# ה"יסודות" לאוקלידס - ספר ראשון

ה״יסודות״ לאוקלידס - ספר ראשון
תורגם מיוונית לאנגלית על ידי ריצ׳רד פיצפטריק.
תורגם מאנגלית לעברית על ידי שריה אנסבכר.
מפורסם תחת רישיון CC BY-NC-SA 4.0.

את הנוסח העדכני של התרגום לעברית ניתן למצוא בכל עת בכתובת: https://math.srayaa.com/elements.
לתיקון טעויות בתרגום לעברית, או לסתם הערות והארות, יש לפנות לכתובת: sites.srayaa@gmail.com.

# תוכן העניינים

**הקדמות** 4
מתוך הקדמת המתרגם לאנגלית - Richard Fitzpatrick . . . . . 4
הקדמת המתרגם לעברית - שריה אנסבכר . . . . . 4

**הגדרות** 5

**הנחות יסוד ומוסכמות מקובלות** 6
הנחות יסוד . . . . . 6
מוסכמות מקובלות . . . . . 6

**משפט 1** 6

**משפט 2** 7

**משפט 3** 8

**משפט 4** 8

**משפט 5** 9

**משפט 6** 10

**משפט 7** 10

**משפט 8** 11

**משפט 9** 11

**משפט 10** 12

**משפט 11** 12

**משפט 12** 13

**משפט 13** 13

**משפט 14** 14

**משפט 15** 14

**משפט 16** 15

**משפט 17** 15

**משפט 18** 16

# הקדמות

## מתוך הקדמת המתרגם לאנגלית - Richard Fitzpatrick

ה"יסודות" של אוקלידס הוא ללא ספק היצירה המתמטית המפורסמת ביותר של העת העתיקה הקלאסית, והוא ראוי לכבוד בהיותו ספר הלימוד המתמטי העתיק ביותר בעולם שנמצא בשימוש רציף. מעט ידוע על המחבר, מעבר לעובדה שהוא חי באלכסנדריה בסביבות שנת 300 לפנה"ס. הנושאים העיקריים של היצירה הם גאומטריה, פרופורציה ותורת המספרים.

מרבית המשפטים המופיעים ב"יסודות" לא התגלו ע"י המחבר, אלא הם פרי עבודתם של מתמטיקאים יוונים קדומים יותר כגון: פיתגורס (והאסכולה שלו), היפוקרטס מכיוס, תאיטטוס מאתונה ואאודוקסוס מקנידוס. עם זאת, אוקלידס זוכה בדרך כלל להכרה על סידור המשפטים באופן לוגי המראה (יש להודות, לא תמיד בקפדנות הנדרשת ע"י המתמטיקה המודרנית) שהם נובעים בהכרח מחמש אקסיומות פשוטות. אוקלידס זוכה גם להכרה על פיתוח מספר הוכחות מחוכמות למשפטים התגלו זה מכבר, כגון משפט 48 בספר הראשון.

הבנייות הגאומטריות שבהן עוסק ה"יסודות" מוגבלות לאלו שניתן להשיג באמצעות סרגל ומחוגה. יתרה מזאת, הוכחות באמצעות מדידה אסורות בהחלט: כלומר כל השוואה בין שני גדלים מוגבלת לאמירה שהגדלים שווים, או שהאחד גדול מהאחר.

ה"יסודות" מורכב משלושה-עשר ספרים. הספר הראשון מתאר את המשפטים הבסיסיים של גאומטריית המישור, כולל שלושת המקרים שבהם משולשים חופפים, משפטים שונים המערבים ישרים מקבילים, המשפט בנוגע לסכום זוויות במשולש, ומשפט פיתגורס. הספר השני נחשב בדרך כלל לעוסק ב"אלגברה גאומטרית", מכיוון שלרוב המשפטים הכלולים בו יש משמעויות אלגבריות פשוטות. הספר השלישי חוקר מעגלים ותכונותיהם, וכולל משפטים על משיקים וזוויות היקפיות. הספר הרביעי עוסק במצולעים משוכללים החסומים במעגלים, או חוסמים מעגלים. הספר החמישי מפתח את התורה האריתמטית של פרופורציה. הספר השישי מיישם את את תורת הפרופורציה על גאומטריית המישור ומכיל משפטים על צורות דומות. הספר השביעי עוסק בתורת המספרים האלמנטרית: מספרים ראשוניים, המכנה המשותף הקטן ביותר וכדומה. הספר השמיני עוסק בסדרות הנדסיות. הספר התשיעי מכיל יישומים שונים של תוצאות משני הספרים הקודמים, וכולל משפטים על קיום אין-סוף מספרים ראשוניים, כמו גם על סכום של סדרה הנדסית. הספר העשירי מנסה לסווג גדלים חסרי מידה משותפת (כלומר אי-רציונליים) באמצעות מה שמכונה "שיטת המיצוי", הקדמה עתיקה לאינטגרציה. הספר האחד-עשר עוסק במשפטים בסיסיים של גאומטריה תלת-ממדית. הספר השנים-עשר מחשב את הנפחים היחסיים של חרוטים, פירמידות, גלילים וכדורים, תוך שימוש בשיטת המיצוי. לבסוף, הספר השלושה-עשר חוקר את חמשת הגופים האפלטוניים.

## הקדמת המתרגם לעברית - שריה אנסבכר

ה"יסודות" נכתב במקור ביוונית על ידי אוקלידס בסביבות שנת 300 לפני הספירה. יותר מאלפיים שנה לאחר מכן, נערך המקור היווני על ידי יוהאן לודוויג הייברג (Johan Ludvig Heiberg) והיינריך מנגה (Heinrich Menge), ובשנת 1908 פירסם תומס היתי' (Thomas Heath) תרגום לאנגלית[1] שהתבסס על הנוסח שערכו הייברג ומנגה. על תרגומו של היתי' התבסס ריצ'רד פיצפטריק (Richard Fitzpatrick) בתרגום לאנגלית מודרנית שהוציא לאור בשנת 2007, ותיקן בשנת 2008 (מסת"ב 978-0-6151-7984-1). תרגום זה, יחד עם המקור היווני כפי שנערך על ידי הייברג ומנגה, מפורסם גם באתר של פיצפטריק בכתובת: https://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf.

נכון לזמן כתיבת שורות אלה, לא קיים תרגום של ה"יסודות" לעברית מודרנית, וכחובב גאומטריה מושבע תרגום כזה חסר לי מאוד. כך, נאמן לפתגם "קריינא דאיגרתא איהו ליהווי פרוונקא"[2], החלטתי לכתוב תרגום כזה בעצמי, ומכיוון שאיני יודע יוונית ביקשתי מריצ'רד פיצפטריק להשתמש בתרגום שלו לאנגלית, והוא נענה לי בשמחה. כעת עמדה בפניי הדילמה האלמותית של כל המתרגמים: עד כמה "להיצמד" לטקסט המקורי ועד כמה להתאימו לשפת הקורא. בעצתו של חברי הטוב, אריאל גלפרין, החלטתי לתרגם באופן חופשי מאוד, מתוך הבנה שאם אצמד לניסוח המקורי אחטא למטרה הראשית של התרגום שהיא להיות מובן לקורא המודרני. בנוסף, איני מתרגם מקצועי, כך שמן הסתם לא אצליח להיצמד לנוסח המקורי כראוי (אפילו אם אנסה), מה גם שבכל מקרה מדובר בתרגום של תרגום. יתרון נוסף לתרגום חופשי הוא שהוא דורש זמן מועט יותר, שהרי אינו נצרך לבחירת הנוסח המדויק, וכך יקל עליי להשלים את המשימה.

מן הסתם יש בתרגום זה כמות רבה של טעויות, היות שלא מדובר בעבודה מקצועית. לכן אבקש מן הקוראים שיסבו את תשומת ליבי לכל טעות, אפילו הקטנה ביותר (כתובת הדוא"ל שלי היא: sites.srayaa@gmail.com). תודה!

שריה אנסבכר

[1] אין זה התרגום הראשון לאנגלית, עניינו בו יתברר מיד.

[2] פתגם ארמי שתרגומו המילולי הוא "קריין האיגרת הוא יהיה השליח", ובעברית פשוטה: "אתה רוצה שדבר מה יקרה? אל תחכה לאחרים, אלא עשה אותו בעצמך!".

# הגדרות

1. נקודה היא דבר שאינו ניתן לחלוקה לחלקים קטנים יותר.

2. קו הוא בעל אורך, אך חסר רוחב[3].

3. הקצוות של קו הם נקודות.

4. קו ישר, הוא קו המונח באופן שווה עם נקודות שעליו[4].

5. משטח הוא בעל אורך ורוחב בלבד (אך חסר גובה).

6. הקצוות של משטח הם קווים.

7. משטח מישורי הוא משטח המונח באופן שווה עם הקווים הישרים שעליו[5].

8. הנטייה בין שני קווים, הנמצאים על אותו מישור ונפגשים בנקודה אחת, אשר אינם נמצאים בקו ישר, תיקרא זווית מישורית.

9. זווית ישרת-קווים (או סתם זווית) היא הנטייה שבין שני קווים ישרים הנפגשים בנקודה אחת.

10. זווית ישרה היא הזווית הנוצרת בין שני קווים ישרים, כאשר אחד מהם "עומד" על האחר ונוצרות שתי זוויות צמודות שוות. במקרה כזה הקו הישר הראשון נקרא מאונך / אנך לקו שעליו הוא "עומד".

11. זווית קהה היא זווית גדולה מזווית ישרה.

12. זווית חדה היא זווית קטנה מזווית ישרה.

13. שפה היא קצה של משהו[6].

14. צורה היא מה שנתחם ע"י שפה אחת או כמה שפות.

15. עיגול הוא צורה מישורית[7] המוקפת על ידי קו אחד (הנקרא מעגל), כך שקיימת נקודה בתוך העיגול, המקיימת שהקווים הישרים היוצאים ממנה אל הנקודות שעל המעגל שווים זה לזה (באורכם). כל קו ישר כזה ייקרא רדיוס.

16. הנקודה בתוך העיגול, שהקווים הישרים היוצאים ממנה אל הנקודות שעל המעגל שווים זה לזה, נקראת מרכז העיגול / המעגל.

17. קוטר של עיגול/מעגל הוא קו ישר העובר דרך מרכז העיגול/מעגל, וקצותיו על המעגל. כל קוטר חוצה את המעגל לשני חלקים שווים.[8]

18. חצי-עיגול הוא הצורה המוקפת על ידי קוטר וחצי המעגל הנחתך על ידו. מרכז חצי-העיגול הוא מרכז העיגול המתאים.

19. מצולעים הם צורות מישוריות המוקפות על ידי קווים ישרים הנקראים צלעות. מצולעים המוקפים על ידי שלוש צלעות נקראים משולשים (ביחיד: משולש), ואלו המוקפים על ידי ארבע צלעות נקראים מרובעים (ביחיד: מרובע).

20. **משולשים על פי צלעות**

- משולש שווה-צלעות הוא משולש בעל שלוש צלעות שוות.
- משולש שווה-שוקיים הוא משולש בעל שתי צלעות שוות, ושתיים בלבד.
- משולש שונה-צלעות הוא משולש בעל צלעות שונות זו מזו.

21. **משולשים על פי זוויות**

- משולש ישר-זווית הוא משולש שאחת מזוויותיו ישרה.
- משולש קהה-זווית הוא משולש שאחת מזוויותיו קהה.
- משולש חד-זווית הוא משולש ששלוש זוויותיו חדות.

22. **מרובעים על פי צלעות וזוויות**

- ריבוע הוא מרובע ישר-זוויות ושווה-צלעות (כלומר שכל זוויותיו ישרות וכל צלעותיו שוות זו לזו).
- מלבן הוא מרובע ישר זוויות שאינו שווה-צלעות.
- מעוין הוא מרובע שווה-צלעות שאינו ישר-זוויות.
- מקבילית היא מרובע בעל שני זוגות של צלעות נגדיות שוות, ושני זוגות של זוויות נגדיות שוות.

23. קווים מקבילים הם קווים ישרים הנמצאים באותו מישור, שגם אם נאריך אותם כמה שנרצה, תוך שמירה על היותם קווים ישרים, לא ייפגשו לעולם.

---

[3] לאו דווקא קו ישר, לדוגמה: גם מעגל נחשב לקו. כל ההערות הן משל המתרגמים, חלקן משל המתרגם לאנגלית וחלקן משל המתרגם לעברית.

[4] התרגום האנגלי הוא: "A straight-line is (any) one which lies evenly with points on itself", לא ברור מהי כוונתו של אוקלידס כאן, אבל כולנו יודעים מהו קו ישר (כלומר כזה שאינו עקום).

[5] התרגום האנגלי הוא "A plane surface is (any) one which lies evenly with the straight-lines on itself.", לא ברור מהי כוונתו של אוקלידס כאן, אבל כולנו יודעים מהו קו ישר (כלומר כזה שאינו עקום).

[6] בין אם הוא קו שאז מדובר בנקודה, ובין אם הוא משטח שאז מדובר בקו.

[7] צורה מישורית היא צורה (הגדרה 14) שהיא גם משטח מישורי (הגדרה 7).

[8] למעשה יש להתייחס לזה כהנחת יסוד, ולא כחלק מהגדרה.

# הנחות יסוד ומוסכמות מקובלות

## הנחות יסוד

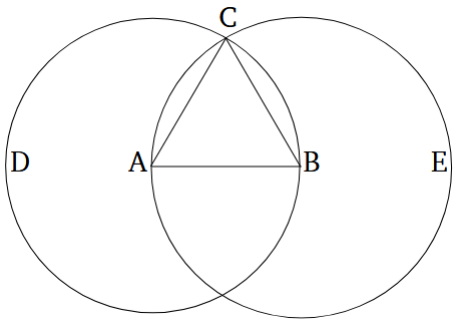
1. בין כל שתי נקודות שונות ניתן לשרטט קו ישר.
2. בהינתן קו ישר, ניתן להאריכו לשני הכיוונים ללא הגבלה, תוך שמירה על היותו קו ישר.
3. בהינתן קו ישר סופי, ניתן לשרטט מעגל שמרכזו באחת מקצותיו והקו הישר הוא רדיוס שלו.
4. כל הזוויות הישרות שוות זו לזו[9].
5. אם קו ישר חותך שני שווים ישרים אחרים, כך שבאחד מצדדיו סכום שתי הזוויות הפנימיות קטן מסכום שתי זוויות ישרות, אז אם נאריך את שני הקווים די הצורך - ייפגשו בנקודה הנמצאת באותו צד של הישר הראשון.

## מוסכמות מקובלות

1. שני דברים השווים לאותו דבר שווים גם זה לזה.
2. אם דברים שווים נוספים לדברים שווים אז הסכומים שווים.
3. אם דברים שווים מופחתים מדברים שווים אז ההפרשים שווים.
4. דברים המתלכדים זה עם זה שווים זה לזה.
5. כל דבר גדול מכל חלק שלו.

# משפט 1

**נרצה לבנות משולש שווה-צלעות על קו ישר סופי נתון.**




יהי $AB$ קו ישר סופי, אם כן אנו נדרשים לבנות עליו משולש שווה-צלעות.
יהי $BCD$[10] מעגל בעל מרכז $A$ ורדיוס $AB$ (הנחה 3).
יהי $ACE$ מעגל בעל מרכז $B$ ורדיוס $BA$ (הנחה 3).
נשרטט את הקווים הישרים $CA$ ו-$CB$ (הנחה 1), שניהם יוצאים מהנקודה $C$ שבה המעגלים חותכים זה את זה[11].
מכיוון ש-$A$ היא מרכז המעגל $CDB$, $AC$ שווה ל-$AB$ (הגדרה 15).
שוב: מכיוון ש-$B$ היא מרכז המעגל $CAE$, $BC$ שווה ל-$BA$ (הגדרה 15).
אבל הראינו שגם $CA$ שווה ל-$AB$, לפיכך כל אחד מ-$AC$ ו-$BC$ שווה ל-$AB$, ולכן הם שווים גם זה לזה (מוסכמה 1).
לפיכך שלושת הקווים הישרים $CA$, $AB$, ו-$BC$ שווים זה לזה, ואם כן המשולש $ABC$ הוא משולש שווה-צלעות הבנוי על $AB$. מש"ל.

---

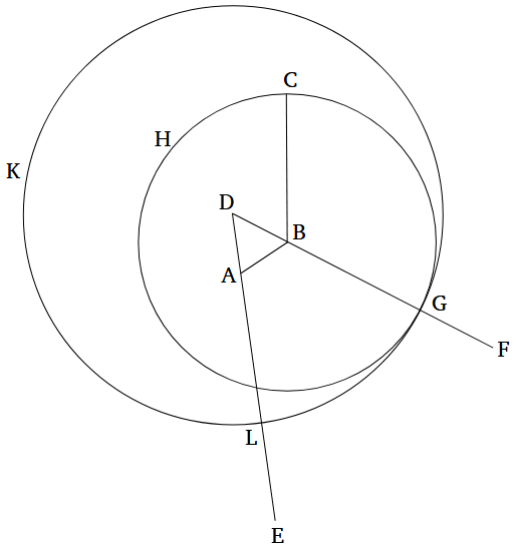
[9] אין זו הנחה מיותרת מפני שכזכור (הגדרה 10) זווית ישרה לא הוגדרה כחצי מזווית שטוחה, אלא כזווית הנוצרת בין קו ישר ה"עומד" על קו ישר אחר, כך שהוא יוצר שתי זוויות צמודות שוות. אף אחד אינו מבטיח לנו שכאשר שני קווים ישרים עומדים על שני קווים ישרים אחרים (כל אחד על קו אחד) מתקיים שהזוויות הנוצרות בשני המקרים שוות זו לזו.

[10] אצל אוקלידס הציור אינו "להמחשה בלבד", אלא הוא חלק מתוכן הספר, ובמקרה זה הוא מאפשר לנו לתת למעגל שם לפי הנקודות הנמצאות עליו.

[11] הקיום של $C$ אינו נובע מהנחות היסוד, והוא צריך לנבוע מהנחת יסוד נוספת. ניסוח אפשרי של הנחת היסוד הזו: שני מעגלים, שהמרחק בין מרכזיהם קטן מסכום הרדיוסים שלהם, וגדול מהערך המוחלט של הפרש הרדיוסים, נחתכים לפחות בנקודה אחת.

## משפט 2

**נרצה לבנות קו ישר השווה לקו ישר נתון, כך שאחד מקצותיו הוא נקודה נתונה.**




תהא $A$ נקודה, ויהי $BC$ קו ישר, אם כן אנו נדרשים לבנות קו ישר השווה ל-$BC$ שאחד מקצתיו הוא הנקודה $A$.

נשרטט את הקו הישר $AB$ (הנחה 1)[12].

יהי $DAB$ משולש שווה-צלעות הבנוי על $AB$ (משפט 1).

יהיו $AE$ ו-$BF$ קווים ישרים הנוצרים מהארכת $DA$ ו-$DB$ בהתאמה (הנחה 2).

יהי $CGH$[13] מעגל בעל מרכז $B$ ורדיוס $BC$ (הנחה 3).

יהי $GKL$[14] מעגל בעל מרכז $D$ ורדיוס $DG$ (הנחה 3).

מהעובדה ש-$B$ היא מרכז המעגל $CGH$ נובע ש-$BC$ שווה ל-$BG$ (הגדרה 15).

כמו כן, מהעובדה ש-$D$ היא מרכז המעגל $GKL$ נובע ש-$DL$ שווה ל-$DG$ (הגדרה 15).

בתוך שני אלה $DA$ ו-$DB$ שווים זה לזה ($ABD$ הוא משולש שווה-צלעות), ולכן אם נפחית מ-$DL$ את $DA$ ומ-$DG$ את $DB$ נקבל קווים ישרים שווים שווים (מוסכמה 3) - כלומר $AL$ שווה ל-$BG$.

$AL$ ו-$BC$ שווים שניהם ל-$BG$ ולכן גם שווים זה לזה (מוסכמה 1). אם כן $AL$ מקיים את המבוקש. מש״ל.

---

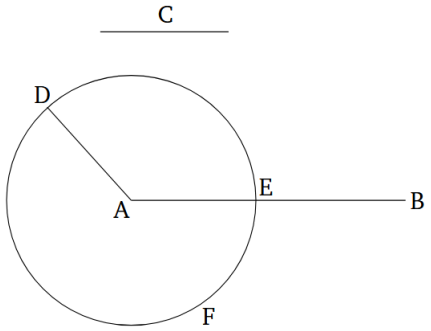
[12] אוקלידס מניח כאן במובלע שהנקודות $A$ ו-$B$ שונות, הנחה זו אינה בעייתית משום שאם הן זהות הרי ש-$BC$ עונה על המבוקש.

[13] $G$ היא הנקודה שבה $BF$ חותך את המעגל. הקיום של $G$ אינו נובע מהנחות היסוד, והוא צריך לנבוע מהנחת יסוד נוספת. ניסוח אפשרי של הנחת היסוד הזו: בהינתן קו ישר ומעגל שמרכזו באחד מקצות הקו הישר, אם רדיוס המעגל קטן מהקו הישר אז המעגל חותך את אותו. במקרה שלנו העובדה שניתן להאריך את $DB$ ללא הגבלה מאפשרת לנו לבחור את הנקודה $F$ כך ש-$BF$ גדול מ-$BC$ (שהוא הרדיוס של $CGH$), ולכן על פי הנחת היסוד החדשה המעגל $CGH$ חותך את $BF$.

[14] $L$ היא הנקודה שבה $AE$ חותך את המעגל, וראה הערה קודמת לגבי הקיום של $L$.

## משפט 3

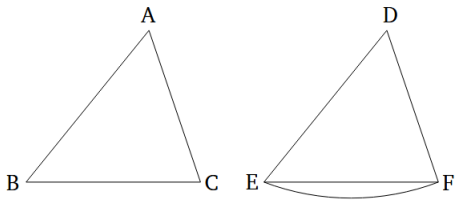
**בהינתן שני קווים ישרים שאינם שווים, נרצה לחתוך מהגדול יותר קו ישר השווה לקטן יותר.**




יהיו $AB$ ו-$C$ שני קווים ישרים, כך ש-$AB$ גדול מ-$C$. אם כן, אנו נדרשים לחתוך מ-$AB$ קו ישר השווה ל-$C$.
יהי $AD$ קו ישר השווה ל-$C$ (משפט 2), ויהי $DEF$[15] מעגל בעל מרכז $A$ ורדיוס $AD$ (הנחה 3).
מכיוון שהנקודה $A$ היא מרכז המעגל $DEF$, $AE$ שווה ל-$AD$ (הגדרה 15).
אבל, $C$ גם הוא שווה ל-$AD$, ולכן $AE$ שווה ל-$C$ (מוסכמה 1), אם כן $AE$ עונה על המבוקש. מש״ל.

## משפט 4

**אם במשולש יש זוג צלעות השוות לזוג צלעות במשולש אחר, ובנוסף הזווית התחומה בין שתי הצלעות במשולש הראשון שווה לזו התחומה בין שתי הצלעות במשולש השני, אז הצלע השלישית במשולש הראשון שווה לצלע השלישית בזה השני, והזוויות הנותרות במשולש הראשון שוות לזוויות הנותרות במשולש השני בהתאמה (משפט חפיפה צלע-זווית-צלע).**




יהיו $ABC$ ו-$DEF$ שני משולשים, כך שהצלעות $AB$ ו-$AC$ שוות לצלעות $DE$ ו-$DF$ בהתאמה, והזווית $BAC$ שווה לזווית $DEF$.
אומר אני שהבסיס $BC$ שווה גם הוא לבסיס $EF$, והמשולש $ABC$ שווה למשולש $DEF$, והזוויות $ABC$ ו-$ACB$ שוות לזוויות $DEF$ ו-$DFE$ בהתאמה.
שכן, אם נזיז את המשולש $ABC$ ונניח אותו על המשולש $DEF$[16], כך שהנקודה $A$ תונח על הנקודה $D$, ו-$AB$ יונח על $DE$, אז הנקודה $B$ תתלכד עם הנקודה $E$, וזאת משום ש-$AB$ שווה ל-$DE$.
היות ש-$AB$ מתלכד עם$DE$, גם $AC$ מתלכד עם $DF$, וזאת משום שהזווית $BAC$ שווה לזווית $EDF$. אם כן, הנקודה $C$ מתלכדת עם הנקודה $F$, שוב: בגלל ש-$AC$ שווה ל-$DF$.
אבל הנקודה $B$ מתלכדת עם הנקודה $E$, ומכאן שהבסיס $BC$ מתלכד עם הבסיס $EF$; משום שאחרת, היות ש-$B$ מתלכדת עם $E$, ו-$C$ עם $F$, נקבל ששני קווים ישרים מקיפים צורה בעלת שטח[17], וזה בלתי אפשרי[18]. לפיכך, הבסיס $BC$ מתלכד עם הבסיס $EF$, ולכן הם שווים (מוסכמה 4).
אם כן, המשולש $ABC$ מתלכד עם המשולש $DEF$, ולכן שווה לו (מוסכמה 4); והזוויות הנשארות (במשולש $ABC$) מתלכדות עם הזוויות הנשארות (במשולש $DEF$), ולכן שוות להם (מוסכמה 4); כלומר הזווית $ABC$ שווה לזווית $DEF$, ו-$ACB$ שווה ל-$DFE$. מש״ל.

---

[15] $E$ היא הנקודה שבה $AB$ חותך את המעגל, וראה הערה 13.

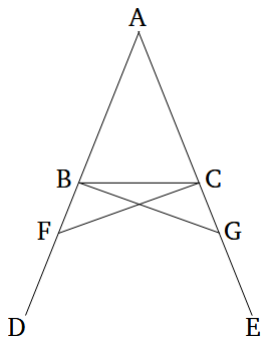
[16] הזזת צורה אחת והנחתה על צורה אחרת צריכה להיחשב הנחת יסוד נוספת, כיום מקובל להניח את משפט צלע-זווית-צלע כאחת מהנחות היסוד של הגאומטריה.

[17] עניין זה מומחש בקו המעוגל שבאיור - אוקלידס נאלץ לצייר קו מעוגל כדי לתחום צורה בעלת שטח בין שני קווים שקצותיהם $E$ ו-$F$.

[18] המתרגם לאנגלית העיר כאן שהדבר נובע מהנחה 1, והוא מפרש אותה כך שבין שתי נקודות ניתן לשרטט קו ישר יחיד. הבעיה בפירוש זו היא שאז לא ברור מדוע אוקלידס נדרש לכך ששני קווים ישרים לא יכולים להקיף צורה בעלת שטח, הלא היה יכול להשתמש בעובדה שמדובר בשני קווים ישרים שקצותיהם באותן שתי נקודות, ומכיוון שבין שתי נקודות ניתן לשרטט קו ישר יחיד הרי שהקווים הישרים הללו מוכרחים להיות זהים.

## משפט 5

**במשולש שווה-שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו, ואם ממשיכים את הצלעות השוות, אז הזוויות שמתחת לבסיס שוות זו לזו.**




יהי $ABC$ משולש שווה-שוקיים כך שהצלע $AB$ שווה לצלע $AC$, יהיו $BD$ ו-$CE$ קווים ישרים הנוצרים מהארכת $AB$ ו-$AC$ בהתאמה (הנחה 2). אומר אני שהזווית $ABC$ שווה ל-$ACB$, והזווית $CBD$ שווה ל-$BCE$.

שכן, תהא $F$ נקודה כלשהי על $BD$[19], ונחתוך מ-$AE$ קו ישר $AG$ השווה ל-$AF$[20] (משפט 3); ובנוסף, נשרטט את הקווים הישרים $FC$ ו-$GB$ (הנחה 1).

נשים לב לכך ש-$AF$ שווה ל-$AG$, ו-$AB$ שווה ל-$AC$, שני הקווים הישרים $FA$ ו-$AC$ שווים לשני הקווים הישרים $GA$ ו-$AB$ בהתאמה, ובנוסף שני הזוגות תוחמים את אותה זווית. לפיכך הבסיס $FC$ שווה לבסיס $GB$, והמשולש $AFC$ שווה למשולש $AGB$, והזוויות הנותרות במשולש הראשון שוות לזוויות הנותרות במשולש השני בהתאמה (משפט 4). כלומר הזווית $ACF$ שווה ל-$ABG$, ו-$AFC$ שווה ל-$AGB$.

מכיוון ש-$AF$ שווה ל-$AG$, ובתוכם $AB$ שווה ל-$AC$, נדע שהנותר מההפרש של $AF$ ו-$AB$, שווה לנותר מההפרש של $AG$ ו-$AC$ (מוסכמה 3) - כלומר $BF$ שווה ל-$CG$.

אבל כבר ראינו ש-$FC$ שווה ל-$GB$, ושהזווית $BFC$ (שהיא הזווית $AFC$) שווה לזווית $CGB$ (שהיא הזווית $AGB$), והבסיס $BC$ משותף לשניהם[21]. לפיכך, המשולש $BFC$ שווה למשולש $CGB$, והזוויות הנותרות במשולש האחד שוות לזוויות הנותרות באחר בהתאמה, כלומר הזווית $FBC$ שווה ל-$GCB$ והזווית $BCF$ שווה ל-$CBG$ (משפט 4).

היות שהראינו שכל הזווית $ABG$ שווה לכל הזווית $ACF$, ובתוכן הזווית $CBG$ שווה לזווית $BCF$, נדע שהזווית הנותרת מהפרש הזוויות $ABG$ ו-$CBG$ שווה להפרש הזוויות $ACF$ ו-$BCF$ (מוסכמה 3) - כלומר הזווית $ABC$ שווה לזווית $ACB$, והן זוויות הבסיס של המשולש $ABC$. וכבר ראינו לעיל שהזוויות $CBG$ ו-$BCF$ שוות זו לזו, והן הזוויות שמתחת לבסיס. מש"ל.

---

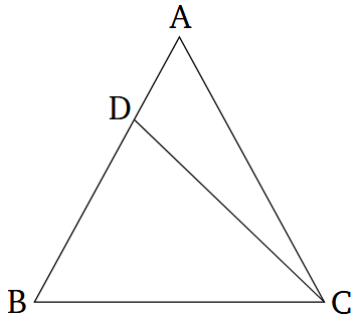
[19] גם כאן יש צורך בהנחת יסוד נוספת שתיתן את הקיום של נקודה $F$ כזו. ניסוח אפשרי של הנחת היסוד הזו: לכל שתי נקודות שונות קיימת נקודה נוספת על הקו הישר שביניהן, או: בין כל שתי נקודות יש נקודה שלישית.

[20] היכולת להאריך את $AC$ ללא הגבלה (הנחה 2) מאפשרת לנו לבחור את $E$ כך ש-$AE$ גדול יותר יותר מ-$AF$.

[21] לא ברור מדוע יש צורך בכך ש-$BC$ משותף.

## משפט 6

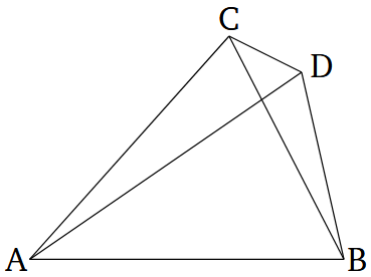
**אם שתי זוויות במשולש שוות זו לזו, אז גם הצלעות הנמצאות מולן שוות זו לזו.**




יהי $ABC$ משולש שבו הזווית $ABC$ שווה לזווית $ACB$, אומר אני שגם הצלע $AB$ שווה לצלע $AC$.
שכן אם $AB$ לא שווה ל-$AC$ אז אחת מהן גדולה יותר, נניח ש-$AB$ היא הגדולה יותר, נחתוך ממנה קו ישר $DB$ השווה ל-$AC$ (משפט 3), ונשרטט את $DC$ (הנחה 1).
הצלע $DB$ שווה לצלע $AC$, והצלע $BC$ משותפת למשולשים $DBC$ ו-$ACB$, ובנוסף, הזווית $DBC$ שווה לזווית $ACB$. לכן הבסיס $DC$ שווה לבסיס $AB$, והמשולש $DBC$ חופף למשולש $ACB$ (משפט 4), וזאת למרות שהמשולש $DBC$ הוא חלק מהמשולש $ACB$ - זהו אבסורד (סתירה למוסכמה 5)!
מכאן שהצלע $AB$ שווה לצלע $AC$. מש״ל.

## משפט 7

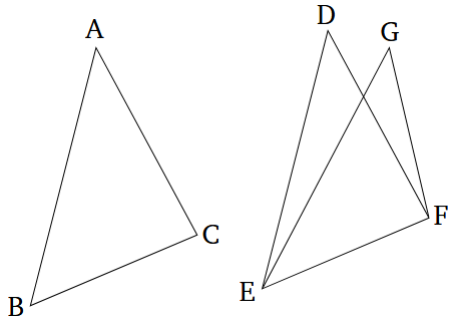
**לא ייתכן מצב שבו שני זוגות של קווים ישרים השווים זה לזה בהתאמה בנויים על אותו קו ישר, כך שבכל זוג שני הקווים הישרים נפגשים בנקודה שונה מזו של הזוג האחר, ושתי הנקודות נמצאות באותו צד של הקו הישר הראשון; אלא בהכרח שני הזוגות נפגשים באותה נקודה.**




נניח שייתכן מצב כזה, ויהיו $AC, CB$ ו-$AD, DB$ שני זוגות של קווים ישרים שווים זה לזה בהתאמה, הבנויים על אותו קו ישר $AB$, ונפגשים בשתי נקודות שונות $C$ ו-$D$ הנמצאות באותו צד של $AB$.
נשרטט את $CD$ (הנחה 1), ומכיוון ש-$AC$ שווה ל-$AD$, הזווית $ACD$ שווה לזווית $ADC$ (משפט 5).
הזווית $ACD$ גדולה מהזווית $DCB$ (מוסכמה 5), ולכן מהשוויון שלעיל נובע שגם $ADC$ גדולה מ-$DCB$.
הזווית $CDB$ גדולה מהזווית $ADC$ (מוסכמה 5), ומכאן שהיא גדולה גם מ-$DCB$.
ושוב, מכיוון ש-$CB$ שווה ל-$DB$, הזווית $CDB$ שווה לזווית $DCB$ (משפט 5). אבל לעיל הראינו ש-$CDB$ גדולה מ-$DCB$ - זה בלתי אפשרי.
מכאן שלא ייתכן מצב כזה. מש״ל.

## משפט 8

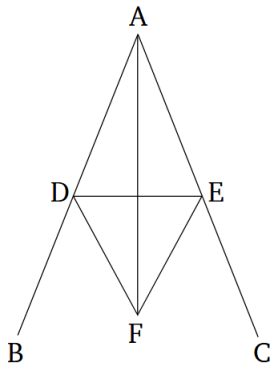
**אם שתי צלעות במשולש אחד שוות לשתי צלעות במשולש אחר בהתאמה, ובנוסף הבסיסים של המשולשים שווים זה לזה, אז הזווית שבין שתי הצלעות במשולש האחד שווה לזו שבין שתי הצלעות במשולש האחר (משפט חפיפה צלע-צלע-צלע).**




יהיו $ABC$ ו-$DEF$ שני משולשים כך שהצלעות $AB$ ו-$AC$ שוות לצלעות $DE$ ו-$DF$ בהתאמה, ובנוסף הבסיס $BC$ שווה לבסיס $EF$.
אומר אני שהזווית $BAC$ שווה לזווית $EDF$.
שכן אם נזיז את המשולש $ABC$ ונניח אותו על המשולש $DEF$, כך שהנקודה $B$ תונח על הנקודה $E$, ו-$BC$ יונח על $EF$, אז הנקודה $C$ תתלכד עם הנקודה $F$, שהרי $BC$ שווה ל-$EF$.
כעת, היות ש-$BC$ מתלכד עם $EF$, הצלעות $BA$ ו-$CA$ גם הן מתלכדות עם $ED$ ו-$DF$ בהתאמה. שכן אם הבסיס $BC$ מתלכד עם הבסיס $EF$, אבל הצלעות $AB$ ו-$AC$ לא מתלכדות עם $ED$ ו-$DF$ (בהתאמה), אלא עם $EG$ ו-$GF$[22], אז בנינו שני זוגות של קווים ישרים השווים זה לזה בהתאמה, על אותו קו ישר, כך שבכל זוג שני הקווים הישרים נפגשים בנקודה שונה מזו של הזוג האחר, ושתי הנקודות נמצאות באותו צד של הקו הישר הראשון; אבל דבר כזה אינו יכול להיבנות (משפט 7). אם כן, כאשר מזיזים את המשולש $ABC$ ומניחים אותו על המשולש $DEF$, כך שהבסיס $BC$ מתלכד עם הבסיס $EF$, אז בהכרח הצלעות $BA$ ו-$AC$ מתלכדות עם $ED$ ו-$DF$ (בהתאמה).
מכאן שגם הזווית $BAC$ תתלכד עם הזווית $EDF$, ולכן הן שוות (מוסכמה 4).

## משפט 9

**נרצה לחצות זווית נתונה לשני חצאים שווים.**

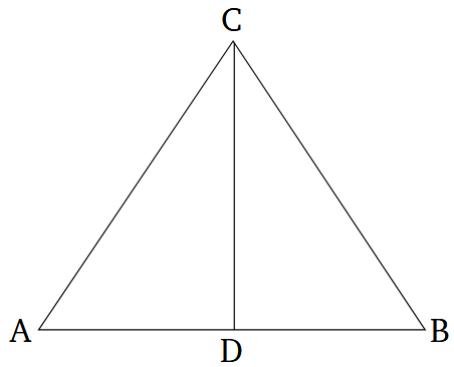



תהא $BAC$ זווית נתונה, אם כן אנו נדרשים לחצות אותה לשני חצאים שווים.
תהא $D$ נקודה כלשהי על $AB$, נחתוך מ-$AC$ קו ישר $AE$ השווה ל-$AD$ (משפט 3), ונשרטט את $DE$ (הנחה 1). כמו כן, נבנה משולש שווה-צלעות $DEF$ על $DE$ (משפט 1), ונשרטט את $AF$ (הנחה 1). אומר אני ש$AF$ חוצה את הזווית $BAC$ לשני חצאים שווים ($DAF$ ו-$EAF$).
שכן הצלע $AD$ שווה לצלע $AE$, והצלע $AF$ משותפת לשני המשולשים $ADF$ ו-$AEF$, והבסיס $DF$ שווה לבסיס $EF$; לפיכך הזווית $DAF$ שווה לזווית $EAF$ (משפט 8).
אם כן, $AF$ חוצה את הזווית $BAC$ לשני חצאים שווים - $DAF$ ו-$EAF$. מש"ל.

[22] כלומר $G$ מוגדרת להיות הנקודה שאיתה מתלכדת $A$ לאחר הזזת המשולש $ABC$ והנחתו על $DEF$ כפי שהוזכר לעיל.

## משפט 10

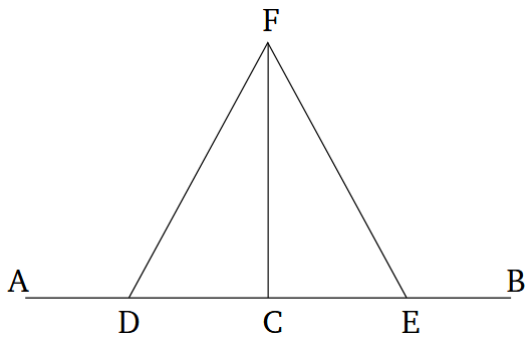
**בהינתן קו ישר סופי, נרצה לחצותו לשני חצאים שווים.**




יהי $AB$ קו ישר נתון, אם כן אנו נדרשים לחצות אותו לשני חצאים שווים.
נבנה משולש שווה-צלעות $ABC$ על $AB$ (משפט 1), ונחצה את הזווית $ACB$ לשני חצאים שווים ע״י קו ישר $CD$ (משפט 9). אומר אני שהנקודה $D$ חוצה את הקו הישר $AB$ לשני חצאים שווים[23].
שכן הצלע $AC$ שווה לצלע $CB$, והצלע $CD$ משותפת לשני המשולשים $ACD$ ו-$BCD$, והזווית $ACD$ שווה לזווית $BCD$, לפיכך הבסיס $AD$ שווה לבסיס $BD$ (משפט 4). מש״ל.

## משפט 11

**בהינתן קו ישר ונקודה עליו, נרצה לשרטט קו ישר נוסף היוצא מהנקודה הנתונה, ויוצר זוויות ישרות עם הקו הישר הנתון.**




יהי $AB$ קו ישר נתון, ותהא $C$ נקודה עליו. אם כן אנו נדרשים לשרטט קו ישר נוסף היוצא מהנקודה $C$ ויוצר זוויות ישרות עם $AB$.
תהא $D$ נקודה כלשהי על $AC$, נחתוך מ-$CB$ קו ישר $CE$ השווה ל-$CD$ (משפט 3)[24], נבנה משולש שווה-צלעות על $DE$ (משפט 1), ונשרטט את $FC$ (הנחה 1). אומר אני שהקו הישר $FC$ יוצר זוויות ישרות עם $AB$.
שכן הצלע $DC$ שווה לצלע $CE$, והצלע $CF$ משותפת למשולשים $CDF$ ו-$CEF$, והבסיס $DF$ שווה לבסיס $FE$ ($DEF$ הוא משולש שווה-צלעות). לפיכך הזווית $DCF$ שווה לזווית $ECF$ (משפט 8), ואלו שתי זוויות צמודות.
אבל אם קו ישר אחד ״עומד״ על קו ישר אחר, כך שנוצרות שתי זוויות צמודות שוות, אז כל אחת מהזוויות השוות היא זווית ישרה (הגדרה 10). אם כן, הקו הישר $CF$ יוצא מהנקודה $C$, ויוצר זוויות ישרות עם הקו הישר הנתון $AB$. מש״ל.

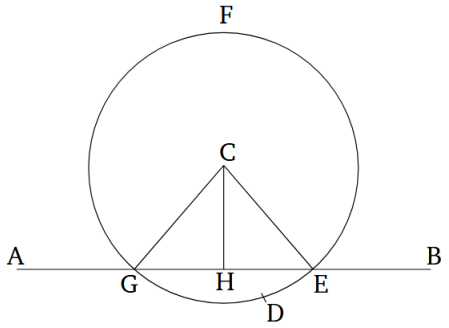
---

[23] כלומר אנו חוצים את הזווית $ACB$ ע״י קרן, ומסמנים ב-$D$ את נקודת החיתוך שלה עם $AB$. למעשה, הקיום של נקודת חיתוך כזו אינו נובע מהנחות היסוד; ניסוח אפשרי להנחת היסוד הדרושה הוא: אם קרן $CD$ מחלקת זווית $ACB$ לשני חלקים, כך שסכום הזוויות $ACD$ ו-$BCD$ שווה לזווית $ACB$, אז הקרן $CD$ חותכת את $AB$.

[24] אוקלידס מניח כאן ש-$CD$ קטן מ-$CB$, כלומר הנקודה $D$ אינה נקודה שנבחרה באופן אקראי על $AC$, אלא נקודה המקיימת את התנאי הנ״ל. את הקיום של נקודה כזו ניתן לקבל ע״י חציית $AC$ (משפט 10), לאחר מכן חצייה של החצי הימני וחוזר חלילה עד שמתקבלת נקודה מתאימה.

## משפט 12

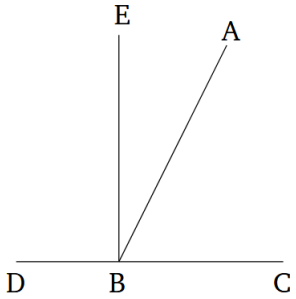
**בהינתן ישר אין-סופי ונקודה שאינה עליו, נרצה לשרטט קו ישר היוצא מהנקודה הנתונה, ומאונך לישר.**




יהי $AB$ ישר אין-סופי נתון, ותהא $C$ נקודה שאינה עליו. אם כן אנו נדרשים לשרטט קו ישר היוצא מהנקודה $C$ ומאונך לישר $AB$.
תהא $D$ נקודה כלשהי הנמצאת בצד האחר של הישר $AB$ (כלומר $C$ ו-$D$ נמצאות בשני צדדים שונים של הישר), יהי $EFG$[25] מעגל בעל מרכז $C$ ורדיוס $CD$ (הנחה 3), נחצה את הקו הישר $EG$ בנקודה $H$ (משפט 10), ונשרטט את הקווים הישרים $CG$, $CH$ ו-$CE$. אומר אני ש-$CH$ מאונך לישר $AB$ ויוצא מהנקודה $C$.
שכן הצלע $GH$ שווה לצלע $HE$, והצלע $HC$ משותפת למשולשים $CGH$ ו-$CEH$, והבסיס $CG$ שווה לבסיס $CE$. לפיכך הזווית $CHG$ שווה לזווית $EHC$ (משפט 8), והן זויות צמודות.
אבל אם קו ישר אחד "עומד" על קו ישר אחר, כך שנוצרות שתי זויות צמודות שוות, אז כל אחת מהזויות השוות היא זווית ישרה, ובמקרה כזה הקו הישר הראשון נקרא מאונך לקו שעליו הוא "עומד" (הגדרה 10). אם כן, $CH$ יוצא מהנקודה $C$ ומאונך לישר האין-סופי $AB$. מש"ל.

## משפט 13

**כאשר קו ישר אחד "עומד" על אחר, שתי הזויות הנוצרות הן זויות ישרות או שסכומן שווה לזה של שתי זויות ישרות.**



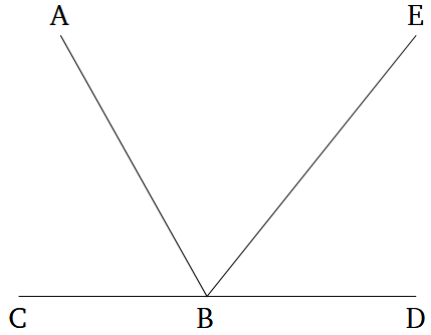

יהי $AB$ קו ישר ה"עומד" על קו ישר $CD$, כך שנוצרות הזויות $CBA$ ו-$ABD$. אומר אני ששתי זויות אלו הן זויות ישרות, או שסכומן שווה לזה של שתי זויות ישרות.
למעשה, אם הזווית $CBA$ שווה לזווית $ABD$, אז שתיהן זויות ישרות (הגדרה 10). אבל אם לא, אז יהי $BE$ קו ישר כך שהזויות $CBE$ ו-$EBD$ הן זויות ישרות (משפט 11).
מכיוון שהזווית $CBE$ שווה לשתי הזויות $CBA$ ו-$ABE$, אם נוסיף את הזווית $EBD$ לשני הצדדים, נקבל שסכום שתי הזויות $CBE$ ו-$EBD$ שווה לסכום שלוש הזויות $CBA$, $ABE$ ו-$EBD$ (מוסכמה 2).
שוב, מכיוון שהזווית $DBA$ שווה לשתי הזויות $DBE$ ו-$EBA$, אם נוסיף את הזווית $ABC$ לשני הצדדים נקבל שסכום שתי הזויות $DBA$ ו-$ABC$ שווה לסכום שלוש הזויות $DBE$, $EBA$ ו-$ABC$ (מוסכמה 2).
אבל הראינו שסכום שתי הזויות $CBE$ ו-$EBD$ שווה גם הוא לסכום שלוש הזויות $CBA$, $ABE$ ו-$EBD$, ומכאן שסכום הזויות $ABD$ ו-$ABC$ שווה לסכום הזויות $DBE$ ו-$EBA$ (מוסכמה 1) שהן שתי זויות ישרות. מש"ל.

---

[25] $E$ ו-$G$ הן הנקודות שבהן חותך המעגל את הישר $AB$. הקיום של נקודות אלו אינו נובע מהנחות היסוד; ניסוח אפשרי להנחת היסוד הדרושה הוא: בהינתן ישר ומעגל, אם המעגל כולל נקודה שאינה נמצאת באותו צד של הישר יחד עם מרכז המעגל, אז המעגל חותך את הישר בשתי נקודות שונות.

## משפט 14

**אם שני קווים ישרים, שאינם נמצאים באותו צד של קו ישר שלישי, יוצרים בנקודה שעליו שתי זוויות צמודות שסכומן שווה לסכום שתי זוויות ישרות, אז שני הקווים הישרים הראשונים ישרים זה ביחס לזה[26].**




יהיו $BC$ ו-$BD$ שני קווים ישרים שאינם נמצאים באותו צד של קו ישר $AB$, כך שבנקודה $B$ שעליו סכום הזוויות הצמודות הנוצרות $ABC$ ו-$ABD$ שווה לסכום שתי זוויות ישרות. אומר אני ש-$BD$ ישר ביחס ל-$CB$.

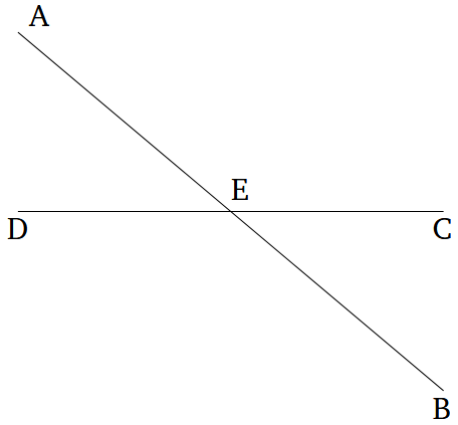
שכן אם $BD$ אינו ישר ביחס ל-$BC$, אז יהי $BE$ ישר ביחס ל-$CB$ (הנחה 1). אם כן, מכיוון שהקו הישר $AB$ "עומד" על הקו הישר $CBE$, סכום הזוויות $ABC$ ו-$ABE$ שווה לסכום שתי זוויות ישרות (משפט 13).

סכום הזוויות $ABC$ ו-$ABD$ שווה גם הוא לסכום שתי זוויות ישרות, ומכאן שסכום הזוויות $CBA$ ו-$ABE$ שווה לסכום הזוויות $CBA$ ו-$ABD$ (מוסכמה 1).

נחסיר את הזווית $CBA$ משני הצדדים, ונקבל שהזווית $ABE$ שווה לזווית $ABD$ (מוסכמה 3), וזאת למרות שהזווית $ABE$ היא רק חלק מהזווית $ABD$ (או להפך), וזה בלתי אפשרי (מוסכמה 5). לפיכך $BE$ אינו ישר ביחס ל-$CB$, ובאופן דומה אנו יכולים להראות שאין עוד כזה ישר ביחס ל-$CB$ מלבד $BD$, ומכאן ש-$CB$ ישר ביחס ל-$BD$. מש"ל.

## משפט 15

**אם שני קווים ישרים חותכים זה את זה אז הם יוצרים זוויות קודקודיות השוות זו לזו.**




יהיו $AB$ ו-$CD$ שני קווים ישרים החותכים זה את זה בנקודה $E$. אומר אני שהזווית $AEC$ שווה לזווית $DEB$, והזווית $CEB$ שווה לזווית $AED$.

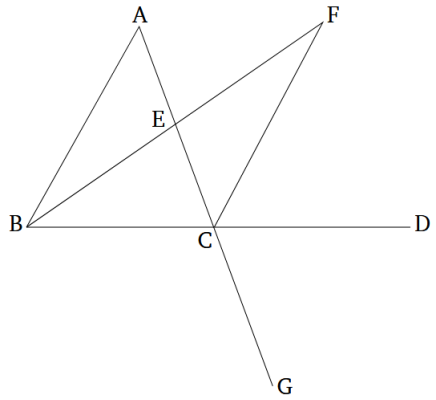
שכן הקו הישר $AE$ "עומד" על הקו הישר $CD$, כך שנוצרות הזוויות $CEA$ ו-$AED$ שסכומן שווה לסכום שתי זוויות ישרות (משפט 13). ושוב, מכיוון שהקו הישר $DE$ "עומד" על הקו הישר $AB$, כך שנוצרות הזוויות $AED$ ו-$DEB$ שסכומן שווה לסכום שתי זוויות ישרות (משפט 13). אבל ראינו שהסכום של הזוויות $CEA$ ו-$AED$ שווה גם הוא לסכום שתי זוויות ישרות. אם כן, הסכום של $CEA$ ו-$AED$ שווה לסכום של $AED$ ו-$DEB$ (מוסכמה 1), ולכן אם נחסר משני הצדדים את הזווית $AED$ משני הצדדים, נקבל שהזווית $CEA$ שווה לזווית $BED$ (מוסכמה 3).

באופן דומה ניתן להראות שהזווית $CEB$ שווה לזווית $AED$. מש"ל.

[26] כלומר שניהם יוצרים יחד קו ישר אחד גדול יותר.

## משפט 16

**בכל משולש, כאשר מאריכים את אחת הצלעות, הזווית החיצונית שנוצרת גדולה מכל אחת מהזוויות הפנימיות הנגדיות.**




יהי $ABC$ משולש, ונאריך את הצלע $BC$ (בכיוון של $C$) עד לנקודה $D$. אומר אני שהזווית החיצונית $ACD$ גדולה מכל אחת משתי הזוויות הפנימיות הנגדיות $CBA$ ו-$BAC$.

נחצה את הקו הישר $AC$ בנקודה $E$ לשני חצאים שווים (משפט 10), נשרטט את הקו הישר $BE$ (הנחה 1), ונמשיך אותו עד לנקודה $F$ כך ש-$EF$ שווה ל-$BE$ (הנחה 2 ומשפט 3). כמו כן, נשרטט את הקו הישר $FC$ (הנחה 1), ונאריך את הצלע $AC$ (בכיוון של $C$) עד לנקודה $G$.

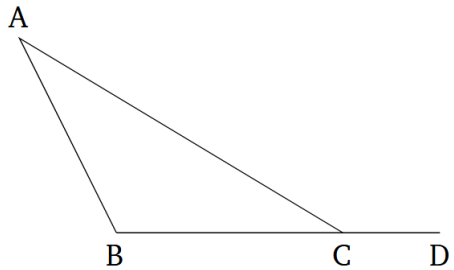
אם כן, הקווים הישרים $AE$ ו-$BE$ שווים לקווים הישרים $CE$ ו-$EF$ בהתאמה, ובנוסף הזווית $AEB$ שווה לזווית $FEC$ שהרי הן זוויות קודקודיות (משפט 15). מכאן שהבסיס $AB$ שווה לבסיס $FC$, והמשולש $ABE$ שווה למשולש $FEC$, והזוויות הנותרות במשולש האחד שוות לזוויות הנותרות באחר בהתאמה - כלומר הזווית $BAE$ שווה לזווית $ECF$.

אבל הזווית $ECD$ גדולה מהזווית $ECF$[27], ולכן גם הזווית $ACD$ (ששווה ל-$ECD$) גדולה מהזווית $BAE$ (ששווה ל-$ECF$).

באופן דומה, ע"י חציית הקו הישר $BC$ לשני חצאים שווים, ניתן להראות שהזווית $BCG$ גדולה מהזווית $ABC$, ומכיוון ש-$BCG$ ו-$ACD$ הן זוויות קודקודיות ולכן שוות זו לזו (משפט 15), הרי שנובע מזה שהזווית $ACD$ גדולה גם מהזווית $ABC$. מש"ל.

## משפט 17

**בכל משולש, הסכום של כל שתי זוויות קטן מסכום שתי זוויות ישרות.**




יהי $ABC$ משולש, אומר אני שהסכום של כל שתי זוויות במשולש $ABC$ קטן מסכום שתי זוויות ישרות.

שכן, נאריך את $BC$ (בכיוון של $C$) עד לנקודה $D$, ומכיוון שהזווית $ACD$ היא זווית חיצונית למשולש $ABC$, היא גדולה מהזווית הפנימית הנגדית $ABC$ (משפט 16).

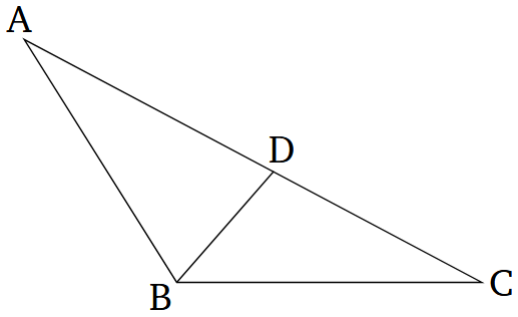
כעת נוסיף את הזווית $ACB$ לשני הצדדים, ונקבל שסכום הזוויות $ACD$ ו-$ACB$ גדול מסכום הזוויות $ABC$ ו-$BCA$. אבל סכום הזוויות $ACD$ ו-$ACB$ שווה לזה של שתי זוויות ישרות (משפט 13), ומכאן שסכום הזוויות $ABC$ ו-$BCA$ קטן מסכום שתי זוויות ישרות.

באופן דומה ניתן להוכיח שסכום הזוויות $BAC$ ו-$ACB$ גם הוא קטן מסכום שתי זוויות ישרות, וכמוהו גם סכום הזוויות $CAB$ ו-$ABC$. מש"ל.

[27] שכן הזווית $ECD$ שווה לסכום הזוויות $ECF$ ו-$FCD$. העובדה ש-$F$ אכן נמצאת במיקום המתאים אינה נובעת מהנחות היסוד, והיא צריכה להיחשב כהנחה נוספת.

## משפט 18

**בכל משולש, צלע גדולה נמצאת מול זווית גדולה.**




יהי $ABC$ משולש כך שהצלע $AC$ גדולה מהצלע $AB$. אומר אני שהזווית $ABC$ גדולה גם היא מהזווית $BCA$.
נחתוך מ-$AC$ קו ישר $AD$ השווה ל-$AB$ (משפט 3), ונשרטט את $BD$ (הנחה 1).
הזווית $ADB$ חיצונית למשולש $BCD$, ולכן היא גדולה מהזווית הפנימית הנגדית $DCB$ (משפט 16). אבל הזווית $ADB$ שווה לזווית $ABD$, שהרי הצלע $AB$ שווה לצלע $AD$ (משפט 5), מכאן שהזווית $ABD$ גדולה גם היא מהזווית $ACB$ (ששווה לזווית $DCB$), וממילא הזווית $ABC$ גדולה בהרבה מהזווית $ACB$[28].

[28] נראה שאוקלידס מסתמך על העובדה שהזווית $ABC$ שווה לסכום הזוויות $ABD$ ו-$DBC$, אך עובדה זו אינה נובעת מהנחות היסוד. ניסוח אפשרי להנחת היסוד המתאימה: אם קרן היוצאת מנקודה $B$ חותכת קו ישר סופי $AB$ בנקודה $D$ (כלומר $D$ נמצאת בין $A$ ל-$B$), אז הזווית $ABC$ שווה לסכום הזוויות $ABD$ ו-$DBC$. זהו בדיוק הכיוון ההפוך להנחת היסוד המוצעת בהערה 23.