南京信息工程大学滨江学院

2020 — 2021 学年 第 1 学期

高等数学Ⅰ(1) 课程试卷

试卷类型 A （注明 A、B 卷）　　考试类型 闭 （注明开、闭卷）

注意：1、本课程为 必修 （注明必修或选修）， 学时为 96 ，学分为 6

2、本试卷共 6 页；考试时间 120 分钟； 出卷时间： 2020 年 12 月

3、姓名、学号等必须写在指定地方；　　考试时间： 2021 年 1 月 7 日

4、本考卷适用专业年级： 2020 级理工科各专业

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总　分
得　分									
阅卷人									

（以上内容为教师填写）

专业__________ 年级__________ 班级__________

学号__________ 姓名__________ 任课教师__________

请仔细阅读以下内容：

1、 考生必须遵守考试纪律，详细内容见《南京信息工程大学滨江学院考试纪律规定》。
2、 所有考试材料不得带离考场。
3、 考生进入考场后，须将学生证或身份证放在座位的左上角。
4、 考场内不许抽烟、吃食物、喝饮料。
5、 考生不得将书籍、作业、笔记、草稿纸带入考场，主考教师允许带入的除外。
6、 考试过程中，不允许考生使用通讯工具。
7、 开考 15 分钟后不允许考生进入考场，考试进行 30 分钟后方可离场。
8、 考生之间不得进行任何形式的信息交流。
9、 除非被允许，否则考生交卷后才能离开座位。
10、 考试违纪或作弊的同学将被请出考场，其违纪或作弊行为将上报学院。

本人郑重承诺：我已阅读上述 10 项规定，如果考试是违反了上述 10 项规定，本人将自愿接受学校按照有关规定所进行的处理。上面姓名栏所填姓名即表示本人已阅读本框的内容并签名。

一、 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=$ $\underline{\qquad\dfrac{1}{6}\qquad}$

2、曲线 $\begin{cases}x=e^t\\ y=e^{-t}\end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程为 $\underline{\qquad x+y=2\qquad}$

3、$\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin x dx=$ $\underline{\qquad 0\qquad}$

4、$\int xf(x)dx=\arctan x+C$，则 $\int\dfrac{dx}{f(x)}=$ $\underline{\qquad\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4}x^4+C\qquad}$

5、方程 $xy'=y$ 的通解为 $\underline{\qquad y=Cx\qquad}$

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 是（ D ）

A. 同阶但不等价的无穷小　　C. $\sin x$ 比 x 高阶的无穷小

B. x 比 $\sin x$ 低阶的无穷小　　D. 等价无穷小

2、函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续是它在该点可导（ C ）

A. 充分条件但不是必要条件　　C. 必要条件但不是充分条件

B. 既不是充分条件也不是必要条件　　D. 充要条件

3、函数 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 的单调增加区间为（ C ）

A. $(0,e)$　　B. $(1,e)$　　C. $(e,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

4、下列等式中正确的是（ D ）

A. $d[\int f(x)dx]=f(x)$　　C. $\dfrac{d}{dx}[\int f(x)dx]=f(x)dx$

B. $\int df(x)=f(x)$　　D. $\int df(x)=f(x)+c$

5、设 f（x) 的一个原函数为 $\ln x$，则 $f'(x)=$（ C ）

A. $\dfrac{1}{x}$　　B. $x\ln x$　　C. $-\dfrac{1}{x^2}$　　D. e^x

三、求解下列各题（每小题 5 分，共 30 分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\tan 2x}$

解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{2x}$（2分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{x}{4}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{4}}{x}=\frac{1}{8}\text{（5分）}$$

2、设 $y=\sin x\cdot\ln x^2$，求 y'

解： $y'=\cos x\cdot\ln x^2+\sin x\cdot\dfrac{2x}{x^2}$（4分）

$$=\cos x\cdot\ln x^2+\frac{2\sin x}{x}\text{（5分）}$$

3、$\int\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$

解：原式 $=-\int e^{\frac{1}{x}}d\dfrac{1}{x}$（2分）$=-e^{\frac{1}{x}}+C$（5分）

4、$\int_{-1}^{1}\dfrac{x}{\sqrt{5-4x}}dx$

解：令 $\sqrt{5-4x}=t$，即 $x=\dfrac{5-t^2}{4}$

当 $x=-1$ 时 $t=3$；当 $x=1$ 时 $t=1$（2分）

$$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{5-4x}}dx=\int_{3}^{1}\frac{5-t^2}{4t}d(\frac{5-t^2}{4})=\int_{3}^{1}\frac{t^2-5}{8}dt$$

$$=[\frac{1}{24}t^3-\frac{5}{8}t]_3^1=\frac{1}{6}\text{（5分）}$$

5、$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx$

解：原式$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2+1}d(x+1)$（2分）$=\arctan(x+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$（5分）

6、$y'-2y=e^x$

解：$y=e^{-\int(-2)dx}(\int e^x e^{\int -2dx}dx+C)$（3分）

$=e^{2x}(-e^{-x}+C)$

$=Ce^{2x}-e^x$（5分）

四、（10分）求下面函数的单调区间、凹凸区间、极值和拐点

$$f(x)=x^3-3x^2-9x+14$$

解：$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

$f''(x)=6x-6=6(x-1)$（2分）

令 $f'(x)=3(x-3)(x+1)=0\Rightarrow x=3$ 或者 $x=-1$

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时 $f'(x)>0$；当 $x\in(-1,3)$ 时 $f'(x)<0$；当 $x\in(3,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$

所以单增区间为：$(-\infty,-1]$、$[3,+\infty)$

单减区间为：$[-1,3]$

$f(-1)=19$ 为极大值；$f(3)=-13$ 为极小值（6分）

令 $f''(x)=6(x-1)=0\Rightarrow x=1$

当 $x<1$ 时 $f''(x)<0$；当 $x>1$ 时 $f''(x)>0$

所以凹区间为 $[1,+\infty)$；凸区间为（$-\infty,1]$

拐点为 $(1,3)$（10分）

五、（6分）设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$，求 $\int_0^1 xf(x)dx$

解：$f'(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x=\frac{2\sin x^2}{x}$（2分）

$$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 f(x)d(\frac{1}{2}x^2)=[\frac{1}{2}x^2f(x)]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2df(x)\text{（4分）}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)dx=-\int_0^1 x\sin x^2dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\sin x^2dx^2=\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\cos 1-1)\text{（6分）}$$

六、（10 分）计算曲线 $y=\sin x(0\le x\le\pi)$ 与 x 轴所围成的图形的面积以及绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：$S=\int_0^\pi \sin xdx=-\cos x\Big|_0^\pi=-(\cos\pi-\cos 0)=2$（5分）

$$V=\pi\int_0^\pi\sin^2 xdx=\pi\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\pi(x-\frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}\text{（10分）}$$

七、（10 分）求下列微分方程的通解：$y''+2y'-3y=3x$

解：对应齐次方程的特征方程为 $r^2+2r-3=0$，解得：$r_1=1,r_2=-3$

所以对应齐次方程的通解为：$Y(x)=C_1e^x+C_2e^{-3x}$（4分）

因为 $\lambda=0$ 不是特征方程的根，故设所给方程的特解为 $y^*=ax+b$

代入原方程得：$-3ax+2a-3b=3x\Rightarrow\begin{cases}-3a=3\\2a-3b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-\frac{2}{3}\end{cases}$（8分）

所以 $y^*=-x-\frac{2}{3}$ 从而原方程的通解为：

$$y=Y(x)+y^*=C_1e^x+C_2e^{-3x}-x-\frac{2}{3}\text{（10分）}$$

八、证明题（4 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=f(0)$.证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明：由积分中值定理知 $\exists\eta\in[\frac{1}{2},1]$ 使得 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=f(\eta)(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f(\eta)$

从而 $2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=f(0)=f(\eta)$（2分）

再由罗尔中值定理知

$\exists\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$（4分）