2023-2024-1 概率统计（B）参考答案及评分标准

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）CBBAB

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 7/15；2. 1/6；3. 0.3；4. 140.8；5. 0.9

三、(本题 10 分)

解：设 A_1 表示事件凶手还在该城市，A_2 表示事件凶手乘车外逃，A_3 表示事件凶手自首归案，

B 表示事件凶手被抓获. 由已知，得 $P(A_1)=0.4$，$P(A_2)=0.5$，$P(A_3)=0.1$，

$P(B|A_1)=0.9$，$P(B|A_2)=0.5$，$P(B|A_3)=1$.

（1） 由全概率公式：$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.71$， ---------5 分

（2） 由贝叶斯公式：$P(A_3|B)=\dfrac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\dfrac{10}{71}\approx 0.14$. --------5 分

四、(本题 16 分)

解：（1） $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2, -1<x<1,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$ ---------4 分

（2） $P\{X>\frac{1}{2}\}=1-P\{X\le\frac{1}{2}\}=1-F(\frac{1}{2})=\frac{7}{16}$ ---------4 分

（3）由 $y=3-x$ 得 $x=3-y$，且 $\dfrac{dx}{dy}=-1$.

则 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}(3-y)^2\cdot|-1|, -1<3-y<1,\\ 0, \qquad 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{2}(3-y)^2, 2<y<4,\\ 0, \qquad 其他,\end{cases}$$ ------4 分

（4） $EX=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{3}{2}x^2dx=0$

$E(X^2)=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{3}{2}x^2dx=\frac{3}{5}$

$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{3}{5}$ ---------4 分

五、（本题 8 分）

解（1） $P(101.1 < X < 114.6) = \Phi(\frac{114.6-108}{3}) - \Phi(\frac{101.1-108}{3})$ ----------2 分

$= \Phi(2.2) - \Phi(-2.3) = \Phi(2.2) + \Phi(2.3) - 1 \ = 0.9754$ ----------2 分

（2） $0.90 = P(X < a) = \Phi(\frac{a-108}{3})$ ，则 $\frac{a-108}{3} = 1.28$ ，所以 $a = 111.84$ ；

----------4 分

六、（本题 8 分）

解 (1) 由规范性 $\sum_k P(X=k)=1$ ，有 $a+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}=1 \Rightarrow a=\frac{6}{11}$ ； ------------2 分

$\sum_k P(Y=-k)=1$ ，有 $b+\frac{b}{4}=1 \Rightarrow b=\frac{4}{5}$. ------------2 分

(2) 因 X,Y 相互独立，则 (X,Y) 的联合分布律可由

$P\{X=x_i, Y=y_j\} = P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$ 求出，如下表

X \ Y	-2	-1
1	6/55	24/55
2	3/55	12/55
3	2/55	8/55

------------4 分

七. （本题 12 分）

解：（1）矩估计：

$$E(X) = -3\times\theta + 1\times(1-3\theta) + 5\times 2\theta = 1+4\theta$$ ------------2 分

$$\bar{x} = \frac{1}{5}\times(1+5+5-3+1) = \frac{9}{5}$$

$$E(X) = \bar{X} \qquad 1+4\theta = \frac{9}{5}$$ ------------2 分

$$\hat{\theta} = \frac{1}{5}$$ ------------2 分

（2）最大似然估计：

$$L(\theta) = P(x_1=1, x_2=5, x_3=5, x_4=-3, x_5=1) = 4\theta^3(1-3\theta)^2$$

$$ln\big(L(\theta)\big) = ln4 + 3ln\theta + 2ln(1-3\theta)$$ ------------3 分

$$\frac{dln\big(L(\theta)\big)}{d\theta} = \frac{3}{\theta} - \frac{6}{1-3\theta} = 0$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{5}$$

------------3 分

八、（本题 8 分）

解：由题意，$X_i \sim N\left(0,2^2\right)$，则 $\overline{X} \sim N(0,1)$. ------------2 分

又由 $Y_i \sim N\left(0,2^2\right)$ 且独立，有 $\frac{Y_i}{2} \sim N(0,1)$ $(i=1,2,3,4)$，则 $\sum_{i=1}^{4}\frac{Y_i^2}{4} \sim \chi^2(4)$. ------------3 分

因此，$\dfrac{\overline{X}}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{4}Y_i^2}{4}\Big/4}} = \dfrac{4\overline{X}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}Y_i^2}} \sim t(4)$，则 C=4，自由度为 4.

------------3 分

九、（本题 8 分）

解：（1）由样本得 $\overline{x}=1267$， $s^2=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(x_i-\overline{x})^2=40/3$. --------2 分

（2） 建立假设为 $H_0:\sigma=2$, $H_1:\sigma\neq 2$ ----------1 分

检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$，

拒绝域为 $\chi^2>\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.05}(3)=7.815$,或 $\chi^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.95}(3)=0.352$

计算得 $\chi^2=40/4=10>7.815$, 落在拒绝域内，故拒绝原假设 H_0， ----------4 分

即不能认为测定值的标准差等于 2^0C. ----------1 分