1 קבוצות מיוחדות במרחב

1.1 הגדרות

♣ באופן אינטואיטיבי יש הבדל בין וקטורים (חיצים בעלי גודל וכיוון) לבין נקודות, למרות זאת מבחינה אלגברית שני האובייקטים מיוצגים באמצעות סדרת מספרים ממשיים והאיזומורפיזם ביניהן ברור כל כך שעד כה לא עסקנו בו בכלל. למרות זאת קורס זה נועד לתת לנו את האינטואיציה למרחב ^{1}n ולכן אנחנו נבדיל בין נקודות לווקטורים בסימון בלבד: נסמן נקודות בסוגריים מעוגלים ואילו וקטורים סומנו בסוגריים מרובעים[2], כמו כן לכל שתי נקודות $P,Q\in^n$ נגדיר את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ כווקטור שגודלו וכיוונו הם כאלה שאם נשים את ראשיתו ב-P אזי ייגע ראשו ב-Q (מבחינה פורמלית $\overrightarrow{PQ}$ הוא הווקטור $Q-P$ כשהחיסור מתבצע קואורדינטה קואורדינטה, ומהגדרה מתקיים $-\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QP}$ ו-$\overrightarrow{PP}=\vec{0}$).

סימון: אזכיר את הסימון שלנו מקורסי ליניארית, אנחנו מסמנים את הקואורדינטה ה-i של וקטור $\vec{x}\in^n$ ב-x_i ואת הקואורדינטה ה-ij של מטריצה $A\in M_{n\times m}()$ ב-$[A]_{ij}$.

הגדרה 1.1. יהיו $\vec{0}\neq\vec{v}\in^n$ וקטור ו-$P\in^n$ נקודה, תת-הקבוצה $\{P+t\cdot\vec{v}\mid t\in\}$ נקראת <u>הישר העובר דרך</u> P <u>בכיוון הווקטור</u> $\vec{v}$ (תת-קבוצה $L\subseteq^n$ תקרא <u>ישר</u> אם קיימים $\vec{v}$ ו-P כך ש-$L=\{P+t\cdot\vec{v}\mid t\in\}$).

הגדרה 1.2. תת-קבוצה $M\subseteq^n$ תקרא <u>מישור</u> אם קיימים נקודה $P\in^n$ ושני וקטורים בת"ל $\vec{v},\vec{w}\in^n$ כך שמתקיים $M=\{P+s\cdot\vec{v}+t\cdot\vec{w}\mid s,t\in\}$.

♣ ישרים ומישורים הם מה שקראנו לו בליניארית 1 בשם "ישריות" וכך מרחב הכיוונים של ישר הוא מממד 1 ומרחב הכיוונים של מישור הוא מממד 2.

הגדרה 1.3. נאמר שנקודות $P_1,P_2,\dots P_k\in^n$ הן <u>קו-מישוריות</u> אם קיים מישור $M\subseteq^k$ כך ש-$P_1,P_2,\dots P_k\in M$.

הגדרה 1.4. נאמר ששני מישורים $M_1,M_2\subseteq^3$ מקבילים ונסמן $M_1\parallel M_2$ אם קיימים $P_1,P_2,\vec{v_1},\vec{w_1}\vec{v_2},\vec{w_2}\in^3$ כך שההצגות הפרמטריות שלהם הן:

$$M_1=\{P_1+s\cdot\vec{v_1}+t\cdot\vec{w_1}\mid s,t\in\}$$
$$M_2=\{P_2+s\cdot\vec{v_2}+t\cdot\vec{w_2}\mid s,t\in\}$$

ובנוסף מתקיים $\{\vec{v_1},\vec{w_1}\}=\{\vec{v_2},\vec{w_2}\}$.

♣ כלומר שני מישורים הם מקבילים אם"ם מרחבי הכיוונים שלהם זהים.

♣ ניתן לתת הגדרה דומה לכל סוג של ישריות בכל מרחב שהוא.

[1] מסיבה זו חלק מן ההגדרות שנראה בקורס זה אינן פורמליות לחלוטין.

[2] כך: $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ ו-$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

טענה 1.5. יהי $L := \{P + t \cdot \vec{v} \mid t \in\} \subseteq^n$ ישר, לכל $P' \in L$ ולכל $\vec{w} \in^n$ כך ש-$(\vec{w}) = (\vec{v})$[3] מתקיים $\{P' + t \cdot \vec{w} \mid t \in\} = L$.

משפט 1.6. תהא $L \subseteq^2$ קבוצת נקודות במישור, L הוא ישר אם"ם קיימים $a, b, c \in$ המקיימים $a \neq 0$ או ש-$b \neq 0$ כך שמתקיים $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in^2 \mid ax + by + c = 0 \right\}$.

♣ הצגה זו נקראת <u>ההצגה הסתומה</u> של הישר (בניגוד להצגה <u>הפרמטרית</u> ע"י נקודה ווקטור), ניתן לעבור מהצגה להצגה באמצעות הנוסחאות הבאות:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in^2 \mid ax + by + c = 0,\ \ b \neq 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in^2 \mid y = -\frac{ax + c}{b} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-c}{b} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{bmatrix} \mid t \in \right\}$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in^2 \mid ax + by + c = 0,\ \ a \neq 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in^2 \mid x = -\frac{by + c}{a} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-c}{a} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \mid t \in,\ \ c \neq 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in^2 \mid y = \frac{d}{c} \cdot x + \left(b - \frac{ad}{c} \right) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in^2 \mid dx - cy + (cb - ad) = 0 \right\}$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \mid t \in,\ \ c = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \in^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in^2 \mid x + 0 \cdot y - a = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in^2 \mid dx - cy + (cb - ad) = 0 \right\}$$

♣ באופן כללי (וכפי שראינו בליניארית 1) כדי לאפיין ישריה[4] שמרחב הכיוונים שלה הוא מממד m בתוך מרחב ^{n} ($m \leq n$) יש צורך בנקודה ו-m וקטורים או ב-$n - m$ משוואות ליניאריות ב-n נעלמים (הצגה מהצורה הראשונה נקראת <u>הצגה פרמטרית</u> והצגה מהצורה השנייה נקראת <u>הצגה סתומה</u>).

טענה 1.7. יהי $M := \{P + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w} \mid s, t \in\} \subseteq^n$ מישור, לכל $P' \in M$ ולכל $\vec{x}, \vec{y} \in^n$ כך ש-$(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{v}, \vec{w})$ מתקיים $\{P' + s \cdot \vec{x} + t \cdot \vec{y} \mid s, t \in\} = M$.

♣ למעשה לכל $P, \vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}, Q, \vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_r} \in^n$ המקיימים $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}) = (\vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_r})$ ו-$Q \in \{P + \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot v_i \mid a_1, a_2, \ldots, a_r \in\}$ מתקיים:

$$\begin{aligned} \{Q\} + (\vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_r}) &= \left\{ Q + \sum_{i=1}^{r} b_i \cdot w_i \mid b_1, b_2, \ldots, b_r \in \right\} \\ &= \left\{ P + \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot v_i \mid a_1, a_2, \ldots, a_r \in \right\} \\ &= \{P\} + (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}) \end{aligned}$$

טענה 1.8. תהיינה $P, Q, R, S \in^n$ שונות זו מזו, נקודות אלו הן קו-מישוריות אם"ם קבוצת הווקטורים $\left\{ \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS} \right\}$ תלויה ליניארית.

טענה 1.9. יהיו $M_1, M_2 \subseteq^n$ שני מישורים, אם הם אינם מקבילים אז $M_1 \cap M_2$ הוא ישר.

[3] כלומר $\vec{w} \neq \vec{0}$ ותלוי ליניארית ב-$\vec{v}$, הסיבה לניסוח היא הטענה המקבילה למישורים.

[4] כך קראנו אז תת-מרחב ש"הוזז" מראשית הצירים, כלומר לישרים, מישורים וכאלה מממד גבוה יותר שאינם עוברים בראשית הצירים ולכן אינם מהווים תתי-מרחבים.

2 נורמה ומטריקה

2.1 הגדרות

הגדרה 2.1. יהי V מרחב וקטורי מעל , פונקציה $\|\cdot\| : V \times V \to$ תקרא נורמה אם מתקיימות שלוש התכונות הבאות (לכל $\vec{v}, \vec{w} \in V$ ו-$c \in$):

1. חיוביות (או חיוביות בהחלט): $0 \leq \|\vec{v}\|$, ובנוסף: $\|\vec{v}\| = 0$ אם"ם $v = 0_V$.
2. הומוגניות (הלימה לכפל בסקלר): $\|c \cdot \vec{v}\| = |c| \cdot \|\vec{v}\|$.
3. א"ש המשולש: $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$.

♣ כפי שניתן לראות נורמה היא בעצם דרך למדוד את גודלו של וקטור ובכך להגדיר את המושג "גודל של וקטור".

הגדרה 2.2. V ייקרא מרחב נורמי אם ניתן להגדיר עליו נורמה.

הגדרה 2.3. תהא A קבוצה, פונקציה $d : A \times A \to$ תקרא מטריקה אם מתקיימות שלושת התכונות הבאות (לכל $x, y, z \in A$):

1. חיוביות בהחלט - $d(x, y) \geq 0$, ובנוסף: $d(x, y) = 0$ אם"ם $x = y$.
2. סימטריה - $d(x, y) = d(y, x)$.
3. א"ש המשולש - $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

♣ מטריקה כשמה כן היא: דרך למדוד את המרחק (ולמעשה להגדיר אותו) בין שני איברים בקבוצה, דרישת החיוביות בהחלט והסימטריה הן טריוויאליות ודרישת א"ש המשולש מפרמלת אינטואיציה ברורה: הוספת "תחנה" בדרך יכולה רק להאריך אותה אך לעולם לא תקצר.

♣ כל נורמה מגדירה מטריקה ע"י $d(\vec{v}, \vec{w}) := \|\vec{v} - \vec{w}\|$, לעומת זאת לא כל מטריקה מגדירה נורמה, הדוגמה הקלאסית לכך היא המטריקה הדיסקרטית:

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

הגדרה 2.4. ישנה סדרה קלאסית של מטריקות על המרחב האוקלידי ^{n} המסומנת ב-$(d_k)_{k=1}^{\infty}$ ומוגדרת ע"י (לכל $x, y \in^n$):

$$d_k(x, y) := \sqrt[k]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^k}$$

♣ עבור $m = 1$ מתקיים $d_1 = d_2 = d_3 = \ldots$ אך עבור ממדים גבוהים יותר d_2 תהיה המטריקה האוקלידית המבוססת על הכללת משפט פיתגורס לממדים גבוהים יותר ואילו d_1 תהיה "מטריקת נהגי המוניות של מנהטן".

הגדרה 2.5. קיימת מטריקה נוספת "בסדרה" המוגדרת ע"י:

$$d_\infty(x, y) := \max\{|x_i - y_i| : n \geq i \in\}$$

♣ הסיבה לסימון "d_∞" היא שלכל $\vec{x}, \vec{y} \in^n$ ולכל $k \in$ מתקיים $d_k(\vec{x}, \vec{y}) \geq d_{k+1}(\vec{x}, \vec{y})$ וגם $d_k(\vec{x}, \vec{y}) \geq d_\infty(\vec{x}, \vec{y})$ ובצורה קצת יותר ציורית: $d_1(\vec{x}, \vec{y}) \geq d_2(\vec{x}, \vec{y}) \geq d_3(\vec{x}, \vec{y}) \geq \ldots \geq d_\infty(\vec{x}, \vec{y})$.

הגדרה 2.6. יהי V מרחב נורמי ותהא $\|\cdot\| : V \times V \to$ נורמה על V, נאמר שווקטור $\vec{v} \in V$ הוא וקטור יחידה אם $\|\vec{v}\| = 1$.

משפט 2.7. לכל $n \in$ ולכל $P, Q \in^n$ מתקיים:

1. $d_\infty(P,Q) \le d_2(P,Q) \le \sqrt{k} \cdot d_\infty(P,Q)$.
2. $d_2(P,Q) \le d_1(P,Q) \le \sqrt{k} \cdot d_2(P,Q)$.

♣ למעשה מתקיים הרבה יותר מזה: לכל $n, k \in$ ולכל $P, Q \in^n$ מתקיים $d_\infty(P,Q) \le d_k(P,Q) \le \sqrt[k]{n} \cdot d_\infty(P,Q)$ וזו הסיבה לכך שהגדרת הגבול ב-^{n} לא תבדיל בין המטריקות מהסדרה $(d_n)_{n=1}^\infty$, כלומר אם עבור אחת מהן קיים הגבול וזה ערכו כך יהיה עבור כל האחרות.

טענה 2.8. לכל שתי מטריקות d ו-d' על ^{k} השייכות לסדרת המטריקות $(d_n)_{n=1}^\infty$ (כולל d_∞) ולכל $0 < r \in$ קיים $0 < r' \in$ כך שמתקיים:

$$\left\{P \in^k \middle| \, d'(P, P_0) < r'\right\} \subseteq \left\{P \in^k \middle| \, d(P, P_0) < r\right\}$$

3 המכפלה הסקלרית

3.1 הגדרות

מפרק זה והלאה (כל עוד לא נאמר אחרת) אנו עוסקים בנורמה ובמטריקה האוקלידיות.

♣ מומלץ מאד לצפות בסרטונים של 3blue1brown, ובפרט בסרטון שלו על המכפלה הסקלרית.

הגדרה 3.1. יהיו $\vec{v}, \vec{w} \in^n$ ותהא $\theta \in$ זווית[5] בין $\vec{v}$ ל-$\vec{w}$[6], המכפלה הסקלרית של $\vec{v}$ ו-$\vec{w}$ היא:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\theta$$

♣ ההגדרה תופסת גם כאשר $\vec{v} = \vec{0}$ ו/או $\vec{w} = \vec{0}$ משום שאז $\|\vec{v}\| = 0$ ו/או $\|\vec{w}\| = 0$ (בהתאמה) ולכן לכל ערך של θ נקבל $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

♣ נשים לב לכך שההיטל של $\vec{w}$ על $\vec{v}$ הוא בדיוק:

$$\mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w}) := \left(\frac{\|\vec{w}\| \cdot \cos\theta}{\|\vec{v}\|}\right) \cdot \vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|^2}\right) \cdot \vec{v}$$

ולהפך, ההיטל של $\vec{v}$ על $\vec{w}$ הוא בדיוק:

$$\mathrm{Proj}_{\vec{w}}(\vec{v}) := \left(\frac{\|\vec{v}\| \cdot \cos\theta}{\|\vec{w}\|}\right) \cdot \vec{w} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right) \cdot \vec{w}$$

כמובן שההטלות בכיוון הניצב הן בדיוק $\vec{w} - \mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w})$ (ההיטל של $\vec{w}$ בכיוון הניצב ל-$\vec{v}$) ו-$\vec{v} - \mathrm{Proj}_{\vec{w}}(\vec{v})$ (ההיטל של $\vec{v}$ בכיוון הניצב ל-$\vec{w}$).

מסקנה 3.2. לכל $\vec{v} \in^n$ מתקיים $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$.

מסקנה 3.3. א"ש קושי-שוורץ
לכל $\vec{v}, \vec{w} \in^n$ מתקיים $\vec{v} \cdot \vec{w} \le \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$, ומתקיים שוויון אם"ם $\vec{v}$ ו-$\vec{w}$ תלויים ליניארית.

[5] אנחנו לא נגדיר כאן מהי זווית בין וקטורים, באופן אינטואיטיבי $\vec{v}$ ו-$\vec{w}$ פורשים מישור המהווה תמ"ו של ^{n} ובמישור זה אנו מודדים את הזווית כרגיל.
[6] זה לא משנה באיזו זווית בוחרים מפני ש-$\cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$.

מסקנה 3.4. יהיו $\vec{0} \neq \vec{v}, \vec{w} \in^n$ ונסמן ב-θ את הזווית הקטנה מבין השתיים הנוצרות ביניהם, מתקיים:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} > 0 \iff 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$$
$$\vec{v} \cdot \vec{w} < 0 \iff \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

הגדרה 3.5. נאמר ששני וקטורים $\vec{v}, \vec{w} \in^n$ <u>ניצבים זה לזה</u> אם $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ ואז נסמן $\vec{v} \perp \vec{w}$.

♣ כן, וקטור האפס ניצב לכל וקטור אחר.

♣ מהגדרת המכפלה הסקלרית ומהחיוביות של הנורמה נובע שאם $\vec{v}$ ו-$\vec{w}$ שונים מ-$\vec{0}$ אז $\vec{v} \perp \vec{w} \iff \theta = \frac{\pi}{2}$.

הגדרה 3.6. נאמר שווקטור $\vec{0} \neq \vec{N} \in^2$ <u>ניצב</u> לישר $L \subseteq^2$ (או ש-$\vec{N}$ הוא <u>נורמל</u> של L) אם $\vec{N}$ ניצב למרחב הכיוונים של L.

מפרק זה והלאה (כל עוד לא נאמר אחרת) אנו עוסקים בנורמה ובמטריקה האוקלידיות.

♣ מומלץ מאד לצפות בסרטונים של 3blue1brown, ובפרט בסרטון שלו על המכפלה הסקלרית.

משפט 3.7. שקילות אלגברית להגדרה הגאומטרית של המכפלה הסקלרית
לכל $\vec{x},\vec{y}\in^n$ מתקיים:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i$$

מסקנה 3.8. יהיו $\vec{0}\neq\vec{x},\vec{y}\in^n$ ונסמן ב-θ את הזווית הקטנה מבין השתיים הנוצרות ביניהם, מתקיים:

$$\theta=\arccos\left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}\right)$$

טענה 3.9. תכונות של המכפלה הסקלרית:

1. חיוביות (או חיוביות בהחלט) - לכל $\vec{v}\in^n$ מתקיים $\vec{v}\cdot\vec{v}\geq 0$ ובנוסף $\vec{v}\cdot\vec{v}=0$ אם"ם $\vec{v}=\vec{0}$.
2. סימטריה - לכל $\vec{v},\vec{w}\in^n$ מתקיים $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$.
3. בי-ליניאריות (ליניאריות בכל רכיב) - לכל $\vec{v},\vec{w},\vec{u}\in^n$ ולכל $c\in$ מתקיים

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot(\vec{w}+\vec{u})&=\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{u}\\ \vec{v}\cdot(c\cdot\vec{w})&=c\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})\\ (\vec{v}+\vec{u})\cdot\vec{w}&=\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{u}\cdot\vec{w}\\ (c\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}&=c\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})\end{aligned}$$

♣ הליניאריות ברכיב אחד נובעת מהליניאריות ברכיב האחר ע"י הסימטריה.

טענה 3.10. יהא $L\subseteq^2$ ישר ויהיו $a,b,c\in$ כך ש-$L=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in^2 \middle| ax+by+c=0\right\}$, נסמן $t:=-\frac{c}{a^2+b^2}$[7] ובנוסף $x_0:=ta$ ו-$y_0:=tb$[8] וא"כ מתקיים:

$$L=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in^2 \middle| \begin{bmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=0\right\}$$

♣ מה שהטענה אומרת בעצם הוא שהווקטור $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ מאונך לכל אחד מן ההפרשים $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$ וכך $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ הוא נורמל של L ונקודת החיתוך של L והישר הנפרש ע"י $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ היא $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$, כל זה לא אמור להפתיע אף אחד שכן השיפוע של הישר L הוא $-\frac{a}{b}$ (בהנחה ש-$b\neq 0$) ואילו השיפוע של הישר הנפרש ע"י $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ הוא $\frac{b}{a}$ וכפי שלמדנו בתיכון שני ישרים מאונכים זה לזה אם"ם מכפלת השיפועים שלהם היא -1.

4 המכפלה הווקטורית

4.1 הגדרות

♣ מומלץ מאד לצפות בסרטונים של 3blue1brown, ובפרט בסרטון שלו על המכפלה הווקטורית.

♣ בהינתן שני וקטורים $\vec{a},\vec{b}\in^3$ נוכל להגדיר העתקה ליניארית $l:^3\to$ (להעתקות כאלה נתנו את השם פונקציונלים) ע"י:

$$l\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:=\det\left(\begin{bmatrix}a_1&b_1&x\\a_2&b_2&y\\a_3&b_3&z\end{bmatrix}\right)$$

כלומר l מחזירה לכל וקטור $\vec{c}\in^3$ את הנפח המכוון של המקבילון שמגדירה סדרת הווקטורים $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.
l הנ"ל היא פונקציונל ולכן כפי שלמדנו בליניארית 2 (משפט ההצגה של ריס) קיים וקטור $\vec{v}\in^3$ יחיד כך שלכל $\vec{c}\in^3$ מתקיים $l(\vec{c})=\vec{v}\cdot\vec{c}$, באיזה וקטור מדובר?

[7] ניתן לחלק ב-a^2+b^2 מפני ש-$a\neq 0$ ו/או $b\neq 0$ שהרי L הוא ישר.
[8] וכך יתקיים $-(ax_0+bx_0)=c$.

אתנחתא קצרה של גאומטריה: הנפח של המקבילון שמגדירים הווקטורים $\vec{a}$, $\vec{b}$ ו-$\vec{c}$ הוא שטח המקבילית שמגדירים $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$ כפול אורך הגובה היורד מ-$\vec{c}$ למישור שפורשים $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$. כלומר הדבר היחיד שמעניין ב-$\vec{c}$ הוא הרכיב שלו בכיוון המאונך למישור זה, ולכן ה-$\vec{v}$ המבוקש מוכרח להיות מאונך למישור כדי שמכפלה סקלרית איתו תתייחס אך ורק לרכיב הרצוי; בנוסף אנחנו יודעים שמתקיים $\vec{v}\cdot\vec{c}=\|\vec{v}\|\cdot\mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\vec{c})$ ולכן כדי ש-$\vec{v}\cdot\vec{c}$ יהיה שווה לנפח המקבילון הרצוי הנורמה של $\vec{v}$ ($\|\vec{v}\|$) צריכה להיות שטח המקבילית שפורשים $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$ שהוא בדיוק $\|\vec{a}\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|\cdot|\sin\theta|$ כאשר θ היא זווית הנוצרת בין $\vec{a}$ ל-$\vec{b}$[9]. עד כאן ראינו על איזה ישר היוצא מן הראשית צריך להיות $\vec{v}$ ומהי הנורמה שלו, אבל קיימים שני וקטורים כאלה ($\vec{v}$ ו-$-\vec{v}$), באיזה מהם נבחר? כאן צריך להכניס את העניין שהדטרמיננטה מחזירה נפח מכוון ולכן היחס בין $\vec{v}$ לבין $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$ צריך להיות כמו היחס של ציר ה-z לצירי ה-x וה-y בהתאמה, כלומר אם נסמן ב-$\vec{a}\times\vec{b}$ את $\vec{v}$ הנ"ל אז הכיוון של $\vec{a}\times\vec{b}$ נקבע לפי כלל יד ימין (ראו איור בעמוד הבא).

מצד שני מהנוסחה המפורשת של הדטרמיננטה נובע שמתקיים[10]:

$$\begin{aligned}\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)&=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=l\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\det\left(\begin{bmatrix}a_1&b_1&x\\a_2&b_2&y\\a_3&b_3&z\end{bmatrix}\right)\\&=x\cdot\det\left(\begin{bmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{bmatrix}\right)-y\cdot\det\left(\begin{bmatrix}a_1&b_1\\a_3&b_3\end{bmatrix}\right)+z\cdot\det\left(\begin{bmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{bmatrix}\right)\\&=x\cdot(a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2)+y\cdot(-(a_1\cdot b_3-a_3\cdot b_1))+z\cdot(a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1)\end{aligned}$$

וממילא:

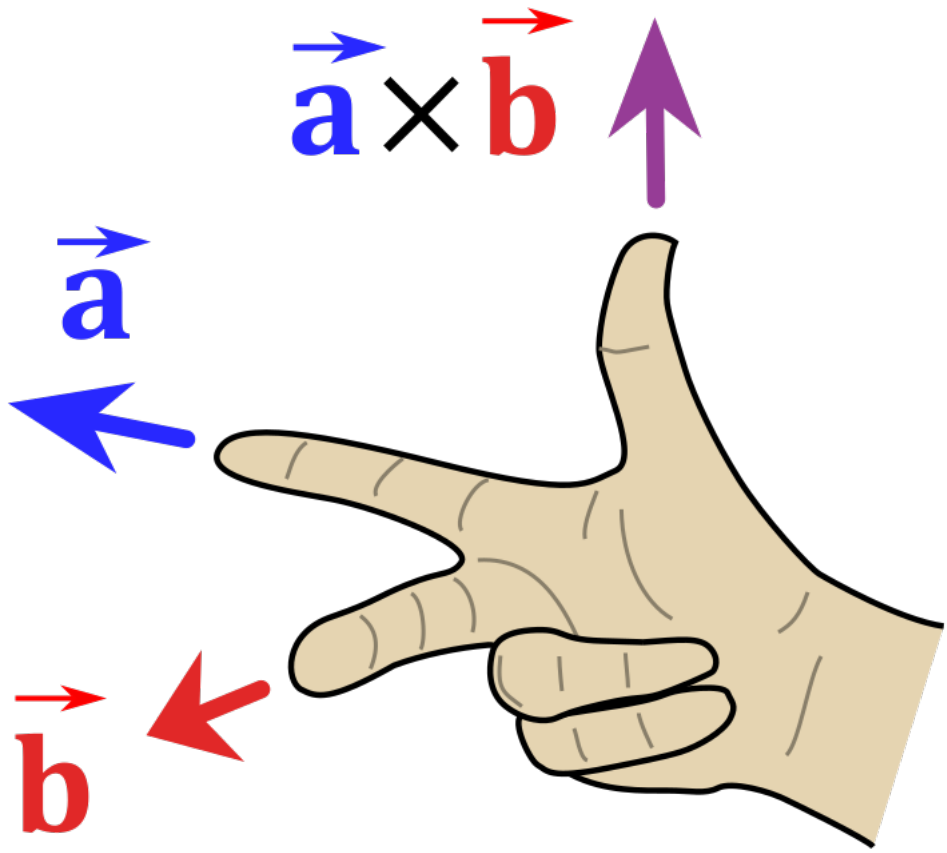
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{bmatrix}a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2\\a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3\\a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1\end{bmatrix}$$

♣ את ההסבר לקשר שבין המכפלה הווקטורית לדטרמיננטה למדתי מסרטון של 3blue1brown. בניגוד אליו בחרתי שהעמודה שבה נכנסות הקואורדינטות של $\vec{c}$ היא העמודה השלישית (מתכונות הדטרמיננטה נובע שזה לא משנה), וזאת כדי שיהיה ברור שהיחס בין $\vec{a}\times\vec{b}$ לבין $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$ צריך להיות כמו היחס של ציר ה-z לצירי ה-x וה-y בהתאמה, וכמו כן בחירה זו מתאימה יותר לאיור של כלל יד ימין המופיע בעמוד הבא.

[9] זה לא משנה באיזו זווית מדובר מפני ש-$|\sin(2\pi-\theta)|=|\sin(-\theta)|=|-\sin\theta|=|\sin\theta|$.

[10] המכפלה $\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ נקראת גם "מכפלה מעורבת", כלומר המכפלה המעורבת של וקטורים מחזירה את נפח המקבילון שהם מגדירים.

הגדרה 4.1. יהיו $\vec{a},\vec{b}\in^3$ ותהא $\theta\in$ זווית בין $\vec{a}$ ל-$\vec{b}$, המכפלה הווקטורית של $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$היא וקטור המסומן ב-$\vec{a}\times\vec{b}$ שהנורמה שלו היא $\|\vec{a}\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|\cdot|\sin\theta|$ והוא מאונך למישור שפורשים $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$ (כלומר הוא מאונך הן ל-$\vec{a}$ והן ל-$\vec{b}$) כאשר כיוונו של הווקטור נקבע ע״פ כלל יד ימין (ראו איור למטה).



איור 1: כלל יד ימין

מקור: התמונה שלעיל נלקחה מוויקישיתוף, שם נכתב שהיא מופיעה ברישיון CC BY-SA 3.0.

♣ ההגדרה תופסת גם כאשר $\vec{a}=\vec{0}$ ו/או $\vec{b}=\vec{0}$ משום שאז $\|\vec{a}\|=0$ ו/או $\left\|\vec{b}\right\|=0$ (בהתאמה) ולכן לכל ערך של θ נקבל $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|=0$ (כלומר $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$).

♣ ההגדרה תקפה גם כאשר $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$ תלויים ליניארית משום שאז $\sin\theta=0$ ולכן $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|=0$, כלומר $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ ואין זה משנה באיזה כיוון ״נפעיל״ את כלל יד ימין.

מסקנה 4.2. לכל $\vec{a},\vec{b}\in^3$ מתקיים $\vec{b}\times\vec{a}=-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

הגדרה 4.3. נאמר שווקטור $\vec{0}\neq\vec{N}\in^3$ ניצב למישור $M\subseteq^3$ (או ש-$\vec{N}$ הוא נורמל של M) אם $\vec{N}$ ניצב למרחב הכיוונים של M.

♣ מומלץ מאד לצפות בסרטונים של 3blue1brown, ובפרט בסרטון שלו על המכפלה הווקטורית.

יהיו $\vec{a},\vec{b}\in^3$ ותהא $\theta\in$ זווית שביניהם.

משפט 4.4. זהות לגראנז'[11]

$$\begin{aligned}\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|^2 &= \|\vec{a}\|^2\cdot\left\|\vec{b}\right\|^2\cdot\sin^2\theta = \|\vec{a}\|^2\cdot\left\|\vec{b}\right\|^2\cdot\left(1-\cos^2\theta\right)\\ &= \|\vec{a}\|^2\cdot\left\|\vec{b}\right\|^2-\|\vec{a}\|^2\cdot\left\|\vec{b}\right\|^2\cdot\cos^2\theta\\ &= \|\vec{a}\|^2\cdot\left\|\vec{b}\right\|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2\end{aligned}$$

טענה 4.5.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}$$

טענה 4.6. יהי $\vec{c}\in^3$, מתקיים $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

טענה 4.7. לכל $t\in$ מתקיים $(t\cdot\vec{a})\times\vec{b}=t\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\times\left(t\cdot\vec{b}\right)$.

תהא $P_0\in^3$ ויהא $M:=\left\{P_0+s\cdot\vec{a}+t\cdot\vec{b}\mid s,t\in\right\}$ מישור.

טענה 4.8. הווקטור $\vec{a}\times\vec{b}$ הוא נורמל של M.

טענה 4.9. תהא $P_0\in M$ נקודה ויהי $\vec{N}\in^3$ נורמל של M, מתקיים $M=\left\{P\in^3\mid\overrightarrow{P_0P}\perp\vec{N}\right\}$.

מסקנה 4.10. יהיו $x_0,y_0,z_0\in$ כך ש- $P_0=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}$, מתקיים:

$$M=\left\{P\in^3\mid\overrightarrow{P_0P}\perp\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in^3\;\middle|\;\begin{bmatrix}x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}=0\right\}$$

$$\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in^3\;\middle|\;(a_2b_3-a_3b_2)(x-x_0)+(a_3b_1-a_1b_3)(y-y_0)+(a_1b_2-a_2b_1)(z-z_0)\right\}$$

♣ ההצגה הזו כבר קרובה מאד להצגה סתומה של המישור, צריך רק להפריד בין המשתנים לאיבר הקבוע (למען האמת הייתי עושה זאת למעלה לו היה לי מקום), כלומר אם נגדיר:

$$\begin{aligned}n&:=a_2b_3-a_3b_2\\ m&:=a_3b_1-a_1b_3\\ k&:=a_1b_2-a_2b_1\\ l&:=-\left(nx_0+my_0+kz_0\right)\end{aligned}$$

נקבל שאחת ההצגות הסתומות של המישור M היא:

$$M=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in^3\mid nx+my+kz+l=0\right\}$$

[11] ערך בוויקיפדיה ז'וזף-לואי לגראנז'.