Mathe II - Formelsammlung

Sallar Ahmadi-Pour

WiSe 2013/14

Vorwort

Diese Formelsammlung ist im Zuge der Veranstaltung 'Mathematik 2 - Analysis' des WiSe 2013/14 im Studiengang technische Informatik BSc. entstanden. Ich gewährleiste kein Vollständigkeit, Richtigkeit oder ähnliches. Jeder kann diese Formelsammlung nutzen. Ich stelle sie der Öffentlichkeit zur Verfügung und hoffe diese damit teilen zu können.

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre

1.1 Allgemeines

$M_E = \{a \mid a \text{ mit Eigenschaft } E\}$	Beschreibend
$M_A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$	Aufzählend, abzählbar Endlich
$M = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$	abzählbar Unendlich
$M_AE = \{1, 2, 3, \dots\} = \{n \mid n \in \mathbb{N}\}$	<u>beides</u>
$a \in M$	a Elemnt aus der Menge M
$a \notin M$	a <u>nicht</u> Element aus M

1.2 Teilmenge

$A \subset B \rightarrow A$ Teilmenge von B oder $B \supset A$.
$A = B$ wenn $A \subset B$ und $B \subset A$.

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

1.3 Nullmenge

$M = \{\} = \emptyset$

1.4 Potenzmenge

Menge aller Teilmengen.
$A = \{1, 2\}$; $P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$

1.5 Anzahl der Elemente einer Menge

$\#A = |A| = 2$ und $|P(A)| = 4$.

$$|P(M)| = 2^{|M|}$$

1.6 Komplementärmenge

Sei $A \subset M$, dann ist $\bar{A}$ die Komplementärmenge.
$\bar{A} = \{x \mid x \in M \wedge x \notin A\}$
$\bar{M} = \emptyset$ und $\bar{\emptyset} = M$
$A \backslash M = \bar{A}$

1.7 Vereinugungsmenge

$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Man sagt auch: A vereinigt B.

1.8 Paarmenge / Produktmenge

$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Man sagt auch A und B.
Ist $B \subset A$ so heißt $A \backslash B$ Komplement $\bar{B}$ oder B^c.

1.9 Rechenregeln

Seien A, B, C Mengen und M das Einselement:

a) $A \cup B = B \cup A$ – Kommutativ

b) $A \cap B = B \cap A$ – Kommutativ

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – Assoziativ

d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – Assoziativ

e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – Distributiv

f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – Distributiv

g) $A \cap (A \cup C) = A$ – Verschmelzung

h) $B \cup (B \cap C) = B$ – Verschmelzung

i) $A \cup \emptyset = A$ aber $A \cap \emptyset = \emptyset$

j) $A \cap M = A$ aber $A \cup M = M$

k) $A \cup \bar{A}$ und $A \cap \bar{A} = \emptyset$ – Komplement-Eigenschaft

l) $\bar{\bar{A}} = A$

m) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ – DeMorgansche Regel

n) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ – DeMorgansche Regel

1.10 Abbildungen

Eine Abbildung ist SURJEKTIV: $\forall b \in B \exists a \in A, f(a) = b$.
Eine Abbildung ist INJEKTIV: $\forall a, a' \in A a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$.
Eine Abbildung ist BIJEKTIV wenn sie surjektiv und injektiv ist.

1.11 Anzahl der Elemente einer unendlichen Menge

abzählbare Unendlichkeit Sei M eine Menge. M heißt unendlich, falls es eine echte Teilmenge $N \subset M$ gibt, die sich bijektiv auf M abbilden lässt. Eine Menge heißt endlich, wenn sie nicht unendlich ist.

Abzählbarkeit Eine Menge heißt abzählbar unendlich, wenn eine Bijektion zwischen M und N existiert. $|\mathbb{N}| = \infty$

2 Vollständige Induktion

2.1 Allgemeines

Ein Beweis mit vollständiger Induktion (z.B. einer Summenformel bzw. deren nicht iterativer Formel) besteht immer aus:

- Induktionsbehauptung: hier wird die zu beweisende Gleichung niedergeschrieben. Dies ist unsere Induktionsannahme.
- Dann folgt der Induktionsanfang, hier wird ein (möglichst einfacher) Fall – für z.B. $n = 1$ durchgerechnet.
- Sollte der Induktionsanfang korrekt sein, kann man nun den Induktionsschritt vollziehen. Hierbei muss die Induktionsbehauptung verwendet werden. Durch geschicktes Umformen gelangt man nun zu einer aussage, welcher für n+1 gilt. Somit sei eine Behauptung mit vollständiger Induktion bewiesen.
- Als letztes kommt der Induktionsschluss. Hier wird die Formel erneut niedergeschrieben, jedoch mit zugehörigem Definitionsbereich (z.B. für alle $n \geq 1$).

2.2 Beispiele

Sei $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ unsere Induktionsbehauptung welche zu beweisen gilt, so folgt daraus:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{1+2}{2^1} \tag{2}$$

für alle $n \geq 1$ sei die Behauptung richtig

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^n} \\
&= 2 + \frac{-n-2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 + \frac{-2n-4+n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 + \frac{-n-3}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \text{gilt für alle } n \geq 1. \tag{4}$$

Bei diesem Beispiel ist Gleichung (1) die Induktionsbehauptung bzw. -annahme, (2) der Induktionsanfang, (3) der Induktionsschritt mit Umformung und (4) der Induktionsschluss.
Sei $2^n < n!$ unsere Induktionsbehauptung welche zu beweisen gilt, so folgt daraus:

$$2^{n_0} < n_0!$$
$$2^4 = 16 < 4! = 24$$

für $n \geq 4$ sei $2^n < n!$

$$n \to n+1$$
$$2^n < n! \quad \text{gilt } \forall n \geq 4$$

3 Gruppen, Ringe und Körper

3.1 Gruppe

Ein Paar $(M, \circ)$ (M ist eine Menge und $\circ$ eine zweistellige Verknüpfung), das folgende Eigenschaften besitzt:

- Abgeschlossenheit bzgl. Verknüpfung $\circ$ (die Anwendung der Verknüpfung hat ein Ergebnis aus der selben Menge)
- Assoziativgesetz: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- Neutrales Element e: Es gibt ein Element e, genannt neutrales Element, sodass $e \circ a = a \circ e = a$ für alle a.
- inverses Element: Zu jedem a gibt es ein b mit $a \circ b = b \circ a = e$, b heißt das zu a inverse Element.

Beispiele: $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt *abelsch* oder *kommutativ*, wenn $\forall a, b \in G$ die Kommutativität gilt, ansonsten gilt sie als *nicht-abelsch* bzw. *nicht-kommutativ*.

- $a \circ b = b \circ a$

Beispiele: $(\mathbb{Z}, +)$

Eine Gruppe heißt *Halbgruppe*, wenn nur die Abgeschlossenheit und die Assoziativität erfüllt sein müssen.

Beispiele: $(\mathbb{N}_0, +)$, $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}_0, \cdot)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$

3.2 Ring

Ein Ring ist eine Menge M von Elementen zusammen mit zwei Verknüpfungen $\circ$ und $\square$, für die gelten:

- $(M, \circ)$ ist eine *kommutative* Guppe
- $(M, \square)$ ist *abgeschlossen* und *assoziativ* (Halbgruppe)
- Distributivgesetze:

  $a \circ (b \square c) = (a \circ b) \square (a \circ c)$
  $(a \circ b) \square c) = (a \square c) \circ (b \circ c)$

  In einem kommutativen Ring gilt außerdem das Kommutativgesetz: $a \circ b = b \circ a$

Beispiele: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \circ)$

3.3 Körper

Ein Körper ist eine Menge M von Elementen zusammen mit zwei Verknüpfungen $circ$ und $\Box$, für die gelten:

- $(M, \circ)$ ist eine kommutative Gruppe
- $(M \setminus e_0, \Box)$ ist eine Gruppe (e_0 ist das *neutrale Element* bzgl. $\circ$).
- Distributivgesetze:

  $a \circ (b \Box c) = (a \circ b) \Box (a \circ c)$
  $(a \circ b) \Box c) = (a \Box c) \circ (b \circ c)$

  In einem kommutativen Körper gilt außerdem das Kommutativgesetz: $a \circ b = b \circ a$

Beispiele: $(\mathbb{Q}, +, \circ)$, $(\mathbb{R}, +, \circ)$, $(\mathbb{C}, +, \circ)$

4 Komplexe Zahlen – $\mathbb{C}$

Im folgenden werden beide Konventionen i und j für die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ genutzt. Des weiteren werden hier nicht alle Operationen auf und mit komplexen Zahlen beschrieben.

4.1 Potenzen von z

Jede Potenz von einer komplexen Zahl z (z.B. j^{99}) lässt sich runter brechen auf eine Potenz zwischen 1 und 4.

$$j^{4n+1} = j \quad j^{4n+2} = -1 \quad j^{4n+3} = -j \quad j^{4n} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$j = -\frac{1}{k} \qquad j = \sqrt{-1}$$

4.2 Arithmetische Form

$$x, y \in \mathbb{R}, z = x + jy$$

In $\mathbb{C}$ wird nach Betrag der Zahl sortiert, nicht wie in $\mathbb{R}$ (links ist die Zahl kleiner als Rechts).

4.2.1 Gleichheit über Komponenten

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$$
$$Im(z) = \frac{1}{2j}(z - z^*)$$

4.3 Multiplikation und Division

Bei der Multiplikation von $\mathbb{C}$-Zahlen addieren sich die Winkel und multiplizieren sich die Radien. Bei der Division von $\mathbb{C}$-Zahlen subtrahieren sich die Winkel und dividieren sich die Radien.

4.4 Formeln und Sätze für komplexe Zahlen

Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2)^* &= z_1^* + z_2^* \\
(z_1 \cdot z_2)^* &= z_1^* \cdot z_2^* \\
(\frac{z_1}{z_2})^* &= \frac{z_1^*}{z_2^*} \quad \text{mit } z_2 \neq 0 \\
(z^*)^* &= z \\
z \cdot z &= |z|^2 \\
\frac{1}{z} &= \frac{z^*}{(z \cdot z^*)} = \frac{z^*}{|z|^2} \\
|z^*| &= |z| \\
|z| &\geq 0 \\
|z| &= 0 \Leftrightarrow z = 0 \\
|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \\
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{mit } z_2 \neq 0 \\
|z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \quad \text{Dreiecksungleichung}
\end{aligned}$$

4.5 Polarebenen Darstellung / Trigonometrische Darstellung

Zur Darstellung einer komplexen Zahl über eine polarebenen Darstellung (man spricht auch von der trigonometrischen Darstellung) benötigen wir von unserer komplexen Zahl z einen Radius und einen Winkel.

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

sei der Radius. Die Komplexe Zahl lässt sich dann mittels Sinus und Kosinus ausdrücken:

$$\begin{aligned}
z &= r \cos\varphi + ir \sin\varphi \\
z &= r(\cos\varphi + i \sin\varphi)
\end{aligned}$$

Mit der eulerschen Identität $e^{i\phi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ folgt:

$$z = re^{i\varphi}$$

Mit dieser Darstellung lassen sich Multiplikationen wesentlich einfacher vollziehen:

$$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i\varphi_1 + \varphi_2}$$

Wenn man komplexe Zahlen potenziert, potenzieren sich die Beträge (der Radius r) und multiplizieren sich die Winkel jeweils mit n.

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{i\varphi n}$$

4.5.1 Satz von Moivre

Der Satz von Moivre besagt, dass $(\cos x + i\,\sin x)^n = \cos(n\,x) + i\,\sin(n\,x)$ gilt.
Dies folgt aus $e^{i\,x} = \cos x + i\,\sin x$ und $\left(e^{i\,x}\right)^n = e^{i\,n\,x}$.
Dieser kann über die Additionstheoreme über die vollständige Induktion gezeigt werden.

5 Abbildungen und Funktionen

5.1 Grundbegriffe

Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt Funktion von A nach B, wenn jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zugeordnet wird. $b = f(a)$ heißt Funktionswert an der Stelle a. Der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ sind die Werte, die in die Funktion als a eingegeben werden können. Der Wertebereich $\mathbb{W}$ sind die Werte, die aus der Funktion resultieren. Die Bereiche können als übliche Mengen mit Eigenschaft niedergeschrieben werden z.B. :

$$\mathbb{D}(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x\}$$
$$\mathbb{W}(f(x)) = \{y \in \mathbb{R} \mid y\}$$

5.2 Gerade und ungerade Funktion

$$f(-x) = f(x) \qquad \text{Gerade Funktion}$$
$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{Ungerade Funktion}$$

5.3 Periodische Funktionen

$$f(x + \lambda) = f(x)$$

Kleinstes $\lambda > 0$ ist die primitive Periode.

5.3.1 Beschränktheit

Es sei $f : A \to B$. $M \subset A$ beschränkt an K.
Beispiel: $f(x) = \sin x$

$$|\sin x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Kleinste obere Schranke einer Funktion heißt Supremum.

$$f(x) = \sin x$$
$$\sup f = 1$$

Größte untere Schranke heißt Infimum.

$$\inf f = -1$$

5.3.2 Monotonieverhalten

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt im Intervall $I \subset A$ monoton wachsend bzw. streng monoton wachsend, wenn $\forall x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 > x_2$ die Ungleichung

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{bzw.} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

gilt. Entsprechend heißt sie monoton fallend bzw. streng monoton fallend, wenn $\forall x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 > x_2$ die Ungleichung

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{bzw.} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

5.4 Elementare Funktionen

5.4.1 Polynome

Ein Polynom ist definiert durch:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Addition/Subtraktion:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \pm \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k \pm b_k) x^k$$

Multiplikation:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot \sum_{l=0}^{n} b_l x^l = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} a_k b_l x^{k+l}$$

5.4.2 Lineare Funktion

Die Hauptform der linearen Funktion lautet $f(x) = a_0 + a_1 x$. a_0 und a_1 können mit zwei Wertepaaren von $f(x)$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ a_0 &= y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

Die Zweipunktform der linearen Funktion lautet $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
Die Achsenabschnittsform lautet $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Mit $f(0) = b$ und $f(a) = 0$.

5.4.3 Quadratische Funktion

Die Hauptform der quadratischen Funktion lautet $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.
Die Nullstellen der quadratischen Funktion lassen sich über die p,q-Formel bestimmen. Diese leitet sich aus der Hauptform her:

$$\begin{aligned} a_2 x^2 + a_1 x + a_0 &= 0 && : a_2 \\ x^2 + px + q &= 0 && \text{mit } p = \frac{a_1}{a_2}, q = \frac{a_0}{a_2} \\ \Rightarrow x_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} && \text{p,q-Formel} \end{aligned}$$

Die Nullstellen lassen sich ebenfalls mithilfe der Mitternachtsformel bestimmen:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \text{Diskriminante} \quad D &= b^2 - 4ac \end{aligned}$$

Dabei gelten für die Diskriminante D folgende Eigenschaften und Folgen für die Funktion:

$D > 0$	reelle Lösung $x_1 \vert x_2$
$D = 0$	eine doppelte reelle Lösung
$D < 0$	zwei Lösungen in $\mathbb{C}$ die konjugiert-komplex zueinander sind

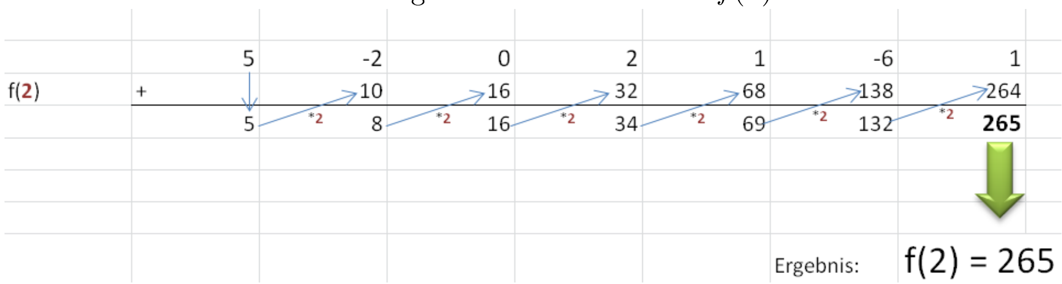
Wurzelsatz von Viëta ist für $\mathbb{C}$ als auch $\mathbb{R}$ gültig und lautet:

$$p = -(x_1 + x_2)$$
$$q = x_1 \cdot x_2$$

5.4.4 Das Horner-Schema

Das Horner-Schema erlaubt es in wenigen Rechenschritten Nullstellen als auch Funktionswerte zu berechnen. Diese Methode erweist sich als einfach für Computerprogramme zu implementieren. Außerdem erlaubt es die Berechnung von Funktionswerten ohne Taschenrechner[1]
Beispiel: $f(x) = 5x^6 - 2x^5 + 2x^3 + x^2 - 6x + 1$. Zur Berechnung vom Funktionswert $f(2)$ sieht das Horner-Schema wie folgt aus:

Abbildung 1: Horner-Schema für $f(x)$



[1]Als Beispiel: $11 + 7x - 5x^2 - 4x^3 + 2x^4 \;=\; 11 + x \cdot (7 + x \cdot (-5 + x \cdot (-4 + x \cdot 2)))$

5.5 Gebrochen-rationale Funktionen

Jede gebrochen-rationale Funktion hat die Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$p(x)$ und $q(x)$ sind Polynome. Der Grad von $p(x)$ sei n und der Grad von $q(x)$ sei m. Die Funktion ist echt gebrochen, wenn $n < m$. Die Funktion ist unecht gebrochen, wenn $n \geq m$.

5.5.1 Partialbruchzerlegung

Aus Wikipedia:

> Die Partialbruchzerlegung ist eine standardisierte Darstellung rationaler Funktionen. Sie wird in der Mathematik verwendet, um die Rechnung mit solchen Funktionen zu erleichtern. Insbesondere kommt sie bei der Integration der rationalen Funktionen zur Anwendung.

Um die Partialbruchzerlegung vorzunehmen, muss man lediglich einige Schritte machen[2]:

- Wenn Funktion unecht gebrochen, Polynomdivision vornehmen
- Bestimmung reeller Nullstellen des Nennerpolynoms
- Beseitigung von hebbaren Lücken
- Jeder Nullstelle wird ein Partialbruch zugeordnet:
  - x_1 (einfache Nullstelle) $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1}$
  - x_1 (zweifache Nullstelle) $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2}$
  - ...
  - x_1 (zweifache Nullstelle) $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n}$
- Kommen darüber hinaus nicht-reelle Nullstellen des Nenners vor, z.B. (x^2+1) , so gehören dazu Partialbrüche mit dem Zähler $Ax + B$.
- Die echt gebrochene rationale Funktion ist Summe der Partialbrüche. Die Konstanten A_1,A_2, etc. ermittelt man z.B. durch Koeffizientenvergleich oder Einsetzen von Werten.

Beispiel:

$$y = \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} \qquad \text{mit } x_1 = 1 \text{ und } x_{2,3} = 2$$

$$y = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}(x+1) \quad = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)$$

[2]Nach: Prof.Dr. Schell, FH Kaiserslautern

Die letzte Gleichung muss nun für alle x erfüllt sein. Für diese Lösung gibt es mehrere Vorgehensweisen:

A) Koeffizientenvergleich
   $(A+B)x^2 + (-4A - 3B + C - 1)x + 4A + 2B - C - 1 = 0$
   Die Terme 2ter Ordnung ergeben: $A + B = 0$
   Die Terme erster Ordnung ergeben: $-4A - 3B + C - 1 = 0$
   Die Terme nullter Ordnung ergeben: $4A + 2B - C - 1 = 0$
   $\Rightarrow$ Die Lösung des Gleichungssystems ergibt: $A = 2 \quad B = -2 \quad C = 3$

B) Einsetzen von Werten für x, insbesondere Nullstellen
   Achtung, genau genommen macht man hier eine Grenzwertbetrachtung!
   $x = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = A$
   $x = 2 \quad \Rightarrow \quad 3 = C$
   $x = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 4A + 2B - C = 4 \cdot 2 + 2B - 3 \quad \Rightarrow \quad B = 2$

Damit folgt als Ergebnis:

$$y = \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{2}{x-1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$$

5.5.2 Asymptoten

Für Asymptoten betrachtet man die höchsten Potenzen der beiden Polynome einer gebrochenrationalen Funktion (am Beispiel):

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} &= \frac{1}{1} x^{1-3} \\
\lim_{|x| \to \infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} &= \lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{1} x^{1-3} \\
&= \lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0
\end{aligned}$$

Asymtote liegt also bei $y = 0$

5.6 Exponential- und Logartihmusfunktion

Die Exponentialfunktion ist eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = e^x = \exp{(x)} := \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n, x \in \mathbb{R}$$

Alternativ ist auch folgendes möglich: $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
Für die Exponentialfunktion gelten alle Potenzgesetze.
$f(x) = e^x \Rightarrow f(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. e^x ist streng monoton wachsend $\Rightarrow$ e^x ist injektiv. $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist bijektiv.
Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist die Logarithmusfunktion. Im Fall von e^x ist $f^-1(x)$ der logarithmus Naturalis (der Logarithmus zur Basis e) $\log_e x = \ln(x)$. Für den natürlichen Logarithmus gelten alle Logarithmusregeln.

6 Trigonometrische Funktionen

6.1 Sinus und Kosinus

Die Sinus- und Kosinusfunktion besitzen viele Eigenschaften im Zusammenhang mit komplexen Zahlen. Außerdem besitzen diese Funktionen weitere Eigenschaften:

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) Additionstheoreme:
$\sin(x+y) = \sin x \cos x + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

3) $|\sin x| \leq 1 \qquad |\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ und $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ – das bedeutet, dass die Funktionen um $\pi/2$ phasenverschoben sind.

5) $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ und $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$.

6) $\sin(k\pi) = 0, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$

7) $\cos(k\pi) = (-1)^k, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$

8) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

9) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

Im allgemeinen kann man

1) $\sin(nx)$ und $\cos(nx)$ durch eine Summe von Produkten von $\cos^k x$ und $\sin^k x$

2) $\cos^n x$ und $\sin^n x$ durch eine Summe von Produkten von $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$

ausdrücken.
Für die Umformung der Funktionen in der letzteren genannten Form sind folgende weitere Identitäten hilfreich:

1) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$

2) $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

3) $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

6.2 Tangens und Kotangens

Die Definition der beiden Funktionen lautet

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{falls } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \text{falls } x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Der Definitionsbereich dieser Funktionen ist

$$\mathbb{D}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$\mathbb{D}(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Auch bei diesen beiden Funktionen gibt es Eigenschaften:

1) $\tan(x + \pi) = \tan x$
   $\cot(x + \pi) = \cot x$

2) $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$
   $\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan x$

3) $\tan -x = -\tan x$
   $\cot -x = -\cot x$

4) $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \qquad \cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$

6.3 Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Da die trigonometrischen Funktionen nicht bijektiv sind, existieren die Umkehrfunktionen nicht global. Man muss sich also auf Intervalle beschränken, auf denen die Funktionen strengt monoton sind. Dabei gibt es 'übliche Intervalle', welche in Fachliteratur zu finden sind.

6.4 Hyperbolische Funktionen

Die Definition der Funktionen lauten:

$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$
$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$
$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$\tanh x := \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad x \neq 0$$

Auch bei den hyperbolischen Funktionen gibt es eine Mehrzahl von Eigenschaften, welche in jeder Fachliteratur gibt, aber hier des Anspruches wegen nicht aufgeführt werden. Gleiches gilt für die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen.

7 Folgen, Reihen und Grenzwerte

Zur Formulierung von Folgen gibt es diverse Schreibweisen. Für uns genügen die folgenden Schreibweisen für Folgen.

$$F : n \in \mathbb{N} \to a_n \in \mathbb{R}$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$(a_n)$$

Bei Folgen bzw. Reihen interessiert immer das Verhalten für große (gegen Unendlich gehende) Werte von n. Reihen sind Summen von Teilfolgen, die beim ersten Folgenglied beginnen. Um das n-te Folgeglied direkt auszurechnen, benötigt man ein 'explizites Bildungsgesetz'. Alternativ kann man Folgeglieder rekursiv definieren, das heißt jedes Folgeglied berechnet sich aus dem Vorherigen. Mit a_1 kann man a_2 bestimmen, mit a_2 a_3,...

Definition 7.1 (arithmetische Folge) *Eine Folge heißt arithmetische Folgen, wenn die Differenz d zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist.*

$$a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d$$

Das mittlere von drei aufeinander folgender Glieder einer arithmetische Folge ist das arithmetische Mittel der äußeren Glieder.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Definition 7.2 (geometrische Folge) *Eine Folge a_n nennt man geometrische Folge, wenn der Quotient q von zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant ist.*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Das mittlere von drei aufeinander folgenden Gliedern einer geometrischen Folge berechnet sich aus dem geometrischen Mittel der beiden äußeren Glieder.

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Definition 7.3 (harmonische Folge) *Eine Folge a_n nennt man harmonisch, wenn sie aus den Zahlenfolgen der Kehrwerte der positiven Zahlen besteht.*

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Das mittlere von drei aufeinander folgenden Gliedern einer harmonischen Folge berechnet sich aus dem harmonischen Mittel der beiden äußeren Glieder.

$$a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}$$

Definition 7.4 (Nullfolge) *Eine Folge a_n mit $n \in \mathbb{N}$ heißt Nullfolge, wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\forall n > n_0$ gilt: $|a_n| < \varepsilon$*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Man sagt, die Folge a_n konvergiert gegen 0.

Definition 7.5 (Grenzwert einer Folge) *Eine Folge hat einen Grenzwert a, wenn die Folge $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, sodass für $n > n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$ wird.

Bestimmte Divergenz einer Folge bedeutet $a_n \to \pm\infty$ (divergiert gegen $\pm\infty$)

Konvergenz einer Folge bedeutet $a_n \to a$ (konvergiert gegen a)

Unbestimmte Divergenz einer Folge bedeutet, sie ist weder konvergent, noch divergent.

Eine Folge wird als alternierend bezeichnet, wenn die Folgeglieder jedes mal das Vorzeichen wechseln.
Für Folgen gilt das selbe Verhalten bezüglich Monotonie und Schranken.
Einige Grenzwerte brauchen nicht direkt berechnet werden und können nachgeschlagen werden.

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}(n + \frac{1}{n})^n = e$$

7.1 Konvergenzkriterium

7.1.1 Teilfolgen untersuchen

Durch die Untersuchung der Teilfolgen, kann man auf die Konvergenz der Folge schließen.

7.1.2 Monotoniekriterium

Einer monoton wachsende (fallende) Folge konvergiert genau dann, wenn sie nach oben (unten) beschränkt ist. Formal gilt also:

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{und} \quad a_n \leq k \quad \forall n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq k, k \text{ ist obere Schranke}$$

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \text{und} \quad a_n \geq k \quad \forall n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq k, k \text{ ist untere Schranke}$$

7.1.3 Cauchy-Kriterium

Eine Folge a_n ist konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt, sodass für alle Folgeglieder mit den Indiziees $n, m > n_0$ gilt

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

7.1.4 Einschließungskriterium

Seien a_n und c_n konvergent mit dem Grenzwert g. Ferner gelte $a_n \leq b_n \leq c_n \, \forall n > n_0$. Dann ist auch b_n konvergent und hat den Grenzwert g.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (-1)^n &= \text{ unbestimmt divergent} \\
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n}\right) &= \text{ konvergiert gegen 0} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \\
a_n \leq b_n &\leq c_n \\
\text{Nullfulge} \Rightarrow \text{Nullfolge} &\Leftarrow \text{Nullfolge}
\end{aligned}$$

7.2 Rechenregeln für konvergente Folgen

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ dann gilt

1) $\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a, \; \lambda \in \mathbb{R}$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$

3) $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

4) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$

5) $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \leq \lim_{n\to\infty} b_n = b$

6) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{a}$

Grenzwertberechnungen lassen sich durch Verkettung vertauschen:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} &= \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{a} \\
\lim_{n\to\infty} \exp(a_n) &= \exp\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \\
\lim_{n\to\infty} \sin(a_n) &= \sin\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)
\end{aligned}$$

7.3 Reihen (unendliche Reihen)

Es sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Reihe der zugehörigen Folge lautet dann dementsprechend

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Bildet man nun hier den Grenzwert, erhält man für die Reihe s_n den Grenzwert s

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$$

Eine geometrische Reihe:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k \\ &= \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases} \\ |q| < 1 \ &: \ s_n \to \frac{1}{(1-q)} \\ q \geq 1 \ &: \ s_n \to \infty \\ q \leq -1 \ &: \ s_n \text{ unbestimmt divergent (kein Grenzwert)} \end{aligned}$$

Ebenso wie bei den Folgen gibt es auch für Reihen harmonische Reihen. Diese sind die Summen der Folgeglieder einer harmonischen Folge.

7.4 Grenzwerte bei Funktionen

Für Funktionen (in diesem Fall die reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$) lassen sich ebenfalls Grenzwerte bilden. Auch hier gelten wieder ähnliche Gesetzmäßigkeiten wie bei Folgen.
Für eine Funktion f gibt es ein x_0, für das gilt

$$|f(x_0)| = \varepsilon$$

7.4.1 Grenzwert Null

Eine Funktion konvergiert für $x \to \infty$ gegen 0, wenn $\exists x_0 \forall \varepsilon > 0$, sodass $|f(x)| < \varepsilon \forall x \in \mathbb{D}(f)$ mit $x > x_0$.
Gilt entsprechend für $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

bzw.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

Definition 7.6 (Grenzwert einer Funktion) *Eine Funktion konvergiert für* $x \to \pm\infty$ *gegen* $a \in \mathbb{R}$, *wenn* $\exists x_0 \forall \varepsilon > 0$, *sodass* $|f(x) - a| < \varepsilon$ *für* $x > x_0$.
Hinweis: die Zahl a *kann als konstante Funktion* $f(x) = a$ *angesehen werden.*

Alle Grenzwertsätze für Folgen gelten für Funktionen!
Es gibt zusätzliche Regeln für gebrochen-rationale Funktionen:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Für den Fall, dass $m > n$ ist, beträgt der Grenzwert der Funktion 0. Für $n > m$ betrachtet man jeweils die verschieden Fälle ($\pm\infty$). Für den Fall $x \to \infty$ ist der Grenzwert von $f(x)$

$$\lim_{x \to \infty} [f(x)] = \operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \infty$$

Für den anderen Fall $x \to -\infty$
Falls $n - m$ gerade ist:

$$\lim_{x \to \infty} [f(x)] = \operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \infty$$

Falls $n - m$ ungerade ist:

$$\lim_{x \to \infty} [f(x)] = -\operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \infty$$

7.5 Stetigkeit

Eine sehr herunter gebrochene (und einfache) Definition lautet: Eine Funktion ist stetig, wenn man sie zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen. (Dies ist deshalb nicht ganz korrekt, da man eine Funktion mit hebbarer Lücke haben kann z.B. $\frac{x^3-1}{x-1}$).

Definition 7.7 *Eine reelle Funktion* $f : A \to \mathbb{R}$ *heißt stetig in* x_0, *wenn*
$f(x_0) = \lim_{h \to 0^+} f(x_0 + h) = \lim_{h \to 0^-} f(x_0 + h)$.
Die Funktion heißt stetig im Definitionsbereich $\mathbb{D}(f)$, *wenn sie in jedem* $x \in \mathbb{D}(f)$ *stetig ist.*
f *heißt stetig in* $x_0 \in \mathbb{D}(f)$, *wenn für die Folge* x_n $(n \in \mathbb{N})$ *mit* $x_n \in \mathbb{D}(f)$ *und* $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ *gilt:* $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.
f *heißt stetig in* $\mathbb{D}(f)$, *wenn sie in jedem* $x \in \mathbb{D}(f)$ *stetig ist.*