无锡学院 2025-2026 学年第 1 学期

高等数学Ⅰ(1)期中试卷参考答案及评分标准

一、选择与填空（每题 4 分，共 80 分）

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
选 项	A	D	B	A	A	C	B	D	B	D
题 号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
选 项	C	B	D	C	A	C	C	D	B	A

二、解答题（每题 7 分，共 14 分）

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$ ……………………………2 分

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}$$ ……………………………2 分

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$ ……………………………3 分

2. 设 $\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2}, \\ y=\ln(t+\sqrt{1+t^2}), \end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\left(1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}=\dfrac{1}{t}$, ……………………………3 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}=-\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}.$$

于是

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=-\sqrt{2}\ .\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

三、证明题（6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 内可导且 $f'(x)\neq 0$，证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$

证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'\left(\xi\right)=\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

$f(x),e^x$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由柯西中值定理知，存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\eta)}{e^\eta}=\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{e^b-e^a},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

由上面两式之比，得

$$\frac{f'\left(\xi\right)}{\frac{f'(\eta)}{e^\eta}}=\frac{e^b-e^a}{b-a},$$

即

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$