פונקציות אנליטיות

1 נוסחת קושי ומסקנותיה

1.1 הגדרות

♣ כפי שראינו האקספוננט המרוכב אינו חח״ע ולכן אינו הפיך וממילא נוכל להגדיר את הלוגריתם הטבעי, כמו במקרים דומים שראינו בעבר[1] הפתרון הוא לצמצם את תחום ההגדרה של האקספוננט וכך למצוא הופכית מקומית.

סימון: לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ ולכל $z \in \mathbb{C}^*$ נסמן ב-$\arg_\alpha(z)$ את המספר היחיד ב-$[\alpha, \alpha + 2\pi)$ המקיים:

$$\frac{z}{|z|} = \operatorname{cis}(\arg_\alpha(z))$$

וכמו כן נסמן $\log_\alpha(z) := \ln|z| + i \cdot \arg_\alpha(z)$.

מסקנה 1.1. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ ולכל $z \in \mathbb{C}^*$ מתקיים:

$$z = e^{\log_\alpha(z)}$$

כלומר $\log_\alpha$ היא פונקציה חח״ע ועל מ-$\mathbb{C}^*$ ל-$\{z \in \mathbb{C} \mid \alpha \le \operatorname{Im}(z) < \alpha + 2\pi\}$.

סימון: לכל $\theta \in \mathbb{R}$ נסמן $R_\theta := \{r \cdot \operatorname{cis}(\theta) \mid 0 \le r \in \mathbb{R}\}$, זוהי הקרן היוצאת מן הראשית בזווית θ (כולל הראשית עצמה).

מסקנה 1.2. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$, $\arg_\alpha$ ו-$\log_\alpha$ הן פונקציות רציפות על $\mathbb{C} \setminus R_\alpha$.

הגדרה 1.3. לוגריתם רציף וארגומנט רציף של פונקציה
תהא $A \subseteq \mathbb{C}$ ותהא $f : A \to \mathbb{C}^*$ פונקציה רציפה.

- פונקציה $g : A \to \mathbb{C}$ תיקרא <u>לוגריתם רציף</u> של f אם היא רציפה ולכל $z \in A$ מתקיים $f(z) = e^{g(z)}$.
- כמו כן פונקציה $\theta : A \to \mathbb{R}$ תיקרא <u>ארגומנט רציף</u> של f אם היא רציפה ולכל $z \in A$ מתקיים $f(z) = |f(z)| \cdot \operatorname{cis}(\theta(z))$.

הגדרה 1.4. לוגריתם אנליטי
תהא $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה ותהא $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ פונקציה אנליטית, נאמר שפונקציה $g : \Omega \to \mathbb{C}$ היא <u>לוגריתם אנליטי</u> של f אם g אנליטית ולכל $z \in \Omega$ מתקיים $f(z) = e^{g(z)}$.

סימון: יהי $\alpha \in \mathbb{R}$, לכל $z \in \mathbb{C} \setminus R_\alpha$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר את <u>השורש ה-n-י האנליטי</u> של z (ביחס ל-α) ע״י:

$$\sqrt[n]{z} := e^{\frac{1}{n} \cdot \log_\alpha(z)}$$

נסמן גם $\sqrt[n]{0} := 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
כעת ניתן גם להגדיר חזקה רציונלית של מספר מרוכב $z \in \mathbb{C}^*$ ע״י (לכל $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$):

$$z^{\frac{m}{n}} := e^{\frac{m}{n} \cdot \log_\alpha(z)}$$

♣ למי שתהה לעצמו: אין דרך אחרת לעשות זאת משום שאין סיבה להעדיף את אחד השורשים על פני האחרים (בממשיים העדפנו את החיובי), חוסר תשומת לב לנקודה זו מובילה ל״פרדוקסים״ כגון:

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

[1] כדי להגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות ההופכיות צמצמנו את sin ל-$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, את cos ל-$[0, \pi]$ ואת tan ל-$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

1.2 משפט האינטגרל של קושי ונוסחת קושי

סימון: לכל $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ נסמן $\Delta(z_1, z_2, z_3) := \{\lambda_1 \cdot z_1 + \lambda_2 \cdot z_2 + \lambda_3 \cdot z_3 \mid \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0\}$.

♣ זהו המשולש הסגור שקודקודיו הם z_1, z_2, z_3.

סימון: לכל $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ נסמן $T(z_1, z_2, z_3) := I(z_1, z_2) * I(z_2, z_3) * I(z_3, z_1)$.

הסכמה: יהיו z_1, z_2, z_3 שאינם נמצאים על ישר אחד[2], סימן האוריינטציה של $T(z_1, z_2, z_3)$ הוא הסימן של הדטרמיננטה:

$$\det \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z_2 - z_1) & \mathrm{Re}(z_3 - z_1) \\ \mathrm{Im}(z_2 - z_1) & \mathrm{Im}(z_3 - z_1) \end{pmatrix}$$

♣ דטרמיננטה חיובית אומרת שהיחס בין $z_2 - z_1$ ל-$z_3 - z_1$ הוא כמו היחס בין e_1 ל-e_2 ולכן הסדר (z_1, z_2, z_3) הוא נגד כיוון השעון שהוא הכיוון המתמטי החיובי, אותו הדבר נכון בהיפוך כשהדטרמיננטה שלילית.

משפט 1.5. משפט האינטגרל של קושי למשולשים (הגרסה החלשה)
תהא $f : \Omega \to \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית, לכל $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ כך ש-$\Delta(z_1, z_2, z_3) \subseteq \Omega$ מתקיים:

$$\int\limits_{T(z_1, z_2, z_3)} f(z)\, dz = 0$$

♣ אם f בעלת פונקציה קדומה אז המשפט נובע מהמשפט היסודי ואין צורך שכל המשולש יוכל ב-Ω אלא מספיק שצלעותיו תהיינה מוכלות.

הוכחה. יהיו $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ כך ש-$\Delta(z_1, z_2, z_3) \subseteq \Omega$.

- תחילה נסביר כיצד ניתן להחליף אינטגרל של פונקציה רציפה על משולש, באינטגרל על ארבעה משולשים חופפים הדומים למשולש המקורי כשיחס הדמיון הוא $2:1$; כל זאת בתנאי שפנים המשולש מוכל גם הוא בתחום ההגדרה של הפונקציה עליה מבצעים את האינטגרל.

יהיו $A, B, C \in \mathbb{C}$ ונסמן:

$$a := \frac{A+B}{2},\ b := \frac{B+C}{2},\ c := \frac{C+A}{2}$$

מהגדרה:

$$\begin{aligned} T(A,B,C) &= I(A,B) * I(B,C) * I(C,A) \\ &= I(A,a) * I(a,B) * I(B,b) * I(b,C) * I(C,c) * I(c,A) \\ T(c,b,a) &= I(c,b) * I(b,a) * I(a,c) \end{aligned}$$

אם $\Delta(A,B,C) \subseteq \Omega$ אז:

$$\int\limits_{T(c,b,a)} f(z)\, dz + \int\limits_{T(a,b,c)} f(z)\, dz = \int\limits_{T(\tilde{a},b,c)} f(z)\, dz + \int\limits_{T(a,b,c)} f(z)\, dz = 0$$

ולכן גם:

$$\begin{aligned} \int\limits_{T(A,B,C)} f(z)\, dz &= \int\limits_{T(A,B,C)} f(z)\, dz + \int\limits_{T(c,b,a)} f(z)\, dz + \int\limits_{T(a,b,c)} f(z)\, dz \\ &= \int\limits_{T(a,b,c)} f(z)\, dz + \int\limits_{T(A,a,c)} f(z)\, dz + \int\limits_{T(a,B,b)} f(z)\, dz + \int\limits_{T(b,C,c)} f(z)\, dz \end{aligned}$$

[2] כלומר הקבוצה $\{z_2 - z_1, z_3 - z_1\}$ היא בסיס של $\mathbb{R}^2$ (נסתכל על מספרים מרוכבים כווקטורים ב-$\mathbb{R}^2$).

המשולשים $\Delta(b,C,c)$, $\Delta(a,B,b)$, $\Delta(A,a,c)$, $\Delta(a,b,c)$ מוגדרים ע"י קטעי האמצעים של המשולש $\Delta(A,B,C)$, ולכן הם חופפים זה לזה ודומים למשולש $\Delta(A,B,C)$ עם יחס דמיון $2:1$.
למעשה כל מה שאנחנו נצטרך עבור ההוכחה הוא שאורכי המסילות המקיפות את המשולשים הללו הם חצי מאורך המסילה המקיפה את המשולש המקורי, את זה קל לוודא ישירות מהגדרה ולכן לא מדובר בהוכחה המסתמכת על טענה גאומטרית.

- נגדיר סדרת מסילות $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$ וסדרת מספרים ממשיים $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ באופן הבא:
  - $\Delta_1 := T(z_1,z_2,z_3)$ ו-$I_1 := \left|\int_{\Delta_1} f(z)\,dz\right|$.
  - לכל $n\in\mathbb{N}$ נחלק את המשולש המוגדר ע"י Δ_n לארבעה משולשים חופפים באופן המפורט לעיל, ונסמן ב-Δ_{n+1} את אחת מארבע המסילות הנוצרות מחלוקה זו כך שיתקיים:

$$I_{n+1} := \left|\int\limits_{\Delta_{n+1}} f(z)\,dz\right| \geq \frac{I_n}{4}$$

מעיקרון שובך היונים נובע שקיימת לפחות מסילה אחת כזו.

- לכל $n\in\mathbb{N}$ נסמן ב-$\tilde{\Delta_n}$ את המשולש הסגור המוגדר ע"י המסילה Δ_n (כולל פנים המשולש ושפתו) - זוהי קבוצה סגורה וחסומה; מהגדרה מתקיים $\tilde{\Delta_{n+1}}\subseteq\tilde{\Delta_n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$, ו-$\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{diam}\left(\tilde{\Delta_n}\right)=0$, ומכאן שע"פ הלמה של קנטור קיימת נקודה יחידה $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש-$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{\Delta_n}=\{z_0\}$; תהא z_0 כנ"ל.
  תהא $\varepsilon:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה כך ש-$\varepsilon(z_0)=0$ ולכל $z\in\Omega$ מתקיים[3]:

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)\cdot(z-z_0)+\varepsilon(z)\cdot(z-z_0)$$

מהמשפט היסודי נובע כי (לכל $n\in\mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}\frac{I_1}{4^n}\leq I_n=\left|\int\limits_{\Delta_n} f(z)\,dz\right| &= \left|\int\limits_{\Delta_n} f(z_0)\,dz+\int\limits_{\Delta_n} f'(z_0)\cdot(z-z_0)\,dz+\int\limits_{\Delta_n}\varepsilon(z)\cdot(z-z_0)\,dz\right|\\ &= \left|0+0+\int\limits_{\Delta_n}\mathcal{S}_{f,z_0}(z)\cdot(z-z_0)\,dz\right|\leq\max_{z\in\Delta_n^*}|\varepsilon(z)|\cdot\max_{z\in\Delta_n^*}|z-z_0|\cdot L(\Delta_n)\\ &= \max_{z\in\Delta_n^*}|\varepsilon(z)|\cdot(L(\Delta_n))^2=\max_{z\in\Delta_n^*}|\varepsilon(z)|\cdot\left(\frac{L(\Delta_1)}{2^n}\right)^2=\max_{z\in\Delta_n^*}|\varepsilon(z)|\cdot\frac{(L(\Delta_1))^2}{4^n}\end{aligned}$$

וממילא גם:

$$\left|\int\limits_{\Delta_1} f(z)\,dz\right|=I_1\leq(L(\Delta_1))^2\cdot\max_{z\in\Delta_n^*}|\varepsilon(z)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

ומכאן ש-$\int_{\Delta_1} f(z)\,dz=\left|\int_{\Delta_1} f(z)\,dz\right|=0$.

■

משפט 1.6. משפט האינטגרל של קושי למשולשים (הגרסה החזקה)
תהא $f:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה, אם f אנליטית בכל נקודה ב-Ω מלבד מספר סופי של נקודות, אז לכל $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ כך ש-$\Delta(z_1,z_2,z_3)\subseteq\Omega$ מתקיים:

$$\int\limits_{T(z_1,z_2,z_3)} f(z)\,dz=0$$

[3] מהיות f אנליטית ב-z_0 נובע שקיימת ε כזו.

הוכחה. נניח ש-f אנליטית בכל נקודה ב-Ω מלבד מספר סופי של נקודות, ונסמן ב-k את מספר הנקודות שבהן f אינה אנליטית. כפי שראינו בהוכחת הגרסה החלשה של המשפט, לכל $n \in \mathbb{N}$ ניתן להציג את $\int_{T(z_1,z_2,z_3)} f(z)\,dz$ כאינטגרל של של f לאורך 4^n מסילות משולשיות חופפות שאורכן הוא $\frac{1}{2^n}$ מהאורך של $T(z_1,z_2,z_3)$, ובנוסף כל אחת מ-k הנקודות הללו יכולה להיות במשולש של 6 מסילות כאלה לכל היותר. מהגרסה החלשה של המשפט נובע שהאינטגרל של f לאורך כל אחת מהמסילות האחרות הוא 0 ולכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left| \int\limits_{T(z_1,z_2,z_3)} f(z)\,dz \right| \leq 6k \cdot M \cdot \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כאשר $M := \max\{|f(z)| : z \in \Delta(z_1,z_2,z_3)\}$. מכאן שגם במקרה זה מתקיים:

$$\int\limits_{T(z_1,z_2,z_3)} f(z)\,dz = \left| \int\limits_{T(z_1,z_2,z_3)} f(z)\,dz \right| = 0$$

■

למה 1.7. יהי $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ תחום כוכבי ביחס לנקודה $z_0 \in \Omega$, לכל $z_1, z_2 \in \Omega$ כך שתמונת המסילה $I(z_1,z_2)$ מוכלת ב-Ω גם $\Delta(z_0,z_1,z_2) \subseteq \Omega$.

משפט 1.8. יהי $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ תחום כוכבי ביחס לנקודה $z_0 \in \Omega$, תהא $f : \Omega \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה, ותהא $F : \Omega \to \mathbb{C}$ פונקציה המוגדרת ע״י (לכל $w \in \Omega$):

$$F(w) := \int\limits_{I(z_0,w)} f(z)\,dz$$

אם f אנליטית בכל נקודה ב-Ω מלבד מספר סופי של נקודות, אז לכל $w \in \Omega$ מתקיים $F'(w) = f(w)$; כלומר F אנליטית על Ω והיא קדומה של f.

הוכחה. נניח ש-f אנליטית בכל נקודה ב-Ω מלבד מספר סופי של נקודות, יהי $w_0 \in \Omega$, ויהי $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש-$B_r(w_0) \subseteq \Omega$. ע״פ הלמה (1.7) לכל $w \in B_r(w_0)$ מתקיים $\Delta(z_0,w,w_0) \subseteq \Omega$, ולכן ממשפט האינטגרל של קושי נובע כי:

$$\int\limits_{I(z_0,w)} f(z)\,dz + \int\limits_{I(w,w_0)} f(z)\,dz + \int\limits_{I(w_0,z_0)} f(z)\,dz = \int\limits_{T(z_0)} f(z)\,dz = 0$$

ולכן גם:

$$\int\limits_{I(z_0,w)} f(z)\,dz - \int\limits_{I(z_0,w_0)} f(z)\,dz = \int\limits_{I(z_0,w)} f(z)\,dz + \int\limits_{I(w_0,z_0)} f(z)\,dz = -\int\limits_{I(w,w_0)} f(z)\,dz$$

וממילא:

$$\begin{aligned}
\frac{F(w)-F(w_0)}{w-w_0} &= \frac{\int_{I(z_0,w)} f(z)\,dz - \int_{I(z_0,w_0)} f(z)\,dz}{w-w_0} \\
&= \frac{-\int_{I(w,w_0)} f(z)\,dz}{w-w_0} = \frac{\int_{I(w_0,w)} f(z)\,dz}{w-w_0} \\
&= \frac{\int_0^1 f(w_0+t\cdot(w-w_0))\cdot(w-w_0)\,dt}{w-w_0} \\
&= \frac{(w-w_0)\cdot\int_0^1 f(w_0+t\cdot(w-w_0))\,dt}{w-w_0} \\
&= \int_0^1 f(w_0+t\cdot(w-w_0))\,dt \\
&= \int_0^1 f(w_0)\,dt + \int_0^1 f(w_0+t\cdot(w-w_0)) - f(w_0)\,dt \\
&= f(w_0) + \int_0^1 f(w_0+t\cdot(w-w_0)) - f(w_0)\,dt
\end{aligned}$$

מהיות f רציפה נובע כי:

$$\lim_{t\to 0} |f(w_0+t\cdot(w-w_0)) - f(w_0)| = 0$$

ולכן גם:

$$\left|\int_0^1 f(w_0+t\cdot(w-w_0)) - f(w_0)\,dt\right| \le \max_{t\in[0,1]} |f(w_0+t\cdot(w-w_0)) - f(w_0)| \xrightarrow[w\to w_0]{} 0$$

$$\Rightarrow F'(w_0) = \lim_{w\to w_0}\frac{F(w)-F(w_0)}{w-w_0} = f(w_0) + \lim_{w\to w_0}\left(\int_0^1 f(w_0+t\cdot(w-w_0)) - f(w_0)\,dt\right) = f(w_0)$$

■

מסקנה 1.9. יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום כוכבי ותהא $f:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה, אם f אנליטית בכל נקודה ב-Ω מלבד מספר סופי של נקודות אז יש ל-f קדומה על Ω. בפרט, לכל מסילה סגורה וגזירה למקוטעין $\gamma:[a,b]\to\Omega$ מתקיים:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

♣ בפרט לכל פונקציה אנליטית על קבוצה פתוחה וקמורה יש קדומה בקבוצה זו, ובפרט עבור כדור פתוח סביב נקודה - כלומר לכל פונקציה אנליטית יש קדומה מקומית בכל מקום[4].

סימון: לכל $z_0\in\mathbb{C}$ ו-$0<r\in\mathbb{R}$ נסמן ב-$C(z,R)$ את המסילה $C(z_0,r):[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ המוגדרת ע"י (לכל $\theta\in[0,2\pi]$):

$$C(z_0,r)\,\theta := z_0 + r\cdot\mathrm{cis}\theta = z_0 + r\cdot e^{i\theta}$$

טענה 1.10. לכל $z_0\in\mathbb{C}$ ולכל $0<r\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\int_{C(z_0,r)} \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i$$

[4] זה לא אומר שיש קדומה בכל מקום בכלל מפני שייתכן שהקדומות הללו שונות.

♣ באותה דרך ניתן להסיק שלכל $0 \leq \theta \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\int\limits_{\gamma_{r,\theta}} \frac{1}{z-z_0}\ dz = \theta \cdot i$$

כאשר $\gamma_{r,\theta} : [0,\theta] \to \mathbb{C}$ היא המסילה המוגדרת ע"י $\gamma_{r,\theta}(t) := w + r \cdot e^{it}$ עבור $w \in \mathbb{C}$ ו-$0 < r \in \mathbb{R}$ כלשהם.

הוכחה. מהגדרה מתקיים:

$$\int\limits_{C(z_0,r)} \frac{1}{z-z_0}\ dz = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i \cdot e^{i\theta}}{z_0 + e^{i\theta} - z_0}\ d\theta = \int\limits_0^{2\pi} i\ d\theta = 2\pi i$$

■

מסקנה 1.11. תהא $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(z) := \frac{1}{z}$ (לכל $z \in \mathbb{C}^*$), ל-f אין פונקציה קדומה.

♣ למעשה ניתן להסיק יותר מזה, ל-f הנ"ל אין קדומה באף סביבה מנוקבת של 0, כל מה שעלינו לעשות הוא לקחת מעגל קטן יותר סביב 0.

טענה 1.12. יהיו $z_0 \in \mathbb{C}$ ו-$0 < r \in \mathbb{R}$ ויהי $w \in \mathbb{C}$ כך ש-$|w - z_0| \neq r$, מתקיים:

$$\int\limits_{C(z_0,r)} \frac{1}{z-w}\ dz = \begin{cases} 0 & |w-z_0| > r \\ 2\pi i & |w-z_0| < r \end{cases}$$

הוכחה.

- נניח ש-$|w - z_0| > r$ ויהי $0 < r' \in \mathbb{R}$ כך ש-$|w - z_0| > r' > r$, מכאן שתמונת המסילה $C(z_0, r)$ מוכלת ב-$B_{r'}(z_0)$ והפונקציה $z \mapsto \frac{1}{z-w}$ אנליטית על $B_{r'}(z_0)$ שהוא תחום כוכבי. ע"פ המסקנה האחרונה (1.9) מתקיים:

$$\int\limits_{C(z_0,r)} \frac{1}{z-w}\ dz = 0$$

- נניח ש-$|w - z_0| < r$, מכאן שלכל $z \in \mathbb{C}$ כך ש-$|z - z_0| = r$ מתקיים[5]:

$$\frac{z-z_0}{z-w} = \left(\frac{z-w}{z-z_0}\right)^{-1} = \left(\frac{(z-z_0)-(w-z_0)}{z-z_0}\right)^{-1} = \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

ולכן גם:

$$\frac{1}{z-w} = (z-z_0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$

כמו כל טור הנדסי מתכנס הטור הנ"ל מתכנס במידה שווה ולכן מתקיים:

$$\int\limits_{C(z_0,r)} \frac{1}{z-w}\ dz = \int\limits_{C(z_0,r)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}\ dz = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_{C(z_0,r)} \frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}\ dz\right)$$

[5] אנו משתמשים כאן בנוסחה לטור הנדסי מתכנס: לכל $q \in \mathbb{C}$ כך ש-$|q| < 1$ מתקיים:

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

לכל $1 < n \in \mathbb{N}$ לפונקציה $z \mapsto \frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$ יש קדומה ב-$B'_{2r}(z_0)$, ולכן מהמשפט היסודי נובע כי (לכל $1 < n \in \mathbb{N}$):

$$\int\limits_{C(z_0,r)} \frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}\ dz = 0$$

$$\Rightarrow \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{1}{z-w}\ dz = \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{(w-z_0)^{1-1}}{(z-z_0)^1}\ dz = \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{1}{z-z_0}\ dz = 2\pi i$$

■

משפט 1.13. נוסחת קושי

תהא f פונקציה אנליטית על קבוצה פתוחה $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ויהיו $z_0 \in \Omega$ ו-$0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש-$\hat{B}_r(z_0) \subseteq \Omega$, לכל $w \in B_r(z_0)$ מתקיים:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-w}\ dz$$

♣ כלומר הערכים ש-f מקבלת על שפת המעגל קובעים אותה ביחידות בתוך המעגל - אין עוד פונקציה אנליטית אחרת שמקבלת את אותם הערכים על השפה אך מקבלת ערכים שונים בפנים.

הוכחה. נסמן:

$$\delta := \frac{1}{2} \cdot \inf\left\{|z-w| : z \in \hat{B}_r(z_0),\ \ w \in \mathbb{C} \setminus \Omega\right\}$$

מהגדרה $\delta > 0$ משום שאחרת לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימים $z_n \in \hat{B}_r(z_0)$ ו-$w_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ כך ש-$\lim_{n\to\infty} |z_n - w_n| = 0$, $\hat{B}_r(z_0)$ היא קבוצה קומפקטית ולכן לסדרה $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ יש תת-סדרה מתכנסת שגבולה ב-$\hat{B}_r(z_0)$, מכאן שלסדרה $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ כנ"ל יש תת-סדרה המתכנסת לגבול ב-$\hat{B}_r(z_0)$ ומכיוון ש-$\mathbb{C} \setminus \Omega$ סגורה הגבול הזה נמצא בתוכה בסתירה לכך שהגבול שייך ל-Ω.

יהי $w \in B_{r+\delta}(z_0)$ ותהא $\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת ע"י (לכל $z \in \Omega$):

$$\varepsilon(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(w) & z \neq w \\ 0 & z = w \end{cases}$$

זוהי פונקציה רציפה, והיא אנליטית ב-$B_{r+\delta}(z_0)$ מלבד (אולי) ב-z_0 עצמה, מכאן שע"פ משפט האינטגרל של קושי מתקיים:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-w}\ dz &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(w) + f'(z_0)\cdot(z-w) + \varepsilon(z)\cdot(z-w)}{z-w}\ dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{z-w}\ dz + \int\limits_{C(z_0,r)} f'(z_0)\ \ dz + \int\limits_{C(z_0,r)} \varepsilon(z)\, dz \\
&= \frac{f(w)}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{1}{z-w}\ dz + 0 + 0 = \frac{f(w)}{2\pi i} \cdot 2\pi i = f(w)
\end{aligned}$$

■

מסקנה 1.14. משפט הערך הממוצע של גאוס

תהא f פונקציה אנליטית על קבוצה פתוחה $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ויהיו $z \in \Omega$ ו-$0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש-$\hat{B}_r(z) \subseteq \Omega$, מתקיים:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} f\left(z + r \cdot e^{i\theta}\right) d\theta$$

♣ המשפט נקרא "משפט הערך הממוצע" משום שהוא אומר ש-$f(z)$ הוא ממוצע הערכים של f על המעגל.

מסקנה 1.15. תהא f פונקציה אנליטית על קבוצה פתוחה $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, ויהיו $z_0 \in \Omega$ ו-$0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש-$\hat{B}_r(z_0) \subseteq \Omega$. לכל $n \in \mathbb{N}_0$ ולכל $w \in B_r(z_0)$ מתקיים:

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\, dz$$

בפרט f גזירה אין-סוף פעמים (לכל $n \in \mathbb{N}$ f גזירה n פעמים) וכל הנגזרות שלה אנליטיות על $B_r(z_0)$.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה; ראינו כבר שהטענה נכונה עבור $n = 0$ (נוסחת קושי), ולכן נעבור ישירות לצעד האינדוקציה. יהי $n \in \mathbb{N}_0$ ונניח שלכל $w \in B_r(z_0)$ מתקיים:

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\, dz$$

יהי $w_0 \in B_r(z_0)$, א"כ לכל $w_0 \neq w \in B_r(z_0)$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(n)}(w) - f^{(n)}(w_0)}{w - w_0} &= \frac{1}{w-w_0} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\, dz - \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-w_0)^{n+1}}\, dz \\
&= \frac{1}{w-w_0} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} f(z) \cdot \left(\frac{1}{(z-w)^{n+1}} - \frac{1}{(z-w_0)^{n+1}} \right) dz \\
&= \frac{1}{w-w_0} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} f(z) \cdot \frac{(z-w_0)^{n+1} - (z-w)^{n+1}}{(z-w)^{n+1}(z-w_0)^{n+1}}\, dz \\
&= \frac{1}{w-w_0} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} f(z) \cdot \frac{((z-w_0)-(z-w)) \cdot \sum_{k=0}^{n} (z-w_0)^k \cdot (z-w)^{n-k}}{(z-w)^{n+1}(z-w_0)^{n+1}}\, dz \\
&= \frac{1}{w-w_0} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} f(z) \cdot \frac{(w-w_0) \cdot \sum_{k=0}^{n} (z-w_0)^k \cdot (z-w)^{n-k}}{(z-w)^{n+1}(z-w_0)^{n+1}}\, dz \\
&= \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} f(z) \cdot \frac{\sum_{k=0}^{n} (z-w_0)^k \cdot (z-w)^{n-k}}{(z-w)^{n+1}(z-w_0)^{n+1}}\, dz
\end{aligned}$$

ומכאן שגם:

$$\begin{aligned}
&\frac{f^{(n)}(w) - f^{(n)}(w_0)}{w - w_0} - \frac{(n+1)!}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-w_0)^{n+2}}\, dz \\
=&\frac{n!}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} f(z) \cdot \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} (z-w_0)^{k+1} \cdot (z-w)^{n-k}\right) - (n+1) \cdot (z-w)^{n+1}}{(z-w)^{n+1}(z-w_0)^{n+2}}\, dz
\end{aligned}$$

תהא $(w_m)_{m=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-$B_r(z_0) \setminus \{w_0\}$ המתכנסת ל-w_0, ותהא $(g_m)_{m=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות ע"י (לכל $m \in \mathbb{N}$ ולכל $z \in \partial B_r(z_0)$):

$$g_m(z) := f(z) \cdot \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} (z-w_0)^{k+1} \cdot (z-w)^{n-k}\right) - (n+1) \cdot (z-w)^{n+1}}{(z-w)^{n+1}(z-w_0)^{n+2}}$$

נסמן:

$$M := \max_{z \in \partial B_r(z_0)} \left| \frac{f(z)}{(z-w_0)^{2n+3}} \right|$$

לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<m\in\mathbb{N}$, לכל $n\geq k\in\mathbb{N}_0$ ולכל $z\in\partial B_r(z_0)$ יתקיים[6]:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z)}{(z-w_m)^{n+1}(z-w_0)^{n+2}}\right| &< M+1\\ \left|(z-w_m)^{n-k}-(z-w_0)^{n-k}\right| &< \frac{\varepsilon}{2n\cdot(M+1)}\\ \left|\sum_{k=0}^{n}(z-w_0)^{k+1}\cdot(z-w)^{n-k}-(n+1)\cdot(z-w_0)^{n-k}\right| &< \frac{\varepsilon}{2\cdot(M+1)}\\ \left|(n+1)\cdot(z-w)^{n+1}-(n+1)\cdot(z-w_0)^{n-k}\right| &< \frac{\varepsilon}{2\cdot(M+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|g_m(z)| &= \left|f(z)\cdot\frac{\left(\sum_{k=0}^{n}(z-w_0)^{k+1}\cdot(z-w)^{n-k}\right)-(n+1)\cdot(z-w)^{n+1}}{(z-w)^{n+1}(z-w_0)^{n+2}}\right|\\ &< \frac{\varepsilon}{M+1}\cdot(M+1)=\varepsilon\end{aligned}$$

מכאן ש-$(g_m)_{m=1}^{\infty}$ מתכנסת במ״ש לפונקציית האפס ולכן:

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\left(\frac{f^{(n)}(w_m)-f^{(n)}(w_0)}{w_m-w_0}-\frac{(n+1)!}{2\pi i}\cdot\int\limits_{C(z_0,r)}\frac{f(z)}{(z-w_0)^{n+2}}\,dz\right)\\ =&\lim_{m\to\infty}\left(\frac{n!}{2\pi i}\cdot\int\limits_{C(z_0,r)}g_m(z)\,dz\right)=\frac{n!}{2\pi i}\cdot\lim_{m\to\infty}\int\limits_{C(z_0,r)}g_m(z)\,dz\\ =&\frac{n!}{2\pi i}\cdot\int\limits_{C(z_0,r)}0\;dz=0\end{aligned}$$

$(w_m)_{m=1}^{\infty}$ הייתה סדרה שרירותית ולכן הנ״ל נכון לכל סדרה ב-$B_r(z_0)\setminus\{w_0\}$ המתכנסת ל-w_0, מאפיון היינה לגבול של פונקציה בנקודה נובע כי:

$$f^{(n+1)}(w_0)=\lim_{w\to w_0}\frac{f^{(n)}(w)-f^{(n)}(w_0)}{w-w_0}=\frac{(n+1)!}{2\pi i}\cdot\int\limits_{C(z_0,r)}\frac{f(z)}{(z-w_0)^{n+2}}\,dz$$

■

מסקנה 1.16. תהא f פונקציה המוגדרת על קבוצה פתוחה $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, אם יש ל-$f$ פונקציה קדומה ב-Ω אז f אנליטית על Ω.

1.3 המסקנות מנוסחת קושי

משפט 1.17. משפט מורה (Morera)[7]

תהא f פונקציה רציפה על קבוצה פתוחה $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, אם לכל $z_1,z_2,z_3\in\Omega$ כך ש-$\Delta(z_1,z_2,z_3)\subseteq\Omega$ מתקיים:

$$\int\limits_{T(z_1,z_2,z_3)}f(z)\,dz=0$$

אז f אנליטית על Ω.

הוכחה. במשפט 1.8 אמנם דרשנו ש-f תהיה אנליטית וש-Ω יהיה תחום כוכבי, אך למעשה השתמשנו רק בעובדה ש-f רציפה ומקיימת

[6] השורה השנייה גוררת את השלישית, וכל הארבע הראשונות גוררות את הא״ש האחרון.

[7] ערך בוויקיפדיה האנגלית Morera Giacinto.

את משפט האינטגרל של קושי על תחום כוכבי. משפט מוררה דורש בדיוק את הדרישות הללו עבור Ω שאינו בהכרח תחום כוכבי ו/או קשיר, מכאן שעבור כל תחום כוכבי $\Omega' \subseteq \Omega$ יש ל-f פונקציה קדומה ב-Ω'. בפרט לכל $z \in \Omega$ ולכל $0 < r \in \mathbb{R}$ ל-f יש קדומה ב-$B_r(z)$, ומכאן שע״פ מסקנה 1.16 f אנליטית בכל נקודה $z \in \Omega$, כלומר f אנליטית על Ω. ■

מסקנה 1.18. תהא f פונקציה רציפה בקבוצה פתוחה $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, אם f אנליטית בכל נקודה ב-Ω מלבד מספר סופי של נקודות אז f אנליטית על Ω.

מסקנה 1.19. תהא f פונקציה רציפה על תחום פשוט קשר אנליטית $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, f אנליטית ב-Ω אם״ם לכל מסילה סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין $\gamma : I \to \Omega$ מתקיים:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

מסקנה 1.20. תהא $(f_n)_{n=1}^\infty$ סדרת פונקציות אנליטיות על תחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ המתכנסת במ״ש לפונקציה f בכל תת-קבוצה קומפקטית של Ω. f אנליטית על Ω ולכל $z \in \Omega$ ו-$k \in \mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$f^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} {f_n}^{(k)}(z)$$

וסדרת הנגזרות $\left({f_n}^{(k)}\right)_{n=1}^\infty$ מתכנסת במ״ש ל-$f^{(k)}$ על כל תת-קבוצה קומפקטית של Ω.
באופן דומה, יהי $\sum_{n=1}^\infty u_n(z)$ טור פונקציות אנליטיות על תחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ המתכנס במ״ש לפונקציה S בכל תת-קבוצה קומפקטית של Ω. S אנליטית על Ω ולכל $z \in \Omega$ ו-$k \in \mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\left(\sum_{n=1}^\infty u_n(z)\right)^{(k)} = S^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^\infty {u_n}^{(k)}(z)$$

ו-$\sum_{n=1}^\infty {u_n}^{(k)}(z)$ מתכנס במ״ש ל-$S^{(k)}$ על כל תת-קבוצה קומפקטית של Ω.

♣ המשפט האחרון חזק הרבה יותר מהמשפט המקביל לו בממשיים שבו דרשנו מראש ש-$(f_n')_{n=1}^\infty$ מתכנסת במ״ש, הסיבה לכך היא שבעוד שבממשיים הנגזרת יכולה ״להשתולל״ גם אם הפונקציה המקורית חסומה ואפילו שואפת ל-0 באין-סוף, במרוכבים דרישת הגזירות חזקה הרבה יותר וכפי שכבר ראינו כל פונקציה אנליטית גזירה אין-סוף פעמים והנגזרות שלה נקבעות באופן מפורש לפי ערכיה.

♣ בגלל היותו של המשפט האחרון חזק כל כך נקבל תוצאה שנבצר ממנו לקבל בממשיים: כל פונקציה גזירה בסביבה של נקודה ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב אותה נקודה![8]

משפט 1.21. תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, תהא $z_0 \in \Omega$ ויהי $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש-$\hat{B}_r(z_0) \subseteq \Omega$.
לכל $z \in B_r(z_0)$ מתקיים:

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n$$

וההתכנסות של טור זה ל-f היא בהחלט במ״ש על כל תת-קבוצה קומפקטית של $B_r(z_0)$.

[8] זו הסיבה שמראש קראנו לפונקציה כזו **אנליטית** בנקודה.

הוכחה. יהי $w \in B_r(z_0)$, ע״פ נוסחת קושי מתקיים:

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-w}\ dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)-(w-z_0)}\ dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}\ dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\ dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z-z_0} \cdot \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\ dz \end{aligned}$$

נסמן $M := \max\left\{|f(z)| : z \in \hat{B}_r(z_0)\right\}$, מכאן שלכל $z \in B_r(z)$ וכל $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים:

$$\left|\frac{f(z)}{z-z_0} \cdot \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\right| \leq \frac{M}{r} \cdot \frac{|w-z_0|^n}{r^n}$$

כלומר איברי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z-z_0} \cdot \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\ dz$ חסומים ע״י האיברים של טור הנדסי מתכנס, ולכן ממשפט ה-M של ויירשטראס הוא מתכנס בהחלט במ״ש.

$$\Rightarrow f(w) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z-z_0} \cdot \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\ dz = \sum_{n=0}^{\infty} (w-z_0)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\ dz$$

ולכן מנוסחת קושי לנגזרות נקבל:

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (w-z_0)^n$$

■

טענה 1.22. תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, לכל $z \in \Omega$ ולכל $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש-$B_r(z) \subseteq \Omega$ מתקיים (לכל $n \in \mathbb{N}_0$):

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \max_{\theta \in [0,2\pi]} \left|f\left(z + r \cdot e^{i\theta}\right)\right|$$

משפט 1.23. משפט ליוביל[9]

כל פונקציה שלמה וחסומה היא פונקציה קבועה.

משפט 1.24. תהא f פונקציה שלמה, אם קיימים $C \in \mathbb{R}$ ו-$n \in \mathbb{N}$ המקיימים $|f(z)| \leq C \cdot (|z|^n + 1)$ לכל $z \in \mathbb{C}$ אז f היא פונקציה פולינומיאלית שדרגתה היא n לכל היותר.

♣ ניתן להחליף את n בכל מספר $0 < d \in \mathbb{R}$ ואז הדרגה של f קטנה או שווה ל-$\lfloor d \rfloor$.

משפט 1.25. המשפט היסודי של האלגברה

לכל פולינום ב-$\mathbb{C}[z]$ שאינו קבוע יש שורש מרוכב.

מסקנה 1.26. יהי $p \in \mathbb{C}[z]$ פולינום ונסמן $n := \deg p$, קיימים $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ כך שמתקיים:

$$p(z) = (z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$$

למה 1.27. תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$, ל-f יש אפס מסדר $n \in \mathbb{N}$ בנקודה $z_0 \in \Omega$ אם״ם קיים $0 < r \in \mathbb{R}$ וקיימת פונקציה אנליטית $g : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ כך ש-$g(z_0) \neq 0$ ו-$f(z) = g(z) \cdot (z-z_0)^n$ לכל $z \in B_r(z_0)$.

♣ בפרט עבור פולינום $p \in \mathbb{C}[z]$, לכל שורש $z_0 \in \mathbb{C}$ של p יש ל-p אפס מסדר n ב-z_0 כאשר n הוא הריבוי של השורש z_0.

[9] ערך בוויקיפדיה: ז׳וזף ליוביל.

משפט 1.28. יהי $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f : \Omega \to \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית, אם f אינה פונקציית האפס אז לכל $z \in Z(f)$ יש ל-f אפס מסדר סופי ב-z[10].

מסקנה 1.29. יהי $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f : \Omega \to \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית, אם f אינה פונקציית האפס אז ל-$Z(f)$ אין נקודות הצטברות ב-Ω.

מסקנה 1.30. משפט היחידות
תהיינה f ו-g פונקציות אנליטיות על תחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, אם לקבוצה $\{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$ יש נקודת הצטברות ב-Ω אז $f(z) = g(z)$ לכל $z \in \Omega$.

משפט 1.31. עקרון המקסימום
תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

1. אם ל-f יש מקסימום מקומי חלש אז f קבועה.
2. אם f לא קבועה אז $|f|$ אינה מקבלת מקסימום ב-Ω.
3. אם Ω חסום ו-f ניתנת להרחבה רציפה על $\overline{\Omega}$ אז $\left|\bar{f}\right|$[11] מקבלת מקסימום על $\partial\Omega$.

מסקנה 1.32. עקרון המינימום
תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

1. אם f אינה מתאפסת באף נקודה ב-Ω ויש לה מינימום מקומי חלש אז f קבועה.
2. אם ל-f יש מינימום מקומי חלש והיא אינה קבועה אז קיימת נקודה ב-Ω שבה f מתאפסת.
   כמו כן אם f אינה מתאפסת באף נקודה ב-Ω והיא אינה קבועה אז $|f|$ אינה מקבלת מינימום ב-Ω.
3. אם Ω חסום ו-f פונקציה הניתנת להרחבה רציפה על $\overline{\Omega}$ אז $\left|\bar{f}\right|$ מקבלת מינימום על $\partial\Omega$ ו/או קיימת נקודה ב-Ω שבה f מתאפסת.

מסקנה 1.33. תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ שאינה קבועה וניתנת להרחבה רציפה על $\overline{\Omega}$, אם קיים $z \in \Omega$ כך שלכל $w \in \partial\Omega$ מתקיים $|f(z)| \leq \left|\bar{f}(w)\right|$ אז קיימת נקודה ב-Ω שבה f מתאפסת.

משפט 1.34. תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, אם f אינה קבועה אז ל-$\mathrm{Re}f$ ול-$\mathrm{Im}f$ אין מקסימום מקומי חלש ב-Ω.

משפט 1.35. עקרון Phragmén–Lindelöf[12]
נסמן $\Omega := \left\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < \frac{1}{2}\right\}$ ותהא f פונקציה אנליטית על Ω הניתנת להרחבה רציפה על $\overline{\Omega}$ ומקיימת $\left|f\left(\pm\frac{1}{2} + iy\right)\right| \leq 1$ לכל $y \in \mathbb{R}$. אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $z \in \Omega$ מתקיים $|f(z)| \leq M$ אז $|f(z)| \leq 1$ לכל $z \in \Omega$.

2 לוגריתמים וארגומנטים

2.1 הגדרות

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש-$a < b$.

[10] קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שיש ל-f אפס מסדר n ב-z.
[11] $\bar{f}$ היא ההרחבה הרציפה של f ל-$\overline{\Omega}$ ו-$\left|\bar{f}\right|$ היא הפונקציה המתקבלת ע"י הרכבת הערך המוחלט על $\bar{f}$.
[12] ערכים בוויקיפדיה האנגלית: Phragmén Edvard Lars ו-Lindelöf Leonard Ernst.

♣ החיסרון שביכולת לקבוע מהו הארגומנט של נקודה במישור המרוכב באופן רציף מהווה יתרון בתחום אחר: בהינתן מסילה סגורה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ ונקודה $z_0\in\mathbb{C}$ שאינה בתמונה של γ היינו רוצים להגדיר את מספר הפעמים ש-γ "מקיפה" את z_0, ראינו בקובץ הטענות שלמסילה $\gamma-z_0$ יש ארגומנט רציף ולכן נוכל להשתמש בו כדי לקבוע את מספר הסיבובים - הערכים שהארגומנט מחזיר עבור a ו-b צריכים לייצג את אותה זווית (כי $\gamma(a)=\gamma(b)$) ולכן ההפרש ביניהם צריך להיות כפולה שלמה של 2π! כדי להבין מדוע אותה כפולה של 2π היא מספר הסיבובים המבוקש נניח ש-$z_0=0$, הארגומנט מחזיר ערכים עבור נקודות ב-$[a,b]$, כאשר γ מסתובבת נגד כיוון השעון הערכים הולכים וגדלים ואם פתאום תחזור γ בכיוון ההפוך הם ילכו ויקטנו; אבל מתי הארגומנט יחזיר את 2π? בדיוק כאשר נגיע לנקודה שנמצאת על אותה קרן שמכילה את $\gamma(a)$ ולאחר שסיימנו הקפה שלמה סביב הראשית.

משפט. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה סגורה, יהי $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש-$z_0\notin\gamma^*$ ויהיו θ_1 ו-θ_2 ארגומנטים רציפים של המסילה $\gamma-z_0$.

$$\Rightarrow\frac{\theta_1(b)-\theta_1(a)}{2\pi}=\frac{\theta_2(b)-\theta_2(a)}{2\pi}\in\mathbb{Z}$$

הגדרה 2.1. אינדקס של מסילה סביב נקודה

תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה סגורה, <u>האינדקס</u> של γ <u>סביב</u> נקודה $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש-$z_0\notin\gamma^*$ הוא:

$$\operatorname{Ind}(\gamma,z_0):=n(\gamma,z_0):=\frac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}$$

כאשר θ הוא ארגומנט רציף של המסילה $\gamma-z_0$.

הגדרה 2.2. הומוטופיה

תהא $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה פתוחה, יהיו a_0,b_0,a_1,b_1 כך ש-$a_0<b_0$ ו-$a_1<b_1$, ותהיינה $\gamma_0:[a_0,b_0]\to\Omega$ ו-$\gamma_1:[a_1,b_1]\to\Omega$ מסילות סגורות.

נאמר ש-γ_0 ו-γ_1 <u>הומוטופיות</u> ב-Ω אם קיימת פונקציה רציפה $H:[0,1]\times[0,1]\to\Omega$ (שתיקרא <u>הומוטופיה</u>), כך שלכל $s,t\in[0,1]$ מתקיים:

$$\begin{aligned}H(s,0)&=H(s,1)\\H(0,t)&=\gamma_0((1-t)\cdot a_0+t\cdot b_0)\\H(1,t)&=\gamma_1((1-t)\cdot a_1+t\cdot b_1)\end{aligned}$$

כלומר לכל $s\in[0,1]$ הפונקציה $t\mapsto H(s,t)$ היא מסילה סגורה, ובנוסף הפונקציות $t\mapsto H(0,t)$ ו-$t\mapsto H(1,t)$ הן γ_0 ו-γ_1 בהתאמה.

♣ הומוטופיות הוא יחס שקילות.

♣ הדרך הכי פשוטה לבנות הומוטופיה על שתי מסילות היא ע"י (לכל $(s,t)\in[0,1]\times[0,1]$):

$$H(s,t):=(1-s)\cdot\gamma_0((1-t)\cdot a_0+t\cdot b_0)+s\cdot\gamma_1((1-t)\cdot a_1+t\cdot b_1)$$

הגדרה 2.3. תחום פשוט קשר (טופולוגית)

נאמר שתחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ הוא <u>פשוט קשר</u> אם כל מסילה $\gamma:[a,b]\to\Omega$ הומוטופית ב-Ω למסילה קבועה.

♣ מבחינה אינטואיטיבית זה אומר שאין ב-Ω "חורים" - אם יש נקודה שאינה ב-Ω ו-Ω "מקיף" אותה אז יש ב-Ω מסילה שמקיפה את אותה נקודה, ומסילה כזו אינה ניתנת ל"כיווץ" לכדי נקודה.

הגדרה 2.4. תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ייקרא <u>פשוט קשר אנליטית</u> אם לכל פונקציה אנליטית $f:\Omega\to\mathbb{C}$ יש קדומה.

♣ זהו מונח לא סטנדרטי אך הוא יהיה שימושי ובקובץ הטענות אנחנו נראה שכל תחום פשוט קשר (טופולוגית) הוא תחום פשוט קשר אנליטית, ונזכיר שגם הכיוון ההפוך נכון אך לא נוכיח זאת.

טענה 2.5. תהא f פונקציה רציפה; אם פונקציה g היא לוגריתם רציף של f אז $\mathrm{Im}g$ היא ארגומנט רציף של f, ואם פונקציה θ היא ארגומנט רציף של f אז $\ln|f|+i\theta$ היא לוגריתם רציף של f.

מסקנה 2.6. לפונקציה רציפה יש לוגריתם רציף אם״ם יש לה ארגומנט רציף.

טענה 2.7. תהא $A\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה קשירה ותהא $f:A\to\mathbb{C}$ פונקציה בעלת לוגריתמים רציפים g_1 ו-g_2 ובעלת ארגומנטים רציפים θ_1 ו-θ_2. קיימים $l,k\in\mathbb{Z}$ כך שלכל $z\in A$ מתקיים $g_1(z)-g_2(z)=2\pi ik$ ו-$\theta_1(z)-\theta_2(z)=2\pi l$.

טענה 2.8. תהא $A\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה קשירה ותהא $f:A\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה בעלת לוגריתם רציף g ובעלת ארגומנט רציף θ, לכל $z,w\in A$ מתקיים:

$$g(z)-g(w)=(\ln|f(z)|-\ln|f(w)|)+i\cdot(\theta(z)-\theta(w))$$

משפט 2.9. לכל קטע סגור $I\subseteq\mathbb{R}$ ולכל מסילה $\gamma:I\to\mathbb{C}^*$[13] יש לוגריתם רציף (וממילא גם ארגומנט רציף).

משפט 2.10. תהא $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה פתוחה ותהא $f:\Omega\to\mathbb{C}^*$ פונקציה אנליטית, כל לוגריתם רציף של f הוא לוגריתם אנליטי שלה (וכמובן שגם ההפך נכון).

משפט 2.11. תהא $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה פתוחה ותהא $f:\Omega\to\mathbb{C}^*$ פונקציה אנליטית, ל-f יש לוגריתם רציף (אנליטי) אם״ם לפונקציה $\frac{f'}{f}$ יש קדומה ב-Ω.

♣ הפונקציה $\frac{f'}{f}$ נקראת <u>הנגזרת הלוגריתמית</u> של f.

♣ כפי שראינו הקיום של פונקציה קדומה ל-$\frac{f'}{f}$ שקול לכך שלכל מסילה סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין $\gamma:I\to\Omega$ מתקיים:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=0$$

מסקנה 2.12. לכל פונקציה אנליטית על תחום פשוט קשר אנליטית שאינה מתאפסת בתחום זה יש לוגריתם רציף (אנליטי).

3 אינדקסים של מסילות

3.1 הגדרות

הגדרה 3.1. נאמר שקבוצה $S\subseteq\mathbb{C}$ היא <u>קבוצה כוכבית</u> אם קיים $z\in S$ כך שלכל $w\in S$ התמונה של המסילה $I(w,z)$ מוכלת ב-S, ובמקרה כזה נאמר ש-S <u>כוכבית ביחס</u> ל-z.

הגדרה 3.2. נקודת הצטברות
נאמר שנקודה $z\in\mathbb{C}$ היא <u>נקודת הצטברות</u> של קבוצה $A\subseteq\mathbb{C}$ אם לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיימת נקודה $a\in A$ כך ש-$a\in B_\varepsilon(z)$.

טענה. תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ שאינה פונקציית האפס, לכל $z\in\Omega$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$f^{(n)}(z)\neq 0$.

הגדרה 3.3. תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ שאינה פונקציית האפס. נאמר ל-f יש <u>אפס מסדר</u> $n\in\mathbb{N}$ בנקודה $z\in\Omega$ אם $f^{(n)}(z)\neq 0$ ולכל $n>k\in\mathbb{N}$ מתקיים $f^{(k)}(z)=0$, כמו כן נאמר ל-f יש <u>אפס פשוט</u> בנקודה $z\in\Omega$ אם יש לה אפס מסדר 1 ב-z.

הגדרה 3.4. קבוצת האפסים של פונקציה
לכל פונקציה $f:\Omega\to\mathbb{C}$ נסמן $Z(f):=\{z\in\Omega:f(z)=0\}$ ונקרא ל-$Z(f)$ <u>קבוצת האפסים</u> של f.

[13] אנו מסתכלים כאן על $\mathbb{R}$ כתת-קבוצה של $\mathbb{C}$ ולכן ניתן להתבונן ב-γ כפונקציה מרוכבת.

הגדרה 3.5. הרחבה רציפה של פונקציה
תהא $f : A \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה ותהא $\Omega \subseteq A$ תת-קבוצה חסומה, נאמר ש-f <u>ניתנת להרחבה רציפה</u> על $\overline{\Omega}$ אם קיימת פונקציה רציפה $\bar{f} : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ כך שלכל $z \in \Omega$ מתקיים $\bar{f}(z) = f(z)$.

♣ אני אסמן ב-$\overline{f}$ את ההרחבה הרציפה של פונקציה f, אני לא יודע אם זה סימון מקובל או לא.

הגדרה 3.6. תהא $f : \Omega \to \mathbb{C}$ פונקציה. נאמר של-f יש <u>מקסימום מקומי חלש</u> בנקודה $z_0 \in \Omega$ אם קיים $0 < r \in \mathbb{R}$ כך שלכל $z \in B_r(z_0)$ מתקיים $|f(z_0)| \geq |f(z)|$,
כמו כן נאמר של-f יש <u>מינימום מקומי חלש</u> בנקודה $z_0 \in \Omega$ אם קיים $0 < r \in \mathbb{R}$ כך שלכל $z \in B_r(z_0)$ מתקיים $|f(z_0)| \geq |f(z)|$.

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$.

משפט 3.7. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה סגורה, יהי $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש-$z_0\notin\gamma^*$[14] ויהיו θ_1 ו-θ_2 ארגומנטים רציפים של המסילה $\gamma-z_0$[15]. מתקיים:

$$\frac{\theta_1(b)-\theta_1(a)}{2\pi}=\frac{\theta_2(b)-\theta_2(a)}{2\pi}\in\mathbb{Z}$$

משפט 3.8. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין, לכל $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש-$z_0\notin\gamma^*$ מתקיים:

$$\operatorname{Ind}(\gamma,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\gamma}\frac{1}{z-z_0}\,dz$$

מסקנה 3.9. תהא f פונקציה אנליטית על קבוצה פתוחה $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ותהא $\gamma:[a,b]\to\Omega$ מסילה סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין, לכל $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש-$z_0\notin(f\circ\gamma)^*$ מתקיים:

$$\operatorname{Ind}(f\circ\gamma,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-z_0}\,dz$$

מסקנה 3.10. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה סגורה ויהיו $z_0\in\mathbb{C}$ ו-$0<r\in\mathbb{R}$ כך ש-$\gamma^*\subseteq B_r(z_0)$[16]; לכל $z\in\mathbb{C}$ כך ש-$z\notin B_r(z_0)$ מתקיים $\operatorname{Ind}(\gamma,z)=0$.

טענה 3.11. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה סגורה, לכל $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש-$z_0\notin\gamma^*$ ולכל $w_0\in\mathbb{C}$ מתקיים $\operatorname{Ind}(\gamma,z_0)=\operatorname{Ind}(\gamma+w_0,z_0+w_0)$; כלומר האינדקס אינווריאנטי להזזות.

משפט 3.12. תהיינה $\gamma_1,\gamma_2:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילות סגורות, מתקיימים שני הפסוקים הבאים:

- לכל $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש-$z_0\notin\gamma_1^*\cup\gamma_2^*$ מתקיים $\operatorname{Ind}(\gamma_1\cdot\gamma_2,z_0)=\operatorname{Ind}(\gamma_1,z_0)+\operatorname{Ind}(\gamma_2,z_0)$.
- אם $0\notin\gamma_2^*$ אז לכל $z\in\mathbb{C}$ כך ש-$z_0\notin\gamma_1^*\cup\gamma_2^*$ מתקיים גם $\operatorname{Ind}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2},z_0\right)=\operatorname{Ind}(\gamma_1,z_0)-\operatorname{Ind}(\gamma_2,z_0)$.

משפט 3.13. למת הולכת הכלב (הגרסה החלשה)
תהיינה $\gamma_1,\gamma_2:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילות סגורות ויהי $z_0\in\mathbb{C}$, אם $|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)|<|\gamma_1(t)-z_0|$ לכל $t\in[a,b]$ אז $z_0\notin\gamma_1^*\cup\gamma_2^*$ ומתקיים:

$$\operatorname{Ind}(\gamma_1,z_0)=\operatorname{Ind}(\gamma_2,z_0)$$

♣ הקשר להולכת כלבים הוא כזה: נניח שאתם מוציאים את הכלב שלכם לטיול, אם לאורך כל הטיול המרחק שלכם מכל עמוד בדרך גדול יותר מאורך הרצועה אז לכל עמוד ברחוב, מספר הפעמים שהקפתם אותו שווה למספר הפעמים שהקיף אותו הכלב. אנלוגיה אחרת למשפט היא שבמהלך כל n שנים הירח הקיף את השמש בדיוק n פעמים.

משפט 3.14. למת הולכת הכלב (הגרסה החזקה)
תהיינה $\gamma_1,\gamma_2:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילות סגורות ויהי $z_0\in\mathbb{C}$, אם $|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)|<|\gamma_1(t)-z_0|+|\gamma_2(t)-z_0|$ לכל $t\in[a,b]$ אז $z_0\notin\gamma_1^*\cup\gamma_2^*$ ומתקיים:

$$\operatorname{Ind}(\gamma_1,z_0)=\operatorname{Ind}(\gamma_2,z_0)$$

תזכורת: ראינו שלכל מסילה סגורה γ, התמונה של γ^* היא קבוצה קומפקטית ולכן $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ היא קבוצה פתוחה שיש לה רכיב קשירות אחד בדיוק שאינו חסום.

משפט 3.15. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה סגורה, לכל שתי נקודות $z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ כך ש-z_1 ו-z_2 נמצאים באותו רכיב קשירות של $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ מתקיים $\operatorname{Ind}(\gamma,z_1)=\operatorname{Ind}(\gamma,z_2)$; כמו כן לכל z_0 ברכיב הקשירות של $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ שאינו חסום מתקיים $\operatorname{Ind}(\gamma,z_0)=0$.

[14] התמונה של γ היא קבוצה קומפקטית ובפרט חסומה.
[15] ע"פ משפט 2.9 אכן יש ל-$\gamma-z_0$ ארגומנטים רציפים.
[16] שוב: התמונה של γ היא קבוצה קומפקטית ובפרט חסומה.

משפט 3.16. תהא $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה, ותהיינה γ_0 ו-γ_1 שתי מסילות הומוטופיות ב-Ω; לכל $z \in \mathbb{C}$ כך ש-$z \notin \Omega$ מתקיים $\operatorname{Ind}(\gamma_0, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, z)$.

משפט 3.17. יהי $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ תחום, Ω הוא פשוט קשר אנליטית אם״ם לכל מסילה גזירה ברציפות למקוטעין $\gamma : [a,b] \to \Omega$ ולכל $z \in \mathbb{C}$ כך ש-$z \notin \Omega$ מתקיים $\operatorname{Ind}(\gamma, z) = 0$.

מסקנה 3.18. כל תחום פשוט קשר (טופולוגית) הוא תחום פשוט קשר אנליטית.

♣ אילון אמר שגם הכיוון ההפוך נכון אך לא הוכחנו זאת בכיתה, ההוכחה מסתמכת על הטענה הבאה (שכן ראינו בכיתה) ועל משפט ההעתקה של רימן (שלא הוכחנו).

טענה 3.19. כל תחום כוכבי הוא תחום פשוט קשר.

4 הכללת משפט קושי ונוסחת קושי

4.1 הגדרות

הגדרה 4.1. מולטי-מסילה היא קבוצה מהצורה $\{(n_1,\gamma_1),(n_2,\gamma_2),\ldots,(n_k,\gamma_k)\}$ כך ש-$n_i \in \mathbb{Z}$[17] ו-γ_i היא מסילה סגורה לכל $k \geq i \in \mathbb{N}$.

♣ אינטואיטיבית מולטי-מסילה $\{(n_1,\gamma_1),(n_2,\gamma_2),\ldots,(n_k,\gamma_k)\}$ היא חיבור של k מסילות כשלכל $k \geq i \in \mathbb{N}$ המסילה (n_i,γ_i) היא המסילה γ_i כשהיא מחוברת לעצמה n_i פעמים (אם $n_i < 0$ הכוונה היא לחיבור של המסילה ההפוכה לעצמה $-n_i$ פעמים). מסיבה זו נסמן מולטי-מסילה כנ״ל ע״י:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \gamma_i$$

זהו סימון בלבד! בפרט לא מדובר בפונקציה המוגדרת ע״י סכום המסילות.

♣ לו היינו רוצים ממש לפרמל את הרעיון הזה היינו צריכים לקשר בין המסילות ע״י מתיחת קווים ישרים מאחת לאחרת כדי להפוך אותן למסילה סגורה אחת, במקום לעשות זאת אנחנו מגדירים מושג חדש ומגדירים עבורו את כל המושגים המתייחסים למסילות כך שיתאימו לרעיון האינטואיטיבי.

לא מצאתי שום אזכור של מולטי-מסילות ברשת, אם מישהו מצא אשמח לשמוע על כך.

הגדרה 4.2. תהא $\gamma := \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \gamma_i$ מולטי-מסילה.

- התמונה של γ היא $\gamma^* := \bigcup_{i=1}^{k} \gamma_i^*$.
- האינדקס של γ עבור נקודה $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ הוא:

$$\operatorname{Ind}(\gamma, w) := n(\gamma, w) := \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \operatorname{Ind}(\gamma_i, w)$$

- נאמר ש-γ גזירה ברציפות למקוטעין אם γ_i גזירה ברציפות למקוטעין לכל $k \geq i \in \mathbb{N}$
- נניח ש-γ גזירה ברציפות למקוטעין, תהא $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה כך ש-$\gamma^* \subseteq \Omega$, ותהא f פונקציה רציפה על Ω. האינטגרל של f לאורך γ הוא:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz := \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \int_{\gamma_i} f(z)\,dz$$

[17] האם ייתכן ש-$n_i = 0$?

אילון לא הגדיר תמונה של מולטי-מסילה ואת היותה גזירה ברציפות למקוטעין אך המינוח הזה יהיה שימושי בעתיד וסביר להניח שכולנו מבינים למה הכוונה.

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$.

למה 4.3. יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $F:\Omega\times[a,b]\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה, תהא $G:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $z\in\Omega$):

$$G(z):=\int_a^b F(z,t)\,dt$$

ולכל $t\in[a,b]$ נסמן ב-F_t את הפונקציה המוגדרת ע"י $F_t(z):=F(z,t)$ לכל $z\in\Omega$.

אם F_t אנליטית על Ω לכל $t\in[a,b]$ אז G אנליטית גם היא על Ω ולכל $z\in\Omega$ מתקיים:

$$G'(z)=\int_a^b F_t'(z)\,dt$$

למה 4.4. תהא f פונקציה אנליטית על תחום Ω, ותהא $F:\Omega\times\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה המוגדרת ע"י (לכל $(z,w)\in\Omega\times\Omega$):

$$F(z,w):=\begin{cases}\frac{f(z)-f(w)}{z-w} & z\neq w\\ f'(z) & z=w\end{cases}$$

לכל $w\in\Omega$ נסמן ב-F_w את הפונקציה המוגדרת ע"י $F_w(z):=F(z,w)$ לכל $z\in\Omega$.

F היא פונקציה רציפה ו-F_w היא פונקציה אנליטית על Ω לכל $w\in\Omega$.

משפט 4.5. הכללת משפט קושי ונוסחת קושי

יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום, תהא $\gamma:[a,b]\to\Omega$ מסילה סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין כך ש-$\operatorname{Ind}(\gamma,z)=0$ לכל $z\in\mathbb{C}$ כך ש-$z\notin\Omega$.

לכל פונקציה אנליטית $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ולכל $w\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ מתקיים:

- משפט קושי הכללי -

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0$$

- נוסחת קושי הכללית -

$$\operatorname{Ind}(\gamma,w)\cdot f(w)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\gamma\frac{f(z)}{z-w}\,dz$$

מסקנה 4.6. משפט קושי ונוסחת קושי עבור מולטי-מסילות

יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום, ותהא γ מולטי-מסילה גזירה ברציפות למקוטעין כך ש-$\gamma^*\subseteq\Omega$ ו-$\operatorname{Ind}(\gamma,z)=0$ לכל $z\in\mathbb{C}$ כך ש-$z\notin\Omega$.

לכל פונקציה אנליטית $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ולכל $w\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ מתקיים:

- משפט קושי הכללי -

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0$$

- נוסחת קושי הכללית -

$$\operatorname{Ind}(\gamma,w)\cdot f(w)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\gamma\frac{f(z)}{z-w}\,dz$$

מסקנה 4.7. הכללת נוסחת קושי לנגזרות

יהי יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום, ותהא γ מסילה (או מולטי-מסילה) סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין, כך ש-$\gamma^*\subseteq\Omega$ ו-$\operatorname{Ind}(\gamma,z)=0$ לכל $z\in\mathbb{C}$ כך ש-$z\notin\Omega$.

לכל פונקציה אנליטית $f:\Omega\to\mathbb{C}$, לכל $w\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*$, ולכל $n\in\mathbb{N}_0$, מתקיים:

$$\operatorname{Ind}(\gamma,w)\cdot f^{(n)}(w)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\gamma\frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,dz$$

5 טורי לורן

5.1 הגדרות

סימון: לכל $0 \leq r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r_2$ ולכל $z_0 \in \mathbb{C}$ נסמן $A(z_0, r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, קבוצה מצורה זו תיקרא טבעת.

♣ במקרה שבו $r_1 = 0$ נקבל ש-$A(z_0, r_1, r_2)$ היא הסביבה המנוקבת $B'_{r_2}(z_0)$.

למה. יהי $z_0 \in \mathbb{C}$, יהיו $0 \leq r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r_2$, ותהא f פונקציה אנליטית על $A(z_0, r_1, r_2)$.
לכל $R, \tilde{R} \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < R < \tilde{R} < r_2$ ולכל $w \in A\left(z_0, R, \tilde{R}\right)$ מתקיים:

$$f(w) = \int\limits_{C\left(z_0, \tilde{R}\right)} \frac{f(z)}{z - w}\, dz - \int\limits_{C(z_0, R)} \frac{f(z)}{z - w}\, dz$$

סימון: תהא $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$[18] סדרת מספרים מרוכבים, נסמן:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$$

משפט. יהי $z_0 \in \mathbb{C}$, יהיו $0 \leq r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r_2$, ותהא f פונקציה אנליטית על $A(z_0, r_1, r_2)$.
קיימת סדרת מספרים מרוכבים $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ יחידה כך שמתקיים (לכל $z \in A(z_0, r_1, r_2)$):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

"טור" זה מתכנס בהחלט במ"ש[19] על תתי-קבוצות קומפקטיות של $A(z_0, r_1, r_2)$, והמקדמים בטור הם (לכל $n \in \mathbb{Z}$ ולכל $r \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r < r_2$):

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

הגדרה 5.1. טורי לורן[20]
ההצגה הנ"ל של פונקציה אנליטית על טבעת נקראת הפיתוח של הפונקציה לטור לורן סביב מרכז הטבעת[21]

♣ אם הפונקציה אנליטית על כל הדיסק ולא רק בטבעת אז טור לורן של הפונקציה הוא פשוט טור טיילור שלה (כל המקדמים בעלי אינדקס שלילי הם אפסים).

---

[18] נזכיר שסימון מעין זה מבטא סדרה אין-סופית בשני הכיוונים, או באופן פורמלי פונקציה שתחום ההגדרה שלה הוא $\mathbb{Z}$ (תחום ההגדרה של סדרות אין-סופיות רגילות הוא $\mathbb{N}$).

[19] כלומר הטורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \cdot (z - z_0)^{-n}$ מתכנסים בהחלט במ"ש.

[20] ערך בוויקיפדיה: לורן אלפונס פייר.

[21] כלומר במקרה הנ"ל זהו הפיתוח של f לטור לורן סביב z_0.

הגדרה 5.2. יהיו $z_0 \in \mathbb{C}$ ו-$0 < r \in \mathbb{R}$, תהא f פונקציה אנליטית ב-$B'_r(z_0)$ ותהא $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ סדרת המקדמים בפיתוח של f לטור לורן ב-$B'_r(z_0)$.
נאמר של-f יש <u>סינגולריות מבודדת</u> ב-z_0 אם f אינה אנליטית ב-z_0, ובנוסף:

- נאמר ש-z_0 היא נקודת <u>סינגולריות סליקה</u> של f אם הגבול $\lim_{z\to z_0} f(z)$ קיים (במובן הצר).
- נאמר ש-z_0 היא <u>קוטב</u> של f אם קיים $0 > k \in \mathbb{Z}$ כך ש-$a_k \neq 0$ ו-$a_l = 0$ לכל $k > l \in \mathbb{Z}$, במקרה כזה נאמר ש-z_0 קוטב <u>מסדר</u> k של f, ואם $k = 1$ נאמר גם ש-z_0 היא <u>קוטב פשוט</u> של f.
- נאמר ש-z_0 היא נקודת <u>סינגולריות עיקרית/מהותית</u> של f אם לכל $k \in \mathbb{Z}$ קיים $k > l \in \mathbb{Z}$ כך ש-$a_l \neq 0$.

הגדרה 5.3. תהא $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה, פונקציה f תיקרא <u>מרומורפית</u> על Ω אם f אנליטית על $\Omega \setminus S$ כאשר $S \subseteq \Omega$ היא קבוצה סופית או בת-מנייה ללא נקודת הצטברות וכל $s \in S$ אינה נקודת סינגולריות עיקרית של f.

♣ ניתן להסתכל על פונקציה מרומורפית כפונקציה אנליטית בספירה של רימן, שאז ∞ הוא ערך לגיטימי שהפונקציה תקבל ולכן קוטב "הופך" לסינגולריות סליקה.

הגדרה 5.4. יהי $0 < r \in \mathbb{R}$, נסמן $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$[22] ותהא f פונקציה אנליטית ב-Ω.
נתבונן ב-f כפונקציה על הספירה של רימן ונאמר של-f יש סינגולריות מבודדת ב-∞ אם f אינה אנליטית ב-∞, בנוסף נסמן ב-g את הפונקציה המוגדרת ע"י $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ (לכל $z \in B_{r^{-1}}(0)$), ואז:

- נאמר ש-∞ היא נקודת <u>סינגולריות סליקה</u> של f אם 0 היא נקודת סינגולריות סליקה של g.
- נאמר ש-∞ היא נקודת <u>קוטב</u> של f אם 0 היא קוטב של g, ואז נאמר גם שסדר הקוטב של g ב-0 הוא זה של f ב-∞.
- נאמר ש-∞ היא נקודת <u>סינגולריות עיקרית/מהותית</u> של f אם 0 היא נקודת סינגולריות עיקרית/מהותית של g.

הגדרה 5.5. יהי $z_0 \in \mathbb{C}$, יהיו $0 \leq r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r_2$, ותהא f פונקציה אנליטית על $A(z_0, r_1, r_2)$.
תהא $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ סדרה כך שלכל $z \in A(z_0, r_1, r_2)$ מתקיים:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

כלומר זוהי סדרת המקדמים בפיתוח של f לטור לורן סביב z_0.
נסמן $\operatorname{Res}(f, z_0) := a_{-1}$ ונקרא ל-$\operatorname{Res}(f, z_0)$ <u>השארית</u> של f ב-z_0.

♣ העניין שלנו ב-a_{-1} נובע מהעובדה שלכל האיברים האחרים בטור יש פונקציה קדומה על כל המישור המרוכב, ולכן כאשר נחשב אינטגרל לאורך מסילה סגורה של הטור כל האיברים הללו יתאפסו ותוותר השארית.

---

[22] Ω היא "סביבה מנוקבת" של ∞ בספירה של רימן.

5.2 התחלה

סימון: לכל $0 \leq r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r_2$ ולכל $z_0 \in \mathbb{C}$ נסמן $A(z_0, r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, קבוצה מצורה זו תיקרא טבעת.

♣ במקרה שבו $r_1 = 0$ נקבל ש-$A(z_0, r_1, r_2)$ היא הסביבה המנוקבת $B'_{r_2}(z_0)$.

למה 5.6. יהי $z_0 \in \mathbb{C}$, יהיו $0 \leq r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r_2$, ותהא f פונקציה אנליטית על $A(z_0, r_1, r_2)$.
לכל $R, \tilde{R} \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < R < \tilde{R} < r_2$ ולכל $w \in A\left(z_0, R, \tilde{R}\right)$ מתקיים:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left(\int\limits_{C\left(z_0, \tilde{R}\right)} \frac{f(z)}{z - w}\, dz - \int\limits_{C(z_0, R)} \frac{f(z)}{z - w}\, dz \right)$$

סימון: תהא $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$[23] סדרת מספרים מרוכבים, נסמן:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$$

משפט 5.7. יהי $z_0 \in \mathbb{C}$, יהיו $0 \leq r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r_2$, ותהא f פונקציה אנליטית על $A(z_0, r_1, r_2)$.
קיימת סדרת מספרים מרוכבים $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ יחידה כך שמתקיים (לכל $z \in A(z_0, r_1, r_2)$):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

"טור" זה מתכנס בהחלט במ"ש[24] על תתי-קבוצות קומפקטיות של $A(z_0, r_1, r_2)$, והמקדמים בטור הם (לכל $n \in \mathbb{Z}$ ולכל $r \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r < r_2$):

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

5.3 נקודות סינגולריות מבודדות

משפט 5.8. תהא f פונקציה אנליטית בעלת סינגולריות מבודדת בנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$, שלושת התנאים הבאים שקולים:

1. z_0 היא נקודת סינגולריות סליקה של f.
2. f חסומה בסביבה מנוקבת של z_0.
3. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $0 < r \in \mathbb{R}$ כך שלכל $z \in B'_r(z_0)$ מתקיים $|f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z - z_0|}$.

[23] נזכיר שסימון מעין זה מבטא סדרה אין-סופית בשני הכיוונים, או באופן פורמלי פונקציה שתחום ההגדרה שלה הוא $\mathbb{Z}$ (תחום ההגדרה של סדרות אין-סופיות רגילות הוא $\mathbb{N}$).

[24] כלומר הטורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \cdot (z - z_0)^{-n}$ מתכנסים בהחלט במ"ש.

משפט 5.9. תהא f פונקציה אנליטית בעלת סינגולריות מבודדת בנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$, מתקיימים שני הפסוקים הבאים:

- ל-f יש קוטב ב-z_0 אם"ם $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.
- ל-f יש קוטב מסדר $k \in \mathbb{N}$ ב-z_0 אם"ם הגבול $\lim_{z\to z_0} f(z)\cdot(z-z_0)^k$ קיים במובן הצר ואינו 0.

מסקנה 5.10. תהא f פונקציה אנליטית בנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$.
ל-f יש אפס מסדר $k \in \mathbb{N}$ ב-z_0 אם"ם ל-$\frac{1}{f}$ יש קוטב מסדר k ב-z_0.

למה 5.11. תהיינה f ו-g פונקציות אנליטיות כך של-f יש קוטב מסדר $k \in \mathbb{N}$ בנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$ ול-g יש אפס מסדר $m \in \mathbb{N}$ באותה נקודה.

- אם $k < m$ אז ל-$f\cdot g$ יש אפס מסדר $k-m$ ב-z_0.
- אם $k > m$ אז ל-$f\cdot g$ יש קוטב מסדר $m-k$ ב-z_0.
- אם $k = m$ אז ל-$f\cdot g$ יש סינגולריות סליקה ב-z_0.

מסקנה 5.12. תהיינה f ו-g פונקציות אנליטיות כך ש-f ו-g בעלות קטבים מסדר k ו-m (בהתאמה) בנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$.

- ל-$f\cdot g$ יש קוטב מסדר $k+m$ ב-z_0.
- ל-$f+g$ יש קוטב מסדר קטן או שווה ל-$\max\{k,m\}$ ב-z_0, או ש-z_0 היא נקודת סינגולריות סליקה של z_0.
- עבור $\frac{f}{g}$ יש לחלק למקרים:
  - אם $k < m$ אז ל-$\frac{f}{g}$ יש אפס מסדר $k-m$ ב-z_0.
  - אם $k > m$ אז ל-$\frac{f}{g}$ יש קוטב מסדר $m-k$ ב-z_0.
  - אם $k = m$ אז ל-$\frac{f}{g}$ יש סינגולריות סליקה ב-z_0.

משפט 5.13. משפט קזוראטי-ויירשטראס (Casorati-Weierstrass)[25]
תהא f פונקציה בעלת סינגולריות מבודדת בנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$, z_0 היא נקודת סינגולריות עיקרית של f אם"ם לכל $0 < r \in \mathbb{R}$ (כך ש-f מוגדרת ב-$B'_r(z_0)$) הקבוצה $f(B'_r(z_0))$ צפופה ב-$\mathbb{C}$.

את הגרירה משמאל לימין לא ראינו בכיתה אך היא נובעת ישירות משני המשפטים הקודמים.

♣ למעשה קיים משפט חזק יותר האומר שליד סינגולריות עיקרית לא רק שתמונת הפונקציה צפופה במישור המרוכב, אלא שכל נקודה במישור מופיעה בתמונה מלבד נקודה אחת לכל היותר; ראו כאן.

טענה 5.14. תהא f פונקציה אנליטית בעלת סינגולריות עיקרית בנקודה z_0, ותהא g פונקציה אנליטית.
אם ההרכבה $g\circ f$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של z_0 אז גם ל-$g\circ f$ יש סינגולריות עיקרית ב-z_0.

5.4 משפט השאריות ומסקנותיו

טענה 5.15. תהיינה f ו-g פונקציות מרומורפיות על תחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f+g$ ו-$f\cdot g$ גם הן פונקציות מרומורפיות על Ω, ואם g אינה פונקציית האפס[26] אז גם $\frac{f}{g}$ היא פונקציה מרומורפית.

♣ כלומר קבוצת הפונקציות המרומורפיות על תחום היא שדה כשהכפל והחיבור הם אלו שמושרים מ-$\mathbb{C}$.

♣ למעשה גם הכיוון ההפוך נכון: כל פונקציה מרומורפית ניתנת להצגה כמנה של פונקציות אנליטיות.

[25] ערכים בוויקיפדיה: Casorati Felice (אנגלית) וקארל ויירשטראס (עברית).
[26] הכוונה היא שקיימת נקודה $z \in \Omega$ כך ש-$g(z) \neq 0$.

טענה 5.16. תהא f פונקציה אנליטית בעלת קוטב מסדר $k \in \mathbb{N}$ בנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$, ותהא g פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של z_0 ע"י (לכל z בסביבה זו):

$$g(z) := (z - z_0)^k \cdot f(z)$$

מתקיים:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} g^{(k-1)}(z)$$

משפט 5.17. יהי $z_0 \in \mathbb{C}$, יהיו $0 \leq r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ כך ש-$r_1 < r_2$, ותהא f פונקציה אנליטית על $A(z_0, r_1, r_2)$.
יהי $w \in \mathbb{C}$, מתקיים $w = \operatorname{Res}(f, z_0)$ אם"ם לפונקציה g המוגדרת ע"י $g(z) := f(z) - \frac{w}{z - z_0}$ (לכל $z \notin A(z_0, r_1, r_2)$) יש פונקציה קדומה.
במקרה זה הפונקציה הקדומה היא הפונקציה G המוגדרת ע"י (לכל $z \in A(z_0, r_1, r_2)$):

$$G(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{-n} \cdot \frac{(z - z_0)^{-n+1}}{-n+1}$$

כאשר $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ היא סדרת המקדמים בפיתוח של f לטור לורן סביב z_0.

משפט 5.18. משפט השאריות
תהא γ מסילה (או מולטי-מסילה) סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין, ותהא $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה כך ש-$\gamma^* \subseteq \Omega$ ו-$\operatorname{Ind}(\gamma, z) = 0$ לכל $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.
תהא $S \subseteq \Omega$ קבוצה ללא נקודות הצטברות כך ש-S זרה ל-γ^*, ותהא f פונקציה אנליטית על $\Omega \setminus S$.
במקרה כזה הקבוצה $S \cap \{z \in \Omega : \operatorname{Ind}(\gamma, z) \neq 0\}$ סופית, ומתקיים:

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{s \in S} \operatorname{Ind}(\gamma, s) \cdot \operatorname{Res}(f, s)$$

♣ משפט העקום של ז'ורדן קובע שבהינתן מסילה סגורה ופשוטה γ, לקבוצה $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ יש שני רכיבי קשירות בדיוק: אחד מהם חסום והאחר אינו חסום, והשפה של שניהם היא γ^* (בפרט שני הרכיבים הם קבוצות פתוחות וקשירות). במקרה כזה האינדקס של כל נקודה ברכיב הקשירות החסום הוא 1 או -1[27], והאינדקס של כל נקודה ברכיב הקשירות שאינו חסום הוא 0. לפיכך אם γ הנ"ל היא מסילה פשוטה משפט השאריות יגיד שמתקיים:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\sum_{s\in S}\operatorname{Res}(f,s)$$

לא ראינו את ההוכחה של משפט ז'ורדן בכיתה אבל מותר לנו להשתמש עבור מסילות כגון: מעגלים, חצאי מעגלים ומצולעים.

משפט 5.19. למת ז'ורדן

יהי $0<R\in\mathbb{R}$ ותהא $C_R:[0,\pi]\to\mathbb{C}$ מסילה המוגדרת ע"י $C_R(\theta):=R\cdot e^{i\theta}$ לכל $\theta\in[0,2\pi]$.
יהיו f ו-g פונקציות רציפות ב-C_R^* ו-$0<a\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים $f(z)=e^{iaz}\cdot g(z)$ לכל $z\in C_R^*$.
נסמן $M_R:=\max\left\{g\left(R\cdot e^{i\theta}\right)\mid\theta\in[0,\pi]\right\}$, ואז מתקיים:

$$\int_{C_R} f(z)\,dz \le \frac{\pi}{a}\cdot M_R$$

♣ יחד עם משפט השאריות למת ז'ורדן מאפשרת לנו לחשב אינטגרלים מהצורות ($a>0$ ו-g פונקציה רציפה על כל הישר הממשי):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(ax)\cdot g(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\sin(ax)\cdot g(x)\,dx \qquad\qquad \lim_{x\to\pm\infty} g(x)=0$$

באופן שלא היינו יכולים לו היינו מתבוננים באינטגרל כאינטגרל ממשי גרידא.
הרעיון הוא כזה:

- נגדיר את g על כל חצי המישור העליון כך שתתקבל פונקציה אנליטית למעט בקבוצה סופית וזרה ל-$\mathbb{R}$ שתסומן ב-S, ובנוסף יישמר הגבול $\lim_{z\to\infty} g(z)=0$.
  אם אי אפשר לעשות זאת השלבים הבאים לא יועילו ויש לנסות כיוון אחר.

- לכל $0<R\in\mathbb{R}$ נסמן ב-γ_R^1 את המסילה המוגדרת ע"י $\gamma_R(t):=t$ לכל $t\in[-R,R]$, וב-C_R את המסילה המוגדרת ע"י $C_R(\theta):=e^{i\theta}$ לכל $\theta\in[0,\pi]$.
  כמו כן נסמן ב-f את הפונקציה המוגדרת ע"י $f(z):=e^{iaz}\cdot g(z)$ לכל z בחצי המישור העליון.

- כעת מהגבול הנ"ל ומלמת ז'ורדן נובע כי:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0$$

[27] תלוי בכיוון ההקפה של המסילה אבל בכל מקרה לכל הנקודות יש את אותו האינדקס.

ומכאן שע״פ משפט השאריות מתקיים[28]:

$$\begin{aligned}2\pi i\cdot\sum_{s\in S}\operatorname{Res}(f,s)&=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R*C_R}f(z)\,dz=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R*C_R}e^{iaz}\cdot g(z)\;\;dz\\&=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}e^{iaz}\cdot g(z)\,dz+\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}e^{iaz}\cdot g(z)\,dz\\&=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}e^{iaz}\cdot g(z)\,dz+0=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}(\cos(x)+i\cdot\sin(x))\cdot g(x)\,dx\\&=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos(x)\cdot g(z)\,dx+i\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin(x)\cdot g(z)\,dx\end{aligned}$$

- אם אנחנו יודעים את הערך של השאריות נוכל להשוות חלק ממשי לחלק ממשי וחלק מרוכב לחלק מרוכב, ובכך לסיים את הפתרון.

משפט 5.20. עקרון הארגומנט

תהא f פונקציה מרומורפית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, כך שלקבוצת האפסים שלה ב-Ω ולקבוצת הקטבים שלה ב-Ω אין נקודת הצטברות. נסמן ב-$Z(f)$ את קבוצת האפסים של f ב-Ω, וב-$P(f)$ נסמן את קבוצת הקטבים של f ב-Ω; $\frac{f'}{f}$ אנליטית על $\Omega\setminus(Z(f)\cup P(f))$ כאשר כל $z\in Z(f)\cup P(f)$ הוא קוטב פשוט שלה, ובנוסף:

- אם z הוא אפס מסדר $k\in\mathbb{N}$ של f אז $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f},z\right)=k$.
- אם z הוא קוטב מסדר $k\in\mathbb{N}$ של f אז $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f},z\right)=-k$.

♣ אם f אנליטית על Ω אז אין לה קטבים ב-Ω והמשפט עוסק אך ורק באפסים שלה.

משפט 5.21. תהא f פונקציה מרומורפית על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, ותהא γ מסילה (או מולטי-מסילה) סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין, כך ש-$\gamma^*\subseteq\Omega$ ו-$\operatorname{Ind}(\gamma,z)=0$ לכל $z\in\mathbb{C}\setminus\Omega$. נסמן ב-$Z(f)$ את קבוצת האפסים של f ב-Ω, וב-$P(f)$ נסמן את קבוצת הקטבים של f ב-Ω.

אם γ אינה עוברת דרך אפסים וקטבים של f (כלומר $\gamma^*\cap(Z(f)\cup P(f))=\emptyset$), אז:

$$\operatorname{Ind}(f\circ\gamma,0)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\;dz=\sum_{z\in Z(f)}\operatorname{Ind}(\gamma,z)\cdot m(z)-\sum_{z\in P(f)}\operatorname{Ind}(\gamma,z)\cdot m(z)$$

כאשר $m(z)$ הוא הסדר של האפס/הקוטב ב-z לכל $z\in Z(f)\cup P(f)$.

♣ ושוב: אם f אנליטית על Ω אז אין לה קטבים ב-Ω והמשפט עוסק אך ורק באפסים שלה, כלומר נקבל:

$$\operatorname{Ind}(f\circ\gamma,0)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\;dz=\sum_{z\in Z(f)}\operatorname{Ind}(\gamma,z)\cdot m(z)$$

[28] יש צורך להוכיח שהאינטגרלים אכן מתכנסים כדי להצדיק את המעברים.

מסקנה 5.22. משפט רושה (Rouché)[29]

תהיינה f ו-g פונקציות אנליטיות על תחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, ותהא γ מסילה (או מולטי-מסילה) סגורה וגזירה ברציפות למקוטעין, כך ש-$\gamma^* \subseteq \Omega$ ו-$n(\gamma, z) = 0$ לכל $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

אם לכל $z \in \gamma^*$ מתקיים[30]:

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

אז:

$$\sum_{z \in Z(f)} \operatorname{Ind}(\gamma, z) \cdot m(z) = \sum_{z \in Z(g)} \operatorname{Ind}(\gamma, z) \cdot m(z)$$

כאשר $m(z)$ הוא הסדר של האפס ב-z לכל $z \in Z(f)$ (עבור f) ולכל $z \in Z(g)$ (עבור g).

♣ בפרט אם $\operatorname{Ind}(\gamma, z) = 1$ לכל $z \in Z(f) \cup Z(g)$ אז מספר האפסים של g שווה לזה של f (עם ריבוי).

♣ משפט רושה נותן הוכחה פשוטה עבור המשפט היסודי של האלגברה: נסמן את הפולינום הנתון ב-f ואת המונום המוביל שלו ב-g, g מתאפסת ב-0 ועבור $z \in \mathbb{C}$ כך ש-$|z|$ גדול מספיק מתקיים האי״ש שדורש משפט רושה, לכן אם ניקח את המסילה $C(0, R)$ עבור R גדול מספיק נקבל ש-f יש לפחות אפס אחד.

משפט 5.23. משפט ההעתקה הפתוחה לפונקציות אנליטיות

יהי $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f : \Omega \to \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית שאינה קבועה, יהי $z_0 \in \Omega$ ונסמן $w_0 := f(z_0)$, ויהי $k \in \mathbb{N}$ סדר האפס של $f - w_0$ ב-z_0.

מתקיימים ארבעת הפסוקים הבאים:

1. קיים $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ כך ש-$B_\varepsilon(z_0) \subseteq \Omega$, ובנוסף ל-$f'$ ול-$f - w_0$ אין אפסים ב-$B'_\varepsilon(z_0)$, יהי ε כנ״ל.
2. נסמן ב-W_0 את רכיב הקשירות של $\mathbb{C} \setminus (f \circ C(z_0, \varepsilon))^*$ שבו נמצא w_0, ובנוסף נסמן $\Omega_0 := f^{-1}(W_0) \cap B_\varepsilon(z_0)$.
   לכל $w \in W_0 \setminus \{w_0\}$ קיימים $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \Omega_0 \setminus \{z_0\}$ שונים זה מזה כך ש-$f(z_i) = w$ לכל $k \geq i \in \mathbb{N}$,
   בפרט מתקיים $f'(z_0) \neq 0$ (כלומר $k = 1$) אם״ם ו-f היא העתקה חח״ע ועל מ-$\Omega_0 \setminus \{z_0\}$ ל-$W_0 \setminus \{w_0\}$[31].
3. f היא העתקה פתוחה, כלומר לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq \Omega$ גם $f(U)$ היא קבוצה פתוחה.
4. אם f חח״ע אז f^{-1} אנליטית על $f(\Omega)$.

משפט 5.24. תהיינה f ו-g פונקציות אנליטיות על קבוצה פתוחה $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ כך ש-f חח״ע.
לכל $z_0 \in \Omega$, לכל $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש-$\hat{B}_r(z_0) \subseteq \Omega$ ולכל $w \in f\left(\hat{B}_r(z_0)\right)$ מתקיים:

$$g\left(f^{-1}(w)\right) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0, r)} g(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z) - w} \, dz$$

ובפרט:

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{C(z_0, r)} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z) - w} \, dz$$

---

[29] ערך בוויקיפדיה: Rouché Eugène.

[30] בפרט מתקיים $f(z) \neq 0$ וגם $g(z) \neq 0$ לכל $z \in \gamma^*$.

[31] כלומר הצמצום של f ל-$\Omega_0 \setminus \{z_0\}$ הוא העתקה חח״ע ועל $W_0 \setminus \{w_0\}$.

6 הספֵּירה של רימן והעתקות מביוס

6.1 הגדרות

עבור הגדרת הספֵּירה של רימן אין צורך פורמלי בהכרת מרחבים טופולוגיים וקומפקטיפיקציה שלהם, אבל כדי להבין מה באמת קורה כאן אני חושב שראוי להקדיש להם מעט זמן.

הגדרה. מרחב טופולוגי הוא קבוצה X ואוסף תתי-קבוצות שלה $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימים את שלושת התנאים הבאים:

1. $\emptyset, X \in \tau$.
2. לכל $S \subseteq \tau$ מתקיים:
$$\bigcup_{s \in S} s \in \tau$$
3. לכל $U_1, U_2 \in \tau$ מתקיים $U_1 \cap U_2 \in \tau$ (מכאן שכל חיתוך סופי של קבוצות ב-τ שייך ל-τ).

τ תיקרא הטופולוגיה של X, תת-קבוצה $U \subseteq X$ תיקרא פתוחה אם $U \in \tau$ ותת-קבוצה $C \subseteq X$ תיקרא סגורה אם $C^c = X \setminus C$ היא קבוצה פתוחה.

♣ מרחבים טופולוגיים הם הכללה של המרחבים המטריים, יש בהם קבוצות פתוחות וסגורות אך הן אינן מוגדרות בהכרח ע"פ מטריקה.

הגדרה. תת-קבוצה $K \subseteq X$ במרחב טופולוגי X תיקרא קומפקטית אם לכל כיסוי פתוח שלה קיים תת-כיסוי סופי, כלומר אם לכל אוסף של קבוצות פתוחות S כך שמתקיים (זהו כיסוי פתוח):
$$K \subseteq \bigcup_{s \in S} s$$
קיימת תת-קבוצה סופית $A \subseteq S$ כך שמתקיים (זו תת-כיסוי סופי):
$$K \subseteq \bigcup_{a \in A} a$$

הגדרה. קומפקטיפיקציה חד נקודתית

יהי X מרחב טופולוגי עם טופולוגיה τ_X, ניקח נקודה $\infty \notin X$, ונסמן $Y := X \cup \{\infty\}$.
נסמן ב-τ_Y את הטופולוגיה של המרחב הטופולוגי Y המוגדרת כך שתת-קבוצה $U \subseteq Y$ תיקרא פתוחה אם מתקיים אחד משני התנאים הבאים:

1. U הייתה קבוצה פתוחה ב-X, כלומר $U \subseteq X$ ו-$U \in \tau_Y$.
2. $\infty \in U$ וגם $Y \setminus U$ היא קבוצה קומפקטית (ב-X).

♣ הרעיון הוא שכעת Y הוא מרחב קומפקטי וזה מושג ע"י הסעיף השני שמגדיר "סביבה של ∞".

הגדרה 6.1. ישרים ומעגלים במישור המרוכב

- ישר הוא קבוצה מהצורה $\{cx+w \mid x\in\mathbb{R}\}$ עבור $c,w\in\mathbb{C}$ כך ש-$c\neq 0$.
- מעגל הוא קבוצה מהצורה $\{r\cdot \operatorname{cis}(\theta)+w \mid \theta\in\mathbb{R}\}$[32] עבור $0<r\in\mathbb{R}$ ו-$w\in\mathbb{C}$.

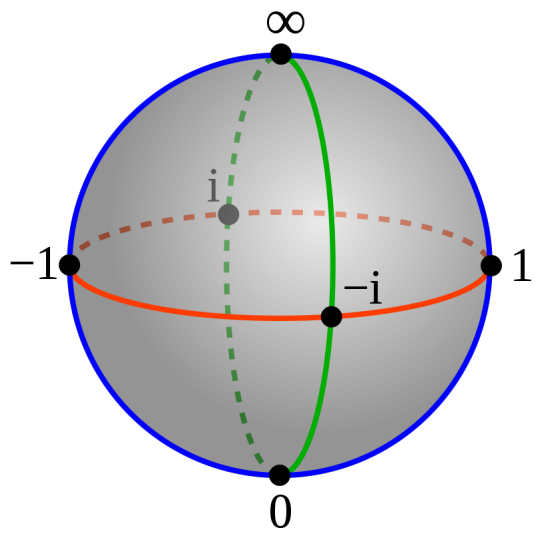
הגדרה 6.2. הספֵירה של רימן[33]

נסמן $\mathbb{P}^1 := \hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ ונאמר שתת-קבוצה $U\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ היא פתוחה אם מתקיים אחד משני התנאים הבאים:

1. U הייתה קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{C}$, כלומר $U\subseteq\mathbb{C}$ ו-U פתוחה ב-$\mathbb{C}$.
2. $\infty\in U$ וגם $\hat{\mathbb{C}}\setminus U$ היא קבוצה קומפקטית (ב-$\mathbb{C}$) - U כזו תיקרא סביבה של ∞.

♣ הרעיון הוא שכעת $\hat{\mathbb{C}}$ הוא מרחב קומפקטי: כל תת-סדרה שבעבר לא הייתה לה תת-סדרה מתכנסת, הייתה סדרה שהערך המוחלט שלה שאף ל-∞, כלומר היא התרחקה מראשית יותר ויותר; כעת כל סדרה כזו מתכנסת ל-∞.

♣ הדרך האינטואיטיבית להסתכל על הספירה של רימן (וזו גם הסיבה לשמה) היא כעל גלובוס שהקוטב הצפוני שלו הוא ∞, הקוטב הדרומי שלו הוא 0 וקו המשווה הוא מעגל היחידה; כך:



איור 1: הספירה של רימן

מקור: התמונה שלעיל נלקחה מוויקישיתוף ומופיעה כאן ברישיון CC BY-SA 3.0.

אני ממליץ בחום לקרוא את הפוסט של גדי אלסנדרוביץ' בנושא, תמצאו שם תיאור הרבה יותר טוב משנתתי כאן, כמו גם את הרעיון כיצד לפרמל את העתקת המישור המרוכב לספירת היחידה התלת-ממדית.

♣ על הספירה של רימן אין הבדל בין קווים ישרים למעגלים - כולם מעגלים, אם תרצו להמשיך את האינטואיציה הגאוגרפית אז אלו שבעבר קראנו להם מעגלים סביב הראשית הם רוחב קווי והישרים המקבילים לצירים הם אורך קווי; כמובן שישנם מעגלים וישרים שאינם קווי אורך או רוחב, על כל פנים לכל אלו נקרא מעכשיו מעגלים מוכללים.

[32] **האם באמת יש להכניס להגדרה גם מעגלים שמרכזם אינו הראשית?**

[33] ערך בוויקיפדיה: רימן ברנהרד.

הגדרה 6.3. מעגלים מוכללים על הספירה של רימן
מעגל מוכלל הוא תת-קבוצה $A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ כך שמתקיימת אחת משתי האפשרויות הבאות:

1. $A \subseteq \mathbb{C}$ ו-A היא מעגל כפי הגדרתו לעיל (הגדרה 6.1).
2. קיים ישר $L \subseteq \mathbb{C}$ כך ש-$A = L \cup \{\infty\}$.

♣ באופן כללי גזירות ואנליטיות על הספירה של רימן מוגדרת בדיוק באותה צורה שבה היא מוגדרת על המישור המרוכב, החריגה היחידה הוא גזירות ואנליטיות באין-סוף שאינה מוגדרת על המישור המרוכב אך נרצה שתוגדר על הספירה של רימן.

הגדרה 6.4. תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה של ∞.

- נאמר ש-f גזירה ב-∞ אם קיים הגבול:
$$\lim_{w \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{w}\right) - f(\infty)}{w - 0}$$
ובמקרה כזה נקרא לאותו הגבול הנגזרת של f ב-∞ ונסמן אותו ב-$f'(\infty)$.
- נאמר ש-f אנליטית ב-∞ אם f גזירה בסביבה כלשהי של ∞.
- נאמר ש-f אנליטית על קבוצה פתוחה $\Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ כך ש-$\infty \in \Omega$ אם f גזירה בכל נקודה ב-Ω.
- נאמר ש-f אנליטית על קבוצה $A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ (לאו דווקא פתוחה) אם קיימות קבוצה פתוחה $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ כך ש-$A \subseteq \Omega$ ופונקציה $g : \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ אנליטית על Ω, ובנוסף $f(z) = g(z)$ לכל $z \in A$.
- נאמר ש-f אנליטית אם היא אנליטית על כל תחום הגדרתה.

הגדרה 6.5. העתקות מביוס[34]
העתקת מביוס היא פונקציה T המוגדרת ע"י (לכל $z \in \mathbb{C}$ כך שהביטוי מוגדר):
$$T(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$
עבור $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ כך ש-$ad - bc \neq 0$.

♣ נראה בהמשך שהדרישה $ad - bc \neq 0$ באה לומר ש-T הפיכה.

♣ נשים לב לכך שלכל $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ מתקיים:
$$\frac{\lambda a \cdot z + \lambda \cdot b}{\lambda c \cdot z + \lambda \cdot d} = \frac{az + b}{cz + d}$$
כלומר ההצגה של העתקת מביוס באופן הנ"ל אינה יחידה, אנחנו נראה בהמשך שכל ההצגות של העתקת מביוס אחת בצורה זו נבדלות אך ורק בכפל בסקלר.

[34] נקראות על שם מביוס פרדיננד אוגוסט.

טענה 6.6. תהא f פונקציה שלמה, אם הגבול $\lim_{z\to\infty}|f(z)|$ קיים במובן הרחב אז f היא פולינום.

מסקנה 6.7. תהא f פונקציה מרומורפית על $\mathbb{C}$, אם הגבול $\lim_{z\to\infty}|f(z)|$ קיים במובן הרחב אז f היא פונקציה רציונלית[35].

טענה 6.8. תהא f פונקציה שלמה וחח"ע (הפיכה), f היא העתקה אפינית - קיימים $a,b\in\mathbb{C}$ כך ש-$a\neq 0$ ו-$f(z)=az+b$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

הסכמה: תהא T העתקת מביוס ויהיו $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ כך שמתקיים (לכל z בתחום ההגדרה של T):

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

נרצה להרחיב את תחום ההגדרה של T כך שתהיה מוגדרת על כל הספירה של רימן, לשם כך נגדיר $\frac{w}{0}:=\infty$ (לכל $0\neq w\in\mathbb{C}$), ובנוסף[36]:

$$T(\infty):=\frac{a}{c} \qquad\qquad T\left(\frac{-d}{c}\right):=\infty$$

טענה 6.9. תהא $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(z):=\frac{1}{z}$ לכל $z\in\hat{\mathbb{C}}$[37], לכל קבוצה $A\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ כך ש-A היא מעגל מוכלל גם $f(A)$ היא מעגל מוכלל.

סימון: נסמן ב-$\mathrm{Aut}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ את קבוצת הפונקציות הגזירות וההפיכות מ-$\hat{\mathbb{C}}$ ל-$\hat{\mathbb{C}}$[38].

מסקנה 6.10. $\mathrm{Aut}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ היא קבוצת כל הפונקציות המתקבלות ע"י הרכבות של f הנ"ל ($f(z):=\frac{1}{z}$ לכל $z\in\hat{\mathbb{C}}$) והעתקות אפיניות (פונקציות מהצורה $g(z):=az+b$ עבור $a,b\in\mathbb{C}$ כך ש-$a\neq 0$).

טענה 6.11. תהיינה $T_1,T_2:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ שתי העתקות מביוס, ויהיו $a_1,b_1,c_1,d_1,a_2,b_2,c_2,d_2\in\mathbb{C}$ כך שמתקיים (לכל $z\in\hat{\mathbb{C}}$):

$$T_1(z)=\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1} \qquad\qquad T_2(z)=\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$$

לכל $z\in\hat{\mathbb{C}}$ מתקיים גם:

$$T_1(T_2(z))=\frac{(a_1a_2+b_1c_2)\cdot z+(a_1b_2+b_1d_2)}{(c_1a_2+d_1c_2)\cdot z+(c_1b_2+d_1d_2)}$$

♣ נשים לב לדמיון הברור לכפל מטריצות:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{bmatrix}$$

כלומר קבוצת כל ההעתקות של מביוס היא חבורה שהכפל שלה הוא הרכבת פונקציות, ובנוסף הפונקציה המעתיקה מטריצה ב-$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ להעתקת מביוס עם אותם מקדמים היא אפימורפיזם שהגרעין שלו הוא המטריצות הסקלריות. זו הסיבה לכך שהדרישה $ad-bc\neq 0$ קובעת שההעתקה הפיכה, וזו גם הסיבה לכך שכל ההצגות של העתקת מביוס נתונה זהות עד כדי כפל בסקלר.

---

[35] כלומר קיימים $P,Q\in\mathbb{C}[z]$ כך ש-$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ לכל z בתחום ההגדרה של f.

[36] לא ייתכן ש-$c=0$ ובנוסף $a=0$ ו/או $d=0$ מפני ש-$ad-bc\neq 0$.

[37] כזכור הגדרנו $\frac{w}{0}:=\infty$ ו-$\frac{w}{\infty}:=0$ לכל $0\neq w\in\mathbb{C}$.

[38] העתקות כאלה נקראות <u>העתקות קונפורמיות</u> על $\hat{\mathbb{C}}$, אנחנו נראה בנושא הבא שגם ההופכית של קונפורמית היא קונפורמית.

מסקנה 6.12. תהא $T:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ העתקת מביוס ויהיו $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ כך שמתקיים (לכל $z\in\hat{\mathbb{C}}$):

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

T הפיכה, ולכל $z\in\hat{\mathbb{C}}$ מתקיים:

$$T^{-1}(z)=\frac{dz-b}{-cz+a}$$

מסקנה 6.13. $\mathrm{Aut}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ היא קבוצת כל ההעתקות של מביוס.

טענה 6.14. להעתקת מביוס שאינה הזהות יש לכל הפחות נקודת שבת אחת ולכל היותר שתי נקודות שבת.

הוכחה. תהא $T:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ העתקת מביוס שאינה הזהות ויהיו $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ כך שמתקיים (לכל $z\in\hat{\mathbb{C}}$):

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

נחלק למקרים:

- נניח ש-$c\neq 0$ (הנחה זו לבדה כבר קובעת ש-$T\neq\mathrm{Id}$), א"כ $T(\infty)=\frac{a}{c}\neq\infty$ ולכן ∞ אינה נקודת שבת של T.
  לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}T(z)=\frac{az+b}{cz+d}=z &\iff cz^2+dz=az+b\\ &\iff cz^2+(d-a)\cdot z-b=0\end{aligned}$$

  זוהי משוואה ריבועית ולכן יש לה פתרון ב-$\mathbb{C}$ ובנוסף יש לה לכל היותר שני פתרונות שונים, כלומר יש ל-T לכל הפחות נקודת שבת אחת ולכל היותר שתי נקודות שבת.

- נניח ש-$c=0$ (מהעובדה ש-$T\neq\mathrm{Id}$ נובע ש-$b\neq 0$ ו/או $a\neq d$), א"כ $a\neq 0$ ו-$T(\infty)=\frac{a}{c}=\infty$, כלומר במקרה זה ∞ היא אחת מנקודות השבת של T.
  בנוסף, לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}T(z)=\frac{az+b}{0\cdot z+d}=z &\iff dz=az-b\\ &\iff (d-a)\cdot z=-b\\ &\iff z=\frac{b}{a-d}\end{aligned}$$

  מכאן של-T יש נקודת שבת נוספת (מלבד ∞) אם"ם $a\neq d$, ובמקרה זה יש לה בדיוק שתי נקודות שבת: ∞ ו-$\frac{b}{a-d}$.

■

מסקנה 6.15. לכל $z_1,z_2,z_3,w_1,w_2,w_3\in\hat{\mathbb{C}}$ כך ש-z_1,z_2,z_3 שונים זה מזה ו-w_1,w_2,w_3 שונים זה מזה, קיימת העתקת מביוס יחידה המעתיקה את z_i ל-w_i לכל $3\geq i\in\mathbb{N}$.

משפט 6.16. הלמה של שוורץ
תהא $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ פונקציה אנליטית כך ש-$f(0)=0$ ו-f ניתנת להרחבה רציפה על $\overline{\mathbb{D}}$, לכל $z\in\mathbb{D}$ מתקיים $|f(z)|\le|z|$ ובנוסף $|f'(0)|\le 1$.
כמו כן אם קיים $0\neq z\in\mathbb{D}$ כך ש-$|f(z)|=|z|$ ו/או ש-$|f'(0)|=1$ אז קיים $c\in\mathbb{C}$ כך ש-$|c|=1$ ו-$f(z)=cz$ לכל $z\in\mathbb{D}$.

♣ כלומר אם מתקיים שוויון באחד הסעיפים אז f פועלת על $\mathbb{D}$ ע״י סיבוב בלבד.

סימון: נסמן ב-$\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ את קבוצת הפונקציות הגזירות וההפיכות מ-$\mathbb{D}$ ל-$\mathbb{D}$.

מסקנה 6.17. תהא $f\in\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, אם $f(0)=0$ אז קיים $c\in\mathbb{C}$ כך ש-$|c|=1$ ו-$f(z)=cz$ לכל $z\in\mathbb{D}$.

מסקנה 6.18. לכל $f\in\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ קיימים $\theta\in[0,2\pi]$ ו-$b\in\mathbb{D}$ כך שמתקיים (לכל $z\in\mathbb{D}$):

$$f(z)=e^{i\theta}\cdot\frac{z+b}{1+z\bar{b}}$$

7 פונקציות הרמוניות

7.1 הגדרות

הגדרה 7.1. פונקציה הרמונית
יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום, נאמר שפונקציה $f:\Omega\to\mathbb{R}$ היא <u>פונקציה הרמונית</u> על Ω אם היא דיפרנציאבילית פעמיים ברציפות (במובן הממשי)[39] ומקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית החלקית הבאה:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

♣ ההגדרה ניתנת להרחבה גם עבור פונקציות מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}$.

הגדרה 7.2. יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהיינה u ו-v שתי פונקציות הרמוניות על Ω, נאמר שהזוג הסדור (u,v) הוא זוג <u>פונקציות משלימות</u> אם מתקיימות המשוואות הדיפרנציאליות החלקיות הבאות:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

♣ לפונקציה הרמונית יש פונקציה משלימה יחידה עד חיבור של קבוע, הסיבה לכך היא שהנגזרות החלקיות של כל פונקציה משלימה נקבעות כבר ע״י הפונקציה הראשונה ולכן השינוי היחיד שאפשר לבצע הוא הוספת קבוע.

♣ במקומות אחרים אומרים ש-v היא <u>צמודה הרמונית</u> של u.

מסקנה 7.3. יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהיינה $u,v:\Omega\to\mathbb{R}$ שתי פונקציות, שלושת הפסוקים הבאים שקולים:

1. הפונקציה $u+iv$ היא פונקציה אנליטית.
2. (u,v) הוא זוג פונקציות משלימות.
3. $(v,-u)$ הוא זוג פונקציות משלימות.

♣ כדי להוכיח את השקילות לפסוק השלישי נכפול את $u+iv$ ב-$-i$, (באותה מידה כל קבוע אחר שאינו 0 ייתן שקילות לפונקציות המתאימות).

[39] דיפרנציאביליות פעמיים ברציפות שקולה לכך שכל הנגזרות החלקיות השניות רציפות.

משפט 7.4. לכל פונקציה אנליטית f על תחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, הפונקציות $\mathrm{Re}f$ ו-$\mathrm{Im}f$ הן פונקציות הרמוניות על Ω.

למה 7.5. תהא u פונקציה הרמונית על תחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ הפונקציה $u_x - i \cdot u_y$ היא פונקציה אנליטית.

משפט 7.6. יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום פשוט קשר אנליטית, לכל פונקציה הרמונית $u : \Omega \to \mathbb{R}$ קיימת פונקציה משלימה, כלומר קיימת פונקציה אנליטית $f : \Omega \to \mathbb{C}$ כך ש-$u = \mathrm{Re}f$.

מסקנה 7.7. תהא f פונקציה אנליטית על תחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$; אם $f(z) \neq 0$ לכל $z \in \Omega$ ו-Ω הוא תחום פשוט קשר אנליטית, אז $\ln|f|$ היא פונקציה הרמונית.

משפט 7.8. עקרון המקסימום לפונקציות הרמוניות
תהא u פונקציה הרמונית על תחום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

1. אם ל-u יש מקסימום מקומי חלש ב-Ω אז u קבועה.
2. אם u אינה קבועה אז $|u|$ אינה מקבלת מקסימום ב-Ω.
3. אם Ω חסום ו-u ניתנת להרחבה רציפה על $\overline{\Omega}$ אז $|\bar{u}|$ מקבלת מקסימום על $\partial\Omega$.

סימון: $\mathbb{D} := B_1(0)$ וממילא $\overline{\mathbb{D}} = \hat{B}_1(0)$.

סימון: תהא $P : \partial\mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת ע"י (לכל $(w,z) \in \partial\mathbb{D} \times \mathbb{D}$):

$$P(w,z) := \frac{1-|z|^2}{|w-z|^2}$$

פונקציה זו נקראת גרעין פואסון[40].

♣ נשים לב לכך שלכל $z \in \mathbb{D}$ ולכל $w \in \partial\mathbb{D}$ מתקיים:

$$\begin{aligned} P(w,z) &= \frac{1-|z|^2}{|w-z|^2} = \frac{|w|^2-|z|^2}{|w-z|^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{|w|^2-|z|^2+z\overline{w}-\overline{z}w}{|w-z|^2}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\cdot\frac{\overline{w}-\overline{z}}{\overline{\overline{w}-\overline{z}}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\cdot\frac{\overline{w}-\overline{z}}{\overline{w}-\overline{z}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right) \end{aligned}$$

כלומר P היא החלק הממשי של פונקציה אנליטית ולכן היא פונקציה הרמונית.

משפט 7.9. נוסחת פואסון

תהא u פונקציה הרמונית על $\mathbb{D}$ ורציפה ב-$\overline{\mathbb{D}}$, לכל $z \in \mathbb{D}$ מתקיים:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} P\left(e^{i\theta},z\right)\cdot u\left(e^{i\theta}\right)d\theta$$

מסקנה 7.10. תהא $z_0 \in \mathbb{C}$, יהי $0 < r \in \mathbb{R}$ ותהא u פונקציה הרמונית על $B_r(z_0)$ ורציפה ב-$\hat{B}_r(z_0)$, לכל $z \in B_r(z_0)$ מתקיים:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} P\left(e^{i\theta},\frac{z-z_0}{r}\right)\cdot u\left(z_0+r\cdot e^{i\theta}\right)d\theta$$

ובפרט:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} u\left(z_0+r\cdot e^{i\theta}\right)d\theta$$

♣ כלומר הערכים ש-u מקבלת על שפת המעגל קובעים אותה ביחידות בתוך המעגל - אין עוד פונקציה הרמונית אחרת שמקבלת את אותם הערכים על השפה אך מקבלת ערכים שונים בפנים. למעשה גם הכיוון ההפוך נכון: בהינתן פונקציה רציפה על שפה של עיגול (מעגל) ניתן להגדיר אותה גם על פנים העיגול באמצעות הנוסחה הנ"ל וכך לקבל פונקציה הרמונית.

[40] ערך בוויקיפדיה: סימאון דני פואסון.