גאומטריה מוחלטת

גאומטריה אוקלידית - חלק שלישי

נכתב ע״י שריה אנסבכר

תוכן העניינים

1 מצולעים, דמיון וחפיפה **2**

1.1 מצולעים 2

1.2 דמיון 2

1.3 חפיפה 3

2 פונקציית זווית ומשפטי החפיפה **4**

3 משולשים **5**

4 שני ישרים הנחתכים ע״י ישר שלישי **6**

1 מצולעים, דמיון וחפיפה

יהי $(\mathbb{X}, |\cdot|, \angle)$ מרחב קרנות.

1.1 מצולעים

הגדרה 1.1. מצולע ב-$\mathbb{G}$ הוא גרף לא מכוון $G := (V, E)$ כך ש-$V \subseteq \mathbb{G}$, המקיים את שלושת התנאים הבאים:

1. V היא קבוצה מישורית.
2. G הוא מעגל אוילר פשוט, כלומר קיים מעגל אוילר פשוט $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ כך ש-$V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$.
3. לכל $v_1, v_2, v_2, v_4 \in V$, כך ש-$\{v_1, v_2\} \in E$ ו-$\{v_3, v_4\} \in E$, מתקיים $[v_1.v_2] \cap [v_3, v_4] = \emptyset$.

מסקנה 1.2. לכל מצולע יש לפחות שלושה קודקודים שונים.

♣ נוהגים לכנות מצולע בעל 10 צלעות ומטה לפי מספר הצלעות שלו: מְשֻׁלָּשׁ, מְרֻבָּע, מְחֻמָּשׁ, מְשֻׁשָּׁה, מְשֻׁבָּע, מְתֻמָּן, מְתֻשָּׁע וּמְעֻשָּׂר.

סימון: נוהגים לסמן מצולע (V, E) ע״י כתיבת כל הקודקודים שלו ברצף (למשל כך: $ABCDE$), כאשר בין כל שני קודקודים סמוכים ברצף מחברת צלע, וגם בין הקודקוד הראשון לאחרון מחברת צלע.

הגדרה 1.3. יהי (V, E) מצולע, האורך של צלע $e \in E$ הוא המרחק בין שני הקודקודים המרכיבים אותה.

הגדרה 1.4. ההיקף של מצולע (V, E) הוא סכום אורכי הצלעות שלו.

מסקנה 1.5. לכל שלוש נקודות $A, B, C \in \mathbb{X}$ שאינן קוויות, קיים מצולע יחיד (V, E) כך ש-$V = \{A, B, C\}$.

סימון: לכל שלוש נקודות $A, B, C \in \mathbb{X}$ שאינן קוויות, נסמן ב-$\triangle ABC$ את אותו מצולע יחיד, וכפי שהזכרנו נקרא למצולע כזה משולש.

מסקנה 1.6. האורך של כל שתי צלעות במשולש גדול **ממש** מאורך הצלע השלישית.

1.2 דמיון

סימון: כאשר נסמן פונקציה כלשהי ב-״$\sim$״, נסמן גם $\tilde{X} := \sim(X)$ לכל X בתחום ההגדרה של $\sim$.

הגדרה 1.7. שתי קבוצות $S, T \subseteq \mathbb{X}$ תיקראנה דומות, אם קיימת פונקציה חח״ע ועל $\sim: S \to T$, המקיימת שלכל A, B, O כך ש-A, B שונות מ-O, מתקיים:

$$\angle AOB = \angle \tilde{A}\tilde{O}\tilde{B}$$

פונקציה כזו תיקרא דמיון בין S ל-T.

מסקנה 1.8. העוצמה של כל שתי קבוצות דומות זהה.

מסקנה 1.9. הפונקציה ההופכית של דמיון גם היא דמיון.

מסקנה 1.10. דמיון הוא יחס שקילות.

הגדרה 1.11. נאמר ששני מצולעים (V, E) ו-(V', E') הם דומים, אם קיים דמיון $\sim: V \to V'$ כך שלכל $v, w \in V$ המקיימים $\{v, w\} \in E$ מתקיים $\{\tilde{v}, \tilde{w}\} \in E'$; ובמקרה כזה אותו דמיון ייקרא דמיון מצולעים בין (V, E) ל-(V', E').

סימון: נסמן ששני מצולעים $A_1A_2 \dots A_n$ ו-$B_1B_2 \dots B_n$ הם דומים ע״י $A_1A_2 \dots A_n \sim B_1B_2 \dots B_n$, כאשר הדמיון נעשה ע״י פונקציית דמיון[1] המעתיקה את A_i ל-B_i לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.

מסקנה 1.12. לכל שני מצולעים דומים יש מספר קודקודים זהה.

מסקנה 1.13. הפונקציה ההופכית של דמיון מצולעים גם היא דמיון מצולעים.

מסקנה 1.14. דמיון מצולעים הוא יחס שקילות.

[1] פונקציה זו אינה מסומנת בהכרח ב-״$\sim$״, כאן מדובר בסימון קבוע לדמיון.

1.3 חפיפה

הגדרה 1.15. שתי קבוצות דומות $S, T \subseteq \mathbb{X}$ תיקראנה חופפות, אם קיים דמיון $\sim: S \to T$ כך שלכל $A, B \in S$ מתקיים:

$$|AB| = \left|\tilde{A}\tilde{B}\right|$$

פונקציה כזו תיקרא חפיפה בין S ל-T.

מסקנה 1.16. הפונקציה ההופכית של חפיפה גם היא חפיפה.

מסקנה 1.17. חפיפה היא יחס שקילות.

הגדרה 1.18. נאמר ששני מצולעים (V, E) ו-(V', E') הם חופפים, אם קיימת חפיפה $\sim: V \to V'$ כך שלכל $v, w \in V$ המקיימים $\{v, w\} \in E$ מתקיים $\{\tilde{v}, \tilde{w}\} \in E'$; ובמקרה כזה אותה חפיפה תיקרא חפיפת מצולעים בין (V, E) ל-(V', E').

מסקנה 1.19. לשני מצולעים חופפים יש היקף זהה.

סימון: נסמן ששני מצולעים $A_1A_2 \dots A_n$ ו-$B_1B_2 \dots B_n$ הם חופפים ע״י $A_1A_2 \dots A_n \cong B_1B_2 \dots B_n$, כאשר החפיפה נעשית ע״י פונקציית חפיפה המעתיקה את A_i ל-B_i לכל $n \geq i \in \mathbb{N}$.

מסקנה 1.20. הפונקציה ההופכית של חפיפת מצולעים גם היא חפיפת מצולעים.

מסקנה 1.21. חפיפת מצולעים היא יחס שקילות.

2 פונקציית זווית ומשפטי החפיפה

הגדרה 2.1. פונקציית זווית

יהי $(\mathbb{X}, |\cdot|, \measuredangle)$ מרחב קרנות, נאמר ש-$\measuredangle$ היא פונקציית זווית על $(\mathbb{X}, |\cdot|)$ אם היא מקיימת את אקסיומת המישוריות, ובנוסף מקיימת את הפסוק הבא (נקרא "הקשר בין זווית למרחק"):

לכל שש נקודות $A, B, O, A', B', O' \in \mathbb{G}$ כך ש-A, B שונות מ-O ו-A', B' שונות מ-O', ובנוסף $|AO| = |A'O'|$ ו-$|BO| = |B'O'|$, מתקיים:

$$|AB| < |A'B'| \iff \measuredangle AOB < \measuredangle A'O'B'$$

הגדרה 2.2. מרחב קרנות $(\mathbb{G}, |\cdot|, \measuredangle)$ ייקרא גאומטריה אם $\measuredangle$ היא פונקציית זווית על $(\mathbb{G}, |\cdot|)$.

תהא $(\mathbb{G}, |\cdot|, \measuredangle)$ גאומטריה שיש בה שלוש נקודות שאינן קוויות.

מסקנה 2.3 (צלע-צלע-צלע).

יהיו $\triangle ABC$ ו-$\triangle A'B'C'$ שני משולשים; אם $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$ וגם $|CA| = |C'A'|$, אז $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

הוכחה. נניח שאורכי הצלעות של המשולשים שווים זה לזה כנ"ל, ונניח בשלילה שאחת משלוש הזוויות במשולש $\triangle ABC$ אינה שווה לזווית המתאימה במשולש $\triangle A'B'C'$. כמו כן, נניח בהג"כ שזוהי $\measuredangle ABC$ (כלומר $\measuredangle ABC \neq \measuredangle A'B'C'$). וש-$\measuredangle ABC < \measuredangle A'B'C'$. ע"פ הקשר בין זווית למרחק מתקיים $|AC| < |A'C'|$ בסתירה להנחה. ■

מסקנה 2.4 (צלע-זווית-צלע).

יהיו $\triangle ABC$ ו-$\triangle A'B'C'$ שני משולשים; אם $|AB| = |A'B'|$, $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$ וגם $|BC| = |B'C'|$, אז $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

הוכחה. נניח ש-$|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$ וגם $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$. מהקשר בין זווית למרחק נובע ש-$|AC| = |A'C'|$, ולכן ע"פ משפט **צלע-צלע-צלע** מתקיים $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. ■

מסקנה 2.5 (זווית-צלע-זווית).

יהיו $\triangle ABC$ ו-$\triangle A'B'C'$ שני משולשים; אם $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$, $|AB| = |A'B'|$ וגם $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, אז $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

הוכחה. נניח ש-$\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$, $|AB| = |A'B'|$ וגם $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, ונניח בשלילה ש-$\triangle ABC \ncong \triangle A'B'C'$. מכאן ש-$|AC| \neq |A'C'|$ וגם $|BC| \neq |B'C'|$, שכן אחרת נקבל ממשפט **צלע-זווית-צלע** ש-$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. כעת נניח בהג"כ ש-$|AC| < |A'C'|$, ותהא $D \in \mathbb{G}$ כך ש-$|AD| = |A'C'|$ ו-$|CD| = |A'C'| - |AC|$[2]. משוויונות המשולש המנוון נובע ש-C נמצאת בין A ל-D, ולפיכך $\measuredangle BAC = \measuredangle BAD$. כעת נקבל ממשפט **צלע-זווית-צלע** ש-$\triangle ABD \cong \triangle A'B'C'$, ובפרט $\measuredangle ABD = \measuredangle A'B'C' = \measuredangle ABC$.

מצד שני, ראינו בחלק הקודם שמהיות C בין A ל-D נובע ש-$\measuredangle ABD = \measuredangle ABC + \measuredangle CBD$, אם כן קיבלנו ש-$\measuredangle CBD = 0$ ומכאן ש-$D \in L_{BC}$; אך זה עומד בסתירה לכך שלישרים L_{AC} ו-L_{BC} יש לכל היותר נקודת חיתוך אחת. מכאן שהנחת השלילה שאינה נכונה ו-$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. ■

מסקנה 2.6. זווית-צלע-זווית - המשפט המורחב

תהיינה $A, B, C, D \in \mathbb{G}$ ארבע נקודות כך ש-C ו-D נמצאות באותו צד של הישר L_{AB}. אם קיים משולש $\triangle A'B'C'$ כך ש-$\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$, $|AB| = |A'B'|$ וגם $\measuredangle BAD = \measuredangle B'A'C'$, אז קיימת נקודה $E \in \mathbb{G}$ כך ש-$\triangle ABE \cong \triangle A'B'C'$.

הוכחה. צריך להוכיח. ■

[2] הקיום של D נובע מהשלמות הקווית של הגאומטריה.

3 משולשים

תהא $(\mathbb{G}, |\cdot|, \measuredangle)$ גאומטריה שיש בה שלוש נקודות שאינן קוויות.

סימון: לכל $A, B \in \mathbb{G}$ נסמן $AB := [A, B]$.

הגדרה 3.1. יהי $\triangle ABC$ משולש.

- תיכון לצלע BC הוא קטע AD כאשר $D \in L_{BC}$ היא נקודה המקיימת $|BD| = |CD|$.
- חוצה-זווית של הזווית $\measuredangle BAC$ הוא קטע AD, כאשר $D \in L_{BC}$ המקיים $\measuredangle BAD = \measuredangle CAD$.
- גובה לצלע BC הוא קטע AD כאשר $D \in L_{BC}$ היא נקודה המקיימת שהזוויות $\measuredangle ADB$ ו-$\measuredangle ADC$ ישרות.

מסקנה 3.2. יהי $\triangle ABC$ משולש.

- קיימת נקודה יחידה $D \in L_{BC}$ כך ש-AD הוא תיכון לצלע BC.
- קיימת נקודה יחידה

הגדרה 3.3. יהי $\triangle ABC$ משולש.

- נאמר ש-$\triangle ABC$ הוא משולש שווה-צלעות אם שלוש צלעותיו באורך זהה.
- נאמר ש-$\triangle ABC$ הוא משולש שווה-שוקיים אם יש לו זוג צלעות שאורכן זהה. במקרה כזה כל אחד זוג צלעות זה ייקרא שוק, הצלע השלישית תיקרא בסיס, הזווית המשותפת לשתי השוקיים תיקרא זווית הראש, ושתי הזוויות האחרות תיקראנה זוויות הבסיס.
- נאמר ש-$\triangle ABC$ הוא משולש שונה-צלעות אם שלוש צלעותיו בעלות אורכים שונים זו מזו.

משפט 3.4. אפיון משולשים שווה-שוקיים
יהי $\triangle ABC$ משולש, התנאים הבאים שקולים:

- $\triangle ABC$ הוא משולש שווה-שוקיים ($|AB| = |AC|$).
- זוויות הבסיס שוות, כלומר $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$.

4 שני ישרים הנחתכים ע״י ישר שלישי

תהא $(\mathbb{G}, |\cdot|, \measuredangle)$ גאומטריה, ויהי π הקבוע המתאים.

הגדרה 4.1. יהיו $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{G}$ שני ישרים.

- נאמר ששני L_1 ו-L_2 נחתכים אם $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ (ראינו לעיל שבמקרה כזה יש להם נקודת חיתוך יחידה).
- נאמר ש-L_1 ו-L_2 מקבילים אם הם אינם נחתכים והאיחוד $L_1 \cup L_2$ הוא קבוצה מישורית.

למה 4.2. יהיו $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{G}$ שני ישרים שונים הנחתכים ע״י ישר שלישי L_3, אם $L_1 \cup L_3$ מישורית אז גם $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ היא קבוצה מישורית.

הגדרה 4.3. יהיו $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{G}$ שני ישרים שונים הנחתכים ע״י ישר שלישי L_3, ותהיינה O_1, O_2 נקודות החיתוך של L_1 ו-L_2 עם L_3 (בהתאמה), ותהא $P \in L_3$ כך ש-$O_2 \in (O_1, P)$.
נניח ש-$L_1 \cup L_2$ היא קבוצה מישורית, תהיינה $A \in L_1$ ו-$B \in L_2$ שתי נקודות הנמצאות באותו צד של L_3, ותהא $C \in L_1$ כך ש-$O_1 \in (A, C)$.

- הזוויות $\measuredangle AO_1P$ ו-$\measuredangle BO_2P$ נקראות זוויות מתאימות.
- הזוויות $\measuredangle CO_1P$ ו-$\measuredangle BO_2P$ נקראות זוויות מתחלפות.
- הזוויות $\measuredangle AO_1O_2$ ו-$\measuredangle BO_2O_1$ נקראות זוויות פנימיות.

♣ כבר ראינו שהזוויות אינן תלויות בנקודות אלא בישרים, ולכן בהינתן שני ישרים הנחתכים ע״י ישר שלישי ניתן לדבר על זוגות של זוויות מתאימות/פנימיות/מתחלפות בין הישרים.

מסקנה 4.4. שני ישרים שונים הנחתכים ע״י ישר שלישי, התנאים הבאים שקולים:

- כל זוג זוויות מתאימות שוות.
- קיים זוג זוויות מתאימות שוות.
- כל זוג זוויות מתחלפות שוות.
- קיים זוג זוויות מתחלפות שוות.
- הסכום של כל זוג זוויות פנימיות הוא π.
- קיים זוג זוויות פנימיות שהסכום שלהן הוא π.

משפט 4.5. שני ישרים $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{G}$ נחתכים ע״י ישר שלישי $L_3 \subseteq \mathbb{G}$, אם כל זוג זוויות מתאימות שוות זו לזו אז הישרים L_1 ו-L_2 מקבילים.

♣ משפט זה הוא הדרך הפורמלית לומר ששני ישרים בעלי ״כיוון״ זהה הם ישרים מקבילים.

♣ נשים לב: אי אפשר להסיק מכאן את הכיוון ההפוך - שאם קיים זוג זוויות מתאימות שאינן שוות אז הישרים נחתכים (זוהי אקסיומת המקבילים הידועה).

הוכחה. **צריך להוכיח.** ■