1 סדרות

1.1 הגדרות

הגדרה 1.1. סביבות סימטריות של נקודה
תהא d מטריקה על ^{k} ותהא $P_0 \in^k$, נסמן (לכל $0 < r \in$):

$$B_r(P_0) := \left\{P \in^k \middle| \, d_2(P, P_0) < r\right\}$$
$$B_r^\circ(P_0) := \left\{P \in^k \middle| \, 0 < d_2(P, P_0) < r\right\}$$
$$\overline{B_r}(P_0) := \left\{P \in^k \middle| \, d_2(P, P_0) \leq r\right\}$$
$$\overline{B_r^\circ}(P_0) := \left\{P \in^k \middle| \, 0 < d_2(P, P_0) \leq r\right\}$$

- $B_r(P_0)$ תיקרא <u>סביבה</u> של P_0 (או <u>כדור פתוח</u> ברדיוס r שמרכזו בנקודה P_0) ו-$B_r^\circ(P_0)$ תיקרא <u>סביבה מנוקבת</u> של P_0 (או <u>כדור פתוח מנוקב</u> ברדיוס r שמרכזו בנקודה P_0).
- $\overline{B_r(P_0)}$ תיקרא <u>סביבה סגורה</u> של P_0 (או <u>כדור פתוח</u> ברדיוס r שמרכזו בנקודה P_0) ו-$\overline{B_r^\circ(P_0)}$ תיקרא <u>סביבה סגורה מנוקבת</u> של P_0 (או <u>כדור פתוח מנוקב</u> ברדיוס r שמרכזו בנקודה P_0).

הגדרה 1.2. קבוצה פתוחה, קבוצה סגורה וקבוצה קומפקטית

- נאמר שקבוצה $U \subseteq^k$ היא <u>קבוצה חסומה</u> אם קיימים $P \in^k$ ו-$0 < r \in$ כך ש-$U \subseteq B_r(P)$.
- נאמר שקבוצה $U \subseteq^k$ היא <u>קבוצה פתוחה</u> אם לכל $P \in U$ קיים $0 < r \in$ כך ש-$B_r(P) \subseteq U$.
- נאמר שקבוצה $U \subseteq^k$ היא <u>קבוצה סגורה</u> אם $^k \setminus U$ היא קבוצה פתוחה.
- נאמר שקבוצה $K \subseteq^k$ היא <u>קבוצה קומפקטית</u> אם היא סגורה וחסומה.

הגדרה 1.3. שפה של קבוצה
תהא $D \subseteq^k$ קבוצה, נקודה $P \in D$ תקרא <u>נקודת שפה</u> של D אם לכל סביבה U של P קיימות $P_1, P_2 \in U$ כך ש-$P_1 \in D$ ו-$P_2 \notin D$, קבוצת נקודות השפה של D תסומן ב-∂D.

סימון: בהינתן סדרת נקודות $(P_n)_{n=1}^\infty$ נסמן גם (לכל $n \in$):

$$\begin{pmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{pmatrix} := P_n$$

הגדרה 1.4. חסימות
נאמר שסדרת נקודות $(P_n)_{n=1}^\infty$ ב-^{k} היא <u>סדרה חסומה</u> אם קבוצת איבריה כזו.

הגדרה 1.5. גבול של סדרה
תהא $(P_n)_{n=1}^\infty$ סדרת נקודות ב-^{k}, נאמר שנקודה $L \in^k$ היא <u>גבול</u> של הסדרה $(P_n)_{n=1}^\infty$ אם לכל $0 < \varepsilon \in$ קיים $N \in$ כך שלכל $N < n \in$ מתקיים $P_n \in B_\varepsilon(L)$.
גבול של סדרה הוא יחיד ולכן מוצדק לדבר על <u>הגבול</u> של $(P_n)_{n=1}^\infty$ ולסמן:

$$\lim_{n\to\infty} P_n := L$$

תהא $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-^{k} ונסמן ב-x_{nj} את הקואורדינטה ה-j של הנקודה P_n (לכל $k \geq j \in$ ולכל $n \in$).

טענה 1.6. $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה (ב-^{k}) אם"ם לכל $k \geq j \in$ הסדרה $(x_{nj})_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה (ב-).

טענה 1.7. אם $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אז היא גם חסומה.

טענה 1.8. $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת (ב-^{k}) אם"ם לכל $k \geq j \in$ הסדרה $(x_{n,j})_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת (ב-).

משפט 1.9. קבוצה $U \subseteq^k$ היא קבוצה סגורה אם"ם לכל סדרת נקודות מתכנסת $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ שכל איבריה ב-U מתקיים ש-$\lim_{n\to\infty} P_n \in U$.

משפט 1.10. קבוצה $K \subseteq^k$ היא קבוצה קומפקטית אם"ם לכל סדרת נקודות $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ שכל איבריה ב-K קיימת תת-סדרה מתכנסת שגבולה ב-K.

משפט 1.11. משפט בולצאנו-ויירשטראס
אם $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה אז יש לה תת-סדרה מתכנסת.

2 פונקציות

2.1 הגדרות

♣ עד כה למדנו בקורסי אינפי' על פונקציות שהתחום והטווח שלהן היו תתי-קבוצות של (שהוא מ"ו מממד 1), בקורס זה נעסוק בעיקר בפונקציות מהצורה $f : D \to^n$ כאשר $D \subseteq^m$ ובראש ובראשונה בפונקציות כנ"ל המקיימות $n + m = 3$ (יש בדיוק שתי אפשרויות) משום שאת הגרף של אלו ניתן לסרטט במרחב התלת-ממדי.

הגדרה 2.1. נאמר שנקודה $P \in D \subseteq^n$ היא <u>נקודה פנימית</u> ב-D אם קיים $0 < r \in$ כך ש-$B_r(P) \subseteq D$.

הגדרה 2.2. נאמר שפונקציה f <u>חסומה</u> אם תמונתה היא קבוצה חסומה, כמו כן נאמר ש-f <u>חסומה בקבוצה</u> U (שמוכלת בתחום של f) אם $f(U)$ היא קבוצה חסומה.

הגדרה 2.3. גבול של פונקציה בנקודה
תהא $f : D \to^n$ פונקציה כנ"ל המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה $P_0 \in^m$, נאמר שנקודה (או וקטור) $L \in^n$ היא <u>גבול</u> של f ב-P_0 אם לכל $0 < \varepsilon \in$ קיימת $0 < \delta \in$ כך שלכל נקודה $P \in B_\delta^0(P_0)$ מתקיים $f(P) \in B_\varepsilon(L)$.
גבול של פונקציה הוא יחיד ולכן מוצדק לדבר על <u>הגבול</u> של f ולסמן:

$$\lim_{P\to P_0} f(P) := L$$

הגדרה 2.4. רציפות של פונקציה
תהא $f : D \to^n$ פונקציה כנ"ל, נאמר ש-f <u>רציפה בנקודה</u> $P_0 \in D$ אם הגבול $\lim_{P\to P_0} f(P)$ קיים ושווה ל-$f(P)$, נאמר ש-f <u>רציפה</u> אם f רציפה ב-P' לכל $P' \in D$.

♣ ניתן להסתכל על כל פונקציה מהצורה $f :\to^n$ כסדרה סופית של פונקציות שהתחום והטווח שלהן הם תתי-קבוצות של , כך:

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} := f(t)$$

הגדרה 2.5. יהיו $I \subseteq$ מקטע ו-$2 \leq n \in$, פונקציה מהצורה $\gamma : I \to^n$ תקרא מסילה אם היא רציפה בכל רכיב בנפרד[1], התמונה של מסילה נקראת מסלול, ויצירת מסילה שהמסלול שלה הוא קבוצה נתונה תיקרא פרמטריזציה של אותה קבוצה.

הגדרה 2.6. נאמר שמסילה היא מסילה פשוטה אם היא חח״ע.

הגדרה 2.7. תהא $\gamma : I \to^n$ מסילה ויהיו $t, t' \in I$, וקטור המהירות הממוצעת של γ בין t ל-t' הוא הווקטור:

$$\frac{1}{t-t'} \cdot [\gamma(t) - \gamma(t')] = \frac{1}{t-t'} \cdot \left[\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(t') \\ f_2(t') \\ \vdots \\ f_n(t') \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{t-t'} \cdot \left[\begin{pmatrix} f_1(t) - f_1(t') \\ f_2(t) - f_2(t') \\ \vdots \\ f_n(t) - f_n(t') \end{pmatrix} \right]$$

הגדרה 2.8. תהא $\gamma : I \to^n$ מסילה ותהא $t_0 \in I$ נקודה פנימית ב-I, נאמר ש-γ גזירה ב-t_0 אם קיים הגבול:

$$\lim_{t \to t_0} \left(\frac{1}{t-t_0} \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) \right)$$

ואז נקרא לאותו גבול[2] וקטור הנגזרת של γ בנקודה t_0 ונסמן אותו ע״י $\gamma'(t_0)$.

הגדרה 2.9. תהא $\gamma : I \to^n$ מסילה הגזירה בנקודה פנימית t_0, המסילה המשיקה ל-γ בנקודה t_0 היא המסילה המוגדרת ע״י (לכל $t \in$):

$$f(t) := \gamma(t_0) + \gamma'(t_0) \cdot (t - t_0)$$

♣ כמובן שהרעיון שלה הגדרה זו הוא מסילה שתמונתה היא ישר העוברת בנקודת ההשקה ״באותו הזמן״ של הפונקציה המקורית ובאותו כיוון.

הגדרה 2.10. מסילה $\gamma : I \to^n$ תקרא גזירה ב-I אם היא גזירה לכל $t \in I$.

הגדרה 2.11. מסילה $\gamma : I \to^n$ תקרא חלקה אם היא גזירה ב-I ובנוסף וקטור הנגזרת שלה שונה מווקטור האפס בכל נקודה.

♣ הסיבה לדרישה שווקטור הנגזרת יהיה שונה מווקטור האפס היא כדי שההגדרה תתלכד עם קיום ישר משיק.

משפט 2.12. תהא $\gamma : I \to^n$ מסילה ותהיינה $f_1, f_2, \ldots, f_n \in^I$ פונקציות כך שלכל $n \geq j \in$ ולכל $t \in I$ יתקיים:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

ראינו בקובץ הטענות ש-γ גזירה בנקודה $t_0 \in I$ אם״ם לכל $n \geq j \in$ הפונקציה f_j גזירה ב-t_0 ואז וקטור הנגזרת של γ ב-t_0 הוא:

$$\begin{bmatrix} f_1'(t_0) \\ f_2'(t_0) \\ \vdots \\ f_n'(t_0) \end{bmatrix}$$

לכן נאמר ש-γ גזירה פעמיים בנקודה $t_0 \in I$ אם לכל $n \geq j \in$ הפונקציה f_j גזירה פעמיים ב-t_0 ואז וקטור התאוצה של γ ב-t_0 הוא:

$$\begin{bmatrix} f_1''(t_0) \\ f_2''(t_0) \\ \vdots \\ f_n''(t_0) \end{bmatrix}$$

[1] כלומר (במונחי ההערה שלעיל) f_i רציפה לכל $n \geq i \in$.
[2] שהוא הגבול של וקטורי המהירות הממוצעת בנקודה t_0.

הגדרה 2.13. כשאנו אומרים "פונקציה מרובת משתנים" כוונתנו לפונקציה שהתחום שלה הוא קבוצת סדרות סופיות כלשהו (למשל ^{n}) שהרי מהגדרתה פונקציה אינה יכולה לקבל יותר ממשתנה אחד, הדרך "לעקוף" זאת היא לתת לה משתנה אחד (כגון סדרה) המכיל בתוכו יותר ממשתנה אחד; לעת עתה נעסוק בעיקר בפונקציות מהצורה $f : D \to$ כאשר $D \subseteq^2$, הגרף של פונקציה מצורה זו נקרא יריעה.

תהא $f : D \to$ פונקציה כנ"ל, הגרף של f הוא תת-קבוצה של מרחב התלת-ממדי [3] ומבחינה אינטואיטיבית הוא מהווה מפה תלת-ממדית של "פני השטח" הנוצרים ע"י הפונקציה (הפונקציה קובעת מה יהיה גובה פני הקרקע בכל נקודה במישור); אינטואיציה זו מאפשרת לנו לייצג את היריעה גם במישור כאשר בכל נקודה/אזור אנו כותבים מהו "גובה הפונקציה" בנקודה או באזור הללו, לייצוג כזה קוראים מפה טופוגרפית וכמתבקש לקבוצת הנקודות בגרף של f שכולן בגובה נתון נקרא קו גובה, כך למשל קו הגובה 3 יהיה הקבוצה $\{(x,y,3) \in^3 | \ 3 = f(x,y)\}$.

♣ המחשות טובות ניתן לקבל באתר: https://www.math3d.org.

כל הפונקציות שנעסוק בהן בסעיף זה הן פונקציות מהצורה $f : D \to$ כאשר $D \subseteq^n$ ולכן לא אטרח לציין זאת בכל פעם מחדש.

הגדרה 2.14. נקודות קיצון כלליות (גלובליות)

תהא $f : D \to$ פונקציה ותהא $A \subseteq D$, נאמר שנקודה $P \in A$ היא נקודת מקסימום/מינימום כללית (גלובלית) של f ב-A אם לכל נקודה $P' \in D$ מתקיים $f(P') \leq f(P)$ (מקסימום) או $f(P') \geq f(P)$ (מינימום) ובמקרה כזה הערך $f(P)$ יקרא הערך המקסימלי/המינימלי של f ב-A.

הגדרה 2.15. נקודות קיצון מקומיות

תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה של נקודה $P \in^n$, נאמר ש-P היא נקודת מקסימום/מינימום מקומית של f אם קיימת סביבה מלאה של P שבה P היא נקודת מקסימות כללית של f.

טענה 2.16. אם לפונקציה $f : D \to^n$ יש גבול בנקודה $P_0 \in D \subseteq^m$ אז קיימת סביבה מנוקבת $U \subseteq D$ של P_0 כך ש-$f(U)$ היא קבוצה חסומה.

משפט 2.17. תנאי היינה לגבול של פונקציה בנקודה

תהא $f : D \to^n$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת U של נקודה $P_0 \in^m$ ($D \subseteq^m$).

תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-$\lim_{P \to P_0} f(P) = L \in^n$ הוא שלכל סדרת נקודות $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ ב-U המתכנסת ל-P_0 מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = L$.

מסקנה 2.18. תנאי היינה לרציפות של פונקציה בנקודה

תהא $f : D \to^n$ פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה U של נקודה $P_0 \in^m$ ($D \subseteq^m$).

תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-f רציפה ב-P_0 הוא שלכל סדרת נקודות $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ ב-U המתכנסת ל-P_0 מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(P_0)$.

משפט 2.19. משפט ההצבה בגבולות

תהיינה $f : D_1 \to D_2$ ו-$g : D_2 \to^k$ (כאשר $D_1 \subseteq^m$ ו-$D_2 \subseteq^n$) ותהיינה $P_0 \in D_1$ ו-$Q_0 \in D_2$ נקודות פנימיות (בהתאמה).

- אם ל-g יש גבול ב-Q_0, ל-f יש גבול ב-P_0 ו-$\lim_{P \to P_0} f(P) = Q_0$, ובנוסף קיימת סביבה מנוקבת U של P_0 כך שלכל $P \in U$ מתקיים $f(P) \neq Q_0$, אז ל-$g \circ f$ יש גבול ב-P_0 ומתקיים:

$$\lim_{P \to P_0} g(f(P)) = \lim_{Q \to Q_0} g(Q)$$

- אם f ו-g רציפות ב-P_0 וב-Q_0 (בהתאמה) אז $g \circ f$ רציפה ב-P_0 ומתקיים $g(f(P_0)) = g(Q_0)$.

[3] כאשר המישור הנפרש ע"י צי ה-x וציר ה-y ייצג את התחום ואילו הישר שיוצר ציר ה-z מייצג את הטווח.

2.2 מסילות

משפט 2.20. תהא $\gamma : I \to^n$ מסילה ותהיינה $f_1, f_2, \ldots, f_n \in^I$ פונקציות כך שלכל $n \geq j \in$ ולכל $t \in I$ יתקיים:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

תהא $t_0 \in I$ נקודה פנימית ב-I, γ גזירה בנקודה $t_0 \in I$ אם״ם לכל $n \geq j \in$ הפונקציה f_j גזירה ב-t_0 ואז וקטור הנגזרת של γ ב-t_0 הוא:

$$\begin{bmatrix} f_1'(t_0) \\ f_2'(t_0) \\ \vdots \\ f_n'(t_0) \end{bmatrix}$$

משפט 2.21. יהיו $a, b \in$ כך ש-$a < b$ ותהיינה $f, g : [a,b] \to$ פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b) כך ש-$g'(t) \neq 0$ לכל $t \in (a,b)$.
תהא גם $\gamma : [a,b] \to^2$ מסילה המוגדרת ע״י (לכל $t \in [a,b]$):

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} g(t) \\ f(t) \end{pmatrix}$$

קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך שמתקיים:

$$\frac{g(b) - g(a)}{g'(c)} \cdot \gamma'(c) = \gamma(b) - \gamma(a)$$

♣ כלומר משפט הערך הממוצע של קושי אומר שקיימת נקודה $c \in (a,b)$ שבה שיפוע הישר המשיק למסלול של γ הוא בדיוק השיפוע של הקטע המחבר בין $\gamma(a)$ ל-$\gamma(b)$.

♣ כדי להוכיח את המשפט יש להשתמש במשפט הערך הממוצע של קושי, ע״פ משפט הערך הממוצע של קושי נובע קיימת $c \in (a,b)$ כך שמתקיים:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

וממילא גם:

$$\frac{g(b) - g(a)}{g'(c)} \cdot f'(c) = f(b) - f(a)$$

ומכאן שע״פ המשפט הקודם (2.20) מתקיים:

$$\frac{g(b) - g(a)}{g'(c)} \cdot \gamma'(t_0) = \frac{g(b) - g(a)}{g'(c)} \cdot \begin{bmatrix} f'(c) \\ g'(c) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f(b) - f(a) \\ g(b) - g(a) \end{pmatrix} = \gamma(b) - \gamma(a)$$

2.3 פונקציות מרובות משתנים

כל הפונקציות שנעסוק בהן בסעיף זה הן פונקציות מהצורה $f : D \to$ כאשר $D \subseteq^n$ ולכן לא אטרח לציין זאת בכל פעם מחדש.

טענה 2.22. תהא f פונקציה כך של-f יש גבול $L \in$ בנקודה $P_0 \in^n$.
אם $0 < L$ אז קיימת סביבה מנוקבת U של P_0 כך שלכל $P \in U$ מתקיים $\frac{L}{2} < f(P) < \frac{3L}{2}$,
ואם $L < 0$ אז קיימת סביבה מנוקבת U של P_0 כך שלכל $P \in U$ מתקיים $\frac{3L}{2} < f(P) < \frac{L}{2}$.

מסקנה 2.23. תהא f פונקציה כך של-f יש גבול $L \in$ בנקודה $P_0 \in^m$.
אם $0 < L$ אז קיימת סביבה מנוקבת של P_0 שבה f חיובית ואם $L < 0$ אז קיימת סביבה מנוקבת של P_0 שבה f שלילית.

משפט 2.24. "האנלוג הרציף של תנאי היינה"
תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה $P_0 \in^n$, ל-f יש גבול $L \in$ ב-P_0 אם"ם לכל מסילה $\gamma : [a,b] \to^m$ המקיימת $\gamma((a,b]) \subseteq D \setminus \{P_0\}$ ו-$\gamma(a) = P_0$ מתקיים:

$$\lim_{t \to a^+} (f \circ \gamma)(t) = L$$

♣ נזכור שמהגדרתה מסילה היא פונקציה רציפה ולכן $\lim_{x \to a^+} \gamma(t) = \gamma(a) = P_0$.

♣ נשים לב ש-$f \circ \gamma$ היא פונקציה שהתחום שלה הוא $(a,b]$ והטווח שלה הוא $D \setminus \{P_0\}$.

משפט 2.25. אריתמטיקה של גבולות
תהיינה f ו-g פונקציות כך שקיימים הגבולות (עבור $P_0 \in^n$):

$$L_1 := \lim_{P \to P_0} f(P), \quad L_2 := \lim_{P \to P_0} g(P)$$

מתקיימים ארבעת הפסוקים הבאים:

1. לפונקציה $f + g$ יש גבול בנקודה P_0 וערכו הוא $L_1 + L_2$.
2. לפונקציה $f \cdot g$ יש גבול בנקודה P_0 וערכו הוא $L_1 \cdot L_2$.
3. אם $L_2 \neq 0$ אז לפונקציה $\frac{1}{g}$ יש גבול בנקודה P_0 וערכו הוא $\frac{1}{L_2}$.
4. אם $L_2 \neq 0$ אז לפונקציה $\frac{f}{g}$ יש גבול בנקודה P_0 וערכו הוא $\frac{L_1}{L_2}$.

מסקנה 2.26. אריתמטיקה של רציפות
תהיינה f ו-g פונקציות רציפות בנקודה $P_0 \in^n$.
מתקיימים ארבעת הפסוקים הבאים:

1. הפונקציה $f + g$ רציפה ב-P_0 ו-$(f+g)(P_0) = f(P_0) + g(P_0)$.
2. הפונקציה $f \cdot g$ רציפה ב-P_0 ו-$(f \cdot g)(P_0) = f(P_0) \cdot g(P_0)$.
3. אם $g(P_0) \neq 0$ אז הפונקציה $\frac{1}{g}$ רציפה ב-P_0 ו-$\left(\frac{1}{g}\right)(P_0) = \frac{1}{g(P_0)}$.
4. אם $g(P_0) \neq 0$ אז הפונקציה $\frac{1}{g}$ רציפה ב-P_0 ו-$\left(\frac{f}{g}\right)(P_0) = \frac{f(P_0)}{g(P_0)}$.

משפט 2.27. תהיינה f ו-g פונקציות כך שקיימים הגבולות (עבור $P_0 \in^n$):

$$L_1 := \lim_{P \to P_0} f(P), \;\; L_2 := \lim_{P \to P_0} g(P)$$

1. כלל חסומה ואפסה: אם $L_1 = 0$ ו-g חסומה בסביבה מנוקבת של P_0 אז ל-$f \cdot g$ יש גבול ב-P_0 והוא 0.
2. אם קיימת סביבה מנוקבת U של P_0 כך שלכל $P \in U$ מתקיים $f(P) \leq g(P)$ אז $L_1 \leq L_2$.
3. אם $L_1 < L_2$ אז קיימת סביבה מנוקבת U של P_0 כך שלכל $P \in U$ מתקיים $f(P) < g(P)$.

♣ כפי שראינו באינפי' 1 גם כאן א״ש חזק בין f ל-g בסעיף 2 לא יגרום לא״ש חזק בין הגבולות ובסעיף 3 א״א לוותר על הא״ש החזק.

משפט 2.28. משפט הכריך

תהיינה f, g ו-h פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת U של נקודה $P_0 \in^n$.
אם לכל $P \in U$ מתקיים $f(P) \leq g(P) \leq h(P)$ ובנוסף ל-f ול-h יש גבול בנקודה P_0 כך שמתקיים:

$$L := \lim_{P \to P_0} f(P) = \lim_{P \to P_0} h(P)$$

אז גם ל-g יש גבול ב-P_0 ומתקיים:

$$\lim_{P \to P_0} g(P) = L$$

משפט 2.29. משפט ויירשטראס הראשון

תהא f פונקציה המוגדרת בעל קבוצה קומפקטית $\emptyset \neq K \subseteq^n$, f חסומה ב-K.

משפט 2.30. עיקרון המקסימום והמינימום של ויירשטראס (משפט ויירשטראס השני)

תהא f פונקציה המוגדרת בעל קבוצה קומפקטית $\emptyset \neq K \subseteq^n$, f מקבלת מקסימום ומינימום ב-K (או במילים אחרות $f(K)$ היא קטע סגור ב-).