无锡学院 2024-2025 学年第 1 学期

概率统计（A 卷）参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1．D；2．B；3．D；4．C； 5．B；6．D; 7．A; 8．A; 9. B; 10. A

二、（本题 12 分）

解：（1）① 当 $x<-1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$；

② 当 $-1\le x<0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{-1} 0dt+\int_{-1}^{x}(t+1)dt=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$；

③ 当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{-1} 0dt+\int_{-1}^{0}(t+1)dt+\int_{0}^{x}\frac{3}{2}t^2dt=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}$；

④ 当 $x\ge 1$ 时，$F(x)=1$.

所以，$F(x)$ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}, & -1\le x<0\\ \frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}.$$
-------------4 分

（2）$P\{-\frac{1}{2}<X\le\frac{1}{2}\}=F(\frac{1}{2})-F(-\frac{1}{2})=\frac{7}{16}$.

或 $P\{-\frac{1}{2}<X\le\frac{1}{2}\}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}x^2dx=\frac{7}{16}$. -------------4 分

（3）由 $y=4-2x$，得 $x(y)=2-\frac{1}{2}y$，且 $x'=-\frac{1}{2}$，则

$$f_Y(y)=f_X\left[x(y)\right]\left|x'(y)\right|=\begin{cases}\frac{3}{2}-\frac{1}{4}y \text{或} \frac{6-y}{4}, & 4<y\le 6\\ \frac{3}{4}\left(2-\frac{1}{2}y\right)^2 \text{或} \frac{3}{4}\left(\frac{4-y}{2}\right)^2, & 2<y\le 4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$
-------------4 分

三、（本题 16 分）解：（1）由题意得

$$P\left\{X+Y\geq 2\right\}=P\left\{X=0,Y=2\right\}+P\left\{X=1,Y=1\right\}+P\left\{X=1,Y=2\right\}$$

$$=0.2+0.2+0=0.4;$$ --------------4 分

（2）已知联合分布律，则随机变量 X 的边缘分布律为

X	-1	0	1
P	0.4	0.3	0.3

--------------1 分

随机变量 Y 的边缘分布律为

Y	0	1	2
P	0.3	0.4	0.3

--------------1 分

若要判断 X 与 Y 不独立，则只需找到一个反例即可：

由题意得，$0=P\left\{X=1,Y=2\right\}\neq P\left\{X=1\right\}P\left\{Y=2\right\}=0.9.$

所以，X 与 Y 不独立. --------------2 分

(3)由题知

（X,Y）	$(-1,0)$	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$
$Z=XY$	0	-1	-2	0	0	0	0	1	2
p	0.1	0.2	0.1	0.1	0	0.2	0.1	0.2	0

整理得随机变量 $Z=XY$ 的分布律为

$Z=XY$	-2	-1	0	1
P	0.1	0.2	0.5	0.2

--------------4 分

（4）计算得 $EX=-0.1,EY=1,$，则

$$E\left(X-2Y+3\right)=EX-2EY+3=-0.1-2+3=0.9$$ --------------4 分

四、（本题 10 分）解：设事件 B 表示“校园卡被找回”，事件 A_1,A_2,A_3 分别表示校园卡落在“图书馆、教室、商场”，由题意有

$P(B|A_1)=0.8, P(B|A_2)=0.7, P(B|A_3)=0.1.$

（1）根据全概率公式，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.5\times0.8+0.3\times0.7+0.2\times0.1=0.63;$$ ------------5 分

（2）根据贝叶斯公式，则有

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.3\times0.7}{0.63}=\frac{1}{3}.$$ ------------5 分

五、（本题 12 分）解：由已知，$\mu=20$，$\sigma=20$.

（1）$P\{10<X<35\}=\Phi\left(\frac{35-20}{20}\right)-\Phi\left(\frac{10-20}{20}\right)$

$=\Phi(0.75)-\Phi(-0.5)=\Phi(0.75)-[1-\Phi(0.5)]\quad=0.4649$ --------------4 分

（2）$P\{X>k\}=1-P\{X\le k\}=1-\Phi\left(\frac{k-20}{20}\right)=0.5=\Phi(0)$ --------3 分

故 k=20 --------------1 分

注：直接用对称性也可以。

（3）根据抽样分布定理，得 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ --------------2 分

所以 $P\{\bar{X}\le30\}=\Phi\left(\frac{30-20}{20/\sqrt{16}}\right)=\Phi(2)=0.9772$. --------------2 分

六、（本题 10 分）解： 由已知 $\bar{x}=\frac{1}{6}(3.5+3+2.5+2.5+4+2.5)=3$.

------------1 分

（1）因为 $E(X)=\frac{1}{\lambda}$，令 $E(X)=\bar{X}$，解得 $\lambda=\frac{1}{\bar{X}}$，

故矩估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{X}}$， ------------2 分

代入样本均值得矩计值 $\hat{\lambda}=\frac{1}{3}$.　　　　　　------------1 分

（2）设 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 的一组样本值，则

似然函数：$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{6}f(x_i)=\prod_{i=1}^{6}\lambda e^{-\lambda x_i}=\lambda^6 e^{-\lambda\sum_{i=1}^{6}x_i}$　　　　　　-----------2 分

对数似然函数：$\ln L(\lambda)=6\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{6}x_i$

求导并令其为 0: $\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{6}{\lambda}-\sum_{i=1}^{6}x_i=0$，解得 $\lambda=\frac{6}{\sum_{i=1}^{6}x_i}=\frac{1}{\overline{x}}$，　　------------3 分

代入样本均值，得最大似然估计值 $\hat{\lambda}=\frac{1}{3}$.　　　　　　------------1 分

七、（本题 10 分）

解： (1) $\overline{x}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i=\frac{1}{6}(1208+1196+1187+1213+1218+1202)=1204$，

$s^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{5}(16+64+289+81+196+4)=130$.　　　　-----------2 分

（2）建立假设 $H_0:\sigma^2=100;H_1:\sigma^2\neq 100.$　　　　　　-----------1 分

选取统计量 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$.

拒绝域为 $W=\left\{\chi^2>\chi^2_{0.05}(25)\text{或}\chi^2<\chi^2_{0.95}(25)\right\}$ 查 χ^2 分布临界值表得临界值 $\chi^2_{0.95}(25)=14.611$，$\chi^2_{0.05}(25)=37.652$，则拒绝域为 $W=\left\{\chi^2>37.652\text{或}\chi^2<14.611\right\}$

由样本值得，$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}=\frac{25\times 120}{100}=30$.　　　　　　-----------5 分

因为 $14.611<30<37.652$，不在拒绝域内，故接受原假设，即在显著性水平 $\alpha=0.1$ 下，原件寿命的波动性较以往没有显著变化。　　　　-----------2 分