南京信息工程大学滨江学院

2020 — 2021 学年 第 1 学期

高等数学 I(1)期中 课程试卷答案

试卷类型 A (注明 A、B 卷)　　考试类型 闭 （注明开、闭卷）

注意：1、本课程为 必修 （注明必修或选修）， 学时为 96 ，学分为 6

2、本试卷共 6 页；考试时间 120 分钟； 出卷时间： 2020 年 11 月

3、姓名、学号等必须写在指定地方； 考试时间： 2020 年 11 月 18 日

4、本考卷适用专业年级： 2020 理工科各专业

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	总　分
得　分													
阅卷人													

（以上内容为教师填写）

专业＿＿＿＿＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿＿＿

学号＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿任课教师＿＿＿＿＿＿

请仔细阅读以下内容：

1、 考生必须遵守考试纪律，详细内容见《南京信息工程大学滨江学院考试纪律规定》。
2、 所有考试材料不得带离考场。
3、 考生进入考场后，须将学生证或身份证放在座位的左上角。
4、 考场内不许抽烟、吃食物、喝饮料。
5、 考生不得将书籍、作业、笔记、草稿纸带入考场，主考教师允许带入的除外。
6、 考试过程中，不允许考生使用通讯工具。
7、 开考 15 分钟后不允许考生进入考场，考试进行 30 分钟后方可离场。
8、 考生之间不得进行任何形式的信息交流。
9、 除非被允许，否则考生交卷后才能离开座位。
10、 考试违纪或作弊的同学将被请出考场，其违纪或作弊行为将上报学院。

本人郑重承诺：我已阅读上述 10 项规定，如果考试是违反了上述 10 项规定，本人将自愿接受学校按照有关规定所进行的处理。上面姓名栏所填姓名即表示本人已阅读本框的内容并签名。

一、 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-3\sin x)^{\frac{1}{x}}=$ ______ e^{-3} ______

2、曲线 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程为 ______ $x+y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ______

3、函数 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ 的可去间断点是 $x=$ ______ 3 ______

4、曲线 $y=ax^3$ 与直线 $y=x+b$ 在 $x=1$ 处相切，则 $a=$ ______ $\dfrac{1}{3}$ ______， $b=$ ______ $-\dfrac{2}{3}$ ______

5、已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$ ______ $\ln 2$ ______.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、 $f(x)=x^2, g(x)=e^x$，则 $f[g(x)]=$（ D ）

A. e^{x^2}　　B. x^{x^2}　　C. x^2e^x　　D. e^{2x}

2、下列极限中不正确的是（ A ）

A. $\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　　C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=0$

3、当 $x\to 0$ 时，与 x 是等价无穷小的是（ A ）

A. $\ln(1+\sin x)$　　B. 2^x-1　　C. $\sqrt{1+x}-1$　　D. $x-\sin x$

4、设 $\alpha=x^3$ 与 $\beta=\tan x-\sin x$，则当 $x\to 0$ 时，下列结论正确的是（ D ）

A. β 是与 α 等价的无穷小　　B. β 是比 α 高阶的无穷小

C. β 是比 α 低阶的无穷小　　D. β 是与 α 同阶但不等价的的无穷小

5、函数 $y=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处（ C ）

A. 连续且可导　　B. 不连续且不可导

C.连续但不可导　　D.以上皆不对

三、求解下列各题（每小题 5 分，共 30 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解：令 $x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ 则 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le x_n\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$ 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

2、$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}$

解：原式= $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}$

3、$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}$

解：原式= $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\frac{\csc^2 x}{\cot x}}{\frac{1}{x}}=-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\sin x\cos x}=-1$

4、设 $y=e^{\sin^2(1-x)}$，求 $\frac{dy}{dx},dy$

解：$\frac{dy}{dx}=e^{\sin^2(1-x)}2\sin(1-x)\cos(1-x)(-1)$

$=-\sin 2(1-x)e^{\sin^2(1-x)}$

$dy=-\sin 2(1-x)e^{\sin^2(1-x)}dx$

5、设 $xy-e^x+e^y=0$，求 $y'(0),y''(0)$

解：在等式两边对 x 求导得：

$y+xy'-e^x+e^y y'=0$

上式两边再对 x 求导得：

$y'+y'+xy''-e^x+e^y(y')^2+e^y y''=0$

把 $x=0, y=0$ 代入上面两式得 $y'(0)=1, y''(0)=-2$

6、设 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

解：$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx})=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx})\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\dfrac{1}{1-\cos t}\dfrac{1}{a(1-\cos t)}$

$$=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$$

四、（8 分）设 $\boldsymbol{f(x)}=\dfrac{1}{\arctan\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}-1}}$，求 $\boldsymbol{f(x)}$ 的间断点并判别其类型.

解： $\boldsymbol{x}=1$ 和 $\boldsymbol{x}=0$ 为 $\boldsymbol{f(x)}$ 的间断点。

当 $\boldsymbol{x}=1$ 时，$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{\arctan\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}-1}}=-\dfrac{2}{\boldsymbol{\pi}}, \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\arctan\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}-1}}=\dfrac{2}{\boldsymbol{\pi}}$

所以 $\boldsymbol{x}=1$ 为 $\boldsymbol{f(x)}$ 的第一类跳跃型间断点。

当 $\boldsymbol{x}=0$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\arctan\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}-1}}=\infty$

所以 $\boldsymbol{x}=0$ 为 $\boldsymbol{f(x)}$ 的第二类无穷型间断点.

五、（8 分）解：当 $\boldsymbol{x}>0, \left(\dfrac{\ln(1+\boldsymbol{x}^3)}{\boldsymbol{x}^2}\right)'=-\dfrac{2\ln(1+\boldsymbol{x}^3)}{\boldsymbol{x}^3}+\dfrac{3}{1+\boldsymbol{x}^3}$，

当 $\boldsymbol{x}<0, (\sin\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{x})'=\cos2\boldsymbol{x}$

当 $\boldsymbol{x}=0, \boldsymbol{f}_+'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\boldsymbol{x}^3)}{\boldsymbol{x}^3}=1, \boldsymbol{f}_-'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}}=1$

$$所以\ f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2\ln(1+x^3)}{x^3}+\dfrac{3}{1+x^3}, x>0\\ 1, \qquad x=0\\ \cos 2x, \qquad x>0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}-\frac{2\ln(1+x^3)}{x^3}+\frac{3}{1+x^3}=-2+3=1=f'(0)$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\cos 2x=1=f'(0)$$

导函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续的

六、（8 分）试确定 a,b 之值，使 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=\dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)$$
解：因为 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}$

$$=\frac{1}{2}$$

所以 $1-a=0,-(a+b)=\dfrac{1}{2}$ 从而 $a=1,b=-\dfrac{3}{2}$

七、（8 分）已知 $f(x),g(x)$ 可导，求 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$

八、证明题（每小题 4 分共 8 分）

1.设 $a>0,b>0$，证明方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根.

证明：令 $f(x)=x-a\sin x-b$，从而 $f(0)=-b<0$， $f(a+b)=a[1-\sin(a+b)]$

若 $\sin(a+b)=1$，则 $a+b$ 为方程的根；若 $\sin(a+b)<1$ 则 $f(0)f(a+b)<0$ 由零点定理在（0 ，$a+b)$ 方程至少有一个根.

2.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)-f(0)=1$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，

使得 $f'(\xi)=2\xi$

证：作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-x^2$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导

$$\varphi(0)=f(0),\varphi(1)=f(1)-1$$

从而 $\varphi(0)=\varphi(1)$ 由 Rolle 定理，$\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $\varphi'(\xi)=0$ 即

$f'(\xi)=2\xi$