

Mathe II - Formelsammlung

Sallar Ahmadi-Pour

WiSe 2013/14

Inhaltsverzeichnis

1	Mengenlehre	2
1.1	Allgemeines	2
1.2	Teilmenge	2
1.3	Nullmenge	2
1.4	Potenzmenge	2
1.5	Anzahl der Elemente einer Menge	2
1.6	Komplementärmenge	2
1.7	Vereinigungsmenge	2
1.8	Paarmenge / Produktmenge	3
1.9	Rechenregeln	3
1.10	Abbildungen	3
1.11	Anzahl der Elemente einer unendlichen Menge	3
2	Vollständige Induktion	5
2.1	Allgemeines	5
2.2	Beispiele	5
3	Gruppen, Ringe und Körper	7
3.1	Gruppe	7
3.2	Ring	7
3.3	Körper	8
4	Komplexe Zahlen – \mathbb{C}	9
4.1	Potenzen von z	9
4.2	Arithmetische Form	9
4.2.1	Gleichheit über Komponenten	9
4.3	Multiplikation und Division	9
4.4	Formeln und Sätze für komplexe Zahlen	10
4.5	Polarebenen Darstellung / Trigonometrische Darstellung	10
4.5.1	Satz von Moivre	11

1 Mengenlehre

1.1 Allgemeines

$M_E = \{a \mid a \text{ mit Eigenschaft } E\}$	Beschreibend
$M_A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$	Aufzählend, abzählbar Endlich
$M = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$	abzählbar Unendlich
$M_A E = \{1, 2, 3, \dots\} = \{n \mid n \in \mathbb{N}\}$	<u>beides</u>
$a \in M$	a Element aus der Menge M
$a \notin M$	a <u>nicht</u> Element aus M

1.2 Teilmenge

$A \subset B \rightarrow A$ Teilmenge von B oder $B \supset A$.

$A = B$ wenn $A \subset B$ und $B \subset A$.

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

1.3 Nullmenge

$$M = \{\} = \emptyset$$

1.4 Potenzmenge

Menge aller Teilmengen.

$$A = \{1, 2\}; P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$$

1.5 Anzahl der Elemente einer Menge

$$\#A = |A| = 2 \text{ und } |P(A)| = 4.$$

$$|P(M)| = 2^{|M|}$$

1.6 Komplementärmenge

Sei $A \subset M$, dann ist \bar{A} die Komplementärmenge.

$$\bar{A} = \{x \mid x \in M \wedge x \notin A\}$$

$$\bar{\bar{M}} = \emptyset \text{ und } \bar{\emptyset} = M$$

$$A \setminus M = \bar{A}$$

1.7 Vereinigungsmenge

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Man sagt auch: A vereinigt B .

1.8 Paarmenge / Produktmenge

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Man sagt auch A und B .

Ist $B \subset A$ so heißt $A \setminus B$ Komplement \bar{B} oder B^c .

1.9 Rechenregeln

Seien A, B, C Mengen und M das Einselement:

a) $A \cup B = B \cup A$ – Kommutativ

b) $A \cap B = B \cap A$ – Kommutativ

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – Assoziativ

d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – Assoziativ

e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – Distributiv

f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – Distributiv

g) $A \cap (A \cup C) = A$ – Verschmelzung

h) $B \cup (B \cap C) = B$ – Verschmelzung

i) $A \cup \emptyset = A$ aber $A \cap \emptyset = \emptyset$

j) $A \cap M = A$ aber $A \cup M = M$

k) $A \cup \bar{A}$ und $A \cap \bar{A} = \emptyset$ – Komplement-Eigenschaft

l) $\bar{\bar{A}} = A$

m) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ – DeMorgansche Regel

n) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ – DeMorgansche Regel

1.10 Abbildungen

Eine Abbildung ist SURJEKTIV: $\forall b \in B \exists a \in A, f(a) = b$.

Eine Abbildung ist INJEKTIV: $\forall a, a' \in A, a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$.

Eine Abbildung ist BIJEKTIV wenn sie surjektiv und injektiv ist.

1.11 Anzahl der Elemente einer unendlichen Menge

abzählbare Unendlichkeit Sei M eine Menge. M heißt unendlich, falls es eine echte Teilmenge $N \subset M$ gibt, die sich bijektiv auf M abbilden lässt. Eine Menge heißt endlich, wenn sie nicht unendlich ist.

Abzählbarkeit Eine Menge heißt abzählbar unendlich, wenn eine Bijektion zwischen M und N existiert. $|\mathbb{N}| = \infty$

2 Vollständige Induktion

2.1 Allgemeines

Ein Beweis mit vollständiger Induktion (z.B. einer Summenformel bzw. deren nicht iterativer Formel) besteht immer aus:

- Induktionsbehauptung: hier wird die zu beweisende Gleichung niedergeschrieben. Dies ist unsere Induktionsannahme.
- Dann folgt der Induktionsanfang, hier wird ein (möglichst einfacher) Fall – für z.B. $n = 1$ – durchgerechnet.
- Sollte der Induktionsanfang korrekt sein, kann man nun den Induktionsschritt vollziehen. Hierbei muss die Induktionsbehauptung verwendet werden. Durch geschicktes Umformen gelangt man nun zu einer Aussage, welche für $n+1$ gilt. Somit sei eine Behauptung mit vollständiger Induktion bewiesen.
- Als letztes kommt der Induktionsschluss. Hier wird die Formel erneut niedergeschrieben, jedoch mit zugehörigem Definitionsbereich (z.B. für alle $n \geq 1$).

2.2 Beispiele

Sei $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ unsere Induktionsbehauptung welche zu beweisen gilt, so folgt daraus:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^1 \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{1+2}{2^1} \quad (2)$$

für alle $n \geq 1$ sei die Behauptung richtig

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^1 \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^n} \\ &= 2 + \frac{-n-2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 + \frac{-2n-4+n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 + \frac{-n-3}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}} \\ \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} &= 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \text{gilt für alle } n \geq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Bei diesem Beispiel ist Gleichung (1) die Induktionsbehauptung bzw. -annahme, (2) der Induktionsanfang, (3) der Induktionsschritt mit Umformung und (4) der Induktionsschluss.

Sei $2^n < n!$ unsere Induktionsbehauptung welche zu beweisen gilt, so folgt daraus:

$$\begin{aligned} 2^{n_0} &< n_0! \\ 2^4 &= 16 < 4! = 24 \end{aligned}$$

für $n \geq 4$ sei $2^n < n!$

$$\begin{aligned} n &\rightarrow n+1 \\ 2^n &< n! \quad \text{gilt } \forall n \geq 4 \end{aligned}$$

3 Gruppen, Ringe und Körper

3.1 Gruppe

Ein Paar (M, \circ) (M ist eine Menge und \circ eine zweistellige Verknüpfung), das folgende Eigenschaften besitzt:

- Abgeschlossenheit bzgl. Verknüpfung \circ (die Anwendung der Verknüpfung hat ein Ergebnis aus der selben Menge)
- Assoziativgesetz: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- Neutrales Element e : Es gibt ein Element e , genannt neutrales Element, sodass $e \circ a = a \circ e = a$ für alle a .
- inverses Element: Zu jedem a gibt es ein b mit $a \circ b = b \circ a = e$, b heißt das zu a inverse Element.

Beispiele: $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

Eine Gruppe (G, \circ) heißt *abelsch* oder *kommutativ*, wenn $\forall a, b \in G$ die Kommutativität gilt, ansonsten gilt sie als *nicht-abelsch* bzw. *nicht-kommutativ*.

- $a \circ b = b \circ a$

Beispiele: $(\mathbb{Z}, +)$

Eine Gruppe heißt *Halbgruppe*, wenn nur die Abgeschlossenheit und die Assoziativität erfüllt sein müssen.

Beispiele: $(\mathbb{N}_0, +)$, $(\mathbb{N}, +)$, (\mathbb{N}_0, \cdot) , (\mathbb{N}, \cdot)

3.2 Ring

Ein Ring ist eine Menge M von Elementen zusammen mit zwei Verknüpfungen \circ und \square , für die gelten:

- (M, \circ) ist eine *kommutative* Gruppe
- (M, \square) ist *abgeschlossen* und *assoziativ* (Halbgruppe)
- Distributivgesetze:

$$\begin{aligned}a \circ (b \square c) &= (a \circ b) \square (a \circ c) \\(a \circ b) \square c &= (a \square c) \circ (b \circ c)\end{aligned}$$

In einem kommutativen Ring gilt außerdem das Kommutativgesetz: $a \circ b = b \circ a$

Beispiele: $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot)$

3.3 Körper

Ein Körper ist eine Menge M von Elementen zusammen mit zwei Verknüpfungen \circ und \square , für die gelten:

- (M, \circ) ist eine kommutative Gruppe
- $(M \setminus \{e_0\}, \square)$ ist eine Gruppe (e_0 ist das *neutrale Element* bzgl. \circ).
- Distributivgesetze:

$$a \circ (b \square c) = (a \circ b) \square (a \circ c)$$

$$(a \circ b) \square c = (a \square c) \circ (b \circ c)$$

In einem kommutativen Körper gilt außerdem das Kommutativgesetz: $a \circ b = b \circ a$

Beispiele: $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$

4 Komplexe Zahlen – \mathbb{C}

Im folgenden werden beide Konventionen i und j für die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ genutzt. Des weiteren werden hier nicht alle Operationen auf und mit komplexen Zahlen beschrieben.

4.1 Potenzen von z

Jede Potenz von einer komplexen Zahl z (z.B. j^{99}) lässt sich runter brechen auf eine Potenz zwischen 1 und 4.

$$j^{4n+1} = j \quad j^{4n+2} = -1 \quad j^{4n+3} = -j \quad j^{4n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$j = -\frac{1}{k} \quad j = \sqrt{-1}$$

4.2 Arithmetische Form

$$x, y \in \mathbb{R}, z = x + jy$$

In \mathbb{C} wird nach Betrag der Zahl sortiert, nicht wie in \mathbb{R} (links ist die Zahl kleiner als Rechts).

4.2.1 Gleichheit über Komponenten

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$$

$$Im(z) = \frac{1}{2j}(z - z^*)$$

4.3 Multiplikation und Division

Bei der Multiplikation von \mathbb{C} -Zahlen addieren sich die Winkel und multiplizieren sich die Radian. Bei der Division von \mathbb{C} -Zahlen subtrahieren sich die Winkel und dividieren sich die Radian.

4.4 Formeln und Sätze für komplexe Zahlen

Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2)^* &= z_1^* + z_2^* \\ (z_1 \cdot z_2)^* &= z_1^* \cdot z_2^* \\ \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* &= \frac{z_1^*}{z_2^*} \quad \text{mit } z_2 \neq 0 \\ (z^*)^* &= z \\ z \cdot z &= |z|^2 \\ \frac{1}{z} &= \frac{z^*}{(z \cdot z^*)} = \frac{z^*}{|z|^2} \\ |z^*| &= |z| \\ |z| &\geq 0 \\ |z| &= 0 \Leftrightarrow z = 0 \\ |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{mit } z_2 \neq 0 \\ |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \quad \text{Dreiecksungleichung}\end{aligned}$$

4.5 Polarebenen Darstellung / Trigonometrische Darstellung

Zur Darstellung einer komplexen Zahl über eine polarebenen Darstellung (man spricht auch von der trigonometrischen Darstellung) benötigen wir von unserer komplexen Zahl z einen Radius und einen Winkel.

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

sei der Radius. Die Komplexe Zahl lässt sich dann mittels Sinus und Kosinus ausdrücken:

$$\begin{aligned}z &= r \cos \varphi + ir \sin \varphi \\ z &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\end{aligned}$$

Mit der eulerschen Identität $e^{i\phi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ folgt:

$$z = re^{i\varphi}$$

Mit dieser Darstellung lassen sich Multiplikationen wesentlich einfacher vollziehen:

$$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i\varphi_1 + \varphi_2}$$

Wenn man komplexe Zahlen potenziert, potenzieren sich die Beträge (der Radius r) und multiplizieren sich die Winkel jeweils mit n .

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{i\varphi n}$$

4.5.1 Satz von Moivre

Der Satz von Moivre besagt, dass $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ gilt.

Dies folgt aus $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ und $(e^{ix})^n = e^{inx}$.

Dieser kann über die Additionstheoreme über die vollständige Induktion gezeigt werden.