים $c \in (b, x)$ ו-$b \in (a, x)$.

הוכחה. תהיינה $a, b, c, x \in \mathbb{X}$ ונניח ש-$b \in (a, x)$ ו-$c \in (b, x)$.
העובדה ש-$c \in (b, x)$ היא פשוט ההגדרה של מרחב מכוון בנוסח שלעיל. כדי לקבל את העובדה ש-$b \in (a, x)$ יש לשים לב לכך ש-$b \in (a, c)$ ו-$c \in (b, x)$, ולהשתמש במסקנה 1.13. ■

---

[1] כלומר b נמצא בין a ל-c, a נמצאת משמאל ל-b ו-c נמצאת מימין ל-b.
[2] מנקודת מבט זו הזוגות a, c ו-b, x הם זוגות של נקודות אנטיפודיות.
[3] לאורך כל הפרק הזה והבאים אחריו ניתן להניח ש-$\mathbb{X}$ הוא תת-בקבוצה מכוונת של מרחב Λ-מטרי כללי, כך שלא איבדנו את הכלליות - זהו רק עניין של נוחות.

2 קבוצות קוויות

יהי $(\mathbb{X}, d)$ מרחב Λ-מטרי מכוון.

הגדרה 2.1. תת-קבוצה $S \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא קווית, אם לכל שלוש נקודות שונות ב-S, אחת משלוש הנקודות נמצאת בין שתי האחרות. כמו כן, נאמר ש-n נקודות $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{X}$ הן קוויות, אם הקבוצה $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ קווית.

מסקנה 2.2. תת-קבוצה $S \subseteq \mathbb{X}$ היא קווית אם״ם לכל שלוש נקודות $a, b, c \in S$ מתקיים לפחות אחת משלושת השוויונות הבאים:

$$d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$$
$$d(a,b) = d(a,c) + d(c,b)$$
$$d(b,c) = d(b,a) + d(a,c)$$

ובאופן שקול: מתקיים $d(a,b) = |d(a,c) \pm d(c,b)|$.

מסקנה 2.3. תת-קבוצה של קבוצה קווית גם היא קווית.

מסקנה 2.4. כל קבוצה בת שני איברים או פחות, היא קבוצה קווית.

מסקנה 2.5. תהא $S \subseteq \mathbb{X}$, התנאים הבאים שקולים:

1. S קווית.
2. לכל שלוש נקודות שונות ב-S, בדיוק אחת משלוש הנקודות נמצאת בין שתי האחרות.
3. כל שלוש נקודות ב-S הן קוויות.

מסקנה 2.6. תהא $S \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה קווית. לכל ארבע נקודות $a, b, c, x \in S$ כך ש-$b \in (a,c)$ ו-x שונה מ-a, b, c, מתקיימת בדיוק אחת מארבע האפשרויות הבאות:

1. $a \in (x,b)$ ו-$a \in (x,c)$
2. $x \in (a,b)$ ו-$x \in (a,c)$
3. $x \in (b,c)$ ו-$x \in (a,c)$
4. $c \in (b,x)$ ו-$c \in (a,x)$

♣ בכל אחת מארבע האפשרויות, מהיות $\mathbb{X}$ מרחב מכוון נובע שהחלק הראשון גורר את השני:

1. אם $b \in (c,a)$ ו-$a \in (b,x)$, אז $a \in (c,x)$.
2. אם $x \in (a,b)$ ו-$b \in (a,c)$, אז $x \in (a,c)$ (מסקנה 1.15).
3. אם $x \in (c,b)$ ו-$b \in (c,a)$ אז $x \in (c,a)$ (מסקנה 1.15).
4. אם $b \in (a,c)$ ו-$c \in (b,x)$, אז $c \in (a,x)$.

הוכחה. השילובים של כל שתיים מבין ארבע האפשרויות, מלבד השילוב של אפשרויות 2 ו-3, מהווים סתירה למסקנה 1.2 (נשים לב לחלק השני של כל אחת מהאפשרויות). ואילו השילוב של אפשרויות 2 ו-3 מהווה סתירה לפי טענה 1.6 (נשים לב לחלק הראשון של שתי האפשרויות). אם כן הוכחנו שמתקיימת **לכל היותר** אחת מארבע האפשרויות.
נניח בשלילה שאף אחת מן האפשרויות אינה מתקיימת. מהעובדה שאפשרויות 1 ו-4 אינן מתקיימות נובע ש-$x \in (c,a)$, ומהעובדה שאפשרויות 3 ו-4 אינן מתקיימות נובע ש-$b \in (c,x)$ (מסקנה 2.5). ולכן מהיות $\mathbb{X}$ מרחב מכוון נובע ש-$x \in (b,a)$, כלומר אפשרות 2 מתקיימת בסתירה להנחת השלילה. ■

מסקנה 2.7. תהא $S \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה קווית. לכל $a, b, c, x \in S$ כך ש-$b \in (a, c)$, ו-x שונה מ-a, b, c. מתקיים:

- אם $b \in (a, x)$ אז $x \in (b, c)$ או ש-$c \in (b, x)$.
- אם $b \in (x, c)$ אז $x \in (a, b)$ או ש-$a \in (x, b)$.

הוכחה. נובע ישירות מהמסקנה הקודמת (2.6). ■

למה 2.8. תהיינה $a, b, x, y \in \mathbb{X}$ כך ש-$a \neq b$. אם $\{a, b, x\}$ ו-$\{a, b, y\}$ קוויות אז גם $\{a, b, x, y\}$ קווית.

הוכחה. נניח ש-$\{a, b, x\}$ ו-$\{a, b, y\}$ קוויות; אם $x \in \{a, b\}$ או ש-$y \in \{a, b\}$ אז הטענה טריוויאלית, לכן נניח שהמצב אינו כזה, ונניח בהג"כ ש-$x \in (a, b)$ או $b \in (a, x)$. כעת נחלק למקרים (מהיות $\{a, b, y\}$ קווית נובע שאלו כל המקרים).

- נניח ש-$y \in (a, b)$.
  - אם $x \in (a, b)$ אז ע"פ מסקנה 1.7 מתקיימת בדיוק אחת משלוש האפשרויות הבאות:
    1. $x = y$ - במקרה זה הטענה טריוויאלית.
    2. $x \in (a, y)$ ו-$y \in (b, x)$ - במקרה זה בדיקה פשוטה מראה ש-$\{a, b, x, y\}$ קווית ע"פ הגדרה.
    3. $x \in (b, y)$ ו-$y \in (a, x)$ - במקרה זה בדיקה פשוטה מראה ש-$\{a, b, x, y\}$ קווית ע"פ הגדרה.
  - ואם $b \in (a, x)$ אז ע"פ טענה 1.9 מתקיים $y \in (a, b) \subseteq (a, x)$, ומהיות $\mathbb{X}$ מרחב מכוון נובע ש-$\boldsymbol{b} \in (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (כי $\boldsymbol{y} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ו-$\boldsymbol{b} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$).
- נניח ש-$a \in (y, b)$.
  - אם $x \in (a, b)$ אז ע"פ טענה 1.9 מתקיים $x \in (a, b) \subseteq (y, b)$, ומהיות $\mathbb{X}$ מרחב מכוון נובע ש-$\boldsymbol{a} \in (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (כי $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ ו-$\boldsymbol{a} \in (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y})$).
  - ואם $b \in (a, x)$ אז לפי מסקנה 1.13 מתקיים $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (כי $\boldsymbol{a} \in (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b})$ ו-$\boldsymbol{b} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$).
- המקרה שבו $b \in (y, a)$ שקול למקרה הקודם (נחליף את a ו-b בכל מקום).

■

משפט 2.9. יהי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ אוסף של קבוצות קוויות. אם קיימות שתי נקודות שונות $a, b \in \mathbb{X}$, כך ש-$a, b \in S$ לכל $S \in \mathcal{S}$, אז $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ היא קבוצה קווית.

הוכחה. נניח שקיימות שתי נקודות שונות $a, b \in \mathbb{X}$ כך ש-$a, b \in S$ לכל $S \in \mathcal{S}$, ותהיינה $a, b \in \mathbb{X}$ כאלה.
תהיינה $x, y, z \in \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$, ע"פ הלמה (2.8) $\{a, b, x, y\}$ ו-$\{a, b, x, z\}$ קוויות, וממילא $\{b, x, y\}$ ו-$\{b, x, z\}$ גם הן קוויות. ושוב נקבל מהלמה ש-$\{b, x, y, z\}$ קווית וממילא $\{x, y, z\}$ קווית. x, y, z היו שרירותיות ולכן ע"פ מסקנה 2.5 הקבוצה $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ קווית. ■

הגדרה 2.10. נאמר שקבוצה קווית $S \subseteq \mathbb{X}$ היא <u>ישר</u>, אם לכל קבוצה קווית $T \subseteq \mathbb{X}$ כך ש-$S \subseteq T$ מתקיים $S = T$.

מסקנה 2.11. דרך כל שתי נקודות עובר ישר אחד ויחיד
לכל שתי נקודות שונות $a, b \in \mathbb{X}$ קיים ישר יחיד $L \subseteq \mathbb{X}$ כך ש-$a, b \in L$.
ובאופן שקול: לכל שני ישרים שונים יש לכל היותר נקודת חיתוך[4] אחת.

משפט 2.12. לכל קבוצה קווית $S \subseteq \mathbb{X}$ קיים שיכון $f : S \hookrightarrow \Lambda$.

הוכחה. **צריך לכתוב הוכחה.** ■

[4] תזכורת: נקודת חיתוך של שתי קבוצות היא נקודה השייכת לחיתוך שלהן, כמובן שעבור סתם שתי קבוצות אין הכרח שתהיה נקודה כזו או שתהיה רק אחת.

3 מרחבים סְפֵּירִיִּים

3.1 הגדרות

♣ המושג הבא מנסה לפרמל את המרחק על סְפֵּירָה: המרחק בין שתי נקודות הוא אורך הקשת המחברת בין שתי הנקודות במעגל שמרכזו הוא מרכז הסְפֵּירָה. כאן יש להעיר שאמנם עבור שתי נקודות אנטיפודיות ישנם אין-סוף מעגלים כאלה, אך כל המעגלים הללו בעלי אורך זהה ובכולם אורך הקשת המתאימה הוא מחצית אורך המעגל.

♣ אם הרדיוס של סְפֵּירָה הוא 1, אז המרחק בין שתי נקודות שבה הוא בדיוק גודל הזווית ששתי נקודות אלו יוצרות עם מרכז הספירה, כשהיא נמדדת ברדיאנים[5]. מכיוון שכך ניתן לראות במושג המרחק על סְפֵּירָה מייצג של רעיון הזווית בין שתי קרנות.

הגדרה 3.1. מרחב $\mathcal{A}$-מטרי $(\mathbb{X},d)$ ייקרא ספירי (קרי: סְפֵּירִי), אם קיים קבוע $\pi\in\mathcal{A}$ כך שמתקיימות שתי התכונות הבאות:

1. קיום נקודות אנטיפודיות - לכל נקודה $a\in\mathbb{X}$ קיימת נקודה $b\in\mathbb{X}$ כך ש-$d(a,b)=\pi$.
2. אי-שוויון הפירמידה - לכל שלוש נקודות $a,b,c\in\mathbb{X}$ מתקיים $d(a,b)+d(b,c)+d(c,a)\le 2\pi$.

ובמקרה כזה נאמר ששתי נקודות $a,b\in\mathbb{X}$ הן נקודות אנטיפודיות זו לזו אם $d(a,b)=\pi$, וששלוש נקודות $a,b,c\in\mathbb{X}$ הן נקודות משלימות אם $d(a,b)+d(b,c)+d(c,a)=2\pi$.

♣ משתי התכונות הראשונות ניתן להסיק ש-$\pi=\operatorname{diam}(\mathbb{X})$, ולכן קיים קבוע יחיד המקיים זאת.

♣ נשים לב: מבחינה אינטואיטיבית **הקוטר המטרי** של מרחב ספירי $\mathbb{X}$ ($\operatorname{diam}(\mathbb{X})$) הוא האורך של מחצית המעגל על פני $\mathbb{X}$, שכן זהו המרחק בין שתי הנקודות המרוחקות ביותר - כלומר המרחק בין שתי נקודות אנטיפודיות. לעומת זאת **הקוטר הגאומטרי** של $\mathbb{X}$ הוא אורך הקטע הישר שקצותיו הם נקודות אנטיפודיות והוא עובר דרך מרכז הסְפֵּירָה, כלומר זהו מספר קטן יותר (פי $\frac{\pi}{2}$). כפי שכבר אמרנו לעיל, המרחק בין שתי נקודות במרחב סְפֵּירִי מייצג את הזווית ששתי נקודות אלו יוצרות עם מרכז הסְפֵּירָה, לכן לא מדובר כאן בסתירה לאינטואיציה אלא בשם זהה לשני מושגים שונים אך קשורים[6]

♣ הסיבה לשם "אי-שוויון הפירמידה" היא כזו: בפירמידה בעלת בסיס משולש, כל קודקוד יוצר שלוש זוויות עם שלושת הקודקודים האחרים, והסכום שלושתן קטן מהזווית המיוחסת למעגל שלם (2π רדיאנים או 360°). למעשה, מנקודת מבט זו ניתן לראות גם שהסכום של כל שתיים משלוש הזוויות הללו גדול מן השלישית, ולכן גם אי-שוויון המשולש במרחבים סְפֵּירִיִּים היה ראוי להיקרא "אי-שוויון הפירמידה" וכך אכן נעשה בהמשך.

יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב ספירי בעל שלוש נקודות שונות לכל הפחות[7], ויהי π קבוע מתאים.

הגדרה 3.2. נאמר ששתי נקודות $a,b\in\mathbb{X}$ הן נקודות אנטיפודיות אם $d(a,b)=\pi$, וכמו כן נאמר שלוש נקודות $a,b,c\in\mathbb{X}$ הן נקודות משלימות אם $d(a,b)+d(b,c)+d(c,a)=2\pi$.

3.2 נקודות אנטיפודיות ונקודות משלימות

מסקנה 3.3. $\mathbb{X}$ חסום ו-$\operatorname{diam}(\mathbb{X})=\pi$.

♣ בפרט π הוא הקבוע היחיד שעבורו מתקיימות שתי האקסיומות של מרחב ספירי.

הוכחה. ע"פ א"ש הפירמידה לכל שתי נקודות $a,b\in\mathbb{X}$ מתקיים:

$$2\pi\ge d(a,b)+d(b,a)+d(a,a)=2\cdot d(a,b)$$

ולכן גם $d(a,b)\le\pi$, מכאן ש-$\mathbb{X}$ חסום ו-$\operatorname{diam}(\mathbb{X})\le\pi$. מצד שני $\mathbb{X}$ אינו ריק ולכן קיימות שתי נקודות $a,b\in\mathbb{X}$ כך ש-$d(a,b)=\pi$ (נובע מקיום נקודות אנטיפודיות), ומכאן ש-$\operatorname{diam}(\mathbb{X})\ge\pi$, וממילא $\operatorname{diam}(\mathbb{X})=\pi$. ■

---

[5] ואם הרדיוס אינו 1 אז זהו גודל הזווית ביחידת מידה אחרת...

[6] **יש לתופעה הזו שם, "שיתוף השם" אולי?**

[7] מבחינת ההגדרה ייתכן שיש במרחב ספירי נקודה אחת (היא אנטיפודית לעצמה), או שתיים (ואז ע"פ האקסיומה השנייה הן אנטיפודיות), אך שני המקרים הללו אינם מעניינים כל כך.

טענה 3.4. לכל נקודה $a \in \mathbb{X}$ קיימת נקודה אנטיפודית יחידה, ואותה נקודה אינה a עצמה.

הוכחה. העובדה ששתי נקודות אנטיפודיות זו לזו הן בהכרח שונות נובע מהעובדה ש-$\pi > 0$ (כי יש ב-$\mathbb{X}$ שתי נקודות שונות), ושהמרחק בין שתי נקודות אנטיפודיות ב-$\mathbb{X}$ הוא π.
תהא $a \in \mathbb{X}$, ותהיינה $b, c \in \mathbb{X}$ נקודות אנטיפודיות ל-a (יש כאלה ע״פ האקסיומה הראשונה). ע״פ א״ש הפירמידה מתקיים:

$$2\pi \geq d(a,b) + d(b,c) + d(c,a) = \pi + d(b,c) + \pi$$
$$\Rightarrow d(b,c) = 0$$
$$\Rightarrow b = c$$

■

סימון: לכל $a \in \mathbb{X}$ נסמן ב-$-a$ את הנקודה האנטיפודית ל-a, כמו כן נסמן $+a := a$.

♣ לא מדובר כאן בנגדי (אין פעולת חיבור), אך הסימון אינו מקרי: אם הספירה משוכנת במרחב $\mathbb{R}^n$ כך ש-0 הוא המרכז שלה אז הנקודה האנטיפודית ל-a היא אכן $-a$.

מסקנה 3.5. לכל $a \in \mathbb{X}$ מתקיים $-(-a) = a$.

טענה 3.6. תהיינה $a, b \in \mathbb{X}$ שתי נקודות, מתקיים $b = -a$ אם״ם $\mathbb{X} = [a,b]$, כלומר אם״ם לכל $x \in \mathbb{X}$ מתקיים $d(a,b) = d(a,x) + d(x,b)$, וממילא גם $d(a,x) + d(x,b) = \pi$.

הוכחה.

- $\Leftarrow$
  נניח ש-$b = -a$, ותהא $x \in \mathbb{X}$. ע״פ א״ש הפירמידה מתקיים:

$$2\pi \geq d(a,b) + d(b,x) + d(x,a) = \pi + d(b,x) + d(x,a)$$
$$\Rightarrow \pi \geq d(b,x) + d(x,a)$$

  ומצד שני, ע״פ א״ש המשולש מתקיים $\pi = d(a,b) \leq d(b,x) + d(x,a)$, ומכאן ש-$d(a,b) = \pi = d(b,x) + d(x,a)$, כלומר $x \in [a,b]$.

- $\Rightarrow$
  נניח ש-$\mathbb{X} = [a,b]$.

$$\Rightarrow d(a,b) = d(a,-a) + d(-a,b) = \pi + d(-a,b)$$

  אבל לפי הגדרה $\pi \geq d(a,b)$, ולכן בהכרח $d(-a,b) = 0$, כלומר $b = -a$.

■

מסקנה 3.7. לכל שתי נקודות $a, b \in \mathbb{X}$, הנקודות $a, b, -a$ הן נקודות משלימות (בפרט $a, -a$ הן נקודות משלימות).

מסקנה 3.8. לכל שתי נקודות $a, b \in \mathbb{X}$ מתקיים $d(a,-b) = d(-a,b)$ ו-$d(a,b) = d(-a,-b)$.

הוכחה. ע״פ טענה 3.6, לכל שתי נקודות $a, b \in \mathbb{X}$ מתקיים:

$$d(a,b) + d(b,-a) = d(a,-a) = \pi$$
$$d(b,a) + d(a,-b) = d(b,-b) = \pi$$
$$\Rightarrow d(b,-a) = \pi - d(a,b) = d(a,-b)$$

a ו-b היו שרירותיות ולכן גם עבור $a, -b$ מתקיים $d(-b,-a) = d(a,-(-b)) = d(a,b)$. ■

3.3 קבוצות מעגליות

הגדרה 3.9. קבוצה $S \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא מעגלית אם לכל שלוש נקודות שונות ב-S, אחת משלוש הנקודות נמצאת בין שתי האחרות, או שהן נקודות משלימות.

1. $d(a,b) = d(a,c) + d(c,b)$
2. $d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$
3. $d(b,c) = d(b,a) + d(a,c)$
4. $d(a,b) + d(b,c) + d(c,a) = 2\pi$

הסכמה: כשנאמר אי-שוויונות הפירמידה נתכוון לאי-שוויון המשולש ואי-שוויון הפירמידה יחדיו.

♣ שימו לב לדמיון בין קבוצה מעגלית לקבוצה קווית: בקבוצה קווית, לכל שלוש נקודות אחד משלושת אי-שוויונות המשולש הוא שוויון, ובקבוצה מעגלית אחד מארבעת אי-שוויונות הפירמידה הוא שוויון.

מסקנה 3.10. תת-קבוצה של קבוצה מעגלית גם היא מעגלית.

מסקנה 3.11. כל קבוצה בת שני איברים או פחות היא קבוצה מעגלית.

מסקנה 3.12. תהא $S \subseteq \mathbb{X}$, התנאים הבאים שקולים:

1. S מעגלית.
2. כל שלוש נקודות שונות ב-S הן קוויות ו/או משלימות.
3. כל שלוש נקודות ב-S הן מעגליות.

טענה 3.13. תהא $S \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה מעגלית, לכל $a \in S$ גם $S \cup \{-a\}$ מעגלית.

הוכחה. נניח ש-S אינה ריקה (אחרת הטענה טריוויאלית), ותהיינה $a,b,c \in S \cup \{-a\}$. אם $-a \notin \{a,b,c\}$ אז a,b,c מעגליות מפני ששלושתן שייכות ל-S, לכן נניח ש-$-a \in \{a,b,c\}$, ובהג"כ נניח ש-$-a = c$.
ע"פ טענה 3.6 מתקיים $\pi = d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$,

$$d(a,b) = \pi - d(b,c)$$

ומכאן שע"פ הגדרה מתקיימת אחת מארבע האפשרויות הבאות:

1. $\pi - d(b,x) = d(a,b) = d(a,c) + d(c,b) = \pi - d(c,x) + d(c,b)$, כלומר $d(c,x) = d(c,b) + d(b,x)$.
2. $\pi - d(c,x) = d(a,c) = d(a,b) + d(b,c) = \pi - d(b,x) + d(b,c)$, כלומר $d(b,x) = d(b,c) + d(c,x)$.
3. $d(b,c) = d(b,a) + d(a,c) = 2\pi - d(b,x) - d(c,x)$, כלומר $d(x,b) + d(b,c) + d(c,x) = 2\pi$.
4. $2\pi = d(a,b) + d(b,c) + d(c,a) = 2\pi - d(b,x) + d(b,c) - d(c,x)$, כלומר $d(b,c) = d(b,x) + d(x,c)$.

כלומר בכל מקרה b,c,x מעגליות, ומכאן ש-S מעגלית (טענה 3.12). ■

מסקנה 3.14. לכל $a,b \in \mathbb{X}$, הקבוצה $\{a,b,-a,-b\}$ היא קבוצה מעגלית.