מרחבי קרנות

גאומטריה אוקלידית - חלק שני

נכתב ע״י שריה אנסבכר

תוכן העניינים

1 מרחבים סְפִירִיִּים 2

1.1 הגדרות 2

1.2 נקודות אנטיפודיות ונקודות משלימות 2

1.3 קבוצות מעגליות 4

2 מטריקה של קרנות 5

2.1 הגדרות בסיסיות 5

2.2 הצדקת השם ״מטריקה של קרנות״ 6

2.3 מסקנות מהיות מרחב הקרנות מרחב מטרי 7

2.4 טענות בסיסיות על מטריקות של קרנות 7

2.5 שני ישרים הנחתכים בנקודה 9

3 מישוריות 10

3.1 שלמות קווית ואקסיומת המישוריות 10

3.2 קבוצות מישוריות 10

4 צדדים של ישר 12

5 מישורים 13

5.1 הגדרה ומסקנות פשוטות 13

5.2 הגדרות שקולות למישור 13

1 מרחבים סְפֵּירִיִּים

1.1 הגדרות

♣ המושג הבא מנסה לפרמל את המרחק על סְפֵּירָה: המרחק בין שתי נקודות הוא אורך הקשת המחברת בין שתי הנקודות במעגל שמרכזו הוא מרכז הסְפֵּירָה. כאן יש להעיר שאמנם עבור שתי נקודות אנטיפודיות ישנם אין-סוף מעגלים כאלה, אך כל המעגלים הללו בעלי אורך זהה ובכולם אורך הקשת המתאימה הוא מחצית אורך המעגל.

♣ אם הרדיוס של סְפֵּירָה הוא 1, אז המרחק בין שתי נקודות שבה הוא בדיוק גודל הזווית ששתי נקודות אלו יוצרות עם מרכז הספירה, כשהיא נמדדת ברדיאנים[1]. מכיוון שכך ניתן לראות במושג המרחק על סְפֵּירָה מייצג של רעיון הזווית בין שתי קרנות.

הגדרה 1.1. מרחב $\mathcal{A}$-מטרי $(\mathbb{X},d)$ ייקרא ספירי (קרי: סְפֵּירִי), אם קיים קבוע $\pi\in\mathcal{A}$ כך שמתקיימות שתי התכונות הבאות:

1. קיום נקודות אנטיפודיות - לכל נקודה $a\in\mathbb{X}$ קיימת נקודה $b\in\mathbb{X}$ כך ש-$d(a,b)=\pi$.
2. אי-שוויון הפירמידה - לכל שלוש נקודות $a,b,c\in\mathbb{X}$ מתקיים $d(a,b)+d(b,c)+d(c,a)\le 2\pi$.

ובמקרה כזה נאמר ששתי נקודות $a,b\in\mathbb{X}$ הן נקודות אנטיפודיות זו לזו אם $d(a,b)=\pi$, וששלוש נקודות $a,b,c\in\mathbb{X}$ הן נקודות משלימות אם $d(a,b)+d(b,c)+d(c,a)=2\pi$.

♣ משתי התכונות הראשונות ניתן להסיק ש-$\pi=\operatorname{diam}(\mathbb{X})$, ולכן קיים קבוע יחיד המקיים זאת.

♣ נשים לב: מבחינה אינטואיטיבית **הקוטר המטרי** של מרחב ספירי $\mathbb{X}$ ($\operatorname{diam}(\mathbb{X})$) הוא האורך של מחצית המעגל על פני $\mathbb{X}$, שכן זהו המרחק בין שתי הנקודות המרוחקות ביותר - כלומר המרחק בין שתי נקודות אנטיפודיות. לעומת זאת **הקוטר הגאומטרי** של $\mathbb{X}$ הוא אורך הקטע הישר שקצותיו הם נקודות אנטיפודיות והוא עובר דרך מרכז הסְפֵּירָה, כלומר זהו מספר קטן יותר (פי $\frac{\pi}{2}$). כפי שכבר אמרנו לעיל, המרחק בין שתי נקודות במרחב סְפֵּירִי מייצג את הזווית ששתי נקודות אלו יוצרות עם מרכז הסְפֵּירָה, לכן לא מדובר כאן בסתירה לאינטואיציה אלא בשם זהה לשני מושגים שונים אך קשורים[2]

♣ הסיבה לשם "אי-שוויון הפירמידה" היא כזו: בפירמידה בעלת בסיס משולש, כל קודקוד יוצר שלוש זוויות עם שלושת הקודקודים האחרים, והסכום שלושתן קטן מהזווית המיוחסת למעגל שלם (2π רדיאנים או 360°). למעשה, מנקודת מבט זו ניתן לראות גם שהסכום של כל שתיים משלוש הזוויות הללו גדול מן השלישית, ולכן גם אי-שוויון המשולש במרחבים סְפֵּירִיִּים היה ראוי להיקרא "אי-שוויון הפירמידה" וכך אכן נעשה בהמשך.

יהי $(\mathbb{X},d)$ מרחב ספירי בעל שלוש נקודות שונות לכל הפחות[3], ויהי π קבוע מתאים.

הגדרה 1.2. נאמר ששתי נקודות $a,b\in\mathbb{X}$ הן נקודות אנטיפודיות אם $d(a,b)=\pi$, וכמו כן נאמר שלוש נקודות $a,b,c\in\mathbb{X}$ הן נקודות משלימות אם $d(a,b)+d(b,c)+d(c,a)=2\pi$.

1.2 נקודות אנטיפודיות ונקודות משלימות

מסקנה 1.3. $\mathbb{X}$ חסום ו-$\operatorname{diam}(\mathbb{X})=\pi$.

♣ בפרט π הוא הקבוע היחיד שעבורו מתקיימות שתי האקסיומות של מרחב ספירי.

הוכחה. ע"פ א"ש הפירמידה לכל שתי נקודות $a,b\in\mathbb{X}$ מתקיים:

$$2\pi\ge d(a,b)+d(b,a)+d(a,a)=2\cdot d(a,b)$$

ולכן גם $d(a,b)\le\pi$, מכאן ש-$\mathbb{X}$ חסום ו-$\operatorname{diam}(\mathbb{X})\le\pi$. מצד שני $\mathbb{X}$ אינו ריק ולכן קיימות שתי נקודות $a,b\in\mathbb{X}$ כך ש-$d(a,b)=\pi$ (נובע מקיום נקודות אנטיפודיות), ומכאן ש-$\operatorname{diam}(\mathbb{X})\ge\pi$, וממילא $\operatorname{diam}(\mathbb{X})=\pi$. ■

---

[1] ואם הרדיוס אינו 1 אז זהו גודל הזווית ביחידת מידה אחרת...

[2] יש לתופעה הזו שם, "שיתוף השם" אולי?

[3] מבחינת ההגדרה ייתכן שיש במרחב ספירי נקודה אחת (היא אנטיפודית לעצמה), או שתיים (ואז ע"פ האקסיומה השנייה הן אנטיפודיות), אך שני המקרים הללו אינם מעניינים כל כך.

טענה 1.4. לכל נקודה $a \in \mathbb{X}$ קיימת נקודה אנטיפודית יחידה, ואותה נקודה אינה a עצמה.

הוכחה. העובדה ששתי נקודות אנטיפודיות זו לזו הן בהכרח שונות נובע מהעובדה ש-$\pi > 0$ (כי יש ב-$\mathbb{X}$ שתי נקודות שונות), ושהמרחק בין שתי נקודות אנטיפודיות ב-$\mathbb{X}$ הוא π.
תהא $a \in \mathbb{X}$, ותהיינה $b, c \in \mathbb{X}$ נקודות אנטיפודיות ל-a (יש כאלה ע״פ האקסיומה הראשונה). ע״פ א״ש הפירמידה מתקיים:

$$2\pi \geq d(a,b) + d(b,c) + d(c,a) = \pi + d(b,c) + \pi$$
$$\Rightarrow d(b,c) = 0$$
$$\Rightarrow b = c$$

■

סימון: לכל $a \in \mathbb{X}$ נסמן ב-$-a$ את הנקודה האנטיפודית ל-a, כמו כן נסמן $+a := a$.

♣ לא מדובר כאן בנגדי (אין פעולת חיבור), אך הסימון אינו מקרי: אם הספירה משוכנת במרחב $\mathbb{R}^n$ כך ש-0 הוא המרכז שלה אז הנקודה האנטיפודית ל-a היא אכן $-a$.

מסקנה 1.5. לכל $a \in \mathbb{X}$ מתקיים $-(-a) = a$.

טענה 1.6. תהיינה $a, b \in \mathbb{X}$ שתי נקודות, מתקיים $b = -a$ אם״ם $\mathbb{X} = [a,b]$, כלומר אם״ם לכל $x \in \mathbb{X}$ מתקיים $d(a,b) = d(a,x) + d(x,b)$, וממילא גם $d(a,x) + d(x,b) = \pi$.

הוכחה.

- $\Leftarrow$
  נניח ש-$b = -a$, ותהא $x \in \mathbb{X}$. ע״פ א״ש הפירמידה מתקיים:

$$2\pi \geq d(a,b) + d(b,x) + d(x,a) = \pi + d(b,x) + d(x,a)$$
$$\Rightarrow \pi \geq d(b,x) + d(x,a)$$

  ומצד שני, ע״פ א״ש המשולש מתקיים $\pi = d(a,b) \leq d(b,x) + d(x,a)$, ומכאן ש-$d(a,b) = \pi = d(b,x) + d(x,a)$, כלומר $x \in [a,b]$.

- $\Rightarrow$
  נניח ש-$\mathbb{X} = [a,b]$.

$$\Rightarrow d(a,b) = d(a,-a) + d(-a,b) = \pi + d(-a,b)$$

  אבל לפי הגדרה $\pi \geq d(a,b)$, ולכן בהכרח $d(-a,b) = 0$, כלומר $b = -a$.

■

מסקנה 1.7. לכל שתי נקודות $a, b \in \mathbb{X}$, הנקודות $a, b, -a$ הן נקודות משלימות (בפרט $a, -a$ הן נקודות משלימות).

מסקנה 1.8. לכל שתי נקודות $a, b \in \mathbb{X}$ מתקיים $d(a,-b) = d(-a,b)$ ו-$d(a,b) = d(-a,-b)$.

הוכחה. ע״פ טענה 1.6, לכל שתי נקודות $a, b \in \mathbb{X}$ מתקיים:

$$d(a,b) + d(b,-a) = d(a,-a) = \pi$$
$$d(b,a) + d(a,-b) = d(b,-b) = \pi$$
$$\Rightarrow d(b,-a) = \pi - d(a,b) = d(a,-b)$$

a ו-b היו שרירותיות ולכן גם עבור $a, -b$ מתקיים $d(-b,-a) = d(a,-(-b)) = d(a,b)$. ■

1.3 קבוצות מעגליות

הגדרה 1.9. קבוצה $S \subseteq \mathbb{X}$ תיקרא מעגלית אם לכל שלוש נקודות שונות ב-S, אחת משלוש הנקודות נמצאת בין שתי האחרות, או שהן נקודות משלימות.

1. $d(a,b) = d(a,c) + d(c,b)$
2. $d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$
3. $d(b,c) = d(b,a) + d(a,c)$
4. $d(a,b) + d(b,c) + d(c,a) = 2\pi$

הסכמה: כשנאמר אי-שוויונות הפירמידה נתכוון לאי-שוויון המשולש ואי-שוויון הפירמידה יחדיו.

♣ שימו לב לדמיון בין קבוצה מעגלית לקבוצה קווית: בקבוצה קווית, לכל שלוש נקודות אחד משלושת אי-שוויונות המשולש הוא שוויון, ובקבוצה מעגלית אחד מארבעת אי-שוויונות הפירמידה הוא שוויון.

מסקנה 1.10. תת-קבוצה של קבוצה מעגלית גם היא מעגלית.

מסקנה 1.11. כל קבוצה בת שני איברים או פחות היא קבוצה מעגלית.

מסקנה 1.12. תהא $S \subseteq \mathbb{X}$, התנאים הבאים שקולים:

1. S מעגלית.
2. כל שלוש נקודות שונות ב-S הן קוויות ו/או משלימות.
3. כל שלוש נקודות ב-S הן מעגליות.

טענה 1.13. תהא $S \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה מעגלית, לכל $a \in S$ גם $S \cup \{-a\}$ מעגלית.

הוכחה. נניח ש-S אינה ריקה (אחרת הטענה טריוויאלית), ותהיינה $a,b,c \in S \cup \{-a\}$. אם $-a \notin \{a,b,c\}$ אז a,b,c מעגליות מפני ששלושתן שייכות ל-S, לכן נניח ש-$-a \in \{a,b,c\}$, ובהג"כ נניח ש-$-a = c$.
ע"פ טענה 1.6 מתקיים $\pi = d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$,

$$d(a,b) = \pi - d(b,c)$$

ומכאן שע"פ הגדרה מתקיימת אחת מארבע האפשרויות הבאות:

1. $\pi - d(b,x) = d(a,b) = d(a,c) + d(c,b) = \pi - d(c,x) + d(c,b)$, כלומר $d(c,x) = d(c,b) + d(b,x)$.
2. $\pi - d(c,x) = d(a,c) = d(a,b) + d(b,c) = \pi - d(b,x) + d(b,c)$, כלומר $d(b,x) = d(b,c) + d(c,x)$.
3. $d(b,c) = d(b,a) + d(a,c) = 2\pi - d(b,x) - d(c,x)$, כלומר $d(x,b) + d(b,c) + d(c,x) = 2\pi$.
4. $2\pi = d(a,b) + d(b,c) + d(c,a) = 2\pi - d(b,x) + d(b,c) - d(c,x)$, כלומר $d(b,c) = d(b,x) + d(x,c)$.

כלומר בכל מקרה b,c,x מעגליות, ומכאן ש-S מעגלית (טענה 1.12). ■

מסקנה 1.14. לכל $a,b \in \mathbb{X}$, הקבוצה $\{a,b,-a,-b\}$ היא קבוצה מעגלית.

2 מטריקה של קרנות

2.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 2.1 (זווית).
זווית בקבוצה $\mathbb{X}$ היא שלשה סדורה (A,O,B), כך ש-$A,B,O\in\mathbb{X}$ ו-A,B שונות מ-O.

♣ אנו מתחילים כעת את צעדינו הראשונים בפענוח המושג "פונקציית זווית" - פונקציה המקבלת זווית ומחזירה את גודלה. נגדיר תחילה מושג מופשט יותר הנקרא "מטריקה של קרנות" - זוהי פונקציה המודדת "מרחק" בין שתי קרנות בעלות קודקוד משותף, ונראה בהמשך הדרך שפונקציית זווית היא מטריקה של קרנות המקיימת תנאים נוספים.

סימון: לכל קבוצה לא ריקה $\mathbb{X}$ נסמן $\check{\mathbb{X}}:=\left\{(A,O,B)\in\mathbb{X}^3 \mid A\neq O,\ B\neq O\right\}$, כלומר $\check{\mathbb{X}}$ היא קבוצת הזוויות ב-$\mathbb{X}$.

הגדרה 2.2 (מטריקה של קרנות).
תהיינה $\mathcal{D}$ ו-$\mathcal{A}$ שתי חבורות אבליות סדורות, ויהי $(\mathbb{X},|\cdot|)$ מרחב $\mathcal{D}$-מטרי[4] שלם קווית.
נאמר שפונקציה $\angle:\check{\mathbb{X}}\to\mathcal{A}$ היא מטריקה של קרנות על $(\mathbb{X},|\cdot|)$, אם קיים קבוע $\pi\in\mathcal{A}$ כך שלכל ארבע נקודות $A,B,C,O\in\mathbb{X}$ כך ש-A,B,C שונות מ-O, מתקיימות ארבע התכונות המפורטות להלן[5].

1. אי-שליליות ויחידת מידה - $0\le\angle AOB\le\pi$
2. סימטריה - $\angle AOB=\angle BOA$
3. אי-שוויונות הפירמידה -
   - $\angle AOC\le\angle AOB+\angle BOC$
   - $\angle AOB+\angle BOC+\angle COA\le 2\pi$
4. שוויונות המשולש המנוון -
   - $\angle AOB=\pi\iff|AB|=|AO|+|OB|$[6].
   - $\angle AOB=0\iff|AB|=||AO|-|BO||$ אם"ם $A=B$ או ש-B נמצאת בין A ל-O או ש-A נמצאת בין B ל-O[7].

♣ הערות (לפי המספור שלעיל):

1. אנחנו לוקחים תמיד את הזווית הקטנה מבין השתיים שמגדירות הקרניים.
2. הזווית תלויה אך ורק בקרניים התוחמות אותה ולא בסדר שבו הן מופיעות.
3. כל ארבע נקודות במרחב מגדירות פירמידה שבסיסה משולש. אם הפירמידה אינה מנוונת (כלומר אינה מוכלת במישור), אז לכל שלוש זוויות בעלות קודקוד משותף - הסכום של כל שתיים מהן גדול מהשלישית. בנוסף, הסכום של שלוש זוויות בעלות קודקוד משותף אינו יכול להיות ממעגל שלם ($360°$). נשים לב לכך שאמירה זו אינה נכונה עבור ארבע זוויות ומעלה, אלא רק עבור שלוש.
4. זהו הקשר שבין פונקציית המטריקה של קרנות לבין המבנה של המרחב המטרי.

הגדרה 2.3. מרחב קרנות מעל זוג סדור של חבורות סדורות $(\mathcal{D},\mathcal{A})$ הוא שלשה סדורה $(\mathbb{X},|\cdot|,\angle)$ כך ש-$(\mathbb{X},|\cdot|)$ הוא מרחב $\mathcal{D}$-מטרי ו-$\angle:\check{\mathbb{X}}\to\mathcal{A}$ היא מטריקה של קרנות על $(\mathbb{X},|\cdot|)$.

---

[4] בהינתן שתי נקודות $A,B\in\mathbb{X}$, המרחק ביניהן יסומן ב-$|AB|$.
[5] הסימון "$\angle AOB$" (ודומיו) משמש כאן בתור הערך שמחזירה הפונקציה $\angle$ עבור הזווית (A,O,B), בהמשך נשתמש בסימון זה גם עבור הזווית עצמה (השלשה (A,O,B)). לא יהיה כאן שום בלבול מפני שההבדל בין שלשה סדורה של נקודות לבין איבר ב-$\mathcal{A}$ גדול למדי, ובכל מקום יהיה ברור לאיזה מהם אנו מתכוונים.
[6] כלומר $\angle AOB=\pi$ אם"ם O נמצאת בין A ל-B (דרשנו ש-O שונה מ-A ו-B).
[7] כלומר $\angle AOB=0$ אם"ם מתקיימת אחת משלוש האפשרויות הבאות: $A=B$, $B\in(A,O)$, או $A\in(B,O)$.

יהי $(\mathbb{X}, |\cdot|, \angle)$ מרחב קרנות מעל $(\mathcal{D}, \mathcal{A})$, ויהי $\pi \in \mathcal{A}$ קבוע מתאים.

הגדרה 2.4. לכל $A, B, O \in \mathbb{X}$ כך ש-O נמצאת בין A ל-B.

- אם $\angle AOB = 0$ נאמר ש-$\angle AOB$ היא <u>זווית מנוונת</u>.
- אם $0 < \angle AOB < \frac{\pi}{2}$ נאמר ש-$\angle AOB$ היא <u>זווית חדה</u>.
- אם $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ נאמר ש-$\angle AOB$ היא <u>זווית ישרה</u>.
- אם $\frac{\pi}{2} < \angle AOB < \pi$ נאמר ש-$\angle AOB$ היא <u>זווית קהה</u>.
- אם $\angle AOB = \pi$ נאמר ש-$\angle AOB$ היא <u>זווית שטוחה</u>.

2.2 הצדקת השם "מטריקה של קרנות"

מסקנה 2.5. לכל $A, O \in \mathbb{X}$ כך ש-$A \neq O$, הזווית $\angle AOA$ היא זווית מנוונת.

הוכחה. מתקיים $|AA| = 0 = ||OA| - |OA||$, ולכן משוויונות המשולש המנוון נובע ש-$\angle AOA = 0$. ■

תזכורת: פסאודו-מטריקה היא פונקציה המקיימת את שלוש התכונות הנדרשות ממטריקה (חיוביות בהחלט, סימטריה וא"ש המשולש), למעט הבדל אחד: ייתכן שישנן שתי נקודות שונות שהמרחק ביניהן הוא 0.

מסקנה 2.6. לכל נקודה $O \in \mathbb{X}$, הפונקציה $(A, B) \mapsto \angle AOB$ היא פסאודו-מטריקה על $\mathbb{X} \setminus \{O\}$.

תזכורת: כל פסאודו-מטריקה מגדירה יחס שקילות על המרחב באופן הבא: שתי נקודות הן שקולות אם הפסאודו-מטריקה מחזירה 0 עבור זוג סדור שהן איבריו.

מסקנה 2.7. לכל נקודה $O \in \mathbb{X}$, היחס "$\sim_O$" המוגדר ע"י $A \sim_O B \iff \angle AOB = 0$, הוא יחס שקילות על $\mathbb{X} \setminus \{O\}$.

תזכורת: כל פסאודו-מטריקה מגדירה מטריקה על מחלקות השקילות של יחס השקילות המתאים, וזאת ע"י הגדרת המרחק בין שתי מחלקות שקילות בתור הערך שמחזירה הפסאודו-מטריקה עבור שני נציגים של המחלקות. בפרט, ערך זה אינו תלוי בנציגים, ובמקרה שלנו זה אומר שלכל $A, B, C, O \in \mathbb{X}$ כך ש-A, B, C שונות מ-O, אם $\angle AOB = 0$ אז $\angle AOC = \angle BOC$.

הגדרה 2.8. לכל $O, A \in \mathbb{X}$ כך ש-$A \neq O$, הקבוצה $R_{OA} := \{P \in \mathbb{X} \mid \angle AOP = 0\}$ תיקרא <u>הקרן</u> היוצאת מ-O בכיוון A, ו-O ייקרא <u>קודקוד</u> של R_{OA}.

♣ אם כן קבוצת מחלקות השקילות של היחס "$\sim_O$" היא $\{R_{OP} \mid O \neq P \in \mathbb{X}\}$ - קבוצת הקרנות ש-O היא קודקוד שלהן.

מסקנה 2.9. כל קרן היא קבוצה קווית.

מסקנה 2.10. לכל קרן יש קודקוד יחיד.

הוכחה. תהיינה $O, A \in \mathbb{X}$ שתי נקודות שונות, ותהא $B \in \mathbb{X}$ נקודה כך ש-A נמצאת בין O ל-B (ע"פ אקסיומת הקרנות אכן יש B כזו), אם כן $B \in R_{OA}$.
יהי $O' \in \mathbb{X}$ קודקוד של R, נניח בשלילה ש-$O' \neq O$. מכאן ש-$OBO' = \angle ABO' = 0$ ולכן $O' \in R$ בסתירה לכך שקודקוד של קרן אינו שייך אליה ע"פ הגדרה. ■

מסקנה 2.11. לכל קבוצה קווית מרבית $S \subseteq \mathbb{X}$, ולכל $A, B, O \in L$ כך ש-O נמצאת בין A ל-B מתקיים:

$$S = R_{OA} \uplus \{O\} \uplus R_{OB}$$

סימון: לכל נקודה $O \in \mathbb{X}$ נסמן ב-R_O את קבוצת הקרנות ש-O היא קודקוד שלהן, ולכל $A, B \in \mathbb{X}$ כך ש-A, B שונות מ-O נסמן $\angle(R_{OA}, R_{OB}) := \angle AOB$.

♣ סימון זה אינו שימושי במיוחד, ולא נשתמש בו הרבה. חשיבותו הרבה נעוצה בהצבעתו על העובדה שהזווית תלויה אך ורק בקרנות התוחמות אותה, ולא בנקודות המייצגות אותן.

מסקנה 2.12. לכל $O \in \mathbb{X}$, הזוג הסדור $(R_O, \angle)$ הוא מרחב $\mathcal{A}$-מטרי סְפֵּירִי[8].

[8] כאשר כאן $\angle$ היא הפונקציה $\angle : R_O \to \mathcal{A}$ המוגדרת ע"י $\angle(R_{OA}, R_{OB}) := \angle AOB$.

2.3 מסקנות מהיות מרחב הקרנות מרחב מטרי

מסקנה 2.13 (אי-שוויון הפירמידה ההפוך).
לכל $A, B, C \in \mathbb{X}$ כך ש-A, B, C שונות מ-O, מתקיים $|\angle AOB - \angle BOC| \leq \angle AOC$.

הוכחה. נובע ישירות מא״ש המשולש ההפוך במרחב המטרי $(R_O, \angle)$:

$$\begin{aligned}|\angle AOB - \angle BOC| &= |\angle(R_{OA}, R_{OB}) - \angle(R_{BA}, R_{OC})| \\ &\leq \angle(R_{OA}, R_{OC}) = \angle AOC\end{aligned}$$

■

מסקנה 2.14. תהיינה $A, B, C, O \in \mathbb{X}$ כך ש-A, B, C שונות מ-O.

- הקרן R_{OB} נמצאת בין הקרנות R_{OA} ו-R_{OC} אם״ם $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$.
- נניח ש-$(R_O, \angle)$ הוא מרחב סְפֵירִי, הקרנות R_{OA}, R_{OB}, R_{OC} הן קרנות משלימות אם״ם $\angle AOB + \angle BOC + \angle COA = 2\pi$.

2.4 טענות בסיסיות על מטריקות של קרנות

תהיינה $A, B, C, D, O \in \mathbb{X}$ כך ש-A, B, C שונות מ-O.

טענה 2.15. $\angle AOB$ היא זווית שטוחה אם״ם $\angle ABO$ ו-$\angle OAB$ הן זוויות מנוונות.

הוכחה.

- $\Leftarrow$
נניח ש-$\angle AOB$ היא זווית שטוחה (כלומר $\angle AOB = \frac{1}{2}$), ע״פ שוויונות המשולש המנוון מתקיים $|AB| = |AO| + |OB|$.

$$\begin{aligned}&\Rightarrow |AO| = ||AO|| = ||AB| - |OB|| \\ &\Rightarrow |BO| = ||OB|| = ||AB| - |OA||\end{aligned}$$

כעת, משוויונות המשולש המנוון נקבל ש-$\angle ABO = \angle OAB = 0$, כלומר $\angle ABO$ ו-$\angle OAB$ הן זוויות מנוונות.

- $\Rightarrow$
נניח ש-$\angle ABO$ ו-$\angle OAB$ הן זוויות מנוונות (כלומר $\angle ABO = \angle OAB = 0$), ולכן ע״פ שוויונות המשולש המנוון מתקיים:

$$\begin{aligned}|AO| &= ||BO| - |BA|| = ||AB| - |OB|| \\ |OB| &= ||AB| - |AO||\end{aligned}$$

נשים לב לכך שאם $|AB| \geq |OB|$ ו/או $|AB| \geq |AO|$ אז ע״י העברת אגף נקבל ש-$|AB| = |AO| + |OB|$, ומכאן ש-$\angle AOB$ היא זווית שטוחה (שוויונות המשולש המנוון). אם כן נניח בשלילה ש-$|AB| < |OB|$ וגם $|AB| < |AO|$ אז מתקיים:

$$\begin{aligned}|AO| &= |OB| - |AB| \\ |OB| &= |AO| - |AB| \\ \Rightarrow |OA| + |AB| &= |AB| + |AO| = |OB| = |BO| \\ \Rightarrow |AB| + |OB| &= |AB| + |OB| = |AO|\end{aligned}$$

ולכן ע״פ שוויונות המשולש המנוון, הזוויות $\angle OAB$ ו-$\angle ABO$ הן זוויות שטוחות - בסתירה להנחה שהן מנוונות.
מכאן ש-$|AB| \geq |OB|$ ו/או $|AB| \geq |AO|$ וכפי שהראינו לעיל נובע מזה ש-$\angle AOB$ היא זווית שטוחה.

■

טענה 2.16. אם $\angle AOB$ היא זווית מנוונת ובנוסף $A \neq B$, אז בדיוק אחת משתי הזוויות $\angle ABO$ ו-$\angle BAO$ היא זווית שטוחה.

הוכחה. ע"פ שוויונות המשולש המנוון מתקיים $|AB| = ||OB| - |OA||$, ומכאן שמתקיימת לפחות אחת משתי האפשרויות הבאות:

1. $|AB| = |OB| - |OA|$ וממילא $|OA| + |AB| = |OB|$, ושוב ע"פ שוויונות המשולש המנוון מתקיים $\angle OAB = \pi$.
2. $|AB| = |OA| - |OB|$ וממילא $|AB| + |BO| = |AB| + |OB| = |OA|$, ושוב ע"פ שוויונות המשולש המנוון מתקיים $\angle ABO = \pi$.

לא ייתכן ששתי הזוויות שטוחות משום שהדבר יהווה סתירה לטענה 2.15. ■

מסקנה 2.17. אם $\angle OBC$ היא זווית שטוחה, או ש-$\angle OCB$ היא זווית שטוחה, אז $\angle AOB = \angle AOC$.

מסקנה 2.18. $(\mathbb{X}, |\cdot|)$ הוא מרחב מכוון.

הוכחה. יהיו $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D} \in \mathbb{X}$ כך ש-$\boldsymbol{B} \in (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$, כלומר הזווית $\angle ABC$ שטוחה. כעת נקבל מהמסקנה האחרונה ש-$\angle DCA = \angle DCB$, ולכן משוויונות המשולש המנוון נובע כי:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C} \in (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}) &\iff \angle BCD = \pi \\ &\iff \angle ACD = \pi \\ &\iff \boldsymbol{C} \in (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}) \end{aligned}$$

כלומר $(\mathbb{X}, |\cdot|)$ הוא מרחב מכוון. ■

♣ בפרט נובע מכאן שאי אפשר להגדיר מטריקה של קרנות על מרחב מטרי שאינו מכוון.

משפט 2.19. התנאים הבאים שקולים:

- O נמצאת בין A ל-B.
- הקרן R_{OC} נמצאת בין הקרנות R_{OA} ו-R_{OC}, ובנוסף, הקרנות R_{OA}, R_{OB}, R_{OC} משלימות.

הוכחה.

- $\Leftarrow$

נניח ש-O נמצאת בין A ל-B (כלומר $\angle AOB = \pi$), ע"פ א"ש הפירמידה מתקיים:

$$\pi = \angle AOB \leq \angle AOC + \angle COB \leq 2\pi - \angle AOB = 2\pi - \pi = \pi$$

$$\Rightarrow \angle AOB = \angle AOC + \angle COB = 2\pi - \angle AOB$$

$$\Rightarrow \angle AOC + \angle COB + \angle BOA = 2\pi$$

- $\Rightarrow$

נניח שהקרן R_{OC} נמצאת בין הקרנות R_{OA} ו-R_{OB}, וגם הקרנות R_{OA}, R_{OB}, R_{OC} משלימות. אם כן מתקיים:

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$$

$$\angle AOC + \angle COB + \angle AOB = 2\pi$$

$$\Rightarrow \angle AOB + \angle AOB = 2\pi$$

$$\Rightarrow \angle AOB = \pi$$

■

2.5 שני ישרים הנחתכים בנקודה

מסקנה 2.20. נניח ש-O היא נקודת החיתוך של שני ישרים שונים $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{X}$.
קיימות $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ כך שלכל $O \neq A \in L_1$, ו-$O \neq B \in L_2$ מתקיים $\angle AOB = \alpha$ ו/או $\angle AOB = \beta$.

♣ מסקנה זו מאפשרת לנו לדבר על שתי הזוויות שבין זוג ישרים הנחתכים בנקודה.

הגדרה 2.21. נניח שקיימים שני ישרים $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{X}$ כך ש-$A, B \in L_1$ ו-$C, D \in L_2$, ובנוסף O נמצאת בין A ל-B ובין C ל-D[9]:

- הזוויות $\angle(R_{OA}, R_{OC})$ ו-$\angle(R_{OB}, R_{OD})$ נקראות <u>זוויות קודקודיות</u>.
- הזוויות $\angle(R_{OA}, R_{OC})$ ו-$\angle(R_{OC}, R_{OB})$ נקראות <u>זוויות צמודות</u>.

♣ הגדרה זו מגדירה **יחסים** בין זוויות.

מסקנה 2.22 (זוויות צמודות משלימות זו את זו לזווית שטוחה). , כלומר הסכום של כל שתי זוויות צמודות הוא $\frac{1}{2}$.

הוכחה. נובע ישירות ממשפט 2.19. ■

משפט 2.23 (כל שתי זוויות קודקודיות שוות זו לזו).

הוכחה. כל שתי זוויות קודקודיות הן זוויות צמודות של זווית משותפת, ומכיוון שע״פ המסקנה הקודמת (2.22) שתיהן משלימות אותה לזווית שטוחה, נדע ששתיהן שוות זו לזו. ■

[9] מכאן ש-$L_1 \cap L_2 = \{O\}$.

3 מישוריות

3.1 שלמות קווית ואקסיומת המישוריות

יהי $(\mathbb{X}, |\cdot|, \angle)$ מרחב קרנות, ויהי π הקבוע המתאים.

הגדרה 3.1. נאמר ש-$\angle$ מקיימת את אקסיומת המישוריות, אם לכל $A, B, C, O \in \mathbb{X}$ כך ש-A, B, C שונות מ-O, מתקיים $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$ אם"ם $[A, C] \cap R_{OB} \neq \emptyset$.

נניח ש-$\angle$ מקיימת את אקסיומת המישוריות.

למה 3.2. תהיינה $A, B, C, O \in \mathbb{X}$ ארבע נקודות שונות שאינן קוויות. אם הקרנות R_{OA}, R_{OB}, R_{OC} משלימות אז קיימת נקודה $P \in L_{OB}$ הנמצאת בין A ל-C.

הוכחה. **צריך להוכיח.** ■

מסקנה 3.3. תהיינה $A, B, C, O \in \mathbb{X}$ ארבע נקודות שונות שאינן קוויות. אם הקרנות R_{OA}, R_{OB}, R_{OC} משלימות, אז מתקיימים שלושת השוויונות הבאים:

$$\angle BAC = \angle BAO + \angle OAC$$
$$\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC$$
$$\angle ACB = \angle ACO + \angle OCB$$

בפרט A, B, C, O מישוריות.

הוכחה. **צריך להוכיח.** ■

משפט 3.4. תהיינה $A, B, C, D \in \mathbb{X}$ ארבע נקודות שונות שאינן קוויות, כך ש-$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$, ותהא $P \in R_{BD} \cap [A, C]$.

- אם $P = D$ או ש-$D \in (O, P)$ אז הקרנות R_{DA}, R_{DB}, R_{DC} משלימות, ובנוסף מתקיימים שלושת השוויונות הבאים:

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$$
$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$$
$$\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB$$

- אם $P \in (B, D)$ אז מתקיימים שלושת השוויונות הבאים:

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$$
$$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD$$
$$\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC$$

בפרט, אם $P = D$, $D \in (B, P)$ או ש-$P \in (B, D)$ אז A, B, C, D מישוריות.

הוכחה. **צריך להוכיח.** ■

3.2 קבוצות מישוריות

הגדרה 3.5. נאמר שקבוצה $S \subseteq \mathbb{X}$ היא מישורית, אם לכל $A, B, C, O \in \mathbb{X}$ כך ש-A, B, C שונות מ-O, אחת משלוש הקרנות R_{OA}, R_{OB}, R_{OC} נמצאת בין שתי האחרות ו/או שהן קרנות משלימות. כמו כן, נאמר ש-n נקודות $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{X}$ הן מישוריות, אם הקבוצה $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ מישורית.

מסקנה 3.6. תת-קבוצה $S \subseteq \mathbb{X}$ היא מישורית אם"ם לכל $A, B, C, O \in \mathbb{X}$ כך ש-A, B, C שונות מ-O, מתקיים לפחות אחד מהשוויונות הבאים:

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$$
$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$$
$$\angle BOC = \angle BOA + \angle AOC$$
$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA = 2\pi$$

ובאופן שקול: $\angle AOB = |\angle AOC \pm \angle COB|$ ו/או $\angle AOB + \angle BOC + \angle COA = 2\pi$.

מסקנה 3.7. תת-קבוצה של קבוצה מישורית גם היא מישורית.

מסקנה 3.8. כל קבוצה בת שלושה איברים או פחות היא קבוצה מישורית.

מסקנה 3.9. תת-קבוצה $S \subseteq \mathbb{X}$ היא מישורית אם"ם כל ארבע נקודות שונות ב-S הן מישוריות.

מסקנה 3.10. כל קבוצה קווית היא קבוצה מישורית.

הוכחה. תהא $S \subseteq \mathcal{G}$ קבוצה קווית, ותהיינה $A, B, C, O \in S$ ארבע נקודות כך ש-A, B, C שונות מ-O[10].

- אם O אינה נמצאת בין שתיים משלוש הנקודות האחרות, אז $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 0$, וממילא כל אחת משלוש הקרנות R_{OA}, R_{OB}, R_{OC} נמצאת בין שתי האחרות.
- אחרת נניח בהג"כ ש-$O \in (A, B)$, ומכאן ש-$\angle AOC = 0$ או ש-$\angle BOC = 0$. בכל מקרה נובע מזה ש-$\angle AOB = \pi \geq \angle AOC + \angle COB$, ולכן ע"פ א"ש הפירמידה $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$, כלומר הקרן R_{OC} נמצאת בין הקרנות R_{OA} ו-R_{OB}.

■

למה 3.11. תהיינה $A, B, C, P, Q \in \mathbb{X}$ כך ש-A, B, C אינן מישוריות. אם $\{A, B, C, P\}$ ו-$\{A, B, C, Q\}$ מישוריות אז גם $\{A, B, C, P, Q\}$.

הוכחה. **צריך להוכיח.** ■

מסקנה 3.12. לכל קבוצה קווית $S \subseteq \mathbb{X}$, ולכל נקודה $P \in \mathbb{X}$, הקבוצה $S \cup \{P\}$ מישורית.

הוכחה. **צריך להוכיח.** ■

מסקנה 3.13. לכל קבוצה קווית $S \subseteq \mathbb{X}$, ולכל שתי נקודות שונות $A, B \in S$, הקבוצה $S \cup L_{AB}$ מישורית.

הוכחה. **צריך להוכיח.** ■

הגדרה 3.14. נאמר שקבוצה קווית $S \subseteq \mathbb{X}$ היא <u>קבוצה מישורית מרבית</u> (או <u>קבוצה מישורית מקסימלית</u>), אם לכל קבוצה מישורית $T \subseteq \mathbb{X}$ כך ש-$S \subseteq T$ מתקיים $S = T$.

מסקנה 3.15. לכל קבוצה מישורית מרבית $S \subseteq \mathbb{X}$, לכל שתי נקודות שונות $A, B \in S$, ולכל קבוצה קווית $T \subseteq \mathbb{X}$ מתקיים $T \subseteq S$.

משפט 3.16. יהי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ אוסף של קבוצות קוויות. אם קיימות שלוש נקודות $A, B, C \in \mathbb{X}$ שאינן קוויות, כך ש-$A, B \in S$ לכל $S \in \mathcal{S}$, אז $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ היא קבוצה מישורית.

הוכחה. **צריך להוכיח.** ■

מסקנה 3.17. לכל שלוש נקודות $A, B, C \in \mathbb{X}$ שאינן קוויות, קיימת קבוצה מישורית מרבית יחידה $S \subseteq \mathbb{X}$ כך ש-$A, B, C \in S$.
ובאופן שקול: החיתוך של כל שתי קבוצות מישוריות מרביות שונות הוא קבוצה קווית.

[10] אם אין ב-S שתי נקודות שונות אז S מקיימת את ההגדרה באופן ריק.

4 צדדים של ישר

יהי $(\mathbb{X}, |\cdot|, \angle)$ מרחב קרנות מיושר, ויהי $\pi \in \mathbb{R}$ הקבוע המתאים.

הגדרה 4.1. יהי $L \subseteq \mathbb{X}$ ישר.

- נאמר ששתי נקודות $P, Q \in \mathbb{X} \setminus L$ נמצאות באותו צד של L, אם לכל שתי נקודות שונות $A, B \in L$ מתקיים לפחות אחד משני השוויונות הבאים:

$$\angle BAP = \angle BAQ + \angle QAP$$
$$\angle BAQ = \angle BAP + \angle PAQ$$

- נאמר ששתי נקודות $P, Q \in \mathbb{X} \setminus L$ נמצאות בצדדים שונים של L, אם לכל שתי נקודות שונות $A, B \in L$ מתקיים לפחות אחד משני השוויונות הבאים:

$$\angle PAQ = \angle PAB + \angle BAQ$$
$$\angle PAQ + \angle QAB + \angle BAP = 2\pi$$

מסקנה 4.2. יהי $L \subseteq \mathbb{X}$ ישר, ותהיינה $P, Q \in \mathbb{X} \setminus L$. התנאים הבאים שקולים:

- P ו-Q נמצאות באותו צד של L או שהן נמצאות בצדדים שונים של L.
- הקבוצה $L \uplus \{P, Q\}$ מישורית.

מסקנה 4.3. תהא S קבוצה מישורית. לכל שתי נקודות שונות $A, B \in S$, קיימות שתי קבוצות $S_1, S_2 \subseteq S \setminus L_{AB}$ כך שמתקיים $S \setminus L_{AB} = S_1 \uplus S_2$, ובנוסף כל שתי נקודות $P, Q \in S_1$ נמצאות באותו צד של L_{AB}, וכן כל שתי נקודות $P, Q \in S_2$ נמצאות באותו צד של L_{AB}.

♣ כלומר היחס "להיות באותו צד של ישר נתון" הוא יחס שקילות.

טענה 4.4. יהי $L \subseteq \mathbb{X}$ ישר ותהיינה $A, B \in \mathbb{X} \setminus L$ שתי נקודות כך ש-$L \cup \{A, B\}$ מישורית.

- התנאים הבאים שקולים:
  - A ו-B נמצאות באותו צד של L.
  - לפחות אחת משתי הקרנות R_{AB} ו-R_{BA} אינה חותכת את L.
  - החיתוך $(P, Q) \cap L$ ריק.
- התנאים הבאים שקולים:
  - A ו-B נמצאות בצדדים שונים של L.
  - שתי הקרנות R_{AB} ו-R_{BA} חותכות את L.
  - החיתוך $(P, Q) \cap L$ אינו ריק.

טענה 4.5. יהי $L \subseteq \mathbb{X}$ ישר, ותהיינה $P, Q \in \mathbb{X} \setminus L$.

- P ו-Q נמצאות באותו צד של L אם"ם **קיימות** שתי נקודות $A, B \in L$ כך שמתקיים לפחות אחד משני השוויונות הבאים:

$$\angle BAP = \angle BAQ + \angle QAP$$
$$\angle BAQ = \angle BAP + \angle PAQ$$

- P ו-Q נמצאות בצדדים שונים של L אם"ם **קיימות** שתי נקודות $A, B \in L$ כך שמתקיים לפחות אחד משני השוויונות הבאים:

$$\angle PAQ = \angle PAB + \angle BAQ$$
$$\angle PAQ + \angle QAB + \angle BAP = 2\pi$$

5 מישורים

5.1 הגדרה ומסקנות פשוטות

למה 5.1. תהא $S \subseteq \mathcal{G}$ קבוצה מישורית. לכל $A, B, O \in S$ כך ש-A, B שונות מ-O ו-$\angle AOB$ אינה זווית מנוונת/שטוחה, לכל $0 < r \in \mathbb{R}$, ולכל $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$ כך ש-$|\theta_1 \pm \theta_2| = \angle AOB$ קיימת לכל היותר נקודה אחת $C \in S$ המקיימת $|CO| = r$, $\angle AOC = \theta_1$ ו-$\angle BOC = \theta_2$.

הוכחה. תהיינה $A, B, O \in S$ כנ"ל, יהי $0 < t \in \mathbb{R}$, ותהיינה $\theta_1, \theta_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ כך ש-$|\theta_1 \pm \theta_2| = \angle AOB$.
נניח בשלילה שקיימות שתי נקודות שונות $C, D \in S$ המקיימות $|CO| = |DO| = r$, $\angle AOC = \angle AOD = \theta_1$ ו-$\angle BOC = \angle BOD = \theta_2$. ■

צריך להמשיך את ההוכחה.

הגדרה 5.2. תת-קבוצה $M \subseteq \mathcal{G}$ תיקרא <u>מישור</u> אם היא מקיימת את שלושת התנאים הבאים:

1. M מישורית.
2. יש ב-M שלוש נקודות שאינן קוויות.
3. לכל $A, B, O \in M$ שאינן קוויות, לכל $0 < r \in \mathbb{R}$, ולכל $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$ כך ש-$|\theta_1 \pm \theta_2| = \angle AOB$, קיימת נקודה $C \in M$ המקיימת $|CO| = r$, $\angle AOC = \theta_1$ ו-$\angle BOC = \theta_2$.

♣ כלומר מישור הוא קבוצה מישורית שאין בה "חורים".

מסקנה 5.3. לכל מישור $M \subseteq \mathbb{X}$, לכל $A, B, O \in M$ שאינן קוויות, לכל $0 < r \in \mathbb{R}$, ולכל $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$ כך ש-$|\theta_1 \pm \theta_2| = \angle AOB$; קיימת נקודה יחידה $C \in M$ המקיימת $|CO| = r$, $\angle AOC = \theta_1$ ו-$\angle BOC = \theta_2$.

מסקנה 5.4. תהא $S \subseteq \mathbb{X}$ קבוצה מישורית. לכל שלוש נקודות $A, B, O \in S$ שאינן קוויות, ולכל מישור $M \subseteq \mathbb{X}$, אם $A, B, O \in M$ אז $S \subseteq M$.

מסקנה 5.5. כל מישור הוא קבוצה מישורית מרבית.

מסקנה 5.6. לכל מישור וישר שאינו מוכל בו יש לכל היותר נקודת חיתוך אחת.

♣ מכאן ואילך נוכל לומר "נקודת **ה**חיתוך" (בה"א הידיעה) עבור מישור וישר שאינו מוכל בו שאינם זרים.

מסקנה 5.7. לכל מישור $M \subseteq \mathbb{X}$, לכל שתי נקודות שונות $A, B \in M$, ולכל קבוצה קווית $S \subseteq \mathbb{X}$ כך ש-$A, B \in S$, מתקיים $S \subseteq M$.

מסקנה 5.8. כל מישור מכיל אין-סוף ישרים שונים, בפרט כל מישור הוא קבוצה אין-סופית, ואם יש ב-$\mathbb{X}$ מישורים אז יש ב-$\mathbb{X}$ גם ישרים.

5.2 הגדרות שקולות למישור

צריך לכתוב סעיף זה.