2023-2024-1 概率统计（A）参考答案及评分标准

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）ACBDC

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 6/7；2. 0.5；3. 5；4. 0.975（39/40）；5. $D\hat{\theta}_1 < D\hat{\theta}_2$

三、（本题 10 分）

解：设 X 表示此县农民的年平均收入，则 $X \sim N\left(7100, 400^2\right)$，

（1）$P\{7000 < X < 8000\} = \Phi\left(\dfrac{8000-7100}{400}\right) - \Phi\left(\dfrac{7000-7100}{400}\right)$ ---------2 分

$= \Phi(2.25) - \Phi(-0.25) = \Phi(2.25) - \left[1 - \Phi(0.25)\right]$

$= 0.5865.$ ---------3 分

（2）$P\{7100 - k < X < 7100 + k\}$

$= \Phi\left(\dfrac{k}{400}\right) - \Phi\left(-\dfrac{k}{400}\right) = 2\Phi\left(\dfrac{k}{400}\right) - 1 \geq 0.95$ -----------3 分

所以，$\Phi\left(\dfrac{k}{400}\right) \geq 0.975$，查表知：$\dfrac{k}{400} \geq 1.96$，从而 $k \geq 784.$ -----------2 分

四、（本题 16 分）解：（1）$0 < x < 1$ 时

$$F(x) = \int_0^x 6t(1-t)\,dt = \left(3t^2 - 2t^3\right)_0^x = 3x^2 - 2x^3$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$ ---------4 分

（2）法一：$P\{-1 < X < 0.5\} = F(0.5) - F(-1) = 0.5$

法二：$P\{-1 < X < 0.5\} = \int_0^{0.5} 6x(1-x)\,dx = 0.5$ ---------4 分

（3）由 $y = 2x + 1$ 得 $x = \dfrac{y-1}{2}$，$x' = \dfrac{1}{2}$，则 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 6 \times \dfrac{y-1}{2}\left(1 - \dfrac{y-1}{2}\right) \times \dfrac{1}{2}, & 0 < \dfrac{y-1}{2} < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$ --------2 分

$$= \begin{cases} \dfrac{3}{4}(3-y)(y-1), & 1 < y < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$ --------2 分

（4） $EX=\int_0^1 x\cdot 6x\left(1-x\right)dx=\left(2x^3-\frac{3}{2}x^4\right)_0^1=\frac{1}{2}$

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2\cdot 6x\left(1-x\right)dx=\left(\frac{3}{2}x^4-\frac{6}{5}x^5\right)_0^1=\frac{3}{10}$$

$D\left(X\right)=E(X^2)-\left(EX\right)^2=\frac{3}{10}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$ ---------4 分

五、（本题 8 分）

解：设A_1代表动物为猫，A_2代表动物为狗，B 代表动物患该种疾病：

（1） $P\left(B\right)=P\left(A_1\right)P\left(B|A_1\right)+P\left(A_2\right)P\left(B|A_2\right)$

$=\frac{40}{160}\times 0.02+\frac{120}{160}\times 0.05=0.0425$ ---------4 分

（2） $P\left(A_1|B\right)=\frac{P\left(A_1\right)P\left(B|A_1\right)}{P\left(B\right)}=\frac{0.005}{0.0425}=\frac{2}{17}\approx 0.1176$ ---------4 分

六、（本题 12 分）

解：（1）**（本小问 4 分）**$\boldsymbol{\sigma^2}$ 的置信度为 0.9 的置信区间为

$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}\left(n-1\right)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}\left(n-1\right)}\right)$ ---------2 分

$=\left(\frac{24\times 6.3^2}{36.415},\frac{24\times 6.3^2}{13.848}\right)=\left(26.16,68.79\right)$ ---------2 分

（2）**（本小问 8 分）**

$H_0:\mu=26.5,\ H_1:\mu\neq 26.5$ ---------1 分

构造检验统计量：$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t\left(n-1\right)$

则原假设 H_0 的拒绝域：$W=\left\{|T|>t_{\alpha/2}\left(n-1\right)\right\}$，

由已知 $\alpha=0.05$，$n=25$，查 t 分布表得临界值：$t_{\alpha/2}\left(n-1\right)=t_{0.025}\left(24\right)=2.0639$，

得拒绝域：$W=\left\{|t|>2.0639\right\}$，

将 $\bar{x}=24.2$，$s=6.3$，代入统计量，得 $|t|=\left|\frac{24.2-26.5}{6.3/\sqrt{25}}\right|=1.83\notin W$，

所以不能拒绝 H_0，---------6 分

故在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，认为该超市食品经理的结论是正确的. - -------1 分

七、（本题 10 分）

解：**（1）矩估计**

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_5^6 x(\theta+1)(x-5)^{\theta} dx \\
&= \int_5^6 (x-5+5)(\theta+1)(x-5)^{\theta} dx \\
&= \int_5^6 (x-5)(\theta+1)(x-5)^{\theta} dx + \int_5^6 5(\theta+1)(x-5)^{\theta} dx \\
&= (\theta+1)\int_5^6 (x-5)^{\theta+1} dx + 5(\theta+1)\int_5^6 (x-5)^{\theta} dx \\
&= \frac{\theta+1}{\theta+2}(x-5)^{\theta+2}\Big|_5^6 + 5(x-5)^{\theta+1}\Big|_5^6 \\
&= \frac{\theta+1}{\theta+2} + 5 = 6 - \frac{1}{\theta+2} = \bar{X}.
\end{aligned}
$$

解得参数的矩估计量为：$\hat{\theta} = \dfrac{1}{6-\bar{X}} - 2.$ ---------4 分

（2）最大似然估计

1）构造似然函数

$$
L(\theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} (\theta+1)(x_i-5)^{\theta} = (\theta+1)^n \prod_{i=1}^{n} (x_i-5)^{\theta}, 5 < x_i < 6 \\ 0, \qquad \text{其他}. \end{cases}
$$
---------2 分

记 $L_1(\theta) = (\theta+1)^n \prod_{i=1}^{n} (x_i-5)^{\theta}$

2）取对数，则有：$\ln L_1(\theta) = n\ln(\theta+1) + \theta\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i-5).$

3）求导，并令其为零，则有：$\dfrac{d\ln L_1(\theta)}{d\theta} = \dfrac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i-5) = 0.$

得最大似然估计值为 $\hat{\theta} = -1 - \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i-5)}.$ ---------4 分

八、（本题 8 分）解：（1）若 X 与 Y 相互独立，则 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$，联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	2
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

---------6 分

（2）$\max(X,Y)$ 的分布律为

$\max(X,Y)$	0	1	2
P	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{6}$

则 $E\left[\max(X,Y)\right]=\frac{8}{9}$ ---------2 分

九、（本题 6 分）解　由条件知 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1/4, & 1\le x\le 5;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$ ---------1 分

令 Y 表示三次独立观测中观测值大于 4 的次数，则 $Y\sim B(3,p)$，

$$p=P\{X>4\}=\int_4^5\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}$$ ---------3 分

故有

$$P\{Y\ge 1\}=1-P\{Y=0\}=1-C_3^0(\frac{1}{4})^0(1-\frac{1}{4})^3=1-\frac{27}{64}=\frac{37}{64}=0.578125$$

---------2 分