מרחבים מטריים

1 מרחבים מטריים ומרחבים נורמיים

1.1 הגדרות

הגדרה 1.1. מטריקה
תהא $\mathbb{X}$ קבוצה לא ריקה, פונקציה $d:\mathbb{X}\times\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ תיקרא מטריקה על $\mathbb{X}$ אם היא מקיימת את שלוש התכונות הבאות:

1. חיוביות בהחלט - לכל $x,y\in\mathbb{X}$ מתקיים $d(x,y)\geq 0$, ובנוסף $d(x,y)=0$ אם"ם $x=y$.
2. סימטריה - לכל $x,y\in\mathbb{X}$ מתקיים $d(x,y)=d(y,x)$.
3. אי-שוויון המשולש - לכל $x,y,z\in\mathbb{X}$ מתקיים $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

♣ מטריקה כשמה כן היא: דרך למדוד את המרחק (ולמעשה להגדיר אותו) בין שני איברים בקבוצה, דרישת החיוביות בהחלט והסימטריה הן טריוויאליות, ודרישת א"ש המשולש מפרמלת אינטואיציה ברורה: הוספת "תחנה" בדרך יכולה רק להאריך אותה אך לעולם לא תקצר.

הגדרה 1.2. מרחב מטרי
מרחב מטרי (להלן גם מ"מ) הוא זוג סדור $(\mathbb{X},d)$ כאשר d היא מטריקה על קבוצה לא ריקה $\mathbb{X}$, האיברים של $\mathbb{X}$ ייקראו לעיתים קרובות נקודות.

סימון: לכל מרחב מטרי $(\mathbb{X},d)$ ולכל תת-קבוצה $Y\subseteq\mathbb{X}$ נסמן ב-d_Y את הצמצום של d ל-$Y\times Y$.

הגדרה 1.3. תת-מרחב מטרי
יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב מטרי ותהא $Y\subseteq\mathbb{X}$, הזוג הסדור (Y,d_Y) נקרא תת-מרחב מטרי של X.

♣ כמובן שהרעיון הוא ש-(Y,d_Y) הוא מרחב מטרי עם אותה מטריקה.

הגדרה 1.4. יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב מטרי, המרחק של נקודה $x\in\mathbb{X}$ מקבוצה $S\subseteq\mathbb{X}$ הוא $d(x,S):=\inf\{d(x,s)\mid s\in S\}$.

דוגמאות

♣ אנחנו נראה בהמשך דוגמאות נוספות למטריקות שמוגדרות ע"י נורמות (שהן הדרך למדוד את האורך של וקטור במרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$).

דוגמה 1.5. עבור כל יחידון $\{x\}$ הפונקציה d המוגדרת ע"י $d(x,x):=0$ היא מטריקה על x.

דוגמה 1.6. המטריקה הבדידה (הדיסקרטית)
תהא $\mathbb{X}$ קבוצה לא ריקה ותהא $d:\mathbb{X}\times\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ מטריקה המוגדרת ע"י (לכל $x,y\in\mathbb{X}$):

$$d(x,y):=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$$

♣ זוהי הדוגמה הפשטנית והמנוונת ביותר של מטריקה, והיא מייצרת דוגמאות נגדיות רבות לטענות שמתאימות עבור מרבית המטריקות האחרות.

דוגמה 1.7. בהינתן מרחב מטרי $(\mathbb{X},d)$ ניתן לקבל ממנו מרחב מטרי נוסף ע"י הכפלת d במספר חיובי.

דוגמה 1.8. יהיו $(\mathbb{X}_1, d_1), (\mathbb{X}_2, d_2) \ldots, (\mathbb{X}_k, d_k)$ מרחבים מטריים, ונסמן $\mathbb{X} := \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \ldots \times \mathbb{X}_k$.
לכל $x \in \mathbb{R}$ נסמן $x := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, כלומר x_i היא הקואורדינטה ה-i של x (לכל $k \geq i \in \mathbb{N}$).
הפונקציות $d, \rho : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ המוגדרות ע"י (לכל $x, y \in \mathbb{X}$):

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{k} d_i(x_i, y_i)$$
$$\rho(x, y) := \max\{d_i(x_i, y_i) \mid k \geq i \in \mathbb{N}\}$$

הן מטריקות על $\mathbb{X}$.

♣ כמובן שניתן להגדיר מטריקות נוספות על $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \ldots \times \mathbb{X}_k$, אך כשנכתוב משפטים אודות מרחבי מכפלה כאלה נתייחס למטריקה מהצורה הנ"ל מבלי להגיד זאת במפורש.

♣ מהגדרה מתקיים $d_i(x_i, y_i) \leq \rho(x, y) \leq d(x, y)$ לכל $k \geq i \in \mathbb{N}$ ולכל $x, y \in \mathbb{X}$.

דוגמה 1.9. נתבונן במעגל היחידה:

$$\mathcal{S}^1 := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

תהא $d : \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 \to \mathbb{R}$ מטריקה המוגדרת ע"י (לכל $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$ כך ש-$\theta_2 \geq \theta_1$):

$$d\left(\begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}\right) := \min\{\theta_2 - \theta_1, (\theta_1 + 2\pi) - \theta_2\}$$

כלומר d מחזירה את אורך הקשת הקצרה מבין השתיים שמגדירות שתי הנקודות.

דוגמה 1.10. יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא A קבוצת תווים[1], המינג מרחק על A^n הוא (לכל $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in A^n$):

$$|\{n \geq i \in \mathbb{N} : a_i \neq b_i\}|$$

כלומר המרחק בין שתי מחרוזות טקסט הוא מספר התווים שבהם הן שונות זו מזו.

צריך להוסיף את המטריקה ה-p-אדית.

הגדרה 1.11. נורמה
יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או ש-$\mathbb{F} = \mathbb{C}$.
פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ תיקרא נורמה על V אם היא מקיימת את שלוש התכונות הבאות:

1. חיוביות בהחלט (אי-שליליות) - לכל $v \in V$ מתקיים $\|v\| \geq 0$, ובנוסף $\|v\| = 0$ אם"ם $x = 0_V$.
2. כפליות (הומוגניות) - לכל $v \in V$ ולכל $c \in \mathbb{F}$ מתקיים $\|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\|$.
3. אי-שוויון המשולש - לכל $v, w \in V$ מתקיים $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

הגדרה 1.12. מרחב נורמי
מרחב נורמי (להלן גם מ"נ) הוא זוג סדור $(V, \|\cdot\|)$ כאשר $\|\cdot\|$ היא נורמה על מ"ו V מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$.

[1] למשל האלף-בית העברי/ האנגלי, הספרות, רק $\{0, 1\}$ וכו'.

מסקנה 1.13. יהי $(V,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי, הפונקציה $d:V\times V\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $d(v,w):=\|v-w\|$ (לכל $v,w\in V$) היא מטריקה על V. מטריקה זו תיקרא <u>המטריקה המושרית</u> ע"י הנורמה $\|\cdot\|$.

♣ כל אחת מהתכונות של אותה d נובעת מהתכונה המקבילה עבור $\|\cdot\|$ (בסעיף 2 יש להכפיל ב--1).

♣ ההפך אינו נכון, לא כל מטריקה נוצרת ע"י נורמה אפילו אם הקבוצה המדוברת היא מ"ו מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$ (כדוגמת המטריקה הבדידה שפוגעת בהומוגניות של הנורמה).

דוגמאות

סימון: נזכיר את הסימון שלנו מקורסי ליניארית, אנחנו מסמנים את הקואורדינטה ה-i של וקטור $x\in\mathbb{F}^n$ ב-x_i ואת הקואורדינטה ה-ij של מטריצה $A\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ ב-$[A]_{ij}$.

♣ כל מכפלה פנימית על מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$ משרה נורמה על אותו מרחב ע"י לקיחת השורש הריבועי של המכפלה הפנימית של וקטור עם עצמו, ראינו דוגמאות רבות לכך בליניארית 2.

כל הדוגמאות הבאות עובדות באופו דומה עבור $\mathbb{C}$.

דוגמה 1.14. נורמת ℓ_p

לכל $k\in\mathbb{N}$ ולכל $p\in\mathbb{N}$ נגדיר את הנורמה $\|\cdot\|_p:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}^k$):

$$\|x\|_p:=\|x\|_{\ell_p}:=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^k|x_i|^p}$$

♣ זוהי בעצם סדרה של נורמות, האיבר ה-p בסדרה נקרא "נורמת ℓ_p", והמטריקה המושרית ע"י האיבר ה-p נקראת "מטריקת ℓ_p" ומסומנת ב-d_p או ב-d_{ℓ_p}.

♣ העובדה שנורמת ℓ_p חיובית בהחלט והומוגנית היא טריוויאלית. כדי להוכיח שהיא גם מקיימת את אי-שוויון המשולש נשים לב לכמה דברים:

- אם נצליח להוכיח שלכל $x,y\in\mathbb{R}^k$ המקיימים $\|x\|_p+\|y\|_p=1$ מתקיים $\|x+y\|_p\le 1$, נקבל מההומוגניות את א"ש המשולש[2].
- לכל $x\in\mathbb{R}^k$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^k\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^p=\frac{1}{\left(\|x\|_p\right)^p}\cdot\sum_{i=1}^k|x_i|^p=\frac{1}{\left(\|x\|_p\right)^p}\cdot\left(\sqrt[p]{\sum_{i=1}^k|x_i|^p}\right)^p=\frac{1}{\left(\|x\|_p\right)^p}\cdot\left(\|x\|_p\right)^p=1$$

- הפונקציה $z\mapsto|z|^p$ היא פונקציה קמורה על $[0,\infty)$, כלומר לכל $0\le a,b\in\mathbb{R}$ ולכל $t\in[0,1]$ מתקיים:

$$|t\cdot a+(1-t)\cdot b|^p\le t\cdot|a|^p+(1-t)\cdot|b|^p$$

---

[2] יהיו $x,y\in\mathbb{R}^k$, אם $x=0$ או אז א"ש המשולש טריוויאלי, אחרת מתקיים $\|x\|_p+\|y\|_p>0$.
נסמן $v:=\frac{x}{\|x\|_p+\|y\|_p}$ ו-$w:=\frac{y}{\|x\|_p+\|y\|_p}$, א"כ מההומוגניות נובע כי:

$$\|v\|_p+\|w\|_p=\frac{\|x\|_p}{\|x\|_p+\|y\|_p}+\frac{\|y\|_p}{\|x\|_p+\|y\|_p}=1$$

ומההנחה נקבל:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p&=\left\|\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)\cdot(v+w)\right\|_p=\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)\cdot\|v+w\|\\&\le\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)\cdot 1=\|x\|_p+\|y\|_p\end{aligned}$$

ובפרט לכל $x,y\in\mathbb{R}^k$ כך ש-$\|x\|_p+\|y\|_p=1$ מתקיים (לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}(|x_i|+|y_i|)^p &= \left|\|x\|_p\cdot\frac{|x_i|}{\|x\|_p}+\|y\|_p\cdot\frac{|y_i|}{\|y\|_p}\right|^p\\ &\leq \|x\|_p\cdot\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^p+\|y\|_p\cdot\left(\frac{|y_i|}{\|y\|_p}\right)^p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\left(\|x+y\|_p\right)^p &= \sum_{i=1}^k|x_i+y_i|^p\leq\sum_{i=1}^k(|x_i|+|y_i|)^p\leq\|x\|_p\cdot\sum_{i=1}^k\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^p+\|y\|_p\cdot\sum_{i=1}^k\left(\frac{|y_i|}{\|y\|_p}\right)^p\\ &= \|x\|_p\cdot 1+\|y\|_p\cdot 1=1=1^p=\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)^p\\ &\Rightarrow\|x+y\|_p\leq\|x\|_p+\|y\|_p\end{aligned}$$

♣ עבור $p=1$ נקבל את "מנהטן של המוניות נהגי מטריקת".

♣ עבור $k=p=1$ נקבל את הערך המוחלט ב-$\mathbb{R}$.

♣ לכל $x\in\mathbb{R}^k$ מתקיים $\|x\|_1\geq\|x\|_2\geq\|x\|_3\geq\ldots$, ומכאן שלכל $x,y\in\mathbb{R}^k$ מתקיים $d_1(x,y)\geq d_2(x,y)\geq d_3(x,y)\geq\ldots$.

הסכמה: הנורמה $\|\cdot\|_2$ על $\mathbb{R}^k$ נקראת <u>הנורמה האוקלידית</u>, כשאנו עוסקים במרחבים מהצורה $\mathbb{R}^k$ נעבוד עם הנורמה האוקלידית ועם המטריקה המושרית על ידה, אלא נאמר אחרת במפורש.

דוגמה 1.15. נורמת ℓ_∞

לכל $k\in\mathbb{N}$ נגדיר את הנורמה $\|\cdot\|_\infty:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ ע"י (לכל $x\in\mathbb{R}$):

$$\|x\|_\infty:=\|x\|_{\ell_\infty}:=\max_{k\geq i\in\mathbb{N}}|x_i|$$

♣ נורמה זו היא בעצם הפונקציה הגבולית של סדרת הנורמות $\left(\|\cdot\|_p\right)_{p=1}^\infty$, לכל $p\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$\|x\|_\infty=\sqrt[p]{(\|x\|_\infty)^p}=\sqrt[p]{\left(\max_{k\geq i\in\mathbb{N}}|x_i|\right)^p}\leq\sqrt[p]{\sum_{i=1}^k|x_i|^p}=\|x\|_p$$

$$\|x\|_p=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^k|x_i|^p}\leq\sqrt[p]{k\cdot\left(\max_{k\geq i\in\mathbb{N}}|x_i|\right)^p}=\sqrt[p]{k\cdot(\|x\|_\infty)^p}=\|x\|_\infty\cdot\sqrt[p]{k}$$

אבל $\lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{k}=1$ ולכן ממשפט הכריך נובע כי $\lim_{p\to\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty$.

♣ נורמה זו נקראת "נורמת ℓ_∞," והמטריקה המושרית על ידה נקראת "מטריקת ℓ_∞" ומסומנת ב-d_∞ או ב-d_{ℓ_∞}.

♣ לכל $p\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\|x\|_p\geq\|x\|_\infty$, ומכאן שגם $d_p(x,y)\geq d_\infty(x,y)$ (לכל $y\in\mathbb{R}^n$).

דוגמה 1.16. המרחב הנורמי $\ell^p(\mathbb{R}^\infty)$

נסמן $\mathbb{R}^\infty:=\mathbb{R}^\mathbb{N}$, כלומר $\mathbb{R}^\infty$ הוא מרחב הסדרות האין-סופיות מעל $\mathbb{R}$, ונסמן:

$$\ell^p(\mathbb{R}^\infty):=\left\{(x_n)_{n=1}^\infty\in\mathbb{R}^\infty\;\middle|\;\sum_{n=1}^\infty|x_i|^p\neq\infty\right\}$$

כלומר $\ell^p(\mathbb{R}^\infty)$ היא קבוצת הסדרות ב-$\mathbb{R}^\infty$ שעבורן הטור החיובי $\sum_{n=1}^\infty |x_i|^p$ מתכנס, זהו תמ"ו של $\mathbb{R}^\infty$ וגם עליו נוכל להגדיר נורמת ℓ_p ע"י)לכל $p\in\mathbb{N}$ ולכל $(x_n)_{n=1}^\infty\in\ell^p(\mathbb{R}^\infty)$(:

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p := \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{\ell_p} := \sqrt[p]{\sum_{n=1}^\infty |x_i|^p}$$

סימון: לכל $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$ נסמן ב-$C[a,b]$ את קבוצת הפונקציות הרציפות שתחום ההגדרה שלהן הוא הקטע הסגור $[a,b]$.

דוגמה 1.17. נורמת $\mathcal{L}^p$ על מרחב פונקציות

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$, לכל $p\in\mathbb{N}$ נגדיר על $C[a,b]$ את הנורמה $\|\cdot\|_p : C[a,b]\to\mathbb{R}$ ע"י)לכל $f\in C[a,b]$(:

$$\|f\|_p := \|f\|_{\mathcal{L}^p} := \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx}$$

♣ זוהי בעצם סדרה של נורמות, האיבר ה-p בסדרה נקרא "נורמת $\mathcal{L}^p$", והמטריקה המושרית ע"י האיבר ה-p נקראת "מטריקת $\mathcal{L}^p$" ומסומנת ב-d_p או ב-$d_{\mathcal{L}^p}$.

♣ גם בדוגמה זו)כמו בדוגמה 1.14(העובדה ש-$\|\cdot\|_p$ חיובית בהחלט והומוגנית טריוויאלית. ההוכחה של א"ש המשולש זהה לחלוטין:

- אם נצליח להוכיח שלכל $f,g\in C[a,b]$ המקיימות $\|f\|_p+\|g\|_p=1$ מתקיים $\|f+g\|_p\le 1$, נקבל מההומוגניות את א"ש המשולש.
- שוב מתקיים:

$$\int_a^b\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p dx = \frac{1}{\left(\|f\|_p\right)^p}\cdot\int_a^b |f(x)|^p\,dx = \frac{1}{\left(\|f\|_p\right)^p}\cdot\left(\sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx}\right)^p = \frac{1}{\left(\|f\|_p\right)^p}\cdot\left(\|f\|_p\right)^p = 1$$

- ושוב לכל $f,g\in C[a,b]$ כך ש-$\|f\|_p+\|g\|_p=1$ מתקיים)לכל $x\in[a,b]$(:

$$\begin{aligned}(|f(x)|+|g(x)|)^p &= \left|\|f\|_p\cdot\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}+\|g\|_p\cdot\frac{|g(x)|}{\|g\|_p}\right|^p\\ &\le \|f\|_p\cdot\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p+\|y\|_p\cdot\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_p}\right)^p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\left(\|f+g\|_p\right)^p &= \int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx \le \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p\,dx\\ &\le \|f\|_p\cdot\int_a^b\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p dx+\|g\|_p\cdot\int_a^b\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_p}\right)^p dx\\ &= \|f\|_p\cdot 1+\|g\|_p\cdot 1 = 1 = 1^p = \left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)^p\\ &\Rightarrow \|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p\end{aligned}$$

דוגמה 1.18. נורמת ∞ על מרחב פונקציות

לכל $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$ נגדיר על $C[a,b]$ את הנורמה $\|\cdot\|_\infty : C[a,b]\to\mathbb{R}$ ע"י)לכל $f\in C[a,b]$(:

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

♣ ההרכבה $|f|$ היא פונקציה רציפה, ולכן מעקרון המקסימום והמינימום של ויירשטראס נובע שהיא מקבלת מקסימום בקטע ו-$\|f\|_\infty$ אכן מוגדרת היטב.

♣ נורמה זו נקראת "נורמת ∞," והמטריקה המושרית על ידה נקראת "מטריקת ∞" ומסומנת ב-d_∞.

לא ברור מה הקשר בין הדוגמה הזו לדוגמה הקודמת, האם באמת הנורמה $\|\cdot\|_\infty$ על $C[a,b]$ היא הפונקציה הגבולית של סדרת הנורמות $(\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p})_{p=1}^{\infty}$???

הבעיה בהוכחה המקבילה מודגשת באדום להלן)הא"ש אינו נכון בהכרח(:

<u>ההוכחה המקבילה</u>

לכל $p \in \mathbb{N}$ ולכל $f \in C[a,b]$ מתקיים:

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sqrt[p]{(\|f\|_{\mathcal{L}^\infty})^p} = \sqrt[p]{\left(\max_{x\in[a,b]} |f(x)|\right)^p} \leq \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx} = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx} = \|f\|_p$$

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx} \leq \sqrt[p]{(b-a)\cdot\left(\max_{x\in[a,b]} |f(x)|\right)^p} = \sqrt[p]{(b-a)\cdot(\|f\|_\infty)^p} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\cdot\sqrt[p]{b-a}$$

אבל $\lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{b-a} = 1$ ולכן ממשפט הכריך נובע כי:

$$\lim_{p\to\infty}\|x\|_p = \|x\|_\infty$$

דוגמה 1.19. הנורמה האופרטורית על מרחב ההעתקות הליניאריות
יהיו $(V,\|\cdot\|_V)$ ו-$(W,\|\cdot\|_W)$ מרחבים נורמיים מעל אותו שדה, לכל $T\in\mathrm{Hom}(V,W)$ נגדיר את הנורמה האופרטורית של T ע״י:

$$\|T\|_{\mathrm{op}}:=\sup\left\{\ \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}\ \middle|\ 0_V\neq v\in V\ \right\}=\sup\left\{\ \|T(v)\|_W\ \middle|\ v\in V,\ \|v\|_V=1\ \right\}$$

כאשר V נוצר סופית החסם העליון הנ״ל מוגדר לכל $T\in\mathrm{Hom}(V,W)$, אם V אינו נוצר סופית נאלץ להצטמצם לקבוצת הפונקציות שעבורן הנורמה האופרטורית מוגדרת - קבוצה זו היא תמ״ו של $\mathrm{Hom}(V,W)$.

♣ הדרך הפשוטה ביותר לחשב את הנורמה של העתקה ליניארית על מרחבים מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$ היא כדלהלן: מייצגים את ההעתקה באמצעות מטריצה, כופלים אותה במשוחלפת שלה, מלכסנים את המטריצה הסימטרית שמתקבלת מכפל זה ולוקחים את השורש של הערך העצמי הגדול ביותר בערך מוחלט.

1.2 מטריקה

משפט 1.20. אי-שוויון המשולש ההפוך
יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב מטרי, לכל $x,y,z\in\mathbb{X}$ מתקיים $|d(x,z)-d(y,z)|\leq d(x,y)$.

1.3 נורמה

טענה 1.21. יהיו $(V,\|\cdot\|_V)$ ו-$(W,\|\cdot\|_W)$ מרחבים נורמיים מעל אותו שדה, ותהא $T:V\to W$ העתקה ליניארית כך שהנורמה $\|T\|_{\mathrm{op}}$ מוגדרת; לכל $v\in V$ מתקיים $\|T(v)\|_W\leq\|T\|_{\mathrm{op}}\cdot\|v\|_V$.

טענה 1.22. יהיו $(V,\|\cdot\|_V)$, $(W,\|\cdot\|_W)$ ו-$(U,\|\cdot\|_U)$ מרחבים נורמיים מעל אותו שדה, ותהיינה $T_1:V\to W$ ו-$T_2:W\to U$ העתקות ליניאריות כך ש-$\|T_1\|_{\mathrm{op}}$ ו-$\|T_2\|_{\mathrm{op}}$ מוגדרות; מתקיים $\|T_2\circ T_1\|_{\mathrm{op}}\leq\|T_2\|_{\mathrm{op}}\cdot\|T_1\|_{\mathrm{op}}$.

2 קבוצות במרחב מטרי

2.1 הגדרות

יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב מטרי.

♣ שימו לב: כל ההגדרות והטענות שנראה מכאן והלאה תלויות ב-$\mathbb{X}$ וב-d - אם נבחר קבוצה ו/או מטריקה אחרות קבוצה שמקיימת הגדרה או טענה כלשהן עבור $(\mathbb{X},d)$ לא בהכרח תקיים אותה גם עבור הקבוצה ו/או המטריקה החדשות.

הגדרה 2.1. כדור פתוח וכדור סגור
לכל $x\in\mathbb{X}$ ולכל $0<r\in\mathbb{R}$ נסמן:

$$B_r(x):=\{y\in\mathbb{X}\mid d(x,y)<r\}$$
$$\hat{B}_r(x):=\{y\in\mathbb{X}\mid d(x,y)\leq r\}$$
$$S_r(x):=\{y\in\mathbb{X}\mid d(x,y)=r\}$$

$B_r(x)$ ייקרא כדור פתוח ברדיוס r שמרכזו ב-x)או בפשטות סביבה של x(, $\hat{B}_r(x)$ייקרא כדור סגור ברדיוס r שמרכזו ב-x ו-$S_r(x)$ תיקרא ספירה)סְפֵרָה(ברדיוס r שמרכזה בנקודה x.

♣ מהעובדה שלכל $x,y\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $d_1(x,y)\geq d_2(x,y)\geq d_3(x,y)\geq\ldots\geq d_\infty(x,y)$ נובע שמתקיים גם)לכל $x\in\mathbb{R}^n$ ולכל $0<r\in\mathbb{R}$(:

$$B_r^1(x)\subseteq B_r^2(x)\subseteq B_r^3(x)\subseteq\ldots\subseteq B_r^\infty(x)$$

כאשר $B_r^p(x):=\{y\in\mathbb{X}\mid d_p(x,y)<r\}$ לכל $p\in\mathbb{N}$, ו-$B_r^\infty(x):=\{y\in\mathbb{X}\mid d_\infty(x,y)<r\}$.

סימון: תהא $Y\subseteq\mathbb{X}$ לכל $y\in Y$ ולכל $0<r\in\mathbb{R}$ נסמן:

$$B_r^Y(y):=\{z\in Y\mid d_Y(y,z)<r\}$$
$$\hat{B_r^Y}(y):=\{z\in Y\mid d_Y(y,z)\leq r\}$$
$$S_r^Y(y):=\{z\in Y\mid d_Y(y,z)=r\}$$

הגדרה 2.2. תת-קבוצה $Y\subseteq\mathbb{X}$ תיקרא <u>חסומה</u> אם קיימים $x\in X$ ו-$0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$Y\subseteq B_r(x)$.

תזכורת: A^c היא הקבוצה המשלימה של A, כלומר $A^c = \mathbb{X} \setminus A$)כמובן שהסימון תלוי הקשר משום שהוא תלוי בשאלה מיהי $\mathbb{X}$(.

חמש ההגדרות הבאות שונות מאלו שראינו בכיתה אך הן שקולות להן, ולדעתי הן מצביעות באופן ברור יותר על המושגים הרצויים. ההגדרות שראינו בכיתה מופיעות בעמוד הבא.

הגדרה 2.3. נקודות פנימיות, נקודות חיצוניות ונקודות קצה
תהא $A \subseteq \mathbb{X}$ תת-קבוצה, ותהא $x \in \mathbb{X}$ נקודה.

- נאמר ש-x היא נקודה פנימית של A אם קיים $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש-$B_r(x) \subseteq A$.
- נאמר ש-x היא נקודה חיצונית ל-A אם קיים $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש-$B_r(x) \subseteq A^c$.
- נאמר ש-x היא נקודת קצה של A אם לכל $0 < r \in \mathbb{R}$ קיימים $x_1, x_2 \in B_r(x)$ כך ש-$x_1 \in A$ ו-$x_2 \notin A$.

הגדרה 2.4. פנים, חוץ ושפה

- קבוצת הנקודות הפנימיות של תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא הפנים של A ותסומן ב-A° או ב-$\mathrm{Int}(A)$.
- קבוצת הנקודות החיצוניות לתת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא החוץ של A ותסומן ב-$\mathrm{ext}(A)$ **- לא הגדרנו את החוץ בכיתה.**
- קבוצת נקודות הקצה של תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא השפה של A ותסומן ב-∂A.

מסקנה 2.5. לכל $A \subseteq \mathbb{X}$ מתקיים $\mathbb{X} = \mathrm{Int}(A) \uplus \mathrm{ext}(A) \uplus \partial A$.

הגדרה 2.6. פתיחות וסגירות

- נאמר שתת-קבוצה $U \subseteq \mathbb{X}$ היא קבוצה פתוחה אם כל נקודה $x \in U$ היא נקודה פנימית של U.
- נאמר שתת-קבוצה $C \subseteq \mathbb{X}$ היא קבוצה סגורה אם כל נקודה $x \in \mathbb{X} \setminus C$ היא נקודה חיצונית ל-C.

♣ קבוצה יכולה להיות גם פתוחה וגם סגורה, למשל:

- בכל מרחב מטרי, המרחב כולו והקבוצה הריקה הן גם קבוצות פתוחות וגם קבוצות סגורות.
- במרחב מטרי שהמטריקה שלו היא המטריקה הבדידה, כל תתי-הקבוצות הן גם קבוצות פתוחות וגם קבוצות סגורות.

♣ כמובן שיכולות להיות קבוצות שאינן פתוחות ואינן סגורות.

♣ ב-$\mathbb{R}$ ראינו מקטעים מסוגים שונים, להלן החלוקה שלהם לקבוצות פתוחות, סגורות, לא זה ולא זה או גם זה וגם זה:

- הישר כולו הוא קבוצה פתוחה וגם קבוצה סגורה.
- קרן פתוחה היא קבוצה פתוחה, ובהתאמה קרן סגורה היא קבוצה סגורה.
- קטע פתוח הוא קבוצה פתוחה וקטע סגור הוא קבוצה סגורה.
- קטעים הפתוחים מצד אחד וסגורים מצדם השני אינם מהווים קבוצה פתוחה או סגורה.

הגדרה 2.7. קבוצת כל הנקודות החיצוניות לתת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא הסגור של A ותסומן ב-$\overline{A}$ או ב-$\mathrm{Cl}(A)$.

הגדרה 2.8. צפיפות ודלילות

- תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא צפופה אם לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{X}$ מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$.
- תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא דלילה אם לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{X}$ קיימת תת-קבוצה פתוחה $\tilde{U} \subseteq U$ כך ש-$U \cap A = \emptyset$. **לא הגדרנו דלילות בכיתה.**

עד כאן ההגדרות השונות מאלו שראינו בכיתה.

להלן ההגדרות שראינו בכיתה. ההגדרות של נקודה פנימית, נקודה חיצונית ונקודת קצה זהות לאלו שהבאתי לעיל.

הגדרה 2.9. פתיחות וסגירות
תהא $Y \subseteq \mathbb{X}$ תת-קבוצה.

- נאמר ש-Y היא קבוצה פתוחה אם כל נקודה $y \in Y$ היא נקודה פנימית של Y.
- נאמר ש-Y היא קבוצה סגורה אם Y^c היא קבוצה פתוחה.

הגדרה 2.10. פנים וסגור
תהא $Y \subseteq \mathbb{X}$ תת-קבוצה.

- הפנים של Y)מסומן ב-Y°(הוא איחוד כל הקבוצות הפתוחות ב-$\mathbb{X}$ שמוכלות ב-Y.
- הסגור של Y)מסומן ב-$\overline{Y}$(הוא חיתוך כל הקבוצות הסגורות ב-$\mathbb{X}$ שמכילות את Y.
- השפה של Y היא $\partial Y := \bar{Y} \setminus Y^\circ$.
- נאמר ש-Y צפופה ב-$\mathbb{X}$ אם $\overline{Y} = \mathbb{X}$.

♣ הרעיון הוא כמובן לקבל את הקבוצה הפתוחה הכי גדולה שמוכלת ב-Y ואת הקבוצה הסגורה הכי קטנה שמכילה את Y.

עד כאן ההגדרות שראינו בכיתה.

הגדרה 2.11. תהא $A \subseteq \mathbb{X}$ תת-קבוצה, נקודה $x \in \mathbb{X}$ תיקרא נקודת הצטברות של A אם לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש-$a \in B'_\varepsilon(x)$.

♣ נשים לב לדרישה ש-a יהיה שייך **לסביבה מנוקבת** של x.

♣ נקודת שפה אינה בהכרח נקודת הצטברות - היא יכולה להיות נקודה מבודדת, כמובן שכל נקודה פנימית היא נקודת הצטברות ולכן גם תיתכן נקודת הצטברות שאינה נקודת שפה.

סימון: קבוצת נקודות ההצטברות של קבוצה A תסומן ב-A'.

לא הגדרנו נקודת הצטברות בכיתה.

הגדרה 2.12. יהי $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ נאמר שקבוצה $Y \subseteq \mathbb{X}$ היא ε-רשת אם מתקיים:

$$\mathbb{X} = \bigcup_{y \in Y} B_\varepsilon(y)$$

הגדרה 2.13. מרחב חסום לחלוטין
נאמר ש-$(\mathbb{X}, d)$ חסום לחלוטין אם לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיימת קבוצה סופית $Y \subseteq \mathbb{X}$ המהווה ε-רשת.

מסקנה 2.14. כל מרחב מטרי חסום לחלוטין הוא בפרט חסום.

הגדרה 2.15. כיסוי פתוח של קבוצה $Y \subseteq \mathbb{X}$ הוא אוסף קבוצות פתוחות ב-$\mathbb{X}$ כך ש-Y מוכלת באיחוד שלהן.
תהא $Y \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה ויהי U כיסוי פתוח של Y, קבוצה $\tilde{U} \subseteq U$ תיקרא תת-כיסוי של U)עבור Y(, אם Y מוכלת באיחוד של איברי $\tilde{U}$.

הגדרה 2.16. קומפקטיות
קבוצה $K \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא קומפקטית אם לכל כיסוי פתוח שלה יש תת-כיסוי סופי, כמו כן נאמר ש-$(\mathbb{X}, d)$ הוא מרחב קומפקטי אם $\mathbb{X}$ היא קבוצה קומפקטית.

♣ מהגדרה אם $K \subseteq \mathbb{X}$ היא קבוצה קומפקטית אז (K, d_K) הוא מרחב קומפקטי.

את שתי ההגדרות הבאות לא ראינו בכיתה.

הגדרה 2.17. קשירות
קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא קשירה אם לא קיימות שתי קבוצות פתוחות $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{X}$ זרות כך שמתקיים:

$$A = (A \cap U_1) \cup (A \cap U_2) \qquad A \cap U_2 \neq \emptyset \qquad A \cap U_1 \neq \emptyset$$

הגדרה 2.18. רכיב קשירות
תהא $A \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה, תת-קבוצה $C \subseteq A$ תיקרא רכיב קשירות של A אם היא קשירה, ובנוסף לכל $x \in C$ ו-$\tilde{C} \subseteq A$ כך ש-$x \in \tilde{C}$ ו-$\tilde{C}$ קשירה מתקיים $\tilde{C} \subseteq C$.

♣ כלומר לכל $x \in A$ רכיב הקשירות של A ש-x שייכת אליו, הוא תת-הקבוצה הקשירה הגדולה ביותר של A ש-x שייך אליה.

יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב מטרי.

2.2 חסימות

למה 2.19. יהיו $x,y\in\mathbb{X}$ ויהיו $0<r,s\in\mathbb{R}$, מתקיימים ארבעת הפסוקים הבאים:

1. $y\in B_r(x)$ אם"ם $x\in B_r(y)$.
2. $y\in \hat{B}_r(x)$ אם"ם $x\in \hat{B}_r(y)$.
3. אם $y\in B_\varepsilon(x)$ לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ אז $x=y$.
4. אם $d(x,y)+s\le r$ אז $B_s(y)\subseteq B_r(x)$ ו-$B_s(x)\subseteq B_r(y)$.

♣ סעיפים 1 ו-2 נכונים גם עבור ספירות.

טענה 2.20. תהא $Y\subseteq\mathbb{X}$ קבוצה חסומה, לכל $x\in\mathbb{X}$ קיים $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$Y\subseteq B_r(x)$.

למה 2.21. יהי $x\in\mathbb{X}$, כל כדור פתוח שמרכזו ב-x מכיל כדור סגור שמרכזו ב-x.

♣ כמובן שגם כדור סגור מכיל כדור פתוח ($B_r(x)\subseteq\hat{B}_r(x)$), החידוש הוא שגם כדור פתוח מכיל כדור סגור.

למה 2.22. תהא $Y\subseteq\mathbb{X}$ ויהיו $y\in Y$ ו-$0<r\in\mathbb{R}$, מתקיים:

$$B_r^Y(y)=B_r^{\mathbb{X}}(y)\cap Y$$
$$\hat{B}_r^Y(y)=\hat{B}_r^{\mathbb{X}}(y)\cap Y$$
$$S_r^Y(y)=S_r^{\mathbb{X}}(y)\cap Y$$

מסקנה 2.23. תהא $Y \subseteq \mathbb{X}$ ותהא $A \subseteq Y$, A היא קבוצה פתוחה ב-Y)כלומר במרחב המטרי (Y, d_Y)(אם״ם קיימת קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{X}$)פתוחה ב-$\mathbb{X}$(כך ש-$A = U \cap Y$.

♣ מסקנה מיידית היא שהמשפט נכון גם עבור קבוצות סגורות: תהא $Y \subseteq \mathbb{X}$ ותהא $A \subseteq Y$, A היא קבוצה **סגורה** ב-Y)כלומר במרחב המטרי (Y, d_Y)(אם״ם קיימת קבוצה **סגורה** $C \subseteq \mathbb{X}$)סגורה ב-$\mathbb{X}$(כך ש-$A = C \cap Y$.

טענה 2.24. כל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה, וכל כדור סגור הוא קבוצה סגורה.

טענה 2.25. תהא A קבוצה של קבוצות פתוחות ב-$\mathbb{X}$, האיחוד של כל הקבוצות ב-A הוא קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{X}$.

♣ נשים לב לכך שיש כאן כמה אפשרויות:

- A יכולה להיות סופית ואז קיימות $U_1, U_2, \ldots, U_r \subseteq \mathbb{X}$ כך ש-$A = \{U_1, U_2, \ldots, U_r\}$, ואז האיחוד של כל הקבוצות שבה בה הוא הקבוצה:
$$\bigcup_{i=1}^{r} U_i$$
- A יכולה להיות אין-סופית בת-מנייה, כלומר ניתן לסדר את איבריה בסדרה אינסופית: $A = \{U_1, U_2, \ldots\}$, ואז האיחוד של כל הקבוצות שבה בה הוא הקבוצה:
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$
- A יכולה להיות אין-סופית שאינה בת-מנייה, כלומר א״א לסדר את איבריה בסדרה אינסופית, ואז האיחוד של כל הקבוצות שבה בה הוא הקבוצה:
$$\bigcup_{U \in A} U$$

בכל מקרה האיחוד של כל הקבוצות ב-A הוא הקבוצה:
$$\left\{ \; x \in \mathbb{X} \;\middle|\; \exists U \in A : x \in U \; \right\}$$

מסקנה 2.26. כל חיתוך של קבוצות סגורות ב-$\mathbb{X}$ הוא קבוצה סגורה - לא משנה אם מדובר באיחוד סופי, בן-מנייה או אפילו אין-סופי שאינו בן-מנייה.

טענה 2.27. חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

♣ זה לא נכון עבור חיתוך אין-סופי, לדוגמה)ב-$\mathbb{R}$ עם המטריקה האוקלידית(:
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\}$$

מסקנה 2.28. איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.

טענה 2.29. תהא $U \subseteq \mathbb{X}$, U היא קבוצה פתוחה אם״ם ניתן להציג אותה כאיחוד של כדורים פתוחים, כלומר קיימת קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ כך שמתקיים:

$$U = \bigcup_{a \in A} B_{r_a}(a)$$

כאשר $0 < r_a \in \mathbb{R}$ לכל $a \in A$.

טענה 2.30. יהי $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי, לכל $v \in V$ ולכל $0 < r \in \mathbb{R}$ מתקיימים שלושת הפסוקים הבאים:

1. $\overline{B_r(v)} = \hat{B}_r(v)$.
2. $\left(\hat{B}_r(v)\right)^\circ = B_r(v)$.
3. $\partial B_r(v) = \partial \hat{B}_r(v) = S_r(v)$.

♣ טענה זו אינה נכונה במרחב מטרי כללי.

את שלוש הטענות הבאות לא ראינו בכיתה.

טענה 2.31. תהא $A \subseteq \mathbb{X}$.

- הפנים של A (A°) הוא איחוד כל הקבוצות הפתוחות ב-$\mathbb{X}$ שמוכלות ב-A.
- החוץ של A הוא איחוד כל הקבוצות הפתוחות ב-$\mathbb{X}$ שזרות ל-A.
- הסגור של A ($\overline{A}$) הוא חיתוך כל הקבוצות הסגורות ב-$\mathbb{X}$ שמכילות את A.

טענה 2.32. לכל $A \subseteq \mathbb{X}$ מתקיים:

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ \qquad A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$$
$$\partial(A^\circ) \subseteq \partial A \qquad (A^\circ)^\circ = A^\circ$$
$$\partial\left(\overline{A}\right) \subseteq \partial A \qquad \overline{\left(\overline{A}\right)} = \overline{A}$$
$$\mathbb{X} \setminus \overline{A} = (\mathbb{X} \setminus A)^\circ \qquad A^\circ = A \setminus \partial A$$
$$\mathbb{X} \setminus A^\circ = \overline{(\mathbb{X} \setminus A)} \qquad \overline{A} = A \cup \partial A$$

טענה 2.33. תהא $A \subseteq \mathbb{X}$, A צפופה ב-$\mathbb{X}$ אם״ם $\overline{A} = \mathbb{X}$.

עד כאן הטענות שלא ראינו בכיתה.

טענה 2.34. איחוד סופי של קבוצות קומפקטיות הוא קבוצה קומפקטית.

טענה 2.35. כל מרחב מטרי קומפקטי הוא מרחב חסום לחלוטין.

הוכחה. נניח $(\mathbb{X}, d)$ מרחב מטרי שאינו חסום לחלוטין, ויהי $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ כך שלא קיימת קבוצה סופית $Y \subseteq \mathbb{X}$ המהווה ε-רשת, מכאן ש-$(\mathbb{X}, d)$ אינו קומפקטי - לכיסוי הפתוח $\bigcup_{x \in \mathbb{X}} B_\varepsilon(x)$ אין תת-כיסוי סופי. ■

מכאן ועד סוף הפרק מופיעות טענות שלא ראינו בכיתה.

טענה 2.36. כל תת-קבוצה של $\mathbb{X}$ היא איחוד זר של רכיבי הקשירות שלה.

טענה 2.37. רכיבי הקשירות של קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{X}$ הם קבוצות פתוחות.

מסקנה 2.38. כל קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}^k$ ניתנת להצגה כאיחוד סופי או בן-מנייה של קבוצות פתוחות וקשירות.

טענה 2.39. תהא $A \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה קשירה ותהא $B \subseteq A$, אם B פתוחה וסגורה אז $B = A$ או ש-$B = \emptyset$.

הוכחה. נניח ש-B פתוחה וסגורה, מכאן שגם $A \setminus B$ פתוחה וסגורה; כלומר A ניתנת להצגה כאיחוד זר של קבוצות פתוחות ($A = B \cup (A \setminus B)$ ולכן אחת הקבוצות הללו ריקה, וממילא השנייה היא A עצמה. ■

3 סדרות

3.1 הגדרות

כל הסדרות שנדבר עליהן תהיינה סדרות של איברים במרחב המטרי המדובר אלא אם נכתב אחרת.

יהי $(\mathbb{X}, d)$ מרחב מטרי.

הגדרה 3.1. נאמר שסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$[3] היא <u>סדרה חסומה</u> אם קבוצת איבריה כזו.

הגדרה 3.2. גבול של סדרה

יהי $(\mathbb{X}, d)$ מרחב מטרי, נאמר ש-$x \in \mathbb{X}$ הוא <u>גבול של סדרה</u> $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ אם $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$,
או בשפה שבה דיברנו עד כה: לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $x_n \in B_\varepsilon(x)$.
סדרה שיש לה גבול תיקרא <u>מתכנסת</u> ונאמר שהיא מתכנסת אליו; גבול של סדרה מתכנסת הוא יחיד ולכן מוצדק לדבר על <u>הגבול</u> של סדרה מתכנסת $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ולכתוב:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

♣ כמו שכבר הזכרנו העובדה שטענה מתקיימת עבור מטריקה אחת אינה אומרת שהיא מתקיימת לכל מטריקה, כך למשל כדי שסדרה ב-$\mathbb{R}$ תתכנס לפי המטריקה הבדידה היא צריכה להיות קבועה ממקום מסוים ואילך, למרות שאנחנו יודעים שע"פ המטריקה האוקלידית ישנן סדרות מתכנסות שאינן קבועות ממקום מסוים ואילך.

♣ התכנסות של סדרת פונקציות $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ב-$C[a,b]$ היא מה שקראנו לו באינפי' 2 התכנסות במידה שווה של סדרת פונקציות.

הגדרה 3.3. תהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה; נאמר שסדרה $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ היא <u>תת-סדרה</u> של $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, אם קיימת סדרה $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ עולה ממש שכל איבריה טבעיים (סדרת אינדקסים) כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $y_k = x_{n_k}$.

הגדרה 3.4. תהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה; נאמר ש-$x \in \mathbb{R}$ הוא <u>גבול חלקי</u> של $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ אם יש ל-$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ תת-סדרה ש-x הוא הגבול שלה,
כלומר קיימת סדרה $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ עולה ממש שכל איבריה טבעיים (סדרת אינדקסים) כך ש-$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

הגדרה 3.5. נאמר שסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא <u>סדרת קושי</u> אם לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

הגדרה 3.6. קומפקטיות סדרתית

יהי $(\mathbb{X}, d)$ מרחב מטרי, נאמר שקבוצה $K \subseteq \mathbb{X}$ היא קבוצה <u>קומפקטית סדרתית</u> (להלן גם: <u>ק"ס</u>), אם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ שכל איבריה ב-K יש תת-סדרה מתכנסת שגבולה הוא איבר ב-K. כמו כן, נאמר ש-$(\mathbb{X}, d)$ הוא <u>מרחב קומפקטי סדרתית</u> אם $\mathbb{X}$ היא קבוצה קומפקטית סדרתית.

♣ מהניסוח "קומפקטיות סדרתית" ניתן ללמוד שיש משמעות למושג "קומפקטיות" סתם, אנחנו נגדיר אותו בהמשך ונראה שבמרחבים מטריים המושגים הללו שקולים.

♣ מהגדרה אם $K \subseteq \mathbb{X}$ היא קבוצה קומפקטית סדרתית אז (K, d_K) הוא מרחב קומפקטי סדרתי.

[3] תמי כתבה סדרות בצורה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ אך אני אמשיך לדבוק בסימון שראינו עד כה.

יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב מטרי.

משפט 3.7. כל סדרה מתכנסת היא סדרה חסומה.

למעשה לא ראינו את המשפט הזה בכיתה אך הוא טריוויאלי.

משפט 3.8. תהא $C\subseteq\mathbb{X}$ תת-קבוצה, C היא קבוצה סגורה אס"ם לכל סדרה מתכנסת $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ שכל איבריה ב-C מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}x_n\in C$$

♣ זו הסיבה לכך שקבוצה **סגורה** נקראת כך - היא **סגורה** לגבולות.

הוכחה.

- $\Leftarrow$

נניח ש-C סגורה ותהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת, מהגדרת הגבול ומהגדרת נקודה חיצונית נובע ש-$\lim_{n\to\infty}x_n$ אינה נקודה חיצונית ל-C, ולכן מהיות C סגורה נובע ש-$\lim_{n\to\infty}x_n\in C$.

- $\Rightarrow$

נניח שלכל סדרה מתכנסת שכל איבריה ב-C גם גבולה שייך ל-C, מהגדרת הגבול ומהגדרת נקודה חיצונית נובע שכל $x\in\mathbb{X}\backslash C$ היא נקודה חיצונית ל-C, כלומר C סגורה.

■

מסקנה 3.9. תהא $A\subseteq\mathbb{X}$, הסגור של A ($\bar{A}$) הוא קבוצת כל הגבולות של סדרות מתכנסות שכל איבריהן ב-A.

משפט 3.10. משפט הירושה
תהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה, אם $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$x\in\mathbb{X}$ אז גם כל תתי-הסדרות שלה מתכנסות ל-x; כמו כן, אם $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה אז גם כל תתי-הסדרות שלה חסומות.

טענה 3.11. תהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי, אם יש ל-$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ גבול חלקי אז היא מתכנסת.

הטענה האחרונה לא נלמדה בכיתה, אך היא די טריוויאלית, ואזדקק לה כדי להוכיח את השקילות בין קומפקטיות לקומפקטיות סדרתית מבלי להשתמש במושג השלמות.

הוכחה. נניח של-$(x_n)_{n=1}^{\infty}$יש גבול חלקי, ויהיו $(n_k)_{n=1}^{\infty}$ סדרת אינדקסים עולה ממש ו-$x\in\mathbb{X}$ כך ש-$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x$.
יהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$, ויהיו $K,N\in\mathbb{N}$ כך שמתקיים: $d\left(x_{n_k},x\right)<\frac{\varepsilon}{2}$ לכל $K<k\in\mathbb{N}$, $d\left(x_n,x_m\right)<\frac{\varepsilon}{2}$ לכל $N<n,m\in\mathbb{N}$, ו-$N>n_K$.
מכאן שלכל $N<n\in\mathbb{N}$ ולכל $K<k\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$d\left(x_n,x\right)\leq d\left(x_n,x_{n_k}\right)+d\left(x_{n_k},x\right)<\varepsilon$$

כלומר $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת. ■

משפט 3.12. יהיו $(\mathbb{X}_1,d_1),(\mathbb{X}_2,d_2)\ldots,(\mathbb{X}_k,d_k)$ מרחבים מטריים, ונסמן $\mathbb{X}:=\mathbb{X}_1\times\mathbb{X}_2\times\ldots\times\mathbb{X}_k$.
תהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-$\mathbb{X}$, ונסמן את הקואורדינטה ה-i של x_n ב-x_n^i (לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $k\geq i\in\mathbb{N}$).
$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת (ב-$\mathbb{X}$) אס"ם לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$ הסדרה $\left(x_n^i\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת (ב-$\mathbb{X}_i$), ובמקרה כזה מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\begin{bmatrix}\lim\limits_{n\to\infty}x_n^1\\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n^2\\ \vdots\\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n^k\end{bmatrix}$$

♣ כזכור, הסכמנו שטענות המדברות על מרחבי מכפלה מתייחסות למטריקות $d,\rho:\mathbb{X}\times\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ המוגדרות ע״י (לכל $x,y\in\mathbb{X}$):

$$d(x,y):\sum_{i=1}^{k}d_i(x_i,y_i)$$
$$\rho(x,y):=\max\{d_i(x_i,y_i)\mid k\geq i\in\mathbb{N}\}$$

את המשפט האחרון למדנו בכיתה בנוסח חלש יותר: רק עבור סדרות של נקודות ב-$\mathbb{R}^k$, אבל ההוכחה זהה לחלוטין לכל מרחב מכפלה עם מטריקה מהצורה הנ״ל.

הוכחה.

- $\Leftarrow$

נניח ש-$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $x\in\mathbb{X}$. לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$d_i\left(x_n^i,x_i\right)\leq\rho(x_n,x)\leq d(x_n,x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

ומכאן ש-$\lim_{n\to\infty}x_n^i=x_i$.

- $\Rightarrow$

נניח שלכל $k\geq i\in\mathbb{N}$ הסדרה $\left(x_n^i\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, ונסמן:

$$y:=\begin{bmatrix}\lim\limits_{n\to\infty}x_n^1\\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n^2\\ \vdots\\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n^k\end{bmatrix}$$

מאריתמטיקה של גבולות נובע כי:

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}d_i(x_i,y_i)=\sum_{i=1}^{k}\lim_{n\to\infty}d_i\left(x_n^i,y_n^i\right)=0$$

ולכן ממשפט הכריך גם $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$[4].

■

[4] העובדה שהגבול תופס גם עבור ρ נובע מהאי-שוויון שבכיוון הראשון בהוכחה.

טענה 3.13. כל מרחב מטרי קומפקטי סדרתית הוא מרחב חסום לחלוטין.

הוכחה. נניח ש-$(\mathbb{X},d)$ אינו חסום לחלוטין, ויהי $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ כך שלא קיימת קבוצה סופית $Y\subseteq\mathbb{X}$ המהווה ε-רשת, מכאן ש-$(\mathbb{X},d)$ אינו קומפקטי - לכיסוי הפתוח $\bigcup_{x\in\mathbb{X}}B_\varepsilon(x)$ אין תת-כיסוי סופי.

תהא $(x_n)_{n=1}^\infty$ סדרת נקודות ב-$\mathbb{X}$ המוגדרת באופן הבא: לכל $n\in\mathbb{N}$ יהי x_n כך ש-$x_n\notin B_\varepsilon(x_k)$ לכל $n>k\in\mathbb{N}$, מהגדרת ε נובע שאכן מתקיים:

$$\mathbb{X}\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}B_\varepsilon(x_k)$$

ולכן קיים x_n כזה. מהגדרת $(x_n)_{n=1}^\infty$ לכל $L\in\mathbb{X}$ ולכל $N\in\mathbb{N}$ מתקיים $d(x_{N+1},L)+d(x_{N+2},L)\geq d(x_{N+1},x_{N+2})>\varepsilon$ ולכן $\max\{d(x_{N+1},L),d(x_{N+2},L)\}>\frac{\varepsilon}{2}$, מכאן ש-$(\mathbb{X},d)$ אינו קומפקטי סדרתית. ■

משפט 3.14. מרחב מטרי הוא קומפקטי אם"ם הוא קומפקטי סדרתית.

הוכחה.

- $\Leftarrow$

נניח ש-$(\mathbb{X},d)$ קומפקטי, ותהא $(x_n)_{n=1}^\infty$ סדרת נקודות ב-$\mathbb{X}$.

- נסמן $C_0:=\mathbb{X}$ ותהא $(C_k)_{k=1}^\infty$ סדרת קבוצות סגורות המוגדרת באופן הבא:
מטענה 2.35 נובע שלכל $k\in\mathbb{N}$ קיימת קבוצה סופית $A_k\subseteq\mathbb{X}$ המהווה $\frac{1}{k}$-רשת, תהא A_k כנ"ל ונסמן $Y_k:=\left\{y\in A_k\mid B_{\frac{1}{k}}(y)\cap C_{k-1}\neq\emptyset\right\}$.
ע"פ השלב הקודם יש ב-C_{k-1} אין-סוף מאיברי $(x_n)_{n=1}^\infty$ ובפרט C_{k-1} אינה ריקה, מכאן ש-Y_k אינה ריקה ויתרה מזאת קיים $y\in Y_k$ כך שיש ב-$B_{\frac{1}{k}}(y)\cap C_{k-1}$ אין-סוף מאיברי $(x_n)_{n=1}^\infty$; נסמן עבור y כזה $C_k:=\hat{B_{\frac{1}{k}}}(y)\cap C_{k-1}$, ושוב C_k היא קבוצה סגורה ויש בה אין-סוף מאיברי $(x_n)_{n=1}^\infty$ ובפרט אינה ריקה.
- נניח בשלילה ש-$\bigcap_{k=1}^\infty C_k=\emptyset$, מכאן ש-$\bigcup_{k=1}^\infty(\mathbb{X}\setminus C_k)=\mathbb{X}$ - זהו כיסוי פתוח של $\mathbb{X}$ ולכן מהקומפקטיות של $\mathbb{X}$ נובע שיש לו תת-כיסוי סופי, מהגדרת $(C_k)_{k=0}^\infty$ נובע כי $(\mathbb{X}\setminus C_k)\subseteq(\mathbb{X}\setminus C_{k+1})$ לכל $k\in\mathbb{N}_0$ ולכן קיים $k\in\mathbb{N}_0$ כך ש-$\mathbb{X}\setminus C_k=\mathbb{X}$ בסתירה לכך ש-$C_k\neq\emptyset$ לכל $k\in\mathbb{N}_0$; מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה וקיים $c\in\bigcap_{k=1}^\infty C_k$, א"כ יהי c כנ"ל.
- נסמן $n_0:=0$ ותהא $(n_k)_{k=1}^\infty$ סדרת אינדקסים עולה ממש המוגדרת באופן הבא: לכל $k\in\mathbb{N}$ יש ב-C_k אין-סוף מאיברי $(x_n)_{n=1}^\infty$, בפרט קיים $n_{k-1}<n\in\mathbb{N}$ כך ש-$x_n\in C_k$, נסמן עבור n כזה $n_k:=n$.
לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $x_{n_k}\in C_k\subseteq\hat{B_{\frac{1}{k}}}(y)$ עבור $y\in\mathbb{X}$ כלשהו ולכן $d(x_{n_k},c)\leq\frac{2}{k}<\frac{3}{k}$, מכאן ש-$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=c$.

- $\Rightarrow$

נניח ש-$(\mathbb{X},d)$ קומפקטי סדרתית, נניח בשלילה שהוא אינו קומפקטי, ויהי A כיסוי פתוח של $\mathbb{X}$ כך שאין ל-A תת-כיסוי סופי.

- נסמן $B_0:=\mathbb{X}$ ותהא $(B_n)_{n=1}^\infty$ סדרת כדורים המוגדרת באופן הבא:
מהטענה הקודמת (3.13) נובע שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת קבוצה סופית $S_n\subseteq\mathbb{X}$ המהווה $\frac{1}{n}$-רשת, תהא S_k כנ"ל ונסמן $T_n:=\left\{y\in S_n\mid B_{\frac{1}{n}}(y)\cap B_{n-1}\neq\emptyset\right\}$.
ע"פ השלב הקודם B_{n-1} היא קבוצה פתוחה ואין ל-A תת-כיסוי סופי של B_{n-1} ובפרט B_{n-1} אינה ריקה, מכאן ש-T_n אינה ריקה ויתרה מזאת קיים $y\in T_n$ כך שאין ל-A תת-כיסוי סופי של $B_{\frac{1}{n}}(y)\cap B_{n-1}$; עבור y כזה נסמן $B_n:=B_{\frac{1}{n}}(y)\cap B_{n-1}$, ושוב B_n היא קבוצה פתוחה ואין ל-A תת-כיסוי סופי שלה.
- תהא $(y_n)_{n=1}^\infty$ סדרה כך ש-$y_n\in B_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$, מהגדרת $(B_n)_{n=1}^\infty$ נובע ש-$B_n\subseteq B_{n-1}$ ו-$d(a,b)<\frac{2}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $a,b\in B_n$. מכאן שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $d(y_n,y_m)<\frac{2}{N}<\varepsilon$, כלומר $(y_n)_{n=1}^\infty$ היא סדרת קושי; מהיות $(\mathbb{X},d)$ קומפקטי סדרתית ומטענה 3.11 נובע ש-$(y_n)_{n=1}^\infty$ היא סדרה מתכנסת.

– נסמן $l := \lim_{n\to\infty} y_n$, תהא $U \in A$ כך ש-$l \in U$, ותהא $0 < \delta \in \mathbb{R}$ כך ש-$B_\delta(l) \subseteq U$. יהי $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $y_n \in B_{\frac{\delta}{2}}(l)$ ו-$\frac{2}{N+1} < \frac{\delta}{2}$, מכאן שלכל $z \in B_{N+1}$ מתקיים:

$$d(z,l) \le d(z,y_{N+1}) + d(y_{N+1}) < \frac{2}{N+1} + \frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

א"כ $B_{N+1} \subseteq B_\delta(l) \subseteq U$ בסתירה להגדרת B_{N+1} כך שאין ל-A תת-כיסוי סופי שלה; מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב קומפקטי.

■

♣ מעתה נפסיק להשתמש במונח "קומפקטי סדרתית" ובכל מקום נכתוב "קומפקטי" בלבד.

מסקנה 3.15. מרחב מכפלה של מרחבים קומפקטיים גם הוא מרחב קומפקטי.

משפט 3.16. כל קבוצה קומפקטית $K \subseteq \mathbb{X}$ היא סגורה וחסומה.

♣ הכיוון ההפוך אינו נכון בהכרח.

הוכחה. החסימות נובעת מלמה 2.35, והסגירות נובעת ממשפט 3.8. ■

משפט 3.17. קבוצה $K \subseteq \mathbb{R}^m$ היא קבוצה קומפקטית אם"ם היא סגורה וחסומה.

הוכחה. את הגרירה מימין לשמאל הוכחנו במשפט הקודם (3.16).
באינפי' 1 ראינו שלכל שתי סדרות חסומות $(a_n)_{n=1}^\infty$ ו-$(b_n)_{n=1}^\infty$ של מספרים ממשיים, קיימת סדרת אינדקסים עולה ממש $(n_k)_{k=1}^\infty$ כך ש-$(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ ו-$(b_{n_k})_{k=1}^\infty$ מתכנסות; כלומר ניתן לסנכרן את האינדקסים של תתי הסדרות המתכנסות שמבטיח משפט בולצאנו-ויירשטראס, ובאותו האופן ניתן לסנכרן את האינדקסים של כל m סדרות. בהינתן קבוצה סגורה וחסומה $K \subseteq \mathbb{R}^m$ וסדרת נקודות $(x_n)_{n=1}^\infty$ ב-K נקבל ש-$\left(x_n^i\right)_{n=1}^\infty$ היא סדרה חסומה לכל $m \ge i \in \mathbb{N}$, ולכן קיימת סדרת אינדקסים עולה ממש $(n_k)_{k=1}^\infty$ כך ש-$\left(x_{n_k}^i\right)_{k=1}^\infty$ מתכנסת לכל $m \ge i \in \mathbb{N}$. ממשפט 3.12 נובע שעבור $(n_k)_{k=1}^\infty$ כזו הסדרה $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ מתכנסת, ומהסגירות של K נקבל שגבולה שייך ל-K (משפט 3.8). ■

טענה 3.18. אם $(\mathbb{X},d)$ קומפקטי אז כל קבוצה סגורה $C \subseteq \mathbb{X}$ היא קבוצה קומפקטית.

הוכחה. תהא $C \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה סגורה ותהא $(x_n)_{n=1}^\infty$ סדרת נקודות ב-C, מהקומפקטיות של $(\mathbb{X},d)$ נובע של-$(x_n)_{n=1}^\infty$ יש תת-סדרה מתכנסת, ומהסגירות של C נובע שגבולה שייך ל-C. ■

טענה 3.19. נניח ש-$(\mathbb{X},d)$ קומפקטי, ותהא $(x_n)_{n=1}^\infty$ סדרת נקודות ב-$\mathbb{X}$.
$(x_n)_{n=1}^\infty$ מתכנסת אם"ם יש לה גבול חלקי יחיד.

לא למדנו את הטענה בכיתה אך היא טריוויאלית, ואזדקק לה כדי להוכיח את טענה 4.5.

4 פונקציות

4.1 הגדרות

יהיו $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ ו-$(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ מרחבים מטריים.

הגדרה 4.1. סביבה מנוקבת
לכל $x \in \mathbb{X}$ ולכל $0 < r \in \mathbb{R}$ נסמן $B'_r(x) := B_r(x) \setminus \{x\}$ - זוהי הסביבה המנוקבת של x ברדיוס r.

לא הגדרנו בכיתה סביבה מנוקבת.

הגדרה 4.2. גבול של פונקציה בנקודה
תהא $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ פונקציה מוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה $a \in \mathbb{X}$, נאמר ש-$L \in \mathbb{Y}$ הוא גבול של f בנקודה a אם לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיימת $0 < \delta \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{X}$ המקיים $d_{\mathbb{X}}(a, x) < \delta$ מתקיים $d_{\mathbb{Y}}(L, f(x)) < \varepsilon$.
גבול של פונקציה בנקודה הוא יחיד)אם הוא קיים(, ולכן מוצדק לדבר על הגבול של f בנקודה a ולסמן:

$$\lim_{x \to a} f(x) := L, \;\; f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$$

תהא $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ פונקציה, נאמר ש-f חסומה אם $\mathrm{Im} f$ חסומה.

הגדרה 4.3. תהא $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ פונקציה ותהא $A \subseteq \mathbb{X}$, נאמר ש-f חסומה ב-A אם הקבוצה $f(A)$ חסומה.

הגדרה 4.4. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה $x \in \mathbb{X}$, נאמר ש-f חסומה מקומית ב-x אם קיימת סביבה מנוקבת U של x כך ש-f חסומה ב-U.

הגדרה 4.5. רציפות של פונקציה בנקודה
תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה מוגדרת בסביבה של נקודה $a\in\mathbb{X}$, נאמר ש-f רציפה בנקודה $a\in\mathbb{X}$ אם מתקיים $f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$.
כלומר: לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in\mathbb{X}$ המקיים $d_{\mathbb{X}}(a,x)<\delta$ מתקיים $d_{\mathbb{Y}}(f(a),f(x))<\varepsilon$.
כמו כן נאמר ש-f רציפה אם היא רציפה בכל נקודה ב-$\mathbb{X}$.

♣ ניתן להגדיר גם כך: f רציפה ב-x אם לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $z\in B_\delta(x)$ מתקיים $f(z)\in B_\varepsilon(f(x))$, כלומר $f(B_\delta(x))\subseteq B_\varepsilon(f(x))$.

♣ נשים לב: f אינה רציפה בנקודה a אם לא מתקיים $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ מכל סיבה שהיא, כולל מהסיבה ש-$f(a)$ אינו קיים.

♣ את ההערה הקודמת שמעתי מפיו של רז[5] במו אוזניי אולם ניתן גם לומר שנקודה שבה הפונקציה אינה מוגדרת אינה נקודת רציפות וגם אינה נקודת אי-רציפות, היא לא שייכת לעניין בכלל; אם זכרוני אינו מטעני שמענו מיורם[6] אמירה ברוח זו.

הגדרה 4.6. תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה, נקודה $x\in\mathbb{X}$ תיקרא נקודת אי-רציפות סליקה של f אם ל-f יש גבול בנקודה זו אך אינו שווה לערך שמקבלת f בנקודה זו)כולל המקרה שבו f אינה מוגדרת בנקודה(.

הגדרה 4.7. רציפות במידה שווה
תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה, נאמר ש-f רציפה במידה שווה)להלן גם: רציפה במ"ש(אם לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x_1,x_2\in\mathbb{X}$ כך ש-$d_{\mathbb{X}}(x_1,x_2)<\delta$ מתקיים $d_{\mathbb{Y}}(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$.

מסקנה 4.8. אם פונקציה $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ היא רציפה במידה שווה אז היא בפרט רציפה.

הגדרה 4.9. רציפות ליפשיץ[7]
תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה, נאמר ש-f רציפה ליפשיץ אם קיים $0\le K\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x_1,x_2\in\mathbb{X}$ מתקיים $d_{\mathbb{Y}}(f(x_1),f(x_2))\le K\cdot d_{\mathbb{X}}(x_1,x_2)$, במקרה כזה K ייקרא קבוע ליפשיץ של f[8].
מסילה היא פונקציה רציפה מהצורה $\gamma:I\to\mathbb{X}$ כאשר $I\subseteq\mathbb{R}$ הוא מקטע, התמונה של מסילה γ מסומנת ב-γ^*.

הגדרה 4.10. מסילה פשוטה ומסילה סגורה
יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$ ותהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{X}$ מסילה.

- נאמר ש-γ פשוטה אם היא חח"ע.
- נאמר ש-γ סגורה אם $\gamma(a)=\gamma(b)$.
- נאמר ש-γ פשוטה וסגורה אם γ סגורה ובנוסף לכל $x,y\in(a,b)$ כך ש-$x\neq y$ מתקיים $\gamma(x)\neq\gamma(y)$.

הגדרה 4.11. נאמר שקבוצה $Y\subseteq\mathbb{X}$ היא קשירה מסילתית אם לכל $y_1,y_2\in Y$ קיימת מסילה $\gamma:[0,1]\to Y$ כך ש-$\gamma(0)=x$ ו-$\gamma(1)=y$.

♣ בקובץ הטענות אנחנו נראה שכל קבוצה קישרה מסילתית היא קבוצה קשירה, אך ההפך אינו נכון: קיימות קבוצות קשירות שאינן קשירות מסילתית, ראו כאן דוגמה לכך.

---

[5] רז קופרמן היה המרצה שלי באינפי' 1.
[6] יורם לסט היה המרצה שלי באינפי' 2.
[7] ערך בוויקיפדיה: ליפשיץ רודולף.
[8] אין זה הקבוע של f בה"א הידיעה אלא יש רבים כאלה, רק אם קיים אחד מינימלי ניתן לייחד אותו בתור הקבוע של f.

יהיו $(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$ ו-$(\mathbb{Y},d_{\mathbb{Y}})$ מרחבים מטריים.

טענה 4.12. תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה $a\in\mathbb{X}$; אם הגבול $\lim_{x\to a}f(x)$ קיים אז f חסומה מקומית ב-x.

משפט 4.13. אפיון היינה לגבול של פונקציה בנקודה ולרציפות
תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה.

- $L\in\mathbb{Y}$ הוא הגבול של f בנקודה $x\in\mathbb{X}$ אם״ם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (ב-$\mathbb{X}$) המתכנסת ל-x מתקיים:
$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=L$$
- f רציפה בנקודה $x\in\mathbb{X}$ אם״ם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (ב-$\mathbb{X}$) המתכנסת ל-x מתקיים:
$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$$

לא ראינו בכיתה את המסקנה והמשפט הבאים.

מסקנה 4.14. תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת U של נקודה $x\in\mathbb{X}$.
ל-f יש גבול ב-x אם״ם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-x שכל איבריה ב-U הסדרה $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת.

משפט 4.15. תנאי קושי לגבול של פונקציה בנקודה
תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה $a\in\mathbb{X}$. תנאי הכרחי ומספיק לקיום הגבול $\lim_{x\to a}f(a)$ הוא שלכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x_1,x_2\in B'_{\delta}(a)$ מתקיים $d_{\mathbb{Y}}(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$.

טענה 4.16. תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה רציפה, לכל קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ גם הפונקציה $f|_A:A\to\mathbb{Y}$ היא פונקציה רציפה ביחס למרחב המטרי (A,d_A).

משפט 4.17. יהיו $(\mathbb{Y}_1,d_1),(\mathbb{Y}_2,d_2)\ldots,(\mathbb{Y}_k,d_k)$ מרחבים מטריים, נסמן $\mathbb{Y}:=\mathbb{Y}_1\times\mathbb{Y}_2\times\ldots\times\mathbb{Y}_n$ ותהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה.
כמו כן לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$ תהא $f_i:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}_i$ פונקציה, כך שלכל $x\in\mathbb{X}$ מתקיים:
$$f(x)=\begin{bmatrix}f_1(x)\\f_2(x)\\\vdots\\f_n(x)\end{bmatrix}$$
ל-f יש גבול בנקודה $a\in\mathbb{X}$ אם״ם ל-f_i יש גבול ב-a לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$, ובמקרה כזה מתקיים:
$$\lim_{x\to a}f(x)=\begin{bmatrix}\lim_{x\to a}f_1(x)\\\lim_{x\to a}f_2(x)\\\vdots\\\lim_{x\to a}f_k(x)\end{bmatrix}$$
כמו כן f רציפה בנקודה $x\in\mathbb{X}$ אם״ם f_i רציפה ב-x לכל $k\geq i\in\mathbb{N}$.

♣ המשפט נובע ישירות ממשפט 3.12 ואפיון היינה. **מסיבה זו למדנו אותו בכיתה רק עבור פונקציה מהצורה $f:\mathbb{X}\to\mathbb{R}^k$.**

משפט 4.18. \ותהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה, f רציפה אם״ם לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{Y}$ הקבוצה $f^{-1}(U)$ גם היא פתוחה.

הוכחה.

- $\Leftarrow$

נניח ש-f רציפה ותהא $U\subseteq\mathbb{Y}$ קבוצה פתוחה. תהא $x\in f^{-1}(U)$ נקודה, מהגדרה מתקיים $f(x)\in U$ ולכן מהיות U

פתוחה נובע שקיים $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_\varepsilon(f(x))\subseteq U$, יהי ε כנ"ל.
תהא $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x'\in B_\delta(x)$ מתקיים $f(x')\in B_\varepsilon(f(x))\subseteq U$, מכאן שלכל $x'\in B_\delta(x)$ מתקיים $x'\in f^{-1}(U)$, כלומר $B_\delta(x)\subseteq f^{-1}(U)$ ו-x היא נקודה פנימית של $f^{-1}(U)$.
x הנ"ל הייתה שרירותית ולכן כל נקודה ב-$f^{-1}(U)$ היא נקודה פנימית, כלומר $f^{-1}(U)$ פתוחה.

- $\Rightarrow$

נניח שלכל קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{Y}$ הקבוצה $f^{-1}(U)$ גם היא פתוחה. מכאן שלכל נקודה $x\in\mathbb{X}$ ולכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ הקבוצה $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ היא קבוצה פתוחה, כלומר קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_\delta(x)\subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. מכאן שלכל נקודה $x\in\mathbb{X}$ ולכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x'\in B_\delta(x)$ מתקיים $f(x')\in B_\varepsilon(f(x))$, וא"כ f רציפה.

■

משפט 4.19. משפט ההצבה בגבולות

יהיו $(\mathbb{X}_1,d_1)$, $(\mathbb{X}_2,d_2)$ ו-$(\mathbb{X}_3,d_3)$ מרחבים מטריים, תהיינה $f:\mathbb{X}_1\to\mathbb{X}_2$ ו-$g:\mathbb{X}_2\to\mathbb{X}_3$ שתי פונקציות, ותהא $a\in\mathbb{X}_1$ נקודה.

- נניח של-f יש גבול ב-a ונסמן $l:=\lim_{x\to a}f(x)$, ונניח של-g יש גבול ב-l ונסמן $m:=\lim_{y\to l}g(y)$.
אם קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך שלכל $a\neq x\in B_\delta(a)$ מתקיים $f(x)\neq l$, אז ל-$g\circ f$ יש גבול ב-a והוא m.
- אם f רציפה ב-a ו-g רציפה ב-$f(a)$ אז $g\circ f$ רציפה ב-a.

בכיתה ראינו רק שהרכבה של שתי פונקציות רציפות היא רציפה, ובנוסף לא קראנו למשפט הזה "משפט ההצבה בגבולות".

מסקנה 4.20. תהיינה $(x_n)_{n=1}^\infty$ ו-$(y_n)_{n=1}^\infty$ סדרות מתכנסות לגבולות $x\in\mathbb{X}$ ו-$y\in\mathbb{X}$ בהתאמה, מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=d(x,y)$$

מסקנה 4.21. אריתמטיקה של גבולות ושל רציפות

תהיינה $f,g:\mathbb{X}\to\mathbb{C}$ פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של נקודה $a\in\mathbb{X}$, כך שהגבולות הבאים קיימים:

$$l:=\lim_{x\to a}f(x)\,,\quad m:=\lim_{x\to a}g(x)$$

מתקיימים כל הפסוקים הבאים:

1. $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=l+m$.
2. $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x)=l\cdot m$.
3. אם $m\neq 0$ אז $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{m}$.
4. אם $m\neq 0$ אז $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{m}$.

כמו כן אם f ו-g רציפות ב-a אז גם $f+g$ ו-$f\cdot g$ רציפות ב-a, ואם)בנוסף($g(a)\neq 0$ אז $\frac{1}{g}$ ו-$\frac{f}{g}$ רציפות ב-a.

משפט 4.22. כלל אפסה וחסומה

תהיינה $f,g:\mathbb{X}\to\mathbb{C}$ פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של נקודה $a\in\mathbb{X}$, אם $\lim_{x\to a}f(x)=0$ וגם g חסומה מקומית ב-a אז $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x)=0$.

משפט 4.23. משפט ערך הביניים

תהא $A\subseteq\mathbb{X}$ קבוצה קשירה מסילתית, ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה; לכל $a,b\in A$ כך ש-$f(a)\leq f(b)$ ולכל $y\in[f(a),f(b)]$ קיים $c\in A$ כך ש-$f(c)=y$.

הוכחה. יהיו $a,b\in A$ כך ש-$f(a)\leq f(b)$, תהא $\gamma:[0,1]\to A$ מסילה כך ש-$\gamma(0)=a$ ו-$\gamma(1)=b$.
ממשפט ההצבה בגבולות לפונקציות רציפות)**המסקנה האחרונה**(נובע ש-$f\circ\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה, וממשפט ערך הביניים)אינפי' 1(נובע שלכל $y\in[f(\gamma(0)),f(\gamma(1))]=[f(a),f(b)]$ קיים $t\in[0,1]$ כך ש-$f(\gamma(t))=y$, כלומר קיים $c\in A$ כך ש-$f(c)=y$. ■

משפט 4.24. עיקרון המקסימום והמינימום של ויירשטראס
נניח ש-$(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ קומפקטי, ותהא $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ פונקציה; אם f רציפה אז היא מקבלת מקסימום ומינימום)כלומר ל-$\mathrm{Im} f$ יש מקסימום ומינימום(.

משפט 4.25. תהא $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ פונקציה רציפה, לכל קבוצה קומפקטית $K \subseteq \mathbb{X}$ גם $f(K)$ היא קבוצה קומפקטית.

הוכחה. תהא $K \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה קומפקטית, תהא $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-$f(K)$, ותהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-K כך ש-$f(x_n) = y_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
מהיות K קומפקטי נובע שקיימת סדרת אינדקסים עולה ממש $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך ש-$(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול ב-K, וע״פ אפיון היינה לרציפות מתקיים:

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) \in f(K)$$

כלומר ל-$(y_n)_{n=1}^{\infty}$ יש תת-סדרה המתכנסת לגבול ב-$f(K)$.
$(y_n)_{n=1}^{\infty}$ הנ״ל הייתה שרירותית ולכן הנ״ל נכון לכל סדרה ב-$f(K)$, וא״כ $f(K)$ היא קבוצה קומפקטית. ■

מסקנה 4.26. נניח ש-$(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ קומפקטי, ותהא $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ פונקציה רציפה; כל קבוצה סגורה $C \subseteq \mathbb{X}$ היא קומפקטית)טענה 3.18(, וגם $f(C)$ היא קבוצה קומפקטית.

משפט 4.27. משפט קנטור[9]
נניח ש-$(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ קומפקטי, ותהא $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ פונקציה; אם f רציפה אז היא גם רציפה במידה שווה.

משפט 4.28. תנאי ליפשיץ[10]
יהיו $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ ו-$(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ מרחבים מטריים, ותהא $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ פונקציה; אם f רציפה ליפשיץ אז היא גם רציפה במידה שווה.

משפט 4.29. יהיו $(V, \|\cdot\|_V)$ ו-$(W, \|\cdot\|_W)$ מרחבים נורמיים מעל אותו שדה)$\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$(, ותהא $T : V \to W$ העתקה ליניארית.
אם הנורמה האופרטורית של T מוגדרת)בפרט אם V נ״ס(, אז T היא פונקציה רציפה ליפשיץ, ולכן גם רציפה במידה שווה.

[9] ערך בוויקיפדיה: גאורג קנטור.
[10] ערך בוויקיפדיה: רודולף ליפשיץ.

5 שקילויות בין מרחבים מטריים

5.1 הגדרות

הגדרה 5.1. יהיו $(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$ ו-$(\mathbb{Y},d_{\mathbb{Y}})$ מרחבים מטריים, פונקציה $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ חח״ע ועל)הפיכה(תיקרא:

1. <u>הומיאומורפיזם</u> אם היא וההופכית שלה רציפות[11]; במקרה כזה נאמר ש-$\mathbb{X}$ ו-$\mathbb{Y}$ <u>הומיאומורפיים</u>.
2. <u>שקילות</u> אם קיימים $0<C,\tilde{C}\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x_1,x_2\in X$ מתקיים:
$$C\cdot d_{\mathbb{X}}\left(x_1,x_2\right)\leq d_{\mathbb{Y}}\left(f\left(x_1\right),f\left(x_2\right)\right)\leq\tilde{C}\cdot d_{\mathbb{X}}\left(x_1,x_2\right)$$
במקרה כזה נאמר ש-$\mathbb{X}$ ו-$\mathbb{Y}$ <u>שקולים</u>.
3. <u>איזומטריה</u> אם לכל $x_1,x_2\in\mathbb{X}$ מתקיים $d_{\mathbb{Y}}\left(f\left(x_1\right),f\left(x_2\right)\right)=d_{\mathbb{X}}\left(x_1,x_2\right)$.

♣ אם $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ היא שקילות ו-$0<C,\tilde{C}\in\mathbb{R}$ הם הקבועים המקיימים)לכל $x_1,x_2\in X$(:
$$C\cdot d_{\mathbb{X}}\left(x_1,x_2\right)\leq d_{\mathbb{Y}}\left(f\left(x_1\right),f\left(x_2\right)\right)\leq\tilde{C}\cdot d_{\mathbb{X}}\left(x_1,x_2\right)$$
אז לכל $y_1,y_2\in\mathbb{Y}$ מתקיים:
$$C\cdot d_{\mathbb{X}}\left(f^{-1}\left(y_1\right),f^{-1}\left(y_2\right)\right)\leq d_{\mathbb{Y}}\left(y_1,y_2\right)\leq\tilde{C}\cdot d_{\mathbb{X}}\left(f^{-1}\left(y_1\right),f^{-1}\left(y_2\right)\right)$$
ולכן גם:
$$\frac{1}{\tilde{C}}\cdot d_{\mathbb{Y}}\left(y_1,y_2\right)\leq d_{\mathbb{X}}\left(f^{-1}\left(y_1\right),f^{-1}\left(y_2\right)\right)\leq\frac{1}{C}\cdot d_{\mathbb{Y}}\left(y_1,y_2\right)$$
כמו כן $f:\mathbb{X}_1\to\mathbb{X}_2$ היא שקילות בין $\mathbb{X}_1$ ל-$\mathbb{X}_2$ עם קבועים C_1,C_2 ו-$g:\mathbb{X}_2\to\mathbb{X}_3$ היא שקילות בין $\mathbb{X}_2$ ל-$\mathbb{X}_3$ עם קבועים C_3,C_4 אז)לכל $x,y\in\mathbb{X}_1$(:
$$C_3\cdot C_1\cdot d_1\left(x,y\right)\leq C_3\cdot d_2\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq d_3\left(g\left(f\left(x\right)\right),g\left(f\left(y\right)\right)\right)\leq C_4\cdot d_2\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq C_4\cdot C_2\cdot d_1\left(x,y\right)$$
כלומר $g\circ f$ היא שקילות בין $\mathbb{X}_1$ ל-$\mathbb{X}_2$ עם הקבועים $C_3\cdot C_1$ ו-$C_4\cdot C_2$.

♣ נשים לב לכך שכל פונקציה מהצורה הנ״ל מגדירה יחס שקילות על מרחבים מטריים:

- כל מרחב מטרי הומיאומורפי/שקול/איזומטרי לעצמו ע״י פונקציית הזהות.
- אם $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ היא הומיאומורפיזם/שקילות/איזומטריה בין $\mathbb{X}$ ל-$\mathbb{Y}$, אז f^{-1} היא הומיאומורפיזם/שקילות/איזומטריה בין $\mathbb{Y}$ ל-$\mathbb{X}$.
- אם $f:\mathbb{X}_1\to\mathbb{X}_2$ היא הומיאומורפיזם/שקילות/איזומטריה בין $\mathbb{X}_1$ ל-$\mathbb{X}_2$ ו-$g:\mathbb{X}_2\to\mathbb{X}_3$ היא הומיאומורפיזם/שקילות/איזומטריה בין $\mathbb{X}_2$ ל-$\mathbb{X}_3$, אז $g\circ f$ היא הומיאומורפיזם/שקילות/איזומטריה בין $\mathbb{X}_1$ ל-$\mathbb{X}_3$.

בפרט אין שום בעיה בכך שההגדרות סימטריות למרות שפורמלית $\mathbb{X}$ הוא התחום של f ו-$\mathbb{Y}$ הוא הטווח שלה)כלומר ההגדרה של f אינה סימטרית(.

מסקנה 5.2. כל איזומטריה היא שקילות, וכל שקילות היא הומיאומורפיזם.

[11] ההוכחה שראינו באינפי' 1 בדבר הרציפות של פונקציה הופכית אינה תופסת כאן מפני שהשתמשה בכך שפונקציה הפיכה היא מונוטונית, אך יתרה מזאת ישנן דוגמאות לפונקציות רציפות והפיכות בין מרחבים מטריים שההופכית שלהן אינה רציפה)ראו דוגמה 5.6(.

הגדרה 5.3. שקילות בין שתי מטריקות
יהי $\mathbb{X}$ מרחב מטרי עם שתי מטריקות $d_1, d_2 : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, נאמר ש-$d_1$ ו-d_2 שקולות זו לזו אם קיימים $0 < C, \tilde{C} \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x, y \in \mathbb{X}$ מתקיים:

$$C \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \tilde{C} \cdot d_1(x,y)$$

♣ המשמעות של שקילות בין מטריקות היא שכל סדרה המתכנסת לפי האחת מתכנסת גם לפי האחרת וכמו כן לפונקציה יש גבול בנקודה לפי האחת אם״ם גם לפי האחרת יש את אותו הגבול.

הגדרה 5.4. שקילות בין שתי נורמות
יהי V מרחב נורמי עם שתי נורמות $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : V \times V \to \mathbb{R}$, נאמר ש-$\|\cdot\|_1$ ו-$\|\cdot\|_2$ שקולות זו לזו אם קיימים $0 < C, \tilde{C} \in \mathbb{R}$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים:

$$C \cdot \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \tilde{C} \cdot \|v\|_1$$

♣ כפי שראינו לעיל שקילות בין מטריקות ושקילות בין נורמות היא אכן יחס שקילות.

הגדרה 5.5. העתקה פתוחה
תהא $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ פונקציה, נאמר ש-f היא העתקה פתוחה אם לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{X}$ גם $f(U)$ היא קבוצה פתוחה.

דוגמה 5.6. נתבונן במרחבים המטריים $[0, 2\pi)$[12] ו-$\mathcal{S}^1$[13]. הפונקציה $f : [0, 2\pi) \to \mathcal{S}^1$ המוגדרת ע״י (לכל $\theta \in [0, 2\pi)$):

$$f(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

היא פונקציה רציפה והפיכה, אבל ההופכית שלה אינה רציפה מפני שלכל סביבה של $f(0)$ קיימת נקודה $\pi < \theta \in [0, 2\pi)$ כך ש-$f(\theta)$ נמצא בסביבה של $f(0)$.

[12] עם המטריקה המושרית מהערך המוחלט ב-$\mathbb{R}$.
[13] מעגל היחידה עם המטריקה שמחזירה את אורך הקשת הקצרה ביותר בין שתי נקודות.

כל הטענות הבאות נכונות גם עבור $\mathbb{C}^n$ ומרחבים נורמיים נוצרים סופית מעל $\mathbb{C}$.

טענה 5.7. יהי $(V,\|\cdot\|_V)$ מרחב נורמי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$ ונסמן $n:=\dim V$, קיימת נורמה $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך ש-$(V,\|\cdot\|_V)$ ו-$(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ איזומטריים.

טענה 5.8. כל הנורמות על $\mathbb{R}^n$ שקולות זו לזו.

הוכחה. תהא $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה ונסמן $\tilde{C}:=\sum_{i=1}^n\|e_i\|$ (מהגדרה $\tilde{C}>0$), לכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$\|x\|=\left\|\sum_{i=1}^n x_i\cdot e_i\right\|\le\sum_{i=1}^n\|x_i\cdot e_i\|=\sum_{i=1}^n|x_i|\cdot\|e_i\|\le\left(\max_{n\ge i\in\mathbb{N}}|x_i|\right)\cdot\sum_{i=1}^n\|e_i\|=\|x\|_\infty\cdot\tilde{C}$$

תהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(x):=\|x\|$ לכל $x\in\mathbb{R}^n$, מהשורה הקודמת נובע ש-f רציפה ליפשיץ לפי הנורמות $\|\cdot\|_\infty$ (על $\mathbb{R}^n$) ו-$|\cdot|$ (על $\mathbb{R}$), שכן לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$|f(x)-f(y)|=|\|x\|-\|y\||\le\|x-y\|\le\tilde{C}\cdot\|x-y\|_\infty$$

הקבוצה $S:=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|_\infty=1\}$[14] היא קבוצה סגורה וחסומה לפי הנורמה $\|\cdot\|_\infty$, מכאן שהיא גם קומפקטית לפי נורמה זו, ולכן מהיות f רציפה נובע ש-f מקבלת מינימום על S. א"כ נסמן $C:=\min(f(S))$ (מהגדרה $C>0$), ומכאן שלכל $0\ne x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$\|x\|=\|x\|_\infty\cdot\frac{\|x\|}{\|x\|_\infty}=\|x\|_\infty\cdot\left\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\right\|=\|x\|_\infty\cdot f\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right)\ge\|x\|_\infty\cdot C$$

כמובן שעבור $x=0$ מתקיים $\|x\|=0\le0\cdot C=\|x\|_\infty\cdot C$, ולכן קיבלנו שלכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$C\cdot\|x\|_\infty\le\|x\|\le\tilde{C}\cdot\|x\|_\infty$$

כלומר כל הנורמות על $\mathbb{R}^n$ שקולות לנורמה $\|\cdot\|_\infty$ ומהטרנזיטיביות של יחס השקילות בין נורמות נובע שכל שתי נורמות על $\mathbb{R}^n$ שקולות זו לזו. ■

מסקנה 5.9. כל הנורמות על מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$ שקולות זו לזו.

מסקנה 5.10. יהי $(V,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$, קבוצה $K\subseteq V$ היא קבוצה קומפקטית אם"ם היא סגורה וחסומה.

טענה 5.11. יהיו $(\mathbb{X},d_\mathbb{X})$ ו-$(\mathbb{Y},d_\mathbb{Y})$ מרחבים מטריים, ותהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ פונקציה חח"ע ועל (הפיכה); אם $\mathbb{X}$ קומפקטי ו-f רציפה, אז f היא הומיאומורפיזם בין $\mathbb{X}$ ל-$\mathbb{Y}$ (כלומר f^{-1} רציפה גם היא).

הוכחה. יהי $y\in\mathbb{Y}$, תהא $(y_n)_{n=1}^\infty$ סדרת נקודות ב-$\mathbb{Y}$ המתכנסת ל-y, ותהא $(x_n)_{n=1}^\infty$ סדרת נקודות ב-$\mathbb{X}$ כך ש-$x_n=f^{-1}(y_n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

יהיו $L,L'\in\mathbb{X}$ שני גבולות חלקיים של $(x_n)_{n=1}^\infty$, ותהיינה $(n_k)_{k=1}^\infty$ ו-$(n_j)_{j=1}^\infty$ שתי סדרות אינדקסים עולות ממש כך ש-$(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ ו-$(x_{n_j})_{j=1}^\infty$ מתכנסות ל-L ול-L' (בהתאמה). מכאן שע"פ משפט הירושה ואפיון היינה לרציפות מתקיים:

$$\begin{aligned}f(L_1)&=f\left(\lim_{k\to\infty}x_{n_k}\right)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=\lim_{n\to\infty}y_n\\&=\lim_{j\to\infty}y_{n_j}=\lim_{j\to\infty}f(x_{n_j})=f\left(\lim_{j\to\infty}x_{n_j}\right)=f(L_2)\end{aligned}$$

מהיות f חח"ע נובע כי $L=L'$, כלומר ל-$(x_n)_{n=1}^\infty$ יש גבול חלקי יחיד.

מטענה 3.19 ומהיות $(\mathbb{X},d)$ מרחב קומפקטי נובע ש-$\left(f^{-1}(y_n)\right)_{n=1}^\infty=(x_n)_{n=1}^\infty$ מתכנסת ל-L, ומהיות f רציפה נובע כי:

$$\begin{aligned}f^{-1}(y)&=f^{-1}\left(\lim_{n\to\infty}y_n\right)=f^{-1}\left(\lim_{n\to\infty}f(x_n)\right)=f^{-1}\left(f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)\right)\\&=f^{-1}(f(L))=L=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}f^{-1}(y_n)\end{aligned}$$

מהיות $(y_n)_{n=1}^\infty$ שרירותית ומאפיון היינה לרציפות נובע ש-f^{-1} רציפה. ■

[14] זוהי ספרת היחידה לפי הנורמה $\|\cdot\|_\infty$.

טענה 5.12. כל הומיאומורפיזם הוא העתקה פתוחה.

טענה 5.13. יהיו $(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$ ו-$(\mathbb{Y},d_{\mathbb{Y}})$ מרחבים מטריים הומיאומורפיים, ויהי $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ הומיאומורפיזם; לכל תת-קבוצה $S\subseteq\mathbb{X}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}(f(S))^{\circ}&=f(S^{\circ})\\ \overline{f(S)}&=f\left(\overline{S}\right)\\ \partial f(S)&=f(\partial S)\end{aligned}$$

בכיתה ראינו את הטענה תוך הנחה ש-S קומפקטית, כפי שניתן לראות בהוכחה אין בזה שום צורך.

הוכחה. תהא $S\subseteq\mathbb{X}$ תת-קבוצה.

- נוכיח ש-$(f(S))^{\circ}=f(S^{\circ})$:
  - ע״פ טענה 5.12 f היא העתקה פתוחה, ולכן לכל $x\in S^{\circ}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_{\delta}(x)\subseteq S$ ו-$f(B_{\delta}(x))$ היא קבוצה פתוחה המוכלת ב-$f(S)$, כלומר $f(x)$ היא נקודה פנימית של $f(S)$ לכל $x\in S^{\circ}$ ומכאן ש-$(f(S))^{\circ}\supseteq f(S^{\circ})$.
  - f^{-1} היא העתקה פתוחה)כי f רציפה(ולכן לכל $y\in(f(S))^{\circ}$ קיימת $0<\delta\in\mathbb{R}$ כך ש-$B_{\delta}(y)\subseteq f(S)$ ו-$f^{-1}(B_{\delta}(y))$ היא קבוצה פתוחה המוכלת ב-$f^{-1}(f(S))$, כלומר $f^{-1}(y)$ היא נקודה פנימית של S לכל $y\in(f(S))^{\circ}$ ומכאן ש-$f^{-1}\left((f(S))^{\circ}\right)\subseteq S^{\circ}$ וממילא $(f(S))^{\circ}=f\left(f^{-1}\left((f(S))^{\circ}\right)\right)\subseteq f(S^{\circ})$.
- נזכיר שמהיות f חח״ע נובע שלכל שתי קבוצות $A,B\subseteq\mathbb{X}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}f(A)\setminus f(B)&=f(A\setminus B)\\ f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)&=f^{-1}(A\setminus B)\end{aligned}$$

נוכיח ש-$\overline{f(S)}=f\left(\overline{S}\right)$. מהסעיף הקודם נובע כי:

$$\begin{aligned}\mathbb{Y}\setminus\overline{f(S)}&=(\mathbb{Y}\setminus f(S))^{\circ}=(f(\mathbb{X})\setminus f(S))^{\circ}=(f(\mathbb{X}\setminus S))^{\circ}\\ &=f\left((\mathbb{X}\setminus S)^{\circ}\right)=f\left(\mathbb{X}\setminus\overline{S}\right)=f(\mathbb{X})\setminus f\left(\overline{S}\right)=\mathbb{Y}\setminus f\left(\overline{S}\right)\end{aligned}$$

ומכיוון שע״פ הגדרה $\overline{f(S)}\subseteq\mathbb{Y}$ ו-$f\left(\overline{S}\right)\subseteq\mathbb{Y}$ נובע מזה ש-$\overline{f(S)}=f\left(\overline{S}\right)$.

- ע״פ שלושת הסעיפים הקודמים מתקיים:

$$\partial f(S)=\overline{f(S)}\setminus f(S)^{\circ}=f\left(\overline{S}\right)\setminus f(S^{\circ})=f\left(\overline{S}\setminus S^{\circ}\right)=f(\partial K)$$

■

6 שלמות

6.1 הגדרות

יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב מטרי.

הגדרה 6.1. <u>הקוטר</u> של תת-קבוצה חסומה $Y\subseteq\mathbb{X}$ הוא $\operatorname{diam}(Y):=\sup\{d(x,y)\mid x,y\in Y\}$.

ההגדרה הבאה שונה מזו שראינו בכיתה)שהיא ההגדרה המקובלת(אך הן שקולות, ולדעתי זו שאציג כעת מצביעה באופן ברור יותר על מה שאנו מחפשים בשלמות.

הגדרה 6.2. נאמר ש-$(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב מטרי שלם, אם לכל סדרת קבוצות סגורות לא ריקות $(C_n)_{n=1}^{\infty}$, כך ש-$C_{n+1}\subseteq C_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ו-$\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}(C_n)=0$, קיים $c\in\mathbb{X}$ יחיד כך שמתקיים:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n=\{c\}$$

הנה ההגדרה שראינו בכיתה)ההגדרה המקובלת(:

הגדרה 6.3. נאמר ש-$(\mathbb{X},d)$ הוא שלם אם כל סדרת קושי שבו אכן מתכנסת.

משפט. משפט החיתוך של קנטור

$(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב מטרי שלם אם״ם כל סדרת קושי ב-$(\mathbb{X},d)$ מתכנסת.

♣ כן, זה לא היה מקרי בכלל שהגדרת השלמות הזכירה לנו את הלמה של קנטור.

טענה. אם קיימת קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-A צפופה ב-$\mathbb{X}$ ולכל סדרת קושי ב-A[15] יש גבול ב-$\mathbb{X}$ אז $(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב שלם.

הגדרה 6.4. נאמר שמרחב מטרי שלם $\left(\hat{\mathbb{X}},\hat{d}\right)$ הוא השלמה של $(\mathbb{X},d)$ אם קיימת העתקה חח״ע $f:\mathbb{X}\to\hat{\mathbb{X}}$ כך שלכל $x,y\in\mathbb{X}$ מתקיים[16]:

$$\hat{d}\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)=d\left(x,y\right)$$

ובנוסף $\operatorname{Im}f$ צפופה ב-$\hat{\mathbb{X}}$.

אנחנו נראה בקובץ הטענות שלכל מרחב מטרי יש השלמה יחידה עד כדי איזומטריה ולכן במקרה כזה נכון לקרוא ל-$\left(\hat{\mathbb{X}},\hat{d}\right)$ ההשלמה של $(\mathbb{X},d)$.

פונקציה $f:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ תיקרא מכווצת אם קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש-$0\leq\lambda<1$ ולכל $x,y\in\mathbb{X}$ מתקיים:

$$d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq\lambda\cdot d\left(x,y\right)$$

הגדרה 6.5. פונקציה $f:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ תיקרא כמעט מכווצת אם לכל $x,y\in\mathbb{X}$ כך ש-$x\neq y$ מתקיים:

$$d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)<d\left(x,y\right)$$

6.2 התחלה

משפט 6.6. מרחב מטרי הוא קומפקטי אם״ם הוא שלם וחסום לחלוטין.

הוכחה.

- $\Leftarrow$

נניח ש-$(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב מטרי קומפקטי, ראינו כבר)טענה 2.35(שנובע מזה שהוא גם חסום לחלוטין.
מהקומפקטיות של $(\mathbb{X},d)$ נובע שלכל סדרת קושי יש גבול חלקי, ולכן ע״פ טענה 3.11 היא גם מתכנסת; כלומר $(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב שלם.

- $\Rightarrow$

נניח ש-$(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב מטרי שלם וחסום לחלוטין ותהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

– נסמן $B_0:=\mathbb{X}$ ותהא $(B_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת באופן הבא:
$\mathbb{X}$ חסום לחלוטין ולכן קיימת קבוצה סופית $Y_k\subseteq\mathbb{X}$ המהווה $\frac{1}{k}$-רשת של $\mathbb{X}$, תהא Y_k כנ״ל ונסמן $A_k:=\left\{y\in Y_k\mid B_{\frac{1}{k}}\left(y\right)\cap B_{k-1}\neq\emptyset\right\}$.
מהשלב הקודם נובע שיש ב-B_{k-1} אין-סוף מאיברי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, ולכן מכיוון ש-A_k סופית נדע שקיים $y\in A_k$ כך שב-$B_{\frac{1}{k}}\left(y\right)\cap B_{k-1}$ יש אין-סוף מאיברי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$; נסמן עבור y כזה $B_k:=B_{\frac{1}{k}}\left(y\right)\cap B_{k-1}$ ושוב יש ב-B_k אין-סוף מאיברי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

---

[15] כלומר סדרת קושי ב-$\mathbb{X}$ שכל איבריה ב-A.

[16] כלומר f היא איזומטריה בין $(\mathbb{X},d)$ ל-$\operatorname{Im}f$)עם הצמצום של $\hat{d}$ ל-$\operatorname{Im}f\times\operatorname{Im}f$(.

- מכאן שקיימת סדרת אינדקסים עולה ממש $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך ש-$x_{n_k} \in B_k$ לכל $k \in \mathbb{N}$, מהגדרת $(B_k)_{k=1}^{\infty}$ נובע ש-$B_k \subseteq B_{k-1}$ ו-$d(a,b) < \frac{2}{k}$ לכל $k \in \mathbb{N}$ ולכל $a,b \in B_k$. מכאן שלכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $K < k,m \in \mathbb{N}$ מתקיים $d(x_{n_k}, x_{n_m}) < \frac{2}{K} < \varepsilon$, כלומר $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי ולכן מהיות $(\mathbb{X},d)$ שלם נובע שהיא מתכנסת, כלומר יש ל-$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ תת-סדרה מתכנסת.
- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ הייתה סדרה שרירותית ולכן לכל סדרה ב-$\mathbb{X}$ יש תת-סדרה מתכנסת, כלומר $(\mathbb{X},d)$ קומפקטי.

■

משפט 6.7. משפט החיתוך של קנטור

$(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב מטרי שלם אם״ם כל סדרת קושי ב-$(\mathbb{X},d)$ מתכנסת.

♣ ההגדרה המקובלת של מרחב שלם היא שכל סדרת קושי שבו מתכנסת, ולכן הניסוח המקובל של המשפט הוא שהמרחב שלם אם״ם מקיים את ההגדרה שנתתי אני לשלמות.

לא ראינו את המשפט בכיתה.

הוכחה.

- $\Leftarrow$

נניח ש-$(\mathbb{X},d)$ שלם, ותהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי.

- תהא $(C_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות סגורות ב-$(\mathbb{X},d)$ המוגדרת באופן הבא:
מהיות $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי נובע שלכל $k \in \mathbb{N}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n,m \in \mathbb{N}$ מתקיים $d(x_n,x_m) < \frac{1}{k}$, א״כ תהא $(N_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה כנ״ל ולכל $k \in \mathbb{N}$ נסמן:

$$C_k := \hat{B_{\frac{1}{N_k}}}(x_{N_k+1})$$

מהגדרה נובע ש-$(C_k)_{k=1}^{\infty}$ היא אכן סדרת קבוצות סגורות לא ריקות, המקיימת $C_{k+1} \subseteq C_k$ לכל $k \in \mathbb{N}$ ו-$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(C_k) = 0$.

- מהיות $(\mathbb{X},d)$ שלם נובע שקיים $c \in \mathbb{X}$ יחיד כך שמתקיים:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \{c\}$$

יהי c כנ״ל.

- לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $k \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_k < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $x_n \in C_k$ ולכן גם:

$$d(x_n,c) < \frac{2}{N_k} < \varepsilon$$

ולכן ע״פ הגדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-c.

- $\Rightarrow$

נניח שכל סדרת קושי ב-$(\mathbb{X},d)$ מתכנסת, ותהא $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות סגורות לא ריקות המקיימות $A_{k+1} \subseteq A_k$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ו-$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(A_k) = 0$.
תהא $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-$\mathbb{X}$ כך ש-$x_n \in A_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, מהנתון $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(A_k) = 0$ נובע ש-$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי ולכן מתכנסת.
לכל $k \in \mathbb{N}$ הקבוצה A_k היא קבוצה סגורה המכילה אין-סוף מאיברי הסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, ולכן $\lim_{n\to\infty} x_n \in A_k$ לכל $k \in \mathbb{N}$, כלומר:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

מצד שני מהנתון $\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}(A_k)$ נובע שהחיתוך הנ״ל אינו יכול להכיל יותר מאיבר בודד ומכאן שמתקיים:

$$\left\{\lim_{n\to\infty} x_n\right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

■

6.3 משפט ההשלמה

טענה 6.8. אם קיימת קבוצה $A \subseteq \mathbb{X}$ כך ש-A צפופה ב-$\mathbb{X}$ ולכל סדרת קושי ב-A[17] יש גבול ב-$\mathbb{X}$ אז $(\mathbb{X}, d)$ הוא מרחב שלם.

נאמר ששתי סדרות $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}$ <u>שקולות זו לזו</u> אם מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

זהו אכן יחס שקילות, נסמן ב-$\hat{\mathbb{X}}$ את קבוצת מחלקות השקילות של יחס זה ותהא $\hat{d} : \hat{\mathbb{X}} \times \hat{\mathbb{X}} \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע״י (לכל $[(x_n)_{n=1}^{\infty}], [(y_n)_{n=1}^{\infty}] \in \hat{\mathbb{X}}$):

$$\hat{d}\left([(x_n)_{n=1}^{\infty}], [(y_n)_{n=1}^{\infty}]\right) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

[17] כלומר סדרת קושי ב-$\mathbb{X}$ שכל איבריה ב-A.

משפט ההשלמה אינו חלק מהחומר למבחן ולכן עוד לא כתבתי לו הוכחה.

טענה 6.9. יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב מטרי, אם קיימת קבוצה $A\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-A צפופה ב-$\mathbb{X}$ ולכל סדרת קושי ב-A[18] יש גבול ב-$\mathbb{X}$ אז $(\mathbb{X},d)$ הוא מרחב שלם.

יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב מטרי, נאמר ששתי סדרות $(x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}$ <u>שקולות זו לזו</u> אם מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}d\left(x_n,y_n\right)=0$$

זהו אכן יחס שקילות, נסמן ב-$\hat{\mathbb{X}}$ את קבוצת מחלקות השקילות של יחס זה ותהא $\hat{d}:\hat{\mathbb{X}}\times\hat{\mathbb{X}}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י)לכל $[(x_n)_{n=1}^{\infty}],[(y_n)_{n=1}^{\infty}]\in\hat{\mathbb{X}}$(:

$$\hat{d}\left([(x_n)_{n=1}^{\infty}],[(y_n)_{n=1}^{\infty}]\right):=\lim_{n\to\infty}d\left(x_n,y_n\right)$$

♣ יש להוכיח ש-$\hat{d}$ אכן מוגדרת היטב, כלומר הגבול $\lim_{n\to\infty}d\left(x_n,y_n\right)$ אכן קיים לכל שתי סדרות קושי ב-$\mathbb{X}$ ובנוסף הוא אינו תלוי בבחירת הנציגים של מחלקות השקילות $[(x_n)_{n=1}^{\infty}]$ ו-$[(y_n)_{n=1}^{\infty}]$.

טענה 6.10. $\hat{d}$ היא מטריקה על $\hat{\mathbb{X}}$ ולכן $\left(\hat{\mathbb{X}},\hat{d}\right)$ הוא מרחב מטרי.

טענה 6.11. תהא $f:\mathbb{X}\to\hat{\mathbb{X}}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f\left(x\right):=[(x)_{n=1}^{\infty}]$ לכל $x\in\mathbb{X}$, כלומר f מעתיקה כל נקודה ב-$\mathbb{X}$ למחלקת השקילות של הסדרה הקבועה המתאימה.
לכל $x,y\in\mathbb{X}$ מתקיים:

$$d\left(x,y\right)=\hat{d}\left([(x)_{n=1}^{\infty}],[(y)_{n=1}^{\infty}]\right)=\hat{d}\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)$$

ובנוסף $\mathrm{Im}f$ היא קבוצה צפופה ב-$\hat{\mathbb{X}}$.

מסקנה 6.12. $\left(\hat{\mathbb{X}},\hat{d}\right)$ הוא מרחב שלם ומכאן שהוא השלמה של $\mathbb{X}$.

טענה 6.13. יהי $(\mathbb{Y},d_{\mathbb{Y}})$ מרחב מטרי שלם, תהא $D\subseteq\mathbb{X}$ כך ש-D צפופה ב-$\mathbb{X}$ ותהא $f:D\to\mathbb{Y}$ פונקציה רציפה במידה שווה.
קיימת פונקציה יחידה $\tilde{f}:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ כך ש-$\tilde{f}$ רציפה ו-$\tilde{f}\mid_D=f$.

מסקנה 6.14. לכל מרחב מטרי $(\mathbb{Y},d_{\mathbb{Y}})$ המהווה השלמה של $(\mathbb{X},d)$ קיימת איזומטריה בין $\mathbb{Y}$ ל-$\hat{\mathbb{X}}$, כלומר השלמה של מרחב מטרי היא יחידה עד כדי איזומטריה.

6.4 משפט ההעתקה המכווצת

טענה 6.15. כל העתקה מכווצת היא העתקה כמעט מכווצת, וכל העתקה כמעט מכווצת היא רציפה ליפשיץ, ולכן גם רציפה במידה שווה.

טענה 6.16. תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ העתקה כמעט מכווצת, יש ל-f לכל היותר נקודת שבת אחת)ייתכן שאין לה בכלל נקודות שבת(.

הוכחה. נניח בשלילה של-f יש יותר מנקודת שבת אחת, ותהיינה $x_1,x_2\in\mathbb{X}$ שתי נקודות שונות כאלה.

$$\Rightarrow d\left(x_1,x_2\right)=d\left(f\left(x_1\right),f\left(x_2\right)\right)<d\left(x_1,x_2\right)$$

■

[18] כלומר סדרת קושי ב-$\mathbb{X}$ שכל איבריה ב-A.

משפט 6.17. משפט ההעתקה המכווצת
לכל העתקה מכווצת על מרחב מטרי שלם יש נקודת שבת יחידה.

האם גם המשפט ההפוך נכון? שאם לכל העתקה מכווצת על מרחב מטרי יש נקודת שבת אז המרחב המטרי שלם?

הוכחה. נניח ש-$(\mathbb{X},d)$ שלם, תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ העתקה מכווצת, ויהי $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש-$0\leq\lambda<1$ ולכל $x,y\in\mathbb{X}$ מתקיים:

$$d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq\lambda\cdot d\left(x,y\right)$$

יהי $x_0\in\mathbb{X}$ ותהא $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י $x_n:=f^n\left(x_0\right)$[19] לכל $n\in\mathbb{N}$.
מכאן שלכל $n,m\in\mathbb{N}$ כך ש-$n\leq m$ מתקיים:

$$\begin{aligned}d\left(x_n,x_m\right)&\leq\sum_{k=n}^{m-1}d\left(x_k,x_{k+1}\right)=\sum_{k=n}^{m-1}d\left(f^k\left(x_0\right),f^k\left(x_1\right)\right)\\&\leq\sum_{k=n}^{m-1}\lambda^k\cdot d\left(x_0,x_1\right)=d\left(x_0,x_1\right)\cdot\sum_{k=n}^{m-1}\lambda^k\end{aligned}$$

מתנאי קושי להתכנסות טורים, ומהעובדה שהטור $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n$ הוא טור הנדסי מתכנס, נובע כי לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $d\left(x_n,x_m\right)<\varepsilon$; כלומר $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי, ולכן מהיות $(\mathbb{X},d)$ מרחב שלם נובע ש-$\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, נסמן את גבולה ב-x.
f היא פונקציה רציפה (טענה 6.15) ולכן לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$f\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n=x$$

היחידות נובעת מהטענה הקודמת (6.16). ■

משפט 6.18. לכל העתקה כמעט מכווצת על מרחב מטרי קומפקטי יש נקודת שבת יחידה.

הוכחה. נניח ש-$(\mathbb{X},d)$ קומפקטי, תהא $f:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ העתקה כמעט מכווצת , ותהא $g:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $g\left(x\right):=d\left(x,f\left(x\right)\right)$ לכל $x\in\mathbb{X}$.
מהיות f, $\mathrm{Id}_{\mathbb{X}}$ ו-d רציפות נובע ש-g רציפה (משפט 4.17 ומשפט ההצבה בגבולות), ולכן מהיות $(\mathbb{X},d)$ קומפקטי נובע ש-g מקבלת מינימום על $\mathbb{X}$.
תהא $x\in\mathbb{X}$ נקודת מינימום כזו ונניח בשלילה ש-$x\neq f\left(x\right)$,

$$\Rightarrow g\left(f\left(x\right)\right)=d\left(f\left(x\right),f\left(f\left(x\right)\right)\right)<d\left(x,f\left(x\right)\right)=g\left(x\right)$$

בסתירה להיות x נקודת מינימום של g; מכאן שהנחת השלילה אינה נכונה ו-$f\left(x\right)=x$, כלומר x היא נקודת שבת של f.
היחידות נובעת מטענה 6.16. ■

[19] כאן $f^n\left(x_0\right)$ אינו חזקה (זה חסר משמעות), אלא הרכבה של n פעמים על עצמה ($f^0:=\mathrm{Id}_{\mathbb{X}}$ ו-$f^n:=f\circ f^{n-1}$ לכל $n\in\mathbb{N}$).