无锡学院 2024-2025 学年第 2 学期

线性代数（文）（ A 卷）参考答案及评分标准

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

请把选择题答案，填在下面表格中，不填在指定位置，默认错误！

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	B	C	B	A	C	C	D	B

二、（本题满分 10 分）已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-2&4&0\end{pmatrix}$，

计算：（1）$BA+3B$；（2）AB^{T}.

解：（1）$BA+3B=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-2&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&0\\-1&2&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2&3&-1\\-2&4&0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}12&14&-1\\10&12&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&9&-3\\-6&12&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&23&-4\\4&24&0\end{pmatrix}$$ ………5 分；

（2）$AB^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\3&4\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&6\\18&10\\3&10\end{pmatrix}$ ………5 分；

三、（本题满分 10 分）设 $D=\begin{vmatrix}2&1&-1&2\\3&1&-2&4\\3&0&1&-1\\-1&-1&4&-3\end{vmatrix}$，$D$ 的 (i,j) 元的代数余子式记作 A_{ij}，

计算：（1）行列式 D 的值；（2）$A_{12}+2A_{22}-A_{32}-4A_{42}$.

解：（1）$D=\begin{vmatrix}2&1&-1&2\\3&1&-2&4\\3&0&1&-1\\-1&-1&4&-3\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4+r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}2&1&-1&2\\1&0&-1&2\\3&0&1&-1\\1&0&3&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1&2\\3&1&-1\\1&3&-1\end{vmatrix}\xlongequal[c_3-2c_1]{c_2+c_1}-\begin{vmatrix}1&0&0\\3&4&-7\\1&4&-3\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-16$$ …………5 分

（2）$A_{12}+2A_{22}-A_{32}-4A_{42}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 4 & -3 \end{vmatrix}=0$ …….5 分

四、（本题满分 10 分）设 A,B 均为三阶矩，满足 $A^2B-E=A+3B$，已知

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

求矩阵 B.

解：由 $A^2B-E=A+3B$，得 $\left(A^2-3E\right)B=A+E$， ......2 分

又 $A^2-3E=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆，

故 $B=\left(A^2-3E\right)^{-1}\left(A+E\right)$ ......3 分

$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$ ·········5 分

五、（本题满分 10 分）已知 $\alpha_1=(1,1,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-1,-1,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，

$\alpha_4=(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，

（1）证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为四维向量空间 R^4 的一组基；

（2）求向量 $\xi=(1,3,5,7)^{\mathrm{T}}$ 在上述基下的坐标.

解：把以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\xi$ 为列的矩阵化成最简形

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\xi)=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&3\\1&1&-1&1&5\\0&0&1&1&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&0&-2&2&2\\0&2&-2&2&4\\0&0&1&1&7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_3]{\substack{r_2\div(-2)\\ r_3\div 2\\ r_2\leftrightarrow r_3}}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&1&-1&1&2\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&2&8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_4]{\substack{r_1+r_2\\ r_2+r_3\\ r_4\div 2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}$$ ，..........5 分

（1） 由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\xi)$ 的最简形知，$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=4$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，

从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为四维向量空间 R^4 的一组基； ....3 分

（2）由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\xi)$ 的最简形知，$\xi=3\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4$. ....2 分

六、（本题满分 10 分）已知向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量组

$$B:\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1,$$

证明：向量组 B 线性无关.

证明：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$， ·········3 分

令 $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 $|P|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$，故 P 可逆， ·········3 分

从而 $R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$=3，

所以，向量组 B 线性无关. ·········4 分

七、（本题满分 10 分）求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2-x_3+2x_4-3x_5=0\\x_1-2x_2-2x_3+x_4-2x_5=0\\2x_1-4x_2-7x_3-x_4-x_5=0\end{cases}$ 的通解（用基础解系进行表示）.

解：对系数矩阵 A 作初等行变换化为行最简形，有

$$\begin{pmatrix}1&-2&-1&2&-3\\1&-2&-2&1&-2\\2&-4&-7&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-2&-1&2&-3\\0&0&-1&-1&1\\0&0&-5&-5&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+5r_2]{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&-2&-1&2&-3\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&-2&0&3&-4\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$ 4 分

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=2x_2-3x_4+4x_5\\ x_3=-x_4+x_5\end{cases}$，

令 $\begin{pmatrix}x_2\\x_4\\x_5\end{pmatrix}$ 分别取 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，则对应的 $\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$，

即得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}4\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$， 4 分

故通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3\left(k_1,k_2,k_3\in R\right)$. 2 分

八、（本题满分 10 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^{\ 2}+3x_2^{\ 2}+3x_3^{\ 2}+4x_2x_3$，

（1）求二次型的对称矩阵；

（2）利用正交变换将二次型化为标准形，写出所用的正交变换矩阵；

（3）求该此二次型的正惯性指数和负惯性指数.

解：（1）矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$， ………3 分

（2）A 的特征方程为 $\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda-5)(\lambda-1)=0$，

由此求得全部特征值为 $\lambda_1=5$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=1$.

对于 $\lambda_1=5$，解方程组 $\left(A-5E\right)x=0$，得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，将其单位化为：$\eta_1=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$；

对于 $\lambda_2=2$，解方程组 $(A-2E)x=0$，得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，取 $\eta_2=\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$；

对于 $\lambda_2=1$，解方程组 $(A-E)x=0$，得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，将其单位化为：$\eta_3=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

因此，可取正交变换矩阵为

$$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}，此时有 P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix}5&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}.$$

故在正交变换 $x=Py$ 下，所给二次型可化为标准形：

$$f=x^{\mathrm{T}}Ax=y^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)y=5y_1^2+2y_2^2+y_3^2.$$

………5 分

（3）正惯性指数为 3，负惯性指数为 0.　　………2 分