Mathe II - Formelsammlung

Sallar Ahmadi-Pour

WiSe 2013/14

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre

1.1 Allgemeines

$M_E = \{a \mid a \text{ mit Eigenschaft } E\}$	Beschreibend
$M_A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$	Aufzählend, abzählbar Endlich
$M = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$	abzählbar Unendlich
$M_A E = \{1, 2, 3, \dots\} = \{n \mid n \in \mathbb{N}\}$	<u>beides</u>
$a \in M$	a Elemnt aus der Menge M
$a \notin M$	a <u>nicht</u> Element aus M

1.2 Teilmenge

$A \subset B \to A$ Teilmenge von B oder $B \supset A$.
$A = B$ wenn $A \subset B$ und $B \subset A$.

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

1.3 Nullmenge

$M = \{\} = \emptyset$

1.4 Potenzmenge

Menge aller Teilmengen.
$A = \{1, 2\}$; $P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$

1.5 Anzahl der Elemente einer Menge

$\#A = |A| = 2$ und $|P(A)| = 4$.

$$|P(M)| = 2^{|M|}$$

1.6 Komplementärmenge

Sei $A \subset M$, dann ist $\bar{A}$ die Komplementärmenge.
$\bar{A} = \{x \mid x \in M \wedge x \notin A\}$
$\bar{M} = \emptyset$ und $\bar{\emptyset} = M$
$A \backslash M = \bar{A}$

1.7 Vereinugungsmenge

$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Man sagt auch: A vereinigt B.

1.8 Paarmenge / Produktmenge

$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Man sagt auch A und B.
Ist $B \subset A$ so heißt $A \backslash B$ Komplement $\bar{B}$ oder B^c.

1.9 Rechenregeln

Seien A, B, C Mengen und M das Einselement:

a) $A \cup B = B \cup A$ – Kommutativ

b) $A \cap B = B \cap A$ – Kommutativ

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – Assoziativ

d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – Assoziativ

e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – Distributiv

f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – Distributiv

g) $A \cap (A \cup C) = A$ – Verschmelzung

h) $B \cup (B \cap C) = B$ – Verschmelzung

i) $A \cup \emptyset = A$ aber $A \cap \emptyset = \emptyset$

j) $A \cap M = A$ aber $A \cup M = M$

k) $A \cup \bar{A}$ und $A \cap \bar{A} = \emptyset$ – Komplement-Eigenschaft

l) $\bar{\bar{A}} = A$

m) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ – DeMorgansche Regel

n) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ – DeMorgansche Regel

1.10 Abbildungen

Eine Abbildung ist SURJEKTIV: $\forall b \in B \exists a \in A, f(a) = b$.
Eine Abbildung ist INJEKTIV: $\forall a, a' \in A a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$.
Eine Abbildung ist BIJEKTIV wenn sie surjektiv und injektiv ist.

1.11 Anzahl der Elemente einer unendlichen Menge

abzählbare Unendlichkeit Sei M eine Menge. M heißt unendlich, falls es eine echte Teilmenge $N \subset M$ gibt, die sich bijektiv auf M abbilden lässt. Eine Menge heißt endlich, wenn sie nicht unendlich ist.

Abzählbarkeit Eine Menge heißt abzählbar unendlich, wenn eine Bijektion zwischen M und N existiert. $|\mathbb{N}| = \infty$

2 Vollständige Induktion

2.1 Allgemeines

Ein Beweis mit vollständiger Induktion (z.B. einer Summenformel bzw. deren nicht iterativer Formel) besteht immer aus:

- Induktionsbehauptung: hier wird die zu beweisende Gleichung niedergeschrieben. Dies ist unsere Induktionsannahme.
- Dann folgt der Induktionsanfang, hier wird ein (möglichst einfacher) Fall – für z.B. $n = 1$ durchgerechnet.
- Sollte der Induktionsanfang korrekt sein, kann man nun den Induktionsschritt vollziehen. Hierbei muss die Induktionsbehauptung verwendet werden. Durch geschicktes Umformen gelangt man nun zu einer aussage, welcher für n+1 gilt. Somit sei eine Behauptung mit vollständiger Induktion bewiesen.
- Als letztes kommt der Induktionsschluss. Hier wird die Formel erneut niedergeschrieben, jedoch mit zugehörigem Definitionsbereich (z.B. für alle $n \geq 1$).

2.2 Beispiele

Sei $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ unsere Induktionsbehauptung welche zu beweisen gilt, so folgt daraus:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{1+2}{2^1} \tag{2}$$

für alle $n \geq 1$ sei die Behauptung richtig

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \qquad (3) \\
&= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^n} \\
&= 2 + \frac{-n-2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 + \frac{-2n-4+n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 + \frac{-n-3}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}} \\
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} &= 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \text{gilt für alle } n \geq 1. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Bei diesem Beispiel ist Gleichung (1) die Induktionsbehauptung bzw. -annahme, (2) der Induktionsanfang, (3) der Induktionsschritt mit Umformung und (4) der Induktionsschluss.
Sei $2^n < n!$ unsere Induktionsbehauptung welche zu beweisen gilt, so folgt daraus:

$$\begin{aligned}
2^{n_0} &< n_0! \\
2^4 = 16 &< 4! = 24
\end{aligned}$$

für $n \geq 4$ sei $2^n < n!$

$$\begin{aligned}
n &\rightarrow n+1 \\
2^n &< n! \quad \text{gilt } \forall n \geq 4
\end{aligned}$$

3 Gruppen, Ringe und Körper

3.1 Gruppe

Ein Paar $(M, \circ)$ (M ist eine Menge und $\circ$ eine zweistellige Verknüpfung), das folgende Eigenschaften besitzt:

- Abgeschlossenheit bzgl. Verknüpfung $\circ$ (die Anwendung der Verknüpfung hat ein Ergebnis aus der selben Menge)
- Assoziativgesetz: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- Neutrales Element e: Es gibt ein Element e, genannt neutrales Element, sodass $e \circ a = a \circ e = a$ für alle a.
- inverses Element: Zu jedem a gibt es ein b mit $a \circ b = b \circ a = e$, b heißt das zu a inverse Element.

Beispiele: $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt *abelsch* oder *kommutativ*, wenn $\forall a, b \in G$ die Kommutativität gilt, ansonsten gilt sie als *nicht-abelsch* bzw. *nicht-kommutativ*.

- $a \circ b = b \circ a$

Beispiele: $(\mathbb{Z}, +)$

Eine Gruppe heißt *Halbgruppe*, wenn nur die Abgeschlossenheit und die Assoziativität erfüllt sein müssen.

Beispiele: $(\mathbb{N}_0, +)$, $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}_0, \cdot)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$

3.2 Ring

Ein Ring ist eine Menge M von Elementen zusammen mit zwei Verknüpfungen $\circ$ und $\Box$, für die gelten:

- $(M, \circ)$ ist eine *kommutative* Guppe
- $(M, \Box)$ ist *abgeschlossen* und *assoziativ* (Halbgruppe)
- Distributivgesetze:

  $a \circ (b \Box c) = (a \circ b) \Box (a \circ c)$
  $(a \circ b) \Box c) = (a \Box c) \circ (b \circ c)$

  In einem kommutativen Ring gilt außerdem das Kommutativgesetz: $a \circ b = b \circ a$

Beispiele: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \circ)$

3.3 Körper

Ein Körper ist eine Menge M von Elementen zusammen mit zwei Verknüpfungen *circ* und $\Box$, für die gelten:

- $(M, \circ)$ ist eine kommutative Gruppe
- $(M \setminus e_0, \Box)$ ist eine Gruppe (e_0 ist das *neutrale Element* bzgl. $\circ$).
- Distributivgesetze:

  $$a \circ (b \Box c) = (a \circ b) \Box (a \circ c)$$
  $$(a \circ b) \Box c) = (a \Box c) \circ (b \circ c)$$

  In einem kommutativen Körper gilt außerdem das Kommutativgesetz: $a \circ b = b \circ a$

Beispiele: $(\mathbb{Q}, +, \circ)$, $(\mathbb{R}, +, \circ)$, $(\mathbb{C}, +, \circ)$